arXiv:2603.07681v1 [math.DG] 8 Mar 2026

高维渐近平坦流形中面积极小超曲面的叶状结构

SHIHANG HE、YUGUANG SHI 和 HAOBIN YU

Abstract. 我们证明，在维数任意且端任意的渐近平坦（AF）流形中，存在由面积极小超曲面构成的叶状结构。此外，我们还描述了这些超曲面在渐近平坦端无穷远处的性质，并证明这些面积极小超曲面的奇异集位于渐近平坦端之外（参见定理 1.1）。基于具有任意端的渐近平坦流形的正质量定理，我们建立了维数小于或等于 8 的渐近平坦流形中，坐标圆柱内自由边界面积极小超曲面的整体性质（参见定理 1.3）。

Contents

1. 引言 1 1.1. 一般渐近平坦流形中的面积极小超曲面叶状结构 1 1.2. 证明概要 3 1.3. 论文结构 4 2. 定理 1.1 的证明 4 2.1. 圆柱中的普拉托问题 C_a 5 2.2. 渐近平坦流形中面积极小超曲面的密度估计 5 2.3. 渐近平坦流形中面积极小超曲面的曲率估计 11 2.4. 高维面积极小超曲面的叶状结构 14 3. 定理 1.3 的证明 15 参考文献 19

1. Introduction

1.1. 一般渐近平坦流形中面积极小超曲面的叶状结构

In [HS25], 渐近平坦、维数不超过 7 的流形上的面积极小超曲面叶状结构已被构造。这些叶状结构在研究正质量定理（PMT）的有效版本时发挥着重要作用。本文将这一结果推广至高维。具体而言，我们证明如下：

定理 1.1. 设 (M^{n+1}, g) 是一个维数为 $n \geqslant 3$、具有一个阶为 $\tau > \frac{n}{2}$ 的渐近平坦端 E 及若干任意端的渐近平坦流形。假设 $-(M^{n+1}, g)$ 是几何有界的，即其截面曲率有界，且内射半径具有正的统一下界。那么

（1）对每个 $t \in$ **实数集**，存在一个面积极小超曲面 Σ_t，它渐近于坐标超平面 $\{z=t\}$。此外，存在一个紧集 $\mathbf{K}$，它仅依赖于

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主分类号 53C21，次分类号 53C24。S. He、Y. Shi 获得国家重点研发计划项目（编号 2020YFA0712800）和国家自然科学基金（编号 12431003）资助。H. Yu 获得浙江省自然科学基金（编号 LY24A010008）资助。

$(E、\ g|_E)$ 的几何（与 t无关），使得 $(\Sigma_t\backslash\mathbf{K})\cap E$ 可由某个图表示， $i.e.$

$$(\Sigma_t\backslash\mathbf{K})\cap E=\{(y,u_t(y)):y\in\mathbf{R}^n\backslash\mathbf{D}\}$$

对于每个 $t\in$**实数集**，其中 $\mathbf{D}$ 是**实数集**^{n} 的一个紧集，且 $u_t\in C^\infty($**实数集**$^n\backslash\mathbf{D})$。特别地， Σ_t 在 $\mathbf{K}$之外是光滑的。

(2) 存在一个常数 C，它仅依赖于 k 和 (M,g)，使得对于任意 $k\geqslant 1,\epsilon>0$，图函数满足 $|u_t-t|+|y|^k|D_ku_t(y)|\leqslant C|y|^{1-\tau-k+\epsilon}$，当 $|y|\to+\infty$时。

(3) 存在一个常数 $T>0$，使得任何满足$|t|>T$ 的面积极小超曲面 Σ_t 都是光滑的，并且任何满足上述条件的面积极小超曲面都是唯一的。此外， Σ_T上方（或 Σ_{-T}下方）的区域可以由 $\{\Sigma_t\}$光滑地分叶。

此外，若 M 是具有若干任意端且不满足几何有界条件的渐近平坦流形，则对于某个充分大的 T_0，结论 $(1)-(3)$ 对具有 $|t|>T_0$ 的 t 成立。

注1.2。

- 对每个 t 都存在面积极小超曲面 Σ_t，这已由 *Schoen-Yau* 在 [SY79] 中证明；
- 设 $(M^{n+1}、\ g)$ 如定理 *1.1* 所述，且 Σ_t' 是一个任意的面积极小超曲面，它渐近于坐标超平面 $\{z=t\}$，其中 $|t|\leqslant T$。那么 Σ_t' 可能含有奇异集 $\mathcal{S}$。然而，我们能够证明 $\mathcal{S}$ 包含在 M^{n+1} 的某个固定紧集 $\mathbf{K}$ 中（见下文推论 *2.12*），且 Σ_t' 具有与 *(2)* 相同的衰减性质。更一般地，若 M 是具有若干任意端但不满足几何有界条件的渐近平坦流形，设 Σ_t' 是 M 中一个渐近于超平面 $\{z=t\}$ 的面积极小超曲面，我们可以证明 $\mathcal{S}\subset\mathbf{K}\cup(M\backslash E)$，其中$\mathbf{K}\subset E$ 是一个紧集。特别地，若 $n=7$，根据几何测度论，我们知道对于任意紧集 $\mathbf{L}\subset M^{n+1}$， $\mathcal{S}\cap\mathbf{L}$ 由有限多个点组成。

将常平均曲率（CMC）叶状结构的进展与本文构造的面积极小叶状结构进行比较，将会很有意义。在这两种情形下，渐近区域中都存在适用于所有维数的光滑叶状结构。对于维数为 $n\geqslant 3$ 且质量为正的渐近平坦流形，Eichmair-Koerber [EK24] 基于Lyapunov-Schmidt约化，证明了存在由稳定CMC球面构成的 $(M,\ g)$ 渐近叶状结构。另请参见Eichmair-Metzger [EM13] 关于正质量渐近Schwarzschild流形中等周叶状分解的研究。

在 [HSY25], 中，我们证明，在维数小于或等于7且标量曲率非负的渐近平坦流形中，某类面积极小超曲面在一列穷尽性坐标圆柱 [1] 内的存在性和性质，很大程度上取决于该渐近平坦流形的质量（参见 [HSY25]中的定理 1.3）。这种现象可视为该渐近平坦流形正质量定理（PMT）的一种有效形式，借此可直接得到正质量定理。本文将继续研究高维渐近平坦流形 $(M^{n+1},\ g)$，其中可能具有任意端。

定理 1.3。设 (M^{n+1},g) 是一个具有任意端及一个指定的渐近平坦端 E 的渐近平坦流形，其渐近阶为 $\tau>max\{\frac{n}{2},n-2\}$ $(n+1\leqslant 8)$。假设 M^{n+1} 上的标量曲率$R_g\geqslant 0$，且 $m(M,g,E)\neq 0$。

此外，假设 (M^{n+1},g) 属于以下两种情形之一：

(1) M 只有渐近平坦端。*(2)* M 除 E外可以有任意端。此外，存在 E 的两个邻域U_1 和 U_2，满足

$$E\subset U_1\subset U_2,$$

[1] 渐近平坦端中半径为 R 的坐标圆柱由 $C_R=\{(x_1,\ x_2,\ldots,x_n,\ z)\in$**实数集**$^{n+1},\ x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2<R^2\}$.

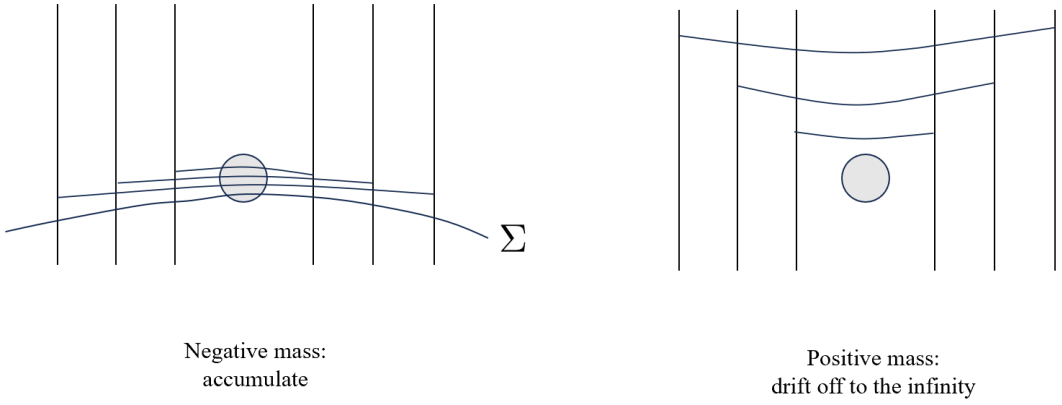

FIGURE 1. 定理 1.3 的示意图：竖直线段表示坐标圆柱，水平曲线表示具有自由边界的极小化超曲面。

使得 $U_i \backslash \overline{E}$ 是紧的，并且 ∂U_i 对于 $i = 1$、2是光滑的，以及

$$R_g > 0 \quad in\ U_2 \backslash U_1.$$

接下来会出现以下情况之一：

- 存在 $R_0 > 0$，使得对于所有 $R > R_0$，都不存在能在 $\mathcal{F}_R$ 中使体积达到最小的元素 Σ_R（详细定义见 (3.1)）；
- 对于任意趋于无穷大的序列 $\{R_i\}$，若存在一个超曲面序列 Σ_{R_i}，使其在 $\mathcal{F}_{R_i}$ 中使体积达到最小，则 Σ_{R_i} 会漂向无穷远；也就是说，对于任意紧集 $\Omega \subset M$，当 i 足够大时，$\Sigma_{R_i} \cap \Omega = \varnothing$。

注1.4。
若 (M^{n+1}, g) 仅具有渐近平坦端（即定理 *1.3* 中的情形 *(1)*），则定理 *1.3* 可由 [CCE16] 关于渐近阶为 $\tau > \frac{1}{2}$ 的渐近平坦端的定理*1.6*（当 $n = 2$ 时），以及 [Car16] 关于渐近*Schwarzschild*流形的定理*2*（当 $3 \leqslant n \leqslant 6$ 时）推出。

定理 1.3 反映了具有非负标量曲率和任意端的渐近平坦流形中质量的某些整体效应。我们想要强调的是，即使所有端都是渐近平坦的，渐近平坦流形正质量定理的一种有效形式（如定理 1.3 所述）在维数大于 7 时似乎仍是新的。极小超曲面序列定量刻画了质量的正性。对于 (M^{n+1}, g) 具有任意端的情形，定理 1.3 (2) 可视为自由边界极小化超曲面的屏蔽现象。这可以与 [LUY24]证明的正质量定理的屏蔽版本相比较。

