单位圆上的基于张量的调制：编码视角

Sweta Suresh*Inria*、*INSA Lyon*、*CITI* 实验室 *UR3720*法国维勒班

Charly Poulliat图卢兹大学、*INPT*、*IRIT* 实验室法国图卢兹

Claire Goursaud*Inria*、*INSA Lyon*、*CITI* 实验室 *UR3720*法国维勒班

Maxime Guillaud*Inria*、*INSA Lyon*、*CITI* 实验室 *UR3720*法国维勒班

arXiv:2603.07729v1 [cs.IT] 8 Mar 2026

摘要—基于张量的调制（TBM）为无源随机接入中的盲多用户分离提供了一种多线性扩频框架。本文表明，TBM 是一种基于$\mathbb{Z}_M$上的非二元线性分组码的编码调制，其符号映射到 M-PSK调制，从而定义了一种几何均匀信号空间码。我们明确推导出该生成矩阵，刻画其秩亏，并证明用于张量可辨识性的参考符号对应于码缩短；根据 TBM 所采用的参考符号数量，缩短后可得到准系统码或系统码。在单用户AWGN以及多用户非相干多天线衰落信道中的仿真表明，该方案具有很强的鲁棒性和抗干扰能力，确立了 TBM 作为一种可扩展、具有代数结构的调制编码方案，可连接张量表示与现代编码理论。

I. 引言

无源随机接入（URA） [1], [2] 对解码器提出了前所未有的要求，需要在（通常数量众多的）用户之间进行并行干扰消除（PIC）。经典的连续干扰消除（SIC）不适用于URA，因为用户间干扰来自许多较弱的用户，没有任何单个干扰源占据主导地位，因而无法产生SIC所依赖的捕获效应。

基于张量的调制（TBM） [3] 通过多线性扩展（MLS）方案应对这一挑战，该方案借助张量积耦合承载信息的符号。TBM最初为URA提出，利用低秩张量独特的可分解性，实现盲多用户分离。其对同步误差和多普勒效应的鲁棒性已在 [4], [5]中得到证实。

近期研究关注采用 TBM 对相移键控（PSK）符号进行编码，这种方案称为 TBM-PSK。文献 [6] 提出了一种适用于非相干衰落信道中 TBM-PSK 的高效置信传播（BP）译码器。该译码器将离散的 M-PSK 符号放宽为复圆上的连续单位模变量，并使用冯·米塞斯分布（vM-BP）对消息进行参数化。这种表述支持近似闭式消息更新，而且具有一项吸引人的特性：均衡和译码都能自然地在同一个单位圆流形上进行，从而避免枚举星座点来完成比特对数似然与复符号之间的转换。

本研究部分获得法国国家研究署（ANR）“法国2030”计划资助，项目编号为 NF-PERSEUS（ANR-22-PEFT-0004）；另获WARM-M2M项目资助（ANR-24-CE25-2514）。

本文展示，TBM 是一种基于定义在 $\mathbb{Z}_M$ 上的非二元线性分组码构建的编码调制，其码符号映射到 M-PSK调制，从而定义出几何均匀信号空间码 [7]–[9]。该码通过其生成矩阵显式定义。将其视为一种定义在 $\mathbb{Z}_M$ 上的非二元“低密度”生成矩阵（LDGM）码 [10]，即可利用在相应 Tanner图/因子图上运行的消息传递算法对 TBM 进行译码。尽管 TBM 本质上是为多用户通信量身设计的，我们仍给出单用户分析，主要旨在阐明并形式化 TBM 所施加的代数结构。

本文的贡献如下：

- 我们展示，当使用定义 TBM 的 MLS 对 M-PSK信息符号进行编码时，所得序列可解释为由定义在 $\mathbb{Z}_M = \{0, 1, \ldots, M-1\}$ 上、在模 M 加法下运算的线性分组码生成的码字，随后再进行 M-PSK调制。
- 我们刻画了相应生成矩阵的秩亏，并表明，张量可辨识性所需的参考符号对应于码缩短；根据 TBM 中所考虑的参考符号数量，这将产生准系统码或非系统码。
- 我们证明，TBM-PSK 与 vM-BP 方法相结合，可作为构建高效并行干扰抵消译码器的基础。