1.2. 证明概要。 我们关注渐近平坦流形中的面积极小边界。遵循 [HSY25], ，我们在 (M^{n+1}, g)的渐近平坦端中选取一列穷竭坐标柱体 $C_{r_i} \subset C_{r_{i+1}}$，并在 C_{r_i} 中以位于 C_{r_i} 内的 $(n-1)$ 维坐标球面作为边界数据求解普拉托问题。这里 r_i 表示 C_{r_i} 的坐标半径，且 $r_i \to \infty$ 为 $i \to \infty$。注意，我们的普拉托问题的解是一个面积极小超曲面，它构成一个Caccioppoli集的边界。然后，通过与 C_{r_i}中由 $(n-1)$维坐标球面所围成的坐标球进行比较，我们观察到，当 i 充分大时，我们的普拉托问题之解的体积密度在 M^{n+1} 的某个固定紧集之外可以任意接近于1（见下文命题 2.7）。因此，借助几何测度论中的Allard 正则性定理，我们推出定理 1.1中 Σ_t 的奇异集包含在一个固定的紧

M^{n+1} 的集之内（见下文推论 2.12）。渐近平坦端的叶状结构由 [HSY25]中的类似论证得出。

为证明定理 1.3，我们采用反证法。假设存在一个面积极小边界序列 Σ_i，使其在自由边界意义下满足 $\Sigma_i \cap K \neq \varnothing$，其中某个固定紧集为 K。那么 Σ_i 收敛到一个强稳定面积极小超曲面。利用 Liu13、CCE16] 的方法，我们可以构造一个经过 p 的强稳定面积极小边界 Σ_p，其中任意 $p \in E$ 满足 $|z(p)| \gg 1$。特别地，$\Sigma_p \cap E$ 渐近于某个坐标超平面。结合 [HSY26] 中的定理 1.1 和定理 1.1，我们证明渐近平坦端 E 的质量 $(M,\ g)$ 等于 0，由此得到矛盾。

1.3. **论文结构**。在第 2 节中，我们介绍面积极小超曲面的一些关键定义和初步估计，并在本节末证明定理 1.1。第 3 节专门用于证明定理 1.3。

2. Proof of Theorem 1.1

在本节中，我们考虑渐近平坦（AF）流形 (M^{n+1}, g) 中坐标圆柱 C_r 内面积极小超曲面的一些基本估计，该流形的维数为$n+1$。利用这些估计，我们在本节末给出定理 1.1 的证明。我们从渐近平坦流形的如下定义开始。

定义 2.1. 称 $(n+1)$维黎曼流形 (M^{n+1}, g) 的一个端 E 对某个 $\tau > \frac{n-1}{2}$ 为阶 τ 的渐近平坦（*AF*）端，如果 E 与**实数集**$^n \backslash B_1^{n+1}(O)$微分同胚，并且 E 中的度量 g 满足

$$|g_{ij} - \delta_{ij}| + |x||\partial g_{ij}| + |x|^2|\partial^2 g_{ij}| = O(|x|^{-\tau}),$$

以及 $R_g \in L^1(E)$。(M, g, E) 的质量定义为

$$m_{ADM}(M, g, E) = \frac{1}{2n\omega_n} \lim_{\rho \to \infty} \int_{S^n(\rho)} (\partial_i g_{ij} - \partial_j g_{ii}) \nu^j d\sigma_x$$

在上述情形中，我们总是称 (M, g) 为渐近平坦流形：(M, g) 具有一个指定的渐近平坦端 E 以及若干任意端。在全文中，我们总是假设黎曼流形 (M^{n+1}, g) 的渐近平坦端对某个$\frac{n-1}{2} < \tau \leqslant n-1$具有阶 τ。

——

让我们汇集将在整个讨论中使用的记号：

- $B_r^{n+1}(p)$（或简记为 $B_r(p)$）表示坐标球 $\{x \in$ **实数集**$^{n+1}:\ |x-p| < r\}$；
- $\mathcal{B}_r^{n+1}(p)$ 表示黎曼流形M^{n+1}中以 p 为中心、半径为 r 的测地球；• $(y,\ z),\ y \in$ **实数集**$^n,\ z \in$ **实数集** 表示渐近平坦端 $E \cong$ **实数集**$^{n+1} \backslash B_1^{n+1}(O)$中的点；• S_t 表示 E中的坐标 z-超平面 $\{(y,\ z):\ z = t\}$；• 在渐近平坦端 E内，超曲面 $(\partial B_R^{n+1}(O) \cap S_0) \times$ **实数集** 将 E 划分为两个不同的区域：内部部分和外部部分。设 C_r 为内部部分，我们称之为半径为 r的圆柱。

为了更好地阐明这些想法，在本节中，我们假设渐近平坦流形 M^{n+1} 只有一个端，并将在本节末尾说明如何用完全相同的想法把这些结果推广到具有任意端的渐近平坦流形；另见注2.13。

本节其余部分安排如下。在第 2.1 节中，我们证明存在一个边界为 $S_t \cap \partial C_a$ 的普拉托问题解 $\Sigma_{a,\ t}$。在第 2.2 节中，我们建立 $\Sigma_{a,\ t}$ 在某个紧集 $B_{a_0}(O)$之外的密度估计；见命题 2.7。在第 2.3 节中，我们首先证明 $\Sigma_{a,\ t}$ 在某个紧集之外的光滑性；见推论 2.10。然后，我们建立 $\Sigma_{a,\ t}$ 的曲率估计；见引理 2.11。最后，在第 2.4 节中，我们证明定理 1.1。

2.1. **圆柱 C_a中的普拉托问题**。

我们旨在圆柱 C_a 中求解具有给定边界的普拉托问题

$$S_{a,t} := \partial C_a \cap S_t.$$

我们用几何测度论的语言重新表述这个问题。

命题 2.2. 设$\Omega_{a,t}$是一个*Caccioppoli*集，满足$\Omega_{a,t} \cap (E \backslash C_a) = \{z \leqslant t\} \cap (E \backslash C_a)$。那么，当 a 充分大时，存在一个*Caccioppoli*集$E_{a,t}$，使得

$$P(E_{a,t}, C_a) \leqslant P(F, C_a) \tag{2.1}$$

对于所有满足 $F = \Omega_{a,t}$ 且属于 $E \backslash C_a$的*Caccioppoli*集 F均成立。这里， $P(F, C_a)$ 表示 F 在 C_a中的周长。

此外，设$\Sigma_{a,t} = \partial^* E_{a,t} \cap C_a$，其中$\partial^* E_{a,t}$ 是$E_{a,t}$的约化边界。那么$\Sigma_{a,t}$ 还具有重数一整电流结构和重数一可求长变分结构，并满足$\Sigma_{a,t} \cap \partial C_a = S_{a,t}$ 以及$\partial[|\Sigma_{a,t}|] = [|S_{a,t}|]$。

证明。$E_{a,t}$ 的存在性直接由 [Giu84, 定理 1.20]得出。$\Sigma_{a,t}$ 的流和变分链结构是 De Giorgi结构定理的推论（例如参见 [Sim83, 定理 14.3]）。为证明$\Sigma_{a,t} \cap \partial C_a = S_{a,t}$，注意到由 E 的渐近平坦性可知，只要 a 足够大， $\partial C_s (s \geqslant a)$ 就构成一个平均凸叶状结构。因此，这可由极大值原理得出。最后，对于 $\omega \in \Omega_c^{n-1}(C_a)$，有$\partial[|\Sigma_{a,t}|](\omega) = [|\Sigma_{a,t}|](d\omega) = \partial[|E_{a,t}|](d\omega) = 0$，这意味着 spt$(\partial[|\Sigma_{a,t}|]) \subset E \backslash C_a$。结合$\Sigma_{a,t} \cap \partial C_a = S_t \cap C_a = S_{a,t}$ 以及常值定理 [Sim83, 定理 26.27]，可得$\partial[|\Sigma_{a,t}|] = [|S_{a,t}|]$。□

2.2. **渐近平坦流形中面积极小超曲面的密度估计**。

在本小节中，我们推导渐近平坦流形中面积极小超曲面的密度估计。首先，我们将在局部和整体情形下分别建立极小超曲面的单调性不等式。

1.局部不等式

选取某个固定的 $r_0 > 1$ （回忆一下，“1”是定义 2.1 中出现的数），使得下式成立

- 在 $B_{r_0}^{n+1}(O)$之外， （M^{n+1}的内射半径至少为 1，且截面曲率满足 $|sec| \leqslant k_0$。

引理 2.3。 设 Σ^n 是 （M^{n+1}中的面积极小超曲面， g)。那么对于满足 $\mathcal{B}_1^{n+1}(\xi) \subset M^{n+1} \backslash B_{r_0}^{n+1}(O)$的所有 $\xi \in M$，有

$$e^{k_0 \rho_2} \rho_2^{-n} \mathcal{H}^n(\mathcal{B}_{\rho_2}^{n+1}(\xi) \cap \Sigma) \geqslant e^{k_0 \rho_1} \rho_1^{-n} \mathcal{H}^n(\mathcal{B}_{\rho_1}^{n+1}(\xi) \cap \Sigma) \tag{2.2}$$

对于任意 $0 < \rho_1 < \rho_2 < 1$。这里 $\mathcal{B}_\rho^{n+1}(\xi)$ 表示 （M^{n+1}中的测地球， g)。

证明。 令 r 表示 （M^{n+1}中 x 到 ξ 的距离， g)。于是

$$div_\Sigma(\nabla^M r^2) = \sum_{i=1}^{n} 2r \operatorname{Hess}^M r(e_i, e_i) + 2\langle \nabla^M r, e_i \rangle^2. \tag{2.3}$$

由Hessian比较定理（参见 [CM11，第234]页），我们知道在 $\mathcal{B}_1^{n+1}(\xi)$中，对任意满足 $|V| = 1$ 的向量 V，都有

$$|\operatorname{Hess}^M r(V, V) - \frac{1}{r}(1 - \langle V, \nabla^M r \rangle^2)| \leqslant \sqrt{k_0}.$$

由此可得

$$|div_\Sigma(\nabla^M r^2) - 2n| \leqslant 2n\sqrt{k_0} r.$$

证明的其余部分遵循标准论证。 □

2. 全局不等式

为了获得面积极小超曲面的正则性，我们还需要体积密度的全局单调性公式。设 $\xi = (\xi^1, \cdots, \xi^{n+1})$ 是渐近平坦端 E 上满足 $|\xi| > R_0 \geqslant r_0$ 的一点。设 $\{x^i\}(1 \leqslant i \leqslant n+1)$ 为渐近平坦端 E 上的坐标函数，并设 f^i 是 $x^i - \xi^i$ 的一个光滑延拓，满足

$$f^i = \begin{cases} x^i - \xi^i, & \text{for } x \in E \backslash B_{R_0}^{n+1}(O), \\ O(|\xi|), & \text{for } x \in M^{n+1} \backslash (E \backslash B_{R_0}^{n+1}(O)). \end{cases}$$

我们定义

$$r^2 = (f^1)^2 + \cdots + (f^{n+1})^2.$$

在 $M^{n+1} \backslash (E \backslash B_{R_0}^{n+1}(O))$ 中对 f 作适当延拓，可确保 $M^{n+1} \backslash \{\xi\}$ 上有 $r > 0$。我们可以固定某个 R_0，使得 $E \backslash (B_{R_0}^{n+1}(O) \cup \{\xi\})$ 中有 $|\nabla_M r| > 0$。给定 t，我们用 $\Sigma_{a,\ t}$ 表示坐标圆柱 C_a 中满足 $\partial \Sigma_{a,\ t} = S_t \cap C_a$ 的普拉托问题的解，其中 $\partial \Sigma_a$ 由命题 2.2 给出。为简便起见，令

$$\theta_\xi(\rho, a) = \frac{\mathcal{H}^n(\Sigma_{a,t} \cap B_\rho^{n+1}(\xi))}{\omega_n \rho^n},$$

其中 $B_\rho^{n+1}(\xi) := \{x \in M^{n+1} : |x - \xi| < \rho\}$ 表示以 ξ 为中心、半径为 ρ的坐标球。

我们先给出以下单调性公式:

引理 2.4. 对于任意满足 $(B_{\rho_2}^{n+1}(\xi) \backslash B_{\rho_1}^{n+1}(\xi)) \subset M \backslash B_{R_0}^{n+1}(O)$ 和 $B_{\rho_2}^{n+1}(\xi) \cap$的 $0 < \rho_1 < \rho_2$ $\partial \Sigma_{a,t} = \varnothing$，有

$$\theta_\xi(\rho_2, a) - \theta_\xi(\rho_1, a) \geqslant \int_{\rho_1}^{\rho_2} s^{-n-1} \int_{\Sigma_{a,t} \cap B_s^{n+1}(\xi)} (u - n|v|) ds - \rho_2^{-n} \int_{\Sigma_{a,t} \cap B_{\rho_2}^{n+1}(\xi)} |v|, \tag{2.4}$$

其中 u, v 满足

$$u(x) = \begin{cases} O(|x|^{-1-\tau})|\xi| + O(|x|^{-\tau}), & for\ x \in M \backslash B_{R_0}^{n+1}(O), \\ O(1)|\xi|, & for\ x \in B_{R_0}^{n+1}(O). \end{cases}$$

and

$$v(x) = \begin{cases} O(|x|^{-\tau}), & for\ x \in M \backslash B_{R_0}^{n+1}(O), \\ O(1), & for\ x \in B_{R_0}^{n+1}(O). \end{cases}$$

证明. 论证与 [Sim83] 中定理 17.6 的论证几乎相同。为完整起见，我们在此给出证明。令 $\{\phi_k\}$ 为一列光滑且单调递减的函数，定义如下:

$$\phi_k(t) = \begin{cases} 1, & \text{for } t \leqslant \dfrac{k-1}{k}, \\ 0, & \text{for } t \geqslant 1. \end{cases}$$

对于任意 $r \leqslant \rho$，我们定义

$$\gamma(r) := \phi_k(\frac{r}{\rho}), \quad I(\rho) = \int \phi_k(\frac{r}{\rho}) d\mu,$$

and

$$J(\rho) = \int \phi_k(\frac{r}{\rho}) |(\nabla_M r)^\perp|^2 d\mu,$$

w这里 μ 是与$\Sigma_{a,\ t}$相关联的拉东测度。也就是说，对于任意 $\mathcal{H}^n$可测的 A,

$$\mu(A) := \mathcal{H}^n(\Sigma_{a,t} \cap A).$$

通过直接计算可得

$$r\gamma'(r) = -\rho\frac{\partial}{\partial\rho}[\phi_k(\frac{r}{\rho})], \quad I'(\rho) = -\rho^{-1}\int r\gamma'(r)d\mu,$$

and

$$J'(\rho) = -\rho^{-1}\int r\gamma'(r)|(\nabla_M r)^{\perp}|^2 d\mu.$$

Set

$$Y := \frac{1}{2}\nabla_M f$$

并令 $\{e_i\}(1 \leqslant i \leqslant n+1)$ 为 M^{n+1} 的标准正交标架，其中 $\{e_i\}$、$1 \leqslant i \leqslant n$ 为 Σ_a 的切向量，t，则

$$div_{\Sigma_{a,t}} Y = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\nabla_M^2 f(e_i, e_i) = n + u, \tag{2.5}$$

其中

$$u(x) = \begin{cases} O(|x|^{-1-\tau})|\xi| + O(|x|^{-\tau}), & \text{for } x \in M\backslash B_{R_0}^{n+1}(O)\ , \\ O(1)|\xi|, & \text{for } x \in B_{R_0}^{n+1}(O)\ . \end{cases}$$

令 $X := \gamma(r)Y$，则

$$\begin{aligned} div_{\Sigma_{a,t}} X &= n\gamma(r) + u\gamma(r) + \gamma'(r)g(\nabla_{\Sigma_{a,t}} r, Y) \\ &= n\gamma(r) + \gamma'(r)g(\nabla_\Sigma r, r\nabla_M r) + u\gamma(r) \\ &= n\gamma(r) + r\gamma'(r)(|\nabla_M r|^2 - (e_{n+1}(r))^2) + u\gamma(r) \\ &= n\gamma(r) + r\gamma'(r) - r\gamma'(r)(e_{n+1}(r))^2 + r\gamma'(r)v + u\gamma(r), \end{aligned}$$

其中 v 满足

$$v(x) = \begin{cases} O(|x|^{-\tau}), & \text{for } x \in M\backslash B_{R_0}^{n+1}(O), \\ O(1), & \text{for } x \in B_{R_0}^{n+1}(O). \end{cases}$$

注意到 $\Sigma_{a,\ t}$ 是面积极小的，因此有

$$\int div_{\Sigma_{a,t}} X d\mu = 0.$$

因此,

$$\int (n\gamma(r) + r\gamma'(r))d\mu = \int \gamma'(r)r(e_{n+1}(r))^2 d\mu - \int [r\gamma'(r)v + u\gamma(r)]d\mu.$$

或者等价地,

$$\frac{d}{d\rho}(\rho^{-n}I(\rho)) = \rho^{-n}J'(\rho) + \rho^{-n}L'(\rho) + \rho^{-n-1}\int u\gamma(r)d\mu. \tag{2.6}$$

Here

$$L(\rho) = -\int \phi_k(\frac{r}{\rho})v d\mu.$$

对 (2.6) 在 $[\rho_1, \rho_2]$ 上积分，并令 $k \to \infty$，得到

$$\begin{aligned} &\rho_2^{-n}\mathcal{H}^n(\Sigma_{a,t} \cap B_{\rho_2}^{n+1}(\xi)) - \rho_1^{-n}\mathcal{H}^n(\Sigma_{a,t} \cap B_{\rho_1}^{n+1}(\xi)) \\ =&\rho_2^{-n}\int_{\Sigma_{a,t}\cap B_{\rho_2}^{n+1}(\xi)} \left(|(\nabla_M r)^{\perp}|^2 - v\right) - \rho_1^{-n}\int_{\Sigma_{a,t}\cap B_{\rho_1}^{n+1}(\xi)} \left(|(\nabla_M r)^{\perp}|^2 - v\right) \\ &+n\int_{\rho_1}^{\rho_2} s^{-1-n}\left(\int_{\Sigma_{a,t}\cap B_s^{n+1}(\xi)} |(\nabla_M r)^{\perp}|^2 - v\right) ds + \int_{\rho_1}^{\rho_2} s^{-1-n}(\int_{\Sigma_{a,t}\cap B_s^{n+1}(\xi)} u) ds. \end{aligned} \tag{2.7}$$

根据余面积公式，对于任意 C^0 函数 φ，我们有

$$\frac{d}{ds}\int_{\Sigma_{a,t}\cap B_s^{n+1}(\xi)}\varphi|\nabla_{\Sigma_{a,t}}r| = \int_{\Sigma_{a,t}\cap\partial B_s^{n+1}(\xi)}\varphi, \text{ for a.e. } s\in[\rho_1,\rho_2].$$

取 $\varphi = (|(\nabla_M r)^\perp|^2 - v)|\nabla_{\Sigma_{a,t}}r|^{-1}$。然后在上面的等式两边乘以 s^{-n}，并在 $[\rho_1,\rho_2]$ 上积分，得到

$$\begin{aligned}&\int_{\rho_1}^{\rho_2} s^{-n}\int_{\Sigma_{a,t}\cap\partial B_s^{n+1}(\xi)}(|(\nabla_M r)^\perp|^2 - v)|\nabla_{\Sigma_{a,t}}r|^{-1}ds\\ =&\rho_2^{-n}\int_{\Sigma_{a,t}\cap B_{\rho_2}^{n+1}(\xi)}(|(\nabla_M r)^\perp|^2 - v) - \rho_1^{-n}\int_{\Sigma_{a,t}\cap B_{\rho_1}^{n+1}(\xi)}(|(\nabla_M r)^\perp|^2 - v)\\ &+ n\int_{\rho_1}^{\rho_2} s^{-1-n}\int_{\Sigma_{a,t}\cap B_s^{n+1}(\xi)}(|(\nabla_M r)^\perp|^2 - v)ds.\end{aligned}\tag{2.8}$$

另一方面，令

$$y(s) := \int_{\Sigma_{a,t}\cap B_s^{n+1}(\xi))}|v|d\mu,$$

那么由余面积公式，对于几乎处处的 $s\in[\rho_1,\rho_2]$，有

$$y'(s) = \int_{\Sigma_{a,t}\cap\partial B_s^{n+1}(\xi)}|v||\nabla_{\Sigma_{a,t}}r|^{-1}d\mu.$$

由此可得

$$\begin{aligned}\int_{\rho_1}^{\rho_2} s^{-n}\int_{\Sigma_{a,t}\cap\partial B_s^{n+1}(\xi)}|v||\nabla_{\Sigma_{a,t}}r|^{-1}ds &= \int_{\rho_1}^{\rho_2} s^{-n}y'(s)ds\\ &\leqslant \rho_2^{-n}y(\rho_2) + n\int_{\rho_1}^{\rho_2} s^{-n-1}\int_{\Sigma_{a,t}\cap B_s^{n+1}(\xi)}|v|ds.\end{aligned}\tag{2.9}$$

将 (2.8) 和 (2.9) 代入 (2.7)，得到 (2.4)。 □

在下面的引理 2.5 和引理 2.6 中，我们将建立必要的单调性，以便在 $\Sigma_{a,t}$ 中获得密度估计。然后，我们将在本小节中证明主要结果命题 2.7。

引理 2.5。 （$B_{\rho_0}^{n+1}(O)$之外的单调性）

给定 $\delta\in(0,1)$，存在 $\rho_0 = \rho_0(M,g,\delta)\geqslant R_0$，使得对于任意满足 $|\xi|\geqslant\rho_0$ 的 $\xi\in\Sigma_{a,t}$，以及任意满足 $\delta\leqslant\rho_1<\rho_2$ 的 ρ_1,ρ_2，若 $(B_{\rho_2}^{n+1}(\xi)\backslash B_{\rho_1}^{n+1}(\xi))\subset M\backslash B_{\rho_0}^{n+1}(O)$ 且 $B_{\rho_2}^{n+1}(\xi)\cap\partial\Sigma_{a,t}=\varnothing$，则

$$\theta_\xi(\rho_2,a) - \theta_\xi(\rho_1,a)\geqslant -\delta.\tag{2.10}$$

证明。我们引入函数 Φ，定义如下：

$$\Phi(x) = \begin{cases}|x|^{-\frac{3}{2}}, & \text{for } x\in M\backslash B_{R_0}^{n+1}(O),\\ 1, & \text{for } x\in B_{R_0}^{n+1}(O).\end{cases}$$