II. 基于张量的调制背景

为阐明码构造，我们首先介绍 [3] 中的 MLS 方法在多址接入信道上的无协调多址接入原始背景。发射机 k 处生成一个长度为 T 的符号向量 $\mathbf{s}^{(k)} \in \mathbb{C}^T$，其形式为

$$\mathbf{s}^{(k)} = \mathbf{x}_1^{(k)} \otimes \mathbf{x}_2^{(k)} \otimes \cdots \otimes \mathbf{x}_d^{(k)} \tag{1}$$

其中 $\mathbf{x}_i^{(k)} \in \mathbb{C}^{T_i}, i = 1 \ldots d$, 是信息承载向量，$\prod_i T_i = T$ 是码长 T的一种可能分解，其中 $T_i \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$，而 $\otimes$ 表示克罗内克积。

在无协调多址接入的情况下，我们考虑一个包含 K_a 个用户和 N_r 根接收天线的单输入多输出（SIMO）多址衰落信道

$$\mathbf{y} = \sum_{k=1}^{K_a} \mathbf{s}^{(k)} \otimes \mathbf{h}^{(k)} + \mathbf{n}, \tag{2}$$

其中 $\mathbf{y}$、$\mathbf{n} \in \mathbb{C}^{N_r T}$，其中$\mathbf{h}^{(k)} \in \mathbb{C}^{N_r}$表示用户 k 的信道状态，而$\mathbf{n}$ 是加性白高斯噪声（AWGN）项。在此背景下，K_a 个活跃用户的无噪声接收信号表示为

$$\mathbf{y}_0 = \sum_{k=1}^{K_a} \mathbf{x}_1^{(k)} \otimes \mathbf{x}_2^{(k)} \otimes \cdots \otimes \mathbf{x}_d^{(k)} \otimes \mathbf{h}^{(k)}, \tag{3}$$

这对应于一个 $d+1$ 阶、大小为 $T_1 \times \cdots \times T_d \times N_r$ 的张量，其中每个秩一项表示一个用户。先前的研究 [3], [11] 表明，张量代数 [12]能够通过低秩张量的典范多元分解（CP 分解）实现盲多用户分离和信道估计。CP 分解的唯一性性质 [13]进一步刻画了高信噪比特性，并确定了能够可靠解析的最大用户数。对于式（3）中的每个秩一分量，唯一性在置换和复标量模糊意义下定义。因此，每个向量 $\mathbf{x}_i^{(k)}$ 包含一个参考符号和 $T_i - 1$ 个信息符号。不失一般性，将参考符号固定为 $x_i^{(k)}{}_{,1} = 1$，其中 $x_i^{(k)}{}_{,j}$ 表示 $\mathbf{x}_i^{(k)}$ 的第 j 个标量元素。在非相干多用户随机接入的背景下，如 [3] 所示，这种每个模包含一个导频的配置是必需的。在本文中，我们将考虑以下情况：

情况1： 每个张量模对应一个参考符号；**情况2：** 无参考符号；**情形3：** $d-1$ 个参考符号。

III. TBM作为编码调制

本节将展示，MLS (1) 可以等价地描述为 $\mathbb{Z}_M$上的线性映射。利用这一视角，可以将TBM解释为一种结构化的非二进制编码调制方案。

A. 预备知识

基于上述采用情况*2*的配置，我们重新解释MLS操作 (1)，具体考虑信息符号属于阶为 M的PSK调制的特殊情况，$\mathcal{X}_M = \left\{ e^{j\left(\frac{2\pi v}{M}\right)} \middle| \, v = 0, \ldots\ldots, M-1 \right\} \subset \mathbb{C}$。令 $\mathbb{Z}_M = \{0, 1, \ldots, M-1\}$ 表示在模M 加法下的加法循环群，该群同构于交换群 $\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$，即$(\mathbb{Z}_M,$ $+$模 $M)$ $\cong (\mathbb{Z}/M\mathbb{Z},$ $+)$。映射

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z}_M &\longrightarrow \mathcal{X}_M \\ v &\longmapsto \varphi(v) = e^{j\left(\frac{2\pi v}{M}\right)} \end{aligned} \tag{4}$$