注意到 $\tau > \frac{n}{2}\geqslant\frac{3}{2}$。根据引理 2.4 证明中 u 和 v 的定义，我们可以看出，存在某个一致的 C，使得

$$|u| + n|v|\leqslant C|\xi|\Phi.\tag{2.11}$$

我们考虑以下两种情形。

情形 1： $B_{\rho_1}^{n+1}(\xi)\subset B_{\rho_2}^{n+1}(\xi)\subset M\backslash B_{\rho_0}^{n+1}(O)$。

利用 $v = O(x^{-\tau})$ 在 $B_{\rho_0}^{n+1}(O)$ 外部的性质以及 $\Sigma_{a,\ t}$ 的极小性，我们得到

$$\rho_2^{-n}\int_{\Sigma_{a,t}\cap B_{\rho_2}^{n+1}(\xi)}|v|d\mu\leqslant\rho_0^{-\tau}\rho_2^{-n}\mathcal{H}^n(\Sigma_{a,t}\cap B_{\rho_2}^{n+1}(\xi))\leqslant C\rho_0^{-\tau}\leqslant\frac{\delta}{2}\tag{2.12}$$

如果我们选择 $\rho_0 \geqslant C^2\delta^{-1}$。

断言： 存在某个统一的 C，仅依赖于 $(M^{n+1},\ g)$，使得

$$\int_{\Sigma_{a,t}\cap B_s^{n+1}(\xi)} \Phi = \int_{\Sigma_{a,t}\cap B_s^{n+1}(\xi)} |x|^{-\frac{3}{2}} \leqslant C|\xi|^{-\frac{3}{2}} s^n. \tag{2.13}$$

我们只需考虑 $|\xi| \leqslant 2s$ 的情形，否则立即有

$$\int_{\Sigma_{a,t}\cap B_s^{n+1}(\xi)} |x|^{-\frac{3}{2}} \leqslant \mathcal{H}^n(\Sigma_{a,t}\cap B_s^{n+1}(\xi))(\frac{|\xi|}{2})^{-\frac{3}{2}} \leqslant C|\xi|^{-\frac{3}{2}} s^n. \tag{2.14}$$

由于 $\Sigma_{a,\ t}$ 是面积极小的，且 $(M^{n+1},\ g)$ 是渐近平坦的，因此有

$$\int_{\Sigma_{a,t}\cap B_s^{n+1}(\xi)} |x|^{-\frac{3}{2}} \leqslant C\int_{\Sigma_{a,t}\cap B_s^{n+1}(\xi)} |x|^{-\frac{3}{2}} d\bar{\mu}, \tag{2.15}$$

其中 $d\bar{\mu}$ 是 $\Sigma_{a,\ t}$ 在 $(\mathbf{R}^{n+1},\ \delta_{ij})$ 中的面积元。由 [EK23] 中的引理65可得 e

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma_{a,t}\cap B_s^{n+1}(\xi)} |x|^{-\frac{3}{2}} d\bar{\mu} \leqslant & \int_{\Sigma_{a,t}\cap (B^{n+1}_{|\xi|+s}(O)\setminus B^{n+1}_{|\xi|-s}(O))} |x|^{-\frac{3}{2}} d\bar{\mu} \\ \leqslant & C(|\xi|+s)^{-\frac{3}{2}} + C((|\xi|+s)^{n-\frac{3}{2}} + (|\xi|-s)^{n-\frac{3}{2}}) \\ \leqslant & C|\xi|^{-\frac{3}{2}} s^n.\end{aligned} \tag{2.16}$$

注意 $|\xi| \geqslant \rho_0 + \rho_2$ 和 $\rho_1 \geqslant \delta$。通过选取 $\rho_0 \geqslant C\delta^{-3}$，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\rho_1}^{\rho_2} s^{-1-n}(\int_{\Sigma_{a,t}\cap B_s^{n+1}(\xi)} \Phi) ds \leqslant & C|\xi|^{-\frac{3}{2}} \int_{\rho_1}^{\rho_2} s^{-1} ds \\ \leqslant & C|\xi|^{-\frac{3}{2}} (\ln\rho_2 - \ln\rho_1) \\ \leqslant & C|\xi|^{-\frac{3}{2}} (\ln|\xi| - \ln\delta) \\ < & C^{-1}|\xi|^{-1}\frac{\delta}{2}.\end{aligned} \tag{2.17}$$

将 (2.11)、(2.12) 和 (2.17) 代入 (2.4)，即可得到所需的估计。

情形 2： $B_{\rho_0}^{n+1}(O) \subset B_{\rho_1}^{n+1}(\xi) \subset B_{\rho_2}^{n+1}(\xi)$.

在此情形下，$\rho_2 > \rho_1 \geqslant \rho_0 + |\xi|$。我们有

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma_{a,t}\cap B_s^{n+1}(\xi)} \Phi = & \int_{\Sigma_{a,t}\cap B_s^{n+1}(\xi)\cap B_{R_0}^{n+1}(O)} \Phi + \int_{\Sigma_{a,t}\cap (B_s^{n+1}(\xi)\setminus B_{R_0}^{n+1}(O))} \Phi \\ \leqslant & \mathcal{H}^n(\Sigma_{a,t}\cap B_{R_0}^{n+1}(O)) + \int_{\Sigma_{a,t}\cap (B_s^{n+1}(\xi)\setminus B_{R_0}^{n+1}(O))} |x|^{-\frac{3}{2}} \\ \leqslant & C(R_0^n + (|\xi|+s)^{n-\frac{3}{2}}),\end{aligned} \tag{2.18}$$

其中，我们在最后一个不等式中使用了引理65 in [EK23]。由此可得

$$\begin{aligned}\rho_2^{-n}\int_{\Sigma_{a,t}\cap B_{\rho_2}^{n+1}(\xi))} |v| d\mu \leqslant & C\rho_2^{-n}\int_{\Sigma_{a,t}\cap B_s^{n+1}(\xi)} \Phi \\ \leqslant & C\rho_2^{-n}(R_0^n + (|\xi|+\rho_2)^{n-\frac{3}{2}}) \\ \leqslant & \frac{\delta}{2}\end{aligned} \tag{2.19}$$

这是由我们对 ρ_0的选取所决定的。直接计算表明

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} s^{-1-n}(|\xi|+s)^{n-\frac{3}{2}} ds \leqslant C\int_{\rho_1}^{\rho_2} s^{-\frac{5}{2}} ds \leqslant C\rho_1^{-\frac{3}{2}} < C^{-1}|\xi|^{-1}\frac{\delta}{2}. \tag{2.20}$$

将 (2.11) 和 (2.18)–(2.20) 代入 (2.4)，得到 (2.10)。 □

接下来，证明在紧集 $B_{\rho_0}^{n+1}(O)$ 上几乎单调。

引理 2.6。 （穿过紧集的几乎单调性）设 δ、ρ_0 如引理 *2.5* 中所述。则存在仅依赖于 δ 的 $L > 2$，使得对于任意 $\xi \in \Sigma_{a,\ t} \backslash B_{L\rho_0}^{n+1}(O)$ 以及任意满足 $\delta \leqslant \rho_1 < \rho_2$ 的 ρ_1、ρ_2，若 $B_{\rho_1}^{n+1}(\xi) \cap B_{\rho_0}^{n+1}(O) = \varnothing$、$B_{\rho_0}^{n+1}(O) \subset B_{\rho_2}^{n+1}(\xi)$ 且 $B_{\rho_2}^{n+1}(\xi) \cap \partial\Sigma_{a,\ t} = \varnothing$，则

$$\theta_\xi(\rho_1, a) \leqslant (1+\delta)\theta_\xi(\rho_2, a) + 3\delta$$

证明。根据我们的假设，$|\xi| - \rho_0 \geqslant \rho_1$ 且 $|\xi| + \rho_0 \leqslant \rho_2$。将 $[\rho_1,\ \rho_2]$ 分为 $[\rho_1,\ |\xi| - \rho_0] \cup [|\xi| - \rho_0,\ |\xi| + \rho_0] \cup [|\xi| + \rho_0,\ \rho_2]$。于是

$$B_{\rho_1}^{n+1}(\xi) \subset B_{|\xi|-\rho_0}^{n+1}(\xi) \subset M \backslash B_{\rho_0}^{n+1}(O) \ \text{ and } \ B_{\rho_0}^{n+1}(O) \subset B_{|\xi|+\rho_0}^{n+1}(\xi) \subset B_{\rho_2}^{n+1}(\xi).$$

因此，应用引理 2.5 可得

$$\theta_\xi(\rho_1, a) \leqslant \theta_\xi(|\xi| - \rho_0, a) + \delta \quad \text{and} \quad \theta_\xi(|\xi| + \rho_0, a) \leqslant \theta_\xi(\rho_2, a) + \delta. \tag{2.21}$$

注意到

(2.22)

$$\theta_\xi(|\xi| - \rho_0, a) \leqslant \theta_\xi(|\xi| + \rho_0, a)\frac{(|\xi| + \rho_0)^n}{(|\xi| - \rho_0)^n} \leqslant \theta_\xi(|\xi| + \rho_0, a)(\frac{L+1}{L-1})^n \leqslant (1+\delta)\theta_\xi(|\xi| + \rho_0, a)$$

当 L 充分大时。结合 (2.21) 和 (2.22)，即可得到所需的估计。 □

结合引理 2.5 和引理 2.6，我们现在可以证明本小节中关于密度估计的主要命题。

命题 2.7. 设 $\delta \in (0、\ \frac{1}{100})$、$L$ 和 ρ_0 如上所述。则存在 $a_0 > L\rho_0 > 0$，使得对于任意 $a > a_0$ 和 $\xi \in \Sigma_{a,\ t} \backslash B_{L\rho_0}^{n+1}(O)$，若满足 $d(\xi、\ \partial\Sigma_{a,\ t}) \geqslant \frac{a}{2}$，则有 -

$$\theta_\xi(\rho, a) \leqslant 1 + 20\delta \tag{2.23}$$

对于任意满足 $B_\rho^{n+1}(\xi) \cap \partial\Sigma_{a,\ t} = \varnothing$ 的 $\rho > 0$。

证明。我们简要概述证明过程。我们将论证分为两种情形：$\rho > \delta$ 和 $\rho \leqslant \delta$。情形 $\rho > \delta$ 又进一步分为两个子情形。第一种情形是 $|\xi| < \epsilon a$，其中 ϵ 是由 δ确定的一个固定小常数。在这种情形下，我们应用引理 2.5 和引理 2.6，证明密度 $\theta_\xi(\rho,\ a)$ 与 $\theta_\xi((1-\epsilon)a,\ a)$可比。后者又可以与 $\theta_O(a,\ a) = 1 + o(1)$相比较。第二种情形是 $|\xi| > \epsilon a$。在这种情形下，可以通过放大缩小论证检测到 ξ，从而完成情形 $\rho > \delta$的证明。对于情形 $\rho \leqslant \delta$，我们应用引理 2.3 中的局部单调性不等式，将问题化归为情形 $\rho > \delta$。

我们先来看 $\rho > \delta$ 情形。我们采用反证法证明存在 $a_0 > L\rho_0$，使得

$$\theta_\xi(\rho, a) \leqslant 1 + 8\delta \quad \text{for} \quad \rho \geqslant \delta. \tag{2.24}$$

每当 $a > a_0$ 时。假设结论不成立，那么存在一个由 $a_i \to \infty$ 构成的序列，且 ξ_i 满足 $|\xi_i| > L\rho_0$ 并且 ρ_i 满足 $\delta \leqslant \rho_i$，使得

$$\theta_{\xi_i}(\rho_i, a_i) > 1 + 8\delta. \tag{2.25}$$

我们考虑以下两种情形：

情形 1： 存在一个子序列（仍记为 i），使得 $L\rho_0 < |\xi_i| < \epsilon a_i$，其中 ε 由 $1 + \delta = (1-\varepsilon)^{-n}$ 给出。在此情形下，选取 $\tilde{\rho}_i = (1-\epsilon)a_i$；不失一般性，我们可以假设 $\tilde{\rho}_i \geqslant \rho_i$。然后由引理 2.5 和引理 2.6，

$$\theta_{\xi_i}(\tilde{\rho}_i, a_i) \geqslant (1+\delta)^{-1}\theta_{\xi_i}(\rho_i, a_i) - 3\delta \geqslant 1 + 2\delta. \tag{2.26}$$

由于$\Sigma_{a_i,\ t}$ 是带有$\partial\Sigma_{a_i,\ t}=\partial D_{a_i,\ t}$的渐近平坦流形中的面积极小超曲面，我们有

$$\begin{aligned}\lim_{i\to\infty}\theta_{\xi_i}(\tilde{\rho}_i,a_i)&=\lim_{i\to\infty}\frac{\mathcal{H}^n(B^{n+1}_{\tilde{\rho}_i}(\xi_i)\cap\Sigma_{a_i,t})}{\omega_n\tilde{\rho}_i^n}\\&\leqslant\lim_{i\to\infty}\frac{\mathcal{H}^n(B^{n+1}_{(1-\varepsilon)a_i}(\xi_i)\cap\Sigma_{a_i,t})}{\omega_n a_i^{n-1}}\frac{1}{(1-\varepsilon)^n}\\&\leqslant 1+\delta,\end{aligned}\tag{2.27}$$

这与（2.26）不相容。

Cas式 2： $\epsilon a_i<|\xi_i|$。在这种情况下，根据引理 2.5，我们可以选择某个 $\tilde{\rho}_i\geqslant\varepsilon a_i$ 使得 at

$$\theta_{\xi_i}(\tilde{\rho}_i,a_i)\geqslant 1+2\delta.\tag{2.28}$$

我们采用缩小论证。现在，$\{(M^{n+1}\backslash B_1^{n+1}(O),\ a_i^{-2}g)\}$ 在 C^∞_{loc} 意义下收敛于 $(\mathbf{R}^{n+1}\backslash\{O\},\ \delta_{ij})$，其中 $i\to\infty$。与此同时，$\{(a_i^{-1}\Sigma_{a_i,\ t},\ a_i^{-1}\xi_i)\}$ 收敛于一个面积极小超曲面 $(\bar{\Sigma},\ \bar{\xi})$，且 $\partial\bar{\Sigma}=\partial B_1^{n+1}(O)\cap S_0$，在通常意义和 varifold意义下均成立；参见 [Sim83，¯定理 34.5]。因此，Σ 必定是该超平面的一个部分。条件 $|\xi_i|>\epsilon a_i$ 意味着_ ¯ $|\xi|\geqslant\epsilon>0$，这意味着 $\xi\in\Sigma$ 是一个不同于原点 O的点。注意，_Σ 在 ξ 处的密度为 1，$i.e.$

$$\frac{\mathcal{H}^n(B_s^{n+1}(\bar{\xi})\cap\bar{\Sigma})}{\omega_n s^n}=1\quad\text{for}\ \ 0<s<1-|\bar{\xi}|,$$

这与（2.28）相矛盾，因为在$a_i^{-1}\Sigma_{a_i,\ t}\longrightarrow\bar{\Sigma}$ 中有**实数集**$^{n+1}\backslash\{O\}$上的局部变分收敛。

接下来，我们用引理 2.3 处理情形 $\rho\leqslant\delta$。必要时取一个更大的 ρ_0，我们有 $0<\rho\leqslant\delta$

$$\mathcal{H}^n(B_\rho^{n+1}(\xi)\cap\Sigma_{a,t})\leqslant(1+\delta)\mathcal{H}^n(\mathcal{B}_\rho^{n+1}(\xi)\cap\Sigma_{a,t})\leqslant(1+\delta)^2\mathcal{H}^n(B_\rho^{n+1}(\xi)\cap\Sigma_{a,t}),\tag{2.29}$$

只要 $|\xi|>L\rho_0$。这里 $\mathcal{B}_\rho^{n+1}(\xi)$ 表示 $(M^{n+1},\ g)$中的测地球。然后，利用引理 2.3，我们得到

$$\begin{aligned}\theta_\xi(\rho,a)=&\frac{\mathcal{H}^n(B_\rho^{n+1}(\xi)\cap\Sigma_{a,t})}{\omega_n\rho^n}\\\leqslant&(1+\delta)\frac{\mathcal{H}^n(\mathcal{B}_\rho^{n+1}(\xi)\cap\Sigma_{a,t})}{\omega_n\rho^n}\\\leqslant&(1+\delta)^2\frac{\mathcal{H}^n(\mathcal{B}_\delta^{n+1}(\xi)\cap\Sigma_{a,t})}{\omega_n\delta^n}\\\leqslant&(1+\delta)^3\frac{\mathcal{H}^n(B_\delta^{n+1}(\xi)\cap\Sigma_{a,t})}{\omega_n\delta^n}.\end{aligned}\tag{2.30}$$

To将（2.24）与（2.30）结合，即得所需估计。因此，证明完成。 . □

2.3. **渐近平坦流形中面积极小超曲面的曲率估计**。

2.3.1. 在紧集之外的$\Sigma_{a,\ t}$ 的光滑性。

接下来，我们证明$\Sigma_{a,\ t}$ 在某个紧集之外的光滑性。为此，基于上文建立的命题 2.7，我们证明在将$\Sigma_{a,\ t}$ 嵌入高维欧几里得空间 $\mathbf{R}^{n+k}$后，点 ξ 处的 M^{n+1} 满足密度估计。这里的估计完全是局部的，可能依赖于 ξ；应用 Allard 正则性定理后，即可得到$\Sigma_{a,\ t}$ 在 ξ 的某个邻域内的正则性。

回顾一下， $B_\rho^{n+1}(x)$ 表示渐近平坦端 $E \subset M^{n+1}$中的坐标球，而 $\mathcal{B}_\rho^{n+1}(x)$表示 (M^{n+1}, g)中的测地球。由于我们的论证还涉及 $\mathbf{R}^{n+k}$，我们沿用相同的记号约定，用 $B_\rho^{n+k}(x)$ 表示$\mathbf{R}^{n+k}$中的坐标球。读者可以根据上标区分 $B_\rho^{n+k}(x)$ 和 $B_\rho^{n+1}(x)$：前者定义在$\mathbf{R}^{n+k}$中，而后者定义在 M^{n+1}中。

给定 $\delta \in (0, \frac{1}{100})$，并令 L, ρ_0, a_0如命题 2.7 中所述。固定一点 $\xi \in \Sigma_{a,t} \backslash B_{L\rho_0}^{n+1}(O)$，且满足 $d(\xi, \partial\Sigma_{a,t}) \geqslant \frac{a}{2}$，则存在一个等距嵌入

$$i : (B_1^{n+1}(\xi), g) \hookrightarrow \mathbf{R}^{n+k}, \text{ for some } k = k(n) > 1.$$

由纳什嵌入定理 [Nas56，定理 3]。取 θ_0 充分小（可能依赖于 ξ），我们有

$$i^{-1}(B_\rho^{n+k}(\xi)) \subset \mathcal{B}_{(1+\delta)\rho}^{n+1}(\xi) \subset B_{(1+2\delta)\rho}^{n+1}(\xi)$$

只要 $\rho < \theta_0$。这里第一个包含关系成立，是因为 M 在包含映射 i 下于 **实数集**$^{n+k}$ 中的像在 ξ附近充分接近切空间 $T_\xi M \subset$**实数集**$^{n+k}$，而第二个则由 E 的渐近平坦性以及 $|\xi| > \rho_0$得到。因此，我们得到

$$\mathcal{H}^n(\Sigma_{a,t} \cap B_\rho^{n+k}(\xi)) \leqslant \mathcal{H}^n(\Sigma_{a,t} \cap B_{\rho(1+2\delta)}^{n+1}(\xi)) \tag{2.31}$$

对任意 $\rho < \theta_0$。

引理 2.8. 存在某个 c_n，仅依赖于 n，使得

$$\frac{\mathcal{H}^n(B_\rho^{n+k}(\xi) \cap \Sigma_{a,t})}{\omega_n \rho^n} \leqslant 1 + c_n\delta \quad \textit{for } \rho \quad \textit{small enough.} \tag{2.32}$$

证明。 由 (2.31) 和命题 2.7 可得

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{H}^n(\Sigma_{a,t} \cap B_\rho^{n+k}(\xi))}{\omega_n\rho^n} &\leqslant \frac{\mathcal{H}^n(\Sigma_{a,t} \cap B_{(1+2\delta)\rho}^{n+1}(\xi))}{\omega_n\rho^n} \leqslant (1+2\delta)^n \frac{\mathcal{H}^n(\Sigma_{a,t} \cap B_{(1+2\delta)\rho}^{n+1}(\xi))}{\omega_n(1+2\delta)^n\rho^n} \\ &\leqslant (1+2\delta)^n(1+20\delta) \leqslant 1 + c_n\delta. \end{aligned} \tag{2.33}$$

□

引理 2.9. 设 $\Omega \subset (M^{n+1}, g)$ 是一个有界域，具有等距嵌入 $i : \Omega \longrightarrow$ **实数集**$^{n+k}$。设 $\Sigma \subset M^{n+1}$ 是一个平稳的 n-变体，$\mathbf{H}$ 是 $\Sigma \cap \Omega$ 在 **实数集**$^{n+k}$中的广义平均曲率，$\mathbf{A}$ 是等距嵌入 $i : \Omega \longrightarrow$**实数集**$^{n+k}$的第二基本形式。那么，对于 $\mathcal{H}^n$-几乎处处的 $x \in \Sigma$，有

$$\sup_{\Omega\cap\Sigma} |\mathbf{H}| \leqslant n \sup_{\Omega} |\mathbf{A}|.$$

证明。令 $X : \Sigma \rightarrow$**实数集**$^{n+k}$ 为定义在 Σ 上且支集紧包含于 Ω 中的任意 C^1-向量场，则

$$X = X^\perp + X^\top,$$

其中 $X^\perp$和 $X^\top$ 分别表示 X相对于 (M^{n+1}, g) 的法向分量和切向分量。由于 Σ 在 (M^{n+1}, g)中是面积极小的，我们有

$$\int div_\Sigma X^\top d\mathcal{H}^n = 0.$$

L且 $\{\tau_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ 是近似切空间 $T_x\Sigma$的一组任意正交归一基。 n

$$div_\Sigma X^\perp = \sum_{i=1}^n \langle \tau_i, \nabla_{\tau_i} X^\perp \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{A}(\tau_i, \tau_i), X^\perp \rangle$$

and

$$\int div_{\Sigma} X d\mathcal{H}^n = \int \langle \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{A}(\tau_i, \tau_i), X \rangle d\mathcal{H}^n.$$