定义了从 $(\mathbb{Z}_M, +$模 $M)$ 到 $(\mathcal{X}_M, \times)$ 的同构。

为简洁起见，以下省略上标 (k)，因为我们只关注单个用户。令 $\mathbf{u}_i \in \mathbb{Z}_M^{T_i}$ 表示整数值向量，其中包含编码在 $\mathbf{x}_i$中的 T_i 个符号，对所有 $i \in [\![1, d]\!]$均成立。经典的 TBM 编码过程包括先进行 PSK 调制，再按照式 (1) 进行 MLS，即先对 $\mathbf{x}_i = \varphi(\mathbf{u}_i)$（逐元素应用$\varphi$），再进行 $\mathbf{s} = \varphi(\mathbf{u}_1) \otimes \cdots \otimes \varphi(\mathbf{u}_d)$。该过程如图 1(a) 所示。

等价地，传输符号可以表示为$\mathbf{s} = \varphi(\mathbf{uG})$，其中 $\mathbf{G} \in \mathbb{Z}_M^{K \times T}$ 为某个编码矩阵，且$\mathbf{u} = [\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_d]$ 包含所传输的 $K \triangleq \sum_i T_i$ 个符号。这表明，编码过程也可以等价地解释为：先在 $\mathbb{Z}_M$ 上进行非二进制编码，再进行M-PSK调制，如图 1(b) 所示。其实际结果是，所得码具有几何均匀性[14]；几何均匀性意味着与所有码字相关联的Voronoi区域形状相同。下面我们将确定编码矩阵的结构。

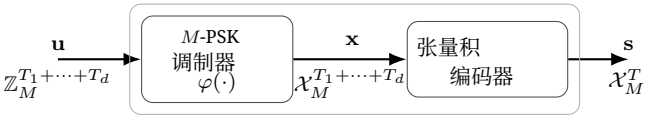
B. 等价（非最小） $\mathbb{Z}_M$ 编码器

对于情形 *2*，$\mathbf{u}$ 在 $\mathbb{Z}_M$ 上最多包含 $\sum_i T_i$ 个信息承载符号。这样做并未对信息承载符号的结构作任何先验假设。在这种配置下，我们将在第 IV 节看到，所得编码矩阵$\mathbf{G}$ 是一个非最小生成矩阵，即 $\mathrm{rank}(\mathbf{G}) = K' < K$，这意味着无法根据码字$\mathbf{c}$唯一确定$\mathbf{u}$ 。图 1(a) 中的编码操作可以改写为使用一个大小为 $K \times T$ 的生成矩阵$\mathbf{G}$ 进行的非系统线性编码操作，即

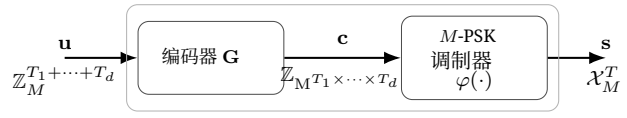
$$\mathbf{c} = [c_1, c_2, \cdots, c_T] = \mathbf{uG}. \tag{5}$$

此处，G 遵循与 Gallager 的模-M（非二进制）LDPC 码 [15], 相同的结构，其所有非零位置均等于 1。由于 s 是维数为 $T_1 \times \cdots \times T_d$ 的张量的向量化形式，可以用一个 d 元组 $(m_1, m_2, \cdots, m_d) \in [\![1, T_1]\!] \times \cdots \times [\![1, T_d]\!]$对其 T个元素进行索引，该元组表示张量元素的 d 维索引[12,第 2 节4]。例如，利用字典序排列，我们可以将每个 $p \in [\![1, T]\!]$ 双射映射到一个元组 $(m_1, m_2, \cdots, m_d)$；我们将其记为 $p \leftrightarrow (m_1, m_2, \cdots, m_d)$。根据 (1)，s 的第 p个元素可以写为

$$\begin{aligned} s_p &\leftrightarrow s_{m_1, m_2, \cdots, m_d} \\ &= x_{1, m_1} x_{2, m_2} \cdots x_{d, m_d}, \forall 1 \le m_i \le T_i. \end{aligned} \tag{6}$$



(a) M-PSK调制后进行多线性扩展 (1)



(b) $\mathbb{Z}_M$ 编码器 (5) 后接 M-PSK调制

图 1：PSK-TBM 的两种等效解释：MLS 和编码调制。

注意，这些索引与每个向量分量内参与符号字位置 p 的 $\mathbb{Z}_m$ 校验和的那些位置相关。设

$$\mathbf{e}^i_{m_i} = [0,\dots,0 \underset{\uparrow}{,1,} 0,\dots,0], \quad m_i \tag{7}$$

为长度为 T_i 、与位置索引 m_i 相关联且对应于向量分量$\mathbf{u}_i$的二进制指示向量。然后，对于每个 $p \in [\![1,T]\!]$， d元组（$m_1,\dots,m_d$）可展开为由（$\mathbf{e}^1_{m_1},\dots,\mathbf{e}^d_{m_d}$）给出的二进制展开。因此，对于每个 p，或等价地对于（$m_1,\cdots,m_d$），我们有

$$\begin{aligned} c_p &\triangleq c_{m_1,m_2,\cdots,m_d} \\ &= u_{1,m_1} + u_{2,m_2} + \cdots + u_{d,m_d} \bmod M \\ &= \mathbf{u}_1(\mathbf{e}^1_{m_1})^\top + \mathbf{u}_2(\mathbf{e}^2_{m_2})^\top + \cdots + \mathbf{u}_d(\mathbf{e}^d_{m_d})^\top \bmod M \\ &= \mathbf{u}\mathbf{g}_p^\top \bmod M, \end{aligned} \tag{8}$$

其中$\mathbf{g}_p = [\mathbf{e}^1_{m_1},\cdots,\mathbf{e}^2_{m_d}]$。因此，每个码字符号 c_p是来自拼接向量$\mathbf{u}$ 的输入符号的模M 和，这些输入符号在$\mathbf{G}$的第 p行中具有对应的**1**。该生成矩阵是 $\mathbb{Z}_M$ 上的码的一个特例，因为所有非零元素都是单位元**1**。因此，$\mathbf{c} \triangleq [c_1, c_2, \cdots, c_T]$ 可以写成

$$\mathbf{c} = \mathbf{u}\left[\mathbf{g}_1^\top \mid \mathbf{g}_2^\top \mid \cdots \mid \mathbf{g}_T^\top\right] = \mathbf{u}\mathbf{G}. \tag{9}$$

因此，可以得出$\mathbf{G}\left[\mathbf{g}_1^\top \mid \mathbf{g}_2^\top \mid \cdots \mid \mathbf{g}_T^\top\right]$. =

例如，对于（T_1、T_2、T_3）=（4、2、2），我们有 $\forall p \in [\![1、16]\!]$、 $p = 1 + 4(m_1 - 1) + 2(m_2 - 1) + 1(m_3 - 1)$，因此，矩阵 $\mathbf{G}$ 为

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0 \\ 1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0 \\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

该矩阵是在 $\mathbb{Z}_M$上定义的结构化非系统生成矩阵。此外，可以证明，矩阵 $\mathbf{G}$ 也可以通过递归克罗内克构造得到。设 $\mathcal{T}^d = [T_1, T_2, \cdots, T_d]$ 为有序的 d元组，使得 $T_1 \geq T_2 \geq \cdots \geq T_d$，且 $\mathcal{T}^n = [T_{d-n+1}, \cdots, T_d]$。于是，$\mathbf{G}_{\mathcal{T}^1} = \mathbf{I}_{T_d}$，以及 $\forall n \in [\![2、d]\!]$，

$$\mathbf{G}_{\mathcal{T}^n} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{t_n} \otimes \mathbf{1}_{t'_{n-1}} \\ \mathbf{1}_{t_n} \otimes \mathbf{G}_{\mathcal{T}^{n-1}} \end{bmatrix}, \tag{11}$$

其中 $\mathbf{1}_t = [1,\cdots,1] \in \mathbb{Z}_M^t$ $t_n = T_{d-n+1}$ t'_n =和，。最后，$\mathbf{G}$ $\prod_{k=d-n+2}^{d} T_k$ = $\mathcal{T}^d$. $\mathbf{G}$

IV. 信息维数识别：参考符号的必要性

在第 III 节中，我们推导了 TBM 在 $\mathbb{Z}_M$ 上针对情形 *2*的等效编码，也就是说，没有分析适当的码空间和信息维数。然而，重要的是确定底层编码方案的实际信息码维数，以及定义在 $\mathbb{Z}_M$ 上的底层码 $\mathcal{C}$ 所对应的 $\mathbb{Z}_M^T$ 的适当子空间。为此，接下来将研究生成矩阵 $\mathbf{G}$ 的代数性质。