因此,

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}(\tau_i, \tau_i),$$

这意味着

$$\sup_{B_\rho^{n+k}(x)\cap\Sigma} |\mathbf{H}| \leqslant n \sup_{B_\rho^{n+k}(x)\cap M^{n+1}} |\mathbf{A}|.$$

□

对于给定的 δ，根据引理 2.9，我们可以将 ρ 取得足够小，使得

$$\left(\rho^{p-n} \int_{B_\rho^{n+k}(\xi)\cap\Sigma_{a,t}} |\mathbf{H}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \delta$$

对于 $p > n$。结合密度估计引理 2.8，并对 $\Sigma_{a,t} \cap B_\rho^{n+k}(\xi) \subset M \subset$ **实数集**$^{n+k}$应用 Allard 正则性定理，我们得出:

推论 2.10. 沿用命题 *2.7* 中的记号。那么对于所有 $a > a_0$, $\Sigma_{a,t}$ 在任意满足 $d(\xi, \partial\Sigma_{a,t}) \geqslant \frac{a}{2}$ 的点 $\xi \in \Sigma_{a,t} \backslash B_{L\rho_0}^{n+1}(O)$ 处都是光滑的。

2.3.2. 紧集之外 $\Sigma_{a,t}$ 的曲率估计。

在本小节余下部分，我们使用标准的点选取论证和密度估计命题 2.7，推导以下曲率估计。

引理 2.11. 给定 $t \in$**实数集**，存在一致的常数 R_1 和 R_2，使得对于任意$a > R_1$ 以及任意点 $x \in \Sigma_{a,t} \backslash B_{R_2}^{n+1}(O)$ 满足 $d(x, \partial\Sigma_{a,t}) \geqslant \frac{3a}{4}$，有 $|A|(x) \leqslant \frac{C}{|x|}$，其中常数 C 仅依赖于 (M^{n+1}, g)。回顾一下，$|A|$ 表示reg Σ^n 在 (M^{n+1}, g)中的第二基本形式。

证明。假设该引理不成立，则存在一个 $a_k \to \infty$ 序列和 $x_k \in \Sigma_{a_k,t}$满足 $|x_k| \to \infty$ 且 $d(x_k, \partial\Sigma_{a_k,t}) \geqslant \frac{3a_k}{4}$，使得

$$\max_{x\in\Sigma_{a_k,t}\cap B^{n+1}_{\frac{|x_k|}{2}}(x_k)} (\frac{|x_k|}{2} - |x - x_k|)|A|(x) := c_k \to \infty.$$

假设最大值在 y_k 处取得，并令 $r_k = \frac{|x_k|}{2} - (|y_k - x_k|)$。通过变换 Φ（由$x = y_k + \frac{r_k}{c_k}\tilde{x}$给出），将 $B_{r_k}^{n+1}(y_k)$ 中的渐近平坦度量 g_{ij} 重新缩放为度量 $\tilde{g}_{ij}^k$，即

$$\tilde{g}_{ij}^k = \Phi^* g_{ij}.$$

于是，$\tilde{g}_{ij}^k$ 定义在 $B_{c_k}^{n+1}(\tilde{O})$ 上，并由渐近平坦性知，它在 C^2 意义下局部一致收敛于**实数集**$^{n+1}$ 上的欧氏度量 δ_{ij}，因为 $|x_k| \to \infty$。缩放后的超曲面$\Phi^*(\Sigma_{a_k,t} \cap B_{r_k}^{n+1}(y_k))$ 的第二基本形式满足 $|\tilde{A}| \leqslant 1$，其中 $|\tilde{A}|(\tilde{O}) = 1$。因此，经过选取一个子序列，我们有$\Phi^*(\Sigma_{a_k,t} \cap B_{r_k}^{n+1}(y_k))$ 收敛到一个光滑的面积极小超曲面 Σ。

On 另一方面，由命题 2.7，也存在一个 $\delta_k \to 0$ 的序列，使得

$$\frac{\mathcal{H}^n(B_\rho^{n+1}(y_k) \cap \Sigma_{a_k,t})}{\omega_n \rho^n} \leqslant 1 + 20\delta_k, \text{ for } \rho > 0 \text{ with } B_\rho^{n+1}(y_k) \cap \partial\Sigma_{a_k,t} = \varnothing. \tag{2.34}$$

由此可得

$$\frac{\mathcal{H}^n(B_R^{n+1}(\tilde{O})\cap\tilde{\Sigma})}{\omega_n R^n}\equiv 1,\ \text{for any}\ \ R>0.$$

˜根据欧几里得空间中极小超曲面的单调性公式， Σ必为˜ ˜超平面，这与 $|A|_{\tilde{\Sigma}}(O)=1$矛盾。□

2.4. **高维面积极小超曲面的叶状结构**。

设 $\Sigma_{r,t}$ 由命题 2.2 给出。现在我们使用 Schoen 和 Yau[SY81] 构造的悬链面型障碍物，对 $\Sigma_{r,t}$进行良好控制。

对于 $\Lambda>1$ 和 $1<\beta<\tau-1$，考虑在**实数集**$^n\backslash B_1^n(O)$ 中由 $f(r)$ 定义的旋转对称函数

$$f(r)=\Lambda\int_r^{+\infty}(s^{2\beta+2}-\Lambda^2)^{-\frac{1}{2}}ds,\ \ \text{where}\ \ r>\Lambda. \tag{2.35}$$

将 $f+L$ 的图记为 graph$_{f+L}$，其中 $L\in$ **实数集**。根据 [HSY25 的计算，即方程 (2.6)], ，当 $\Lambda>$Λ$_0$时，graph$_{f+L}$ 相对于向上法向量具有正平均曲率，其中 Λ_0 是一个仅取决于 $(E,g|_E)$几何的常数。类似地，graph$_{-f+L}$相对于向下法向量具有正平均曲率。

按照 [HSY25，引理 2.5], 中的论证，对于任意给定的 t, $\Sigma_{r,\ t}\backslash C_\Lambda$ 都位于图$_{\pm f+t}$之间，其中任意 $r\gg 1$均如此。由于 $(M^{n+1},\ g)$ 具有有界几何，且 $\Sigma_{r,\ t}\cap\partial C_\Lambda$ 位于两个超平面 $S_{t\pm C\Lambda}$之间，应用极小超曲面的单调性公式可得，$\Sigma_{r,\ t}\cap C_\Lambda$ 被两个超平面 $S_{t\pm C_1\Lambda}$ 夹在中间，其中C_1为某个统一常数。

有了这一点，我们便能够构造 $(M,\ g)$中的面积极小超曲面。取一个满足 $r_i\to\infty$的 r_i 序列，则对于某个固定的 t, $\Sigma_{r_i,\ t}$ 与一个固定紧集相交，该紧集仅依赖于 t。对于任意有界域 $W\subset\subset M$，$\Sigma_{r,\ t}$的极小化性质蕴含 $\mathcal{H}^n(\Sigma_{r,\ t}\cap W)\leqslant\mathcal{H}^n(\partial^* W)$。因此，根据 Sim83 的定理 [, 定理 27.3], $\Sigma_{r_i,\ t}$ 在流意义下收敛到一个面积极小超曲面 Σ_t，当 $r_i\to+\infty$ 时如此；必要时取一个子序列即可。此外，由于我们有良好的第二基本形式估计（引理 2.11），该收敛在 $B_{R_2}(O)$ 之外也是局部光滑的，其中 R_2 如引理 2.11 所述。总结如下：

推论 2.12。 设 Σ_t 为上述面积极小超曲面。那么，对于某个统一的 C_1 ， Σ_t 位于$S_{t\pm C_1\Lambda}$ 之间，且在圆柱 C_Λ之外可由图$_{\pm f+t}$ 界定。此外， Σ_t 在固定紧集$\mathbf{K}=B_{R_2}(O)$之外是光滑的。

注2.13。 若 $(M^{n+1},\ g)$ 还有除 E之外的端，则命题 *2.2* 中的 *Plateau* 解未必对所有 t都存在。事实上，当 $|t|$ 较小时，$\Sigma_{a,\ t}$ 可能由于缺乏几何控制，沿任意一个端漂移至无穷远。我们对上述论证作出修改，以证明当 $|t|$ 足够大时，这种情况不会发生。不失一般性，以下假设$t>0$ 。

在命题 *2.2* 中，我们在渐近平坦端 $E\cong$**实数集**$^{n+1}\backslash B_1^{n+1}(O)$上，以满足$\partial\Sigma_{r,\ t}=S_{r,\ t}$ 的内部障碍 $\partial E\cong\partial B_1^{n+1}(O)$ 求解普拉托问题$\Sigma_{r,\ t}$ 。那么，$\Sigma_{r,\ t}$与 E 内部的交集是极小的。若$\Sigma_{r,\ t}\cap\partial E=\varnothing$，则$\Sigma_{r,\ t}$ 是一个极小超曲面，前述论证无需修改即可适用。

若 $\Sigma_{r,\ t}\cap\partial E\neq\varnothing$，由于 $\Sigma_{r,\ t}\cap\partial C_\Lambda$ 位于 $S_{t\pm C\Lambda}$之间，单调性公式给出

$$\mathcal{H}^n(\Sigma_{r,t}\cap\{z\leqslant t-C\Lambda\})\geqslant\eta(t-C\Lambda)+C_1, \tag{2.36}$$

其中 η 和 C_1 仅依赖于 $(E、\ g|_E)$的几何；例如参见 [HSY25, 引理 B.1]。另一方面，比较论证给出

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^n(\Sigma_{r,t}\cap C_\Lambda) &\leqslant \mathcal{H}^n(\partial C_\Lambda\cap\{t-C\Lambda\leqslant z\leqslant t+C\Lambda\})+\mathcal{H}^n(S_{t+C\Lambda}\cap C_\Lambda)\\ &\leqslant 2C\Lambda\cdot n\omega_n\Lambda^{n-1}+\omega_n\Lambda^n+O(\Lambda^{n-1})\\ &=((1+2nC)\omega_n+o(1))\Lambda^n.\end{aligned}\tag{2.37}$$

结合(2.36) 和(2.37)，我们得出 $\Sigma_{r,t}\cap\partial E=\varnothing$ ，条件是 $t>C_2$，其中 C_2是仅依赖于 $(E、\ g|_E)$的常数。