A. 相干设置中的参考符号

根据模拟域中的张量性质，我们知道矩阵$\mathbf{G}$ 应当是秩亏的（由于 TBM 结构固有的约束，信息码维数应当较低）[3]。通过分析生成矩阵的结构，并考虑由有序 d 元组定义的张量，我们可以证明恰好能找到 $d-1$ 个可“消去”的冗余行。注意到与给定张量模 i相关联的$\mathbf{G}$中的各行之和为全**1**向量，即

$$\forall i \in [\![1,d]\!], \sum_{l=T_{i-1}+1}^{T_i} \mathbf{r}_l = [1,\dots 1]\,,\ T_0 = 0, \tag{12}$$

其中$\mathbf{r}_l$ 是$\mathbf{G}$的第 l 行。因此，对于行索引为 $k \in \{(\sum_{m=1}^{i} T_m) + 1,\ i \in [\![1,\ d-1]\!]\}$的 $d-1$ 行，如果我们更新与 i 分量向量对应的第 k 行，使其为

$$\mathbf{r}_k \leftarrow \sum_{m'=k}^{k+T_i-1} \mathbf{r}_{m'} - \sum_{m=1}^{T_1} \mathbf{r}_m \mod M, \tag{13}$$

然后 $\mathbf{r}_k = [0,\cdots,0]$. 注意，在张量模内选择 k 是任意的；每个模任选一行都会得到等价的形式。这里我们遵循 [3] 中的约定，选择模中的第一个位置作为参考符号。可以证明，最多可像式（13）那样消去 $\mathbf{G}$ 中的 $d-1$行。因此，我们选择 $d-1$ 个模中的前几行作为 参考符号，相应的符号便不能用于承载信息，并固定为 $0_{\mathbb{Z}_M}$ （在星座域中等价于 **1**）。这种配置——情形*3*，在除一个模以外的每个模中均有 $d-1$ 个参考符号——足以适用于相干信道设置（单用户或多用户）。令$\mathbf{u}_r = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2^r \cdots, \mathbf{u}_d^r] \in \mathbb{Z}_M^{K_r}$为约化信息向量，其中包含 $K_r = \sum_i T_i - d + 1$ 个符号；该向量由移除固定的参考符号后得到。情形3中与 TBM 关联的码 定义为

$$\mathcal{C}^{\text{coh}}_{\text{TBM}} = \left\{\mathbf{c} \in \mathbb{Z}_M^T \mid \mathbf{c} = \mathbf{u}_r\mathbf{G}_r; \mathbf{u}_r \in \mathbb{Z}_M^{K_r}\right\}, \tag{14}$$

其中，大小为 $K_r \times T$ 的$\mathbf{G}_r$ 是通过移除与设为零的参考符号相对应的行，从$\mathbf{G}$ 得到的约化生成矩阵。显然，所定义的码是部分系统码，因为与第一模的符号相关联的系统位置恰好有 T_1 个。相应的码率为 $\eta^{\text{coh}} = \frac{K_r}{T}\log_2(M)$。例如，对于参数为（$T_1$，$T_2$，$T_3$）=(4，2，2) 的式（10），我们有

$$\mathbf{G}_r = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1 \\ 0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1 \\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

此外，我们还可以定义所谓的广义校验矩阵 [16]，其定义为 $\tilde{\mathbf{H}} = [\mathbf{G}_r^\top \mid (M-1)\mathbf{I}_T]$，据此可定义 $\tilde{\mathbf{c}} = [\mathbf{u}_r,\ \mathbf{c}],$，使得 $\tilde{\mathbf{c}}\ \tilde{\mathbf{H}}^\top = \mathbf{0}$.

B. 非相干场景中的参考符号

对于非相干块衰落信道场景，如第 II 节所述，需要一个额外的参考符号来消除由信道衰落系数造成的标量歧义，从而得到情况*1*。在码域中将参考符号固定为 $0 \in \mathbb{Z}_M$，可视为用于缩短的码符号。这相当于从$\mathbf{u}$ 或$\mathbf{u}_r$中移除与已知零值符号对应的符号。此后，每个剩余符号位置都会获得一个有助于译码的系统观测。 c_1表示参考符号的乘积，也可以单独处理，因为它不携带任何信息。

用矩阵形式表示时，非相干场景所需的额外参考符号通过将$\mathbf{G}_r$ 的第一行设为零来实现，因此得到一个秩亏矩阵，因为第一行和第一列都变为零。移除第一行和第一列后，得到一个大小为 $K_s \times (T-1)$ 的生成矩阵$\mathbf{G}_s$，其中 $K_s = \sum_i (T_i - 1)$。$\mathbf{G}_s$用于将信息向量$\mathbf{u}_s = [\mathbf{u}_1^r、\ \mathbf{u}_2^r \cdots、\ \mathbf{u}_d^r] \in \mathbb{Z}_M^{K_s}$映射为向量$\mathbf{c}_s \in \mathbb{Z}_M^{(T-1)}$，该向量对应于除 c_1 以外的所有编码 TBM 符号，其中 c_1 固定为 0。因此，情况*1*中的 TBM-PSK 等价于该码

$$\mathcal{C}_{\text{TBM}}^{\text{ncoh}} = \left\{ \mathbf{c} \in \mathbb{Z}_M^T \mid \mathbf{c} = [0, \mathbf{u}_s\mathbf{G}_s]; \mathbf{u}_s \in \mathbb{Z}_M^{K_s} \right\}, \qquad (16)$$

从而得到码率为 $\eta^{\text{ncoh}} = \frac{K_s}{T}\log_2 M$ 比特/信道使用。$\mathbf{G}_s$可以证明是系统码，其系统位置可根据参考符号的位置轻松确定。对于式 (10) 中 $(T_1, T_2, T_3) = (4,2,2)$ 的示例，我们有

$$\mathbf{G}_\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1 \\ 0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1 \\ 1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1 \end{bmatrix}. \qquad (17)$$

列 1、2、4、8 和 12 各有一个非零元素，缩短后对应系统位置。参考符号使剩余信息符号能够进行系统编码。因此，我们可以为情况*1*推导出一种高效的系统编码方案，其中系统形式的生成矩阵在适当进行列置换 Π 后记为 $\mathbf{G}_{\text{sys}} = [\mathbf{I}_K \mid \mathbf{P}]$, 。相应的编码过程如图 2 所示。

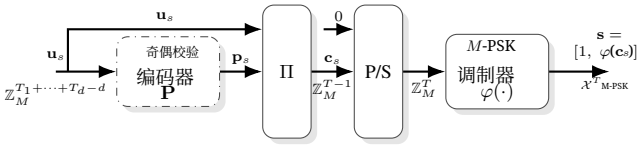


图 2：TBM-PSK 的等效系统编码。

V. 因子图表示与消息传递译码

在本节中，我们再次关注单用户场景，并按照情况*1*设置 d 个参考符号。图3描绘了对应于(16)的Tanner图。白色节点表示来自($\mathbf{u}_s$)的信息符号，而红色节点是来自($\mathbf{c}$)的码字符号。紫色节点与来自($\mathbf{y}$)的含噪观测符号相关联。黑色方块表示约束/函数节点。

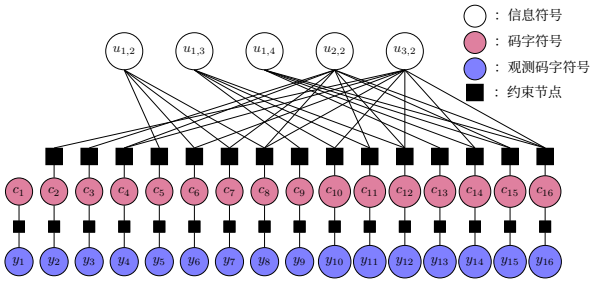


图3：针对 $(T_1, T_2, T_3) = (4,2,2)$ 所提出的码构造的因子图表示，情况*1*。注意，节点 c_1 未连接到图中。在非相干场景下，它可视为一个导频符号。

在图3的因子图中，与模 i中的符号对应的信息变量节点连接到$\prod_{n\neq i} T_n = T/T_i$ 个函数节点。如果对所有 $i > 1$ 都满足 $m_i \neq 1$，则由 (m_1, m_2, m_3) 索引的约束节点会连接到 d 个信息变量节点。由于存在参考符号，其他约束节点的度数较小。通常，度为 r 的约束节点数量对应于 $\prod_{i=1}^{d}(1 + (T_i - 1)z)$ 的多项式展开中 r^{th} 次的度系数。