现在我们准备证明

命题 2.14。设 Σ_t 是如上所述的面积极小超曲面。那么， Σ_t 在无穷远处的切锥是正则且唯一的。

证明。由于根据引理 2.11， Σ_t 具有局部体积界，且 $+A|(x)\leqslant\frac{C}{|x|}$ 满足 $|x|>R_2$ ，对于任意满足 $r_k\to\infty$的序列 $\{r_k\}$ ，必要时取一个子序列后， $r_k^{-1}\Sigma_t$ 在**实数集**$^{n+1}$ 中局部光滑收敛到某个稳定极小锥Γ 。由于 Σ_t 位于两个超平面之间，极限 Γ 必定支撑在超平面 $\{x_{n+1}=0\}$上。因此，常值定理[Sim83, 定理 26.27] 意味着，在流意义下， Γ 等于某个整数 m 乘以 $m[|\{x_{n+1}=0\}|]$ 。 Σ_t 的面积估计表明 Γ 的重数为一。□

应用 [Sim85] 中的定理 5.7（另见第 269–270 页的讨论）， Σ_t 可以表示为某个紧集外的图 $\{(y,\ u_t(y):\ y\in$ **实数集**$^n\}$ ，其中 $|u_t(y)-t|\to 0$ 作为 $|y|\to\infty$。我们以给出定理 1.1 的证明作为本小节的结束。

定理 *1.1* 的证明。首先讨论 M 只有一个端的情形。根据前面的论证，对于给定的 $t\in$**实数集**，存在一个与超平面 S_t 渐近的面积极小超曲面 Σ_t 。图函数 u_t 的渐近估计可由 [EK23] 中的命题 9 得到。我们可以采用 [HSY25] 中的相同论证，证明 Σ_t 是与超平面 S_t 渐近的唯一面积极小超曲面（当 $|t|\gg 1$ 时），并且这些 Σ_t 构成一个叶状结构（详见 [HSY25] 中的命题 2.13 和命题 2.14）。

在流形 M 具有任意端且几何有界的情形下，对于每个 $t\in\mathbf{R}$ 以及足够大的 r，我们可以运用通常的比较论证，找到一个极小边界 $\Sigma_{r,t}\subset C_r$ ，使得 $\partial\Sigma_{r,t}=S_{r,t}$ 且边界体积最小。此外，对于每个渐近平坦端 E， $\Sigma_{r,t}\backslash E$ 都包含在 M^{n+1}的某个固定紧集中。然后，运用推论 2.12 之前所述的悬链面型障碍论证，我们仍可得出结论：$\Sigma_{r_i,t}$ 位于 $|t|>2C\Lambda$时的 $S_{t\pm C\Lambda}$ 之间。接着，我们可以按照类似的论证得到所需结果。

最后，我们考虑流形 M 具有任意端且不一定具有有界几何的情形。在这种情况下， Σ_t 可能仅在 $|t|$ 足够大时存在；参见注2.13。运用与上述相同的论证，我们得到一个光滑叶状结构 $\{\Sigma_t\}_{|t|\geqslant T_0}$。□

3. Proof of Theorem 1.3

本节给出定理 1.3 的证明。由于外围流形 $(M^{n+1},\ g)$可能具有任意端，我们需要在圆柱中引入一系列带有内部障碍的自由边界问题，以有效弥补任意端所导致的极小曲面缺乏紧性的问题。

回顾 C_R 是半径为 R的坐标圆柱。设

$$\partial E\subset V_1\subset V_2\subset\dots$$

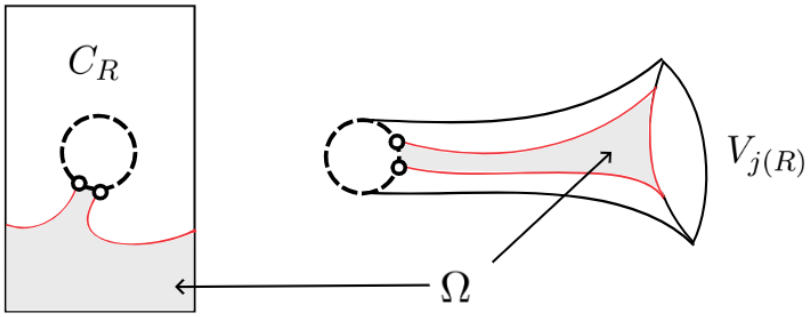

FIGURE 2. 此图展示了由 (3.1) 定义的带内部障碍的自由边界问题。左侧矩形表示圆柱C_R的一部分；灰色区域表示 Ω；红线表示 Σ，而 ∂V_{R_i} 是位于任意端中的内部障碍。

为 $M\backslash E$ 的任意紧致穷竭，并设 $j:\ \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{Z}_+$ 为任意非递减指标函数，满足

$$\lim_{R\to\infty} j(R)=\infty.$$

我们定义（见图 2）

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_R:=\{\Sigma=\partial\Omega\backslash\partial C_R:\Omega\subset C_R\cup V_{j(R)}\text{ is a Caccioppoli set that satisfies}\\ C_R\cap\{z\leqslant a\}\subset\Omega\text{ and }\Omega\cap\{z\geqslant b\}=\varnothing\text{ for some }-\infty<a\leqslant b<\infty\}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

假设存在 $M\backslash E$的一个紧致穷竭序列 $\partial E\subset V_1\subset V_2\subset\ldots$，以及一个序列 $\{R_i\}$，其中 $R_i\to\infty$ 作为 $i\to\infty$，使得相应的带内部障碍的自由边界极小化超曲面 $\Sigma_i:=\Sigma_{R_i}=\partial\Omega_i\backslash\partial C_{R_i}$ 存在，并且对某个紧致集 K满足 $\Sigma_i\cap K\neq\varnothing$。根据 [Mag12，推论 12.27]，$\Sigma_i$ 子序列收敛到一个极限面积极小边界 Σ。

引理 3.1。 $\Sigma\cap E$ 在无穷远处渐近于一个与 S_0 平行的超平面（按欧几里得意义）。

证明。对于 $A\subset M$，我们将 A 的高度 $Z(A)$ 定义为

$$Z(A)=\begin{cases}\sup\limits_{p\in A\cap E}z(p)-\inf\limits_{p\in A\cap E}z(p), & A\cap E\neq\varnothing,\\ 0, & A\cap E=\varnothing.\end{cases}\tag{3.2}$$

根据 [HSY25 引理 3.2]，$Z(\Sigma_i)=o(R_i)$ 中的同样论证。

现在，我们可以像第 2 节中那样论证，以证明自由边界解 Σ_i 具有与第 2 节中考察的 Plateau解类似的性质。事实上，第 2 节中的论证利用了 Plateau 解$\Sigma_{a,\ t}$的两个关键性质，而自由边界解 Σ_i也具备这些性质：

- $\mathcal{H}^n(\Sigma_{a_i,\ t}\cap E)\leqslant(1+o(1))\omega_n a_i^n$如 $a_i\to\infty$。
- 缩小极限 $a_i^{-1}(\Sigma_{a_i,\ t}\cap E)$ 是一个去心单位球 $(B_1^{n+1}(O)\cap S_0)\backslash\{O\}$。

因此，根据命题 2.7 中的论证，我们可以证明，对于给定的 $\delta>0$，存在某个依赖于 $(M^{n+1}$、$g)$和 δ的 c_δ，使得对于任意满足 $|\xi|\geqslant c_\delta$和 $d(\xi,\ \partial\Sigma_i)\geqslant\frac{R_i}{2}$的 $\xi\in\Sigma_i\cap E$，都有

$$\frac{\mathcal{H}^n(B_\rho^{n+1}(\xi)\cap\Sigma_i)}{\omega_n\rho^n}\leqslant 1+20\delta$$

当 i 足够大时，对于任意满足 $B_\rho^{n+1}(\xi)\cap\partial\Sigma_i\cap(\partial C_{R_i})=\varnothing$ 的 ρ。然后，我们使用与引理 2.11 中相同的论证，证明存在一个常数 C，使得

$$|A|(x)\leqslant\frac{C}{|x|}\text{ for }x\in\Sigma\cap E\text{ with }|x|\gg 1. \tag{3.3}$$

因此，我们可以应用 [EK23命题 8] 证明中的论证，从而得出：存在某个旋转 $S\in SO(n+1)$以及常数 $a\in$ **实数集**，使得在某个紧集之外，$S(\Sigma\cap(E\backslash B_{r_o}^{n+1}(O)))=\{(y,u(y))：\ y\in$ **实数集**$^n\}$，其中 $u(y)$ 对任意 $\varepsilon>0$满足 $|u(y)-a|=O(|y|^{1-\tau+\varepsilon})$。维数假设 $3\leqslant n+1\leqslant 7$ 在 [EK23] 中仅用于通过Schoen–Simon 曲率估计 [SS81]获得 $\Sigma\cap E$ 的曲率估计。在我们的设定中，尽管允许任意维数，该曲率估计已在(3.3)中建立。因此，他们的论证可逐字适用。注意 $Z(\Sigma_i)=o(R_i)$。于是旋转 S 必为恒等旋转。我们完成证明。□

请注意，Σ 也可能具有任意端，甚至包含孤立奇异集 $\mathcal{S}$，当$n=7$时。我们回顾强稳定性这一概念。Schoen 最初在证明维数不超过 7 的渐近平坦流形的正质量定理时，通过非紧致极小超曲面进行降维，引入了这一概念 [Sch89], ，之后[Car16、EK23、HSY25、HSY26]对其进行了研究。具体而言，我们有

定义 *3.2.* 设 (N^n,g) 为一个包含渐近平坦端E的流形（不一定完备）。若局部利普希茨函数 ϕ 的支集包含于 E的某个邻域 $\mathcal{U}$中，且 $\mathcal{U}\Delta E$是紧致的，并满足

$\lim_{|x|\to\infty,\ x\in E}\phi=1$且 $\phi-1\in W^1_{-q}{}^2(\mathcal{U})$，其中 $q>\frac{n-2}{2}$即

$$\int_{\mathcal{U}}|\phi-1|^2r^{2q-n}d\mu_g+\int_{\mathcal{U}}|\nabla\phi|^2r^{2(q+1)-n}d\mu_g<\infty,$$

其中 r 表示 $\mathcal{U}$ 上的正函数，$r=|x|$ 表示 E上的正函数。

定义 3.3。设 Σ 是 M^{n+1} 中的一个面积极小超曲面，它在 M^{n+1} 的渐近平坦端 E 处渐近于一个坐标超平面，其中 $\Sigma\cap E$ 是 Σ的一个渐近平坦端。若对于任意满足下述条件的函数 $\phi\in\mathrm{Lip}_{loc}(\Sigma\backslash\mathcal{S})$，$\Sigma$ 都称为强稳定的：该函数或者具有紧支撑，或者按照定义 *3.2* 的意义渐近于常数，

$$\int_{\Sigma\backslash\mathcal{S}}|\nabla\phi|^2-(Ric(\nu,\nu)+|A|^2)\phi^2\geqslant 0. \tag{3.4}$$

这里，ν是 $(M^{n+1}$中 Σ^n 的单位法向量，$g)$。

现在我们采用 [HSY25]中的策略来证明定理 1.3，以建立强稳定超曲面 Σ_p 的存在性；对于任意满足 $|z(p)|\gg 1$的$p\in E$，该超曲面都经过 p。新意在于应用以下定理3.4，帮助我们证明所有这些 Σ_p 都是全测地的，且与**实数集**^{n}等距。

定理3.4 ([HSY26]中的定理 1.1)。设 (M^{n+1},g) 是具有任意端的渐近平坦流形，其渐近平坦端 E 的渐近阶为 $\tau>n-2$，且 $R_g\geqslant 0$。设 $\Sigma^n\subset M^{n+1}$ 是 M^{n+1} 中一个带有孤立奇异集 $\mathcal{S}$ 的面积极小边界。假设 Σ 强稳定，并且满足以下条件之一：

(a) $n+1\leqslant 8$
(b) $\Sigma\backslash\mathcal{S}$ 是自旋的，且 $\mathcal{S}$ 中每一点处的切锥都有孤立奇点。

(1) 若 $\Sigma\backslash E$ 紧致，则有 $\mathcal{S}=\varnothing$，且 Σ 与 **实数集**^{n} 等距，其中 $R_g=|A|^2=Ric(\nu,\nu)=0$ 沿着 Σ。

(2) 如果存在 U_1、$U_2\subset M$，且满足 $E\subset U_1\subset U_2$，使得 $U_i\backslash E$ 是紧的（$i=1,2$），并且 $R_g>0$ 位于 $U_2\backslash U_1$上，那么 $\Sigma\subset U_1$，且 *(1)* 中的相同结论成立。

定理 *1.3* 的证明。我们采用反证法。假设结论不成立，那么根据 (3.1) 后一段中的论证，存在一个面积极小边界 Σ，使得$\Sigma \cap E$ 在欧几里得意义下于无穷远处渐近于一个与 S_0 平行的超平面。我们将证明分为 3 步。

步骤 1： Σ **在定义 3.3 的意义下是强稳定的。**

Σ的强稳定性可由 [Sch89], 中的计算推出；另见 [HSY25，引理 3.6]。

步骤 2：在扰动度量下，为一类新的自由边界构造一族面积极小边界。

我们首先应用定理3.4证明，在定理 1.3 所述的两种情形下，$\Sigma\backslash E$ 是一个紧集，且 Σ 与**实数集**^{n}等距。

(1) 若 $(M,\ g)$ 仅有渐近平坦端，则它是几何有界的。这意味着 $\Sigma\backslash E$ 是一个紧集。因此，我们可以应用定理3.4 (1)，得出 Σ与**实数集**^{n}等距。(2) 若 $(M,\ g)$ 有某个任意端，且该端不是 E，则我们应用定理3.4 (2)，在$_U_2\backslash U_1$中的标量曲率假设 $R_g > 0$ 下，得出 $\Sigma\backslash E$ 是一个紧集。因此，定理3.4 (2)得出 Σ与**实数集**^{n}等距。

由于 Σ 与 Σ_i 具有重数一，且 Σ_i 在varifold意义下收敛于 Σ，利用Allard 正则性定理可知，对任意有界域 L，当 i充分大时，$\Sigma_i \cap L$ 必为光滑的。注意 Σ 将渐近平坦端 E 分成两部分：上部分 E_+ 与下部分 E_-。设 p 为 E_+ 中满足 $|z(p)| \geqslant T_0$的一点，其中T_0 由定理 1.1给出。则如 [HSY25中引理3.3], 所述，对任意 $r_0 > 0$，存在$0 < r < r_0$、一个具有紧闭包且满足 $W \cap \Sigma \neq \varnothing$的开集 $W \subset M$，以及一族黎曼度量$\{g(s)\}_{s\in[0,1]}$，使得下列结论成立

(1) $g(s) \to g$ 随 $s \to 0$光滑地，(2) $g(s) = g$ 在 $M\backslash W$中，(3) $g(s) < g$ 在 W中，(4) $R(g(s)) > 0$ 在 $\{x \in W$ 中：$\mathrm{dist}(x, p) > r\}$,

(5) 当 i 充分大时，Σ_i 在度量 $g(s)$ 下相对于指向 E_- 内部的法向量是弱平均凸的，并且在一个内部点处严格平均凸。

令 $C^+_{R_i}$ 表示 C_{R_i} 中位于 $\Sigma_i \cap E$ 上方的区域的闭包，并且

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{R_i} =&\{\Sigma = \partial\Omega\backslash\partial C^+_{R_i} :\ \Omega \text{ is a Caccioppoli set in } C^+_{R_i} \cup V_i,\\ &\Sigma_i \subset \Omega \quad \text{and} \quad \Omega \cap \{z \geqslant b\} = \varnothing \text{ for some } b\}\end{aligned} \tag{3.5}$$

与 [HSY25，引理 3.4]，类似，我们可以证明存在一个自由边界极小超曲面 $\Sigma_i(s)$，它在度量 $g(s)$ 下使 $\mathcal{G}_{R_i}$ 中的体积最小。这里略有不同的是，Σ_i 可能存在奇点。不过，得益于 [Wan24，定理 B.1]，Σ_i 仍是有效的障碍物。此外，利用 [HSY25，引理 3.5], 中的论证，对于固定的 s，存在一个紧集 $W_0 \subset W$，使得对所有充分大的 i，都有 $\Sigma_i(s) \cap W_0 \neq \varnothing$。这里的自由边界极小曲面 $\Sigma_i(s)$ 也可能存在奇点。现在，根据几何测度论中的标准结果，$\Sigma_i(s)$ 将收敛到一个极限面积极小超曲面 $\Sigma(s)$。

第 3 步：证明 $m_{ADM}(M,\ g,\ E) = 0$**，这与假设 that**$m_{ADM}(M,\ g,\ E) \neq 0$ **矛盾。**

根据 [HSY25，引理 3.6]，$\Sigma(s) \cap E$ 在欧几里得意义下于无穷远渐近于一个与 S_0平行的超平面，且 $\Sigma(s)$ 是强稳定的。由消奇定理3.4，我们得出 $\Sigma(s) \cap B^{n+1}_r(p) \neq \varnothing$。令 $s \to 0$ 且 $r \to 0$，可得一个强稳定的面积极小超曲面 Σ_p，它位于 (M^{n+1}, g) 并经过 p。

定理 1.1 中的唯一性结论表明， Σ_p 与 Σ_t重合。同样，由于定理3.4， Σ_p 与 $\mathbf{R}^n$ 等距，且 $R_g = |A|^2 = Ric(\nu,\nu) = 0$ 沿着 Σ。结合 [HSY25，命题 A.3]，，这意味着渐近平坦端 E 中位于 Σ_{T_0} 上方的区域与 $\mathbf{R}^{n+1}_{+}$等距。类似地，渐近平坦端 E 中位于 Σ_{-T_0} 下方的区域也与$\mathbf{R}^{n+1}_{-}$等距。根据 ADM 质量的定义，我们看到 $m_{ADM}(M,g,E) = 0$，从而得到所需的矛盾。□

数据可用性声明。本研究未生成或分析任何数据，因此本文不适用数据共享。

利益冲突。通讯作者代表所有作者声明，不存在利益冲突。

References

[Car16] Alessandro Carlotto。渐近平坦空间中稳定极小超曲面的刚性。

Calc.， （）：文章 *Var. Partial Differential Equations* 55 3 54, 20, 2016

号。[CCE16] Alessandro Carlotto、Otis Chodosh 和 Michael Eichmair。正质量定理的有效版本。 *Invent. Math.*，206(3)：975–1016，2016。[CM11] Tobias Holck Colding 和 William P. Minicozzi，II。

A course in minimal surfaces，*Graduate Studies in Mathematics*第121卷。美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，2011。[EK23] Michael Eichmair 和 Thomas Koerber。等周曲面极限的 Schoen 猜想，2023。[EK24] Michael Eichmair 和 Thomas Koerber。由稳定常平均曲率球面构成的渐近平坦流形叶状分解。 *J. Differential Geom.*，128(3)：1037–1083，2024。[EM13] Michael Eichmair 和 Jan Metzger。任意维数下渐近平坦流形的唯一等周叶状分解。 *Invent. Math.*，194：591–630，2013。[Giu84] Enrico Giusti。

Minimal surfaces and functions of bounded variation 80 *Monographs in*，[第 卷。*Mathematics* ¨ 1984

Birkhauser Verlag，巴塞尔，25]。 *Calc. Var. Partial Differential Equations*HSY[Shihang He、Yuguang Shi 和 Haobin Yu。渐近平坦流形中面积极小超曲面的叶状结构及 Schoen 猜想。26]， 64(2)：文章号48，2025。[HSY13] Shihang He、Yuguang Shi 和 Haobin Yu。非负标量曲率流形中极小超曲面的奇点去除刚性定理，2026。

3 *Inventiones mathematicae* 193 2 367 375, Liu[Gang Liu。2013

24] -流形上的非负里奇曲率。，（）：–。*J. Differential Geom.*LUY[Martin Lesourd、Ryan Unger 和 Shing-Tung Yau。具有任意端的正质量定理。12]， 2024。

Sets of finite perimeter and geometric variational problems An introduction to Mag[*geometric measure theory* 2012

Francesco Maggi。56]。剑桥高等数学研究，

Annals of Mathematics 63 1 20 63,。[Nas89] 1956

John Nash。黎曼流形的嵌入问题。[，（）：–。83] Sch

Lectures on geometric measure theory 3 *Proceedings of the Centre for* Richard M. *Mathematical Analysis Australian National University*

Schoen。黎曼度量的总标量曲率泛函的变分理论及相关课题。1365：120–154，1989。[Sim85] Leon Simon。*Harmonic map*

pings and minimal immersions (Montecatini, 1984) 1161 *Lecture Notes in Math.*，[第 卷，81]。

澳大利亚国立大学数学分析中心，堪培拉，1983。

Comm. Pure Appl. Sim[Leon *Math.* 34 6 741 797, 1981

Simon。几何变分问题极值的孤立奇点。载于79]， *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*第 卷，第206–277页。Springer，柏林，1985。[SS81] Richard Schoen 和 Leon Simon。稳定极小超曲面的正则性。 *Comm. Math. Phys.*，（）：–。[SY24] Richard M. Schoen 和 Shing Tung Yau。具有非负标量曲率的完备流形及广义相对论中的正作用猜想。 *Geom. Funct. Anal.*，76 1025，1979 3 1024( )：–。SYRichard Schoen 和 Shing Tung Yau。正质量定理的证明。II。，79 2 231 260，1981（）：–。WanZhihan Wang。平均凸锥的平均凸光滑化。，34 301，2024 263：–。

Key Laboratory of Pure and Applied Mathematics School of Mathematical Sciences Peking , , , , ,
University Beijing 100871 P. R. China
Email address: hsh0119@pku.edu.cn

Key Laboratory of Pure and Applied Mathematics School of Mathematical Sciences Peking , ,
University Beijing 100871 P. R. China
, „*Email address*: ygshi@math.pku.edu.cn

School of Mathematics, Hangzhou Normal University, Hangzhou, 311121, P. R. China
Email address: yhbmath@hznu.edu.cn