基于这种图表示，可以采用多种消息传递算法来进行近似符号最大后验解码。第一种方法是采用基于离散概率或对数概率消息的BP解码 [9], [17], [18], ，这与有限域上的非二进制码译码类似。对于定义在 $\mathbb{Z}_M$上的码，由于其具有相应的群结构，可以按照 [9], [19], 所指出的，使用FFT-BP方法轻松实现校验节点更新，其中快速傅里叶变换（FFT）是 M点离散傅里叶变换的经典快速实现方式（对于有限域上的非二进制码，则采用快速哈达玛变换）。与有限域码一样，复杂度会随域阶增大。为解决这一问题，[6]提出了一种标量BP方法，通过交换复von Mises矩（vM-BP），利用PSK信号传输的结构，以von Mises概率密度函数近似消息。

VI. 性能分析

本节研究 TBM-PSK 在两种框架下的性能：单用户AWGN和多用户衰落非相干多天线场景。目标是使用先进解码器，从可靠性、速率效率和可扩展性等方面刻画 TBM-PSK 作为一种码的性能。对于仿真，我们考虑情况*1*，即每个张量模包含一个参考符号。

A. 单用户情形

我们首先分析 TBM-PSK 在单用户单天线 AWGN信道场景下的性能。接收信号建模为$\mathbf{y} = \mathbf{s}+\mathbf{n}$，其中$\mathbf{y}$、$\mathbf{s}$、$\mathbf{n} \in \mathbb{C}^T$。块长固定为 $T = 3200$ 次信道使用。信噪比计算为 $1/\sigma^2$，其中 σ^2 为噪声方差。

1) 码率分析：图4展示了达到 10^{-2} 分组错误率（PER）所需的信噪比随码率的变化。对于 TBM-PSK，考虑张量配置 [64,50], [10,20,16]和 [8,5,5,4,4]，其中 $M = 2$，4，8，16，32 和 64。性能评估采用 [6]中的 vM-BP译码器。

所考虑的 TBM-PSK 方案是定义在环 $\mathbb{Z}_M$上的低码率码。为了公平地评估这类码，我们设计了定义在 $\mathbb{Z}_M$上的非二元低码率乘法重复低密度奇偶校验码（MR-LDPC码），该码扩展了 [20] 针对有限域上的非二元 LDPC 码提出的设计。这类码可视为一种类Raptor构造：利用母码，并通过添加额外的校验符号来降低码率。事实证明，这种构造在极低码率下也能取得良好性能。对于我们的设计，考虑了一个码率为 $1/3$ 、定义在 $\mathbb{Z}_M$上的简单母码，其变量节点度数均为 3，维数为 K。随后选择添加的校验符号数量，使 T 个编码符号满足与相应 TBM-PSK 方案相同的维数和码率。MR-LDPC 的结果采用 $\mathbb{Z}_M$ [9], [19]上的 FFT-BP译码器进行译码迭代，最多迭代 50 次。最后，图4还展示了 [21, 第 22 节6] 中针对 AWGN信道推导的正态近似有限码长错误界。

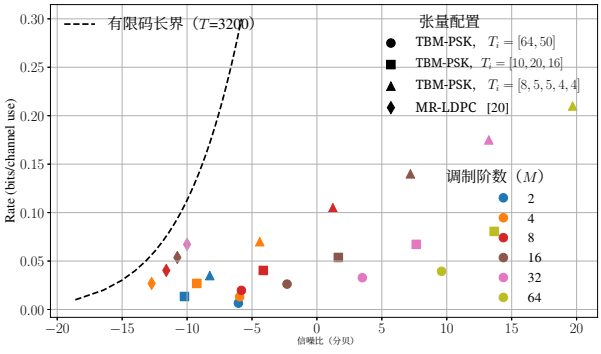


图4：码率与达到PER=10^{-2}所需最小信噪比的关系。

2）分组错误率分析：图 5 展示了分组错误率随信噪比变化的曲线，其中同样包含了 TBM-PSK 和 MR-LDPC 的多种配置。图中还展示了有限码长界。在此图中，颜色相同的曲线对应相同的编码速率。图 4 和图 5 均表明，TBM-PSK 的性能距离界和 MR-LDPC 都有数分贝，说明作为 AWGN 信道的单用户码，它们远非最优。不过，这并不令人意外，因为它们最初是在衰落信道上的随机接入场景中提出的。事实上，TBM 的真正优势体现在多用户工作区间。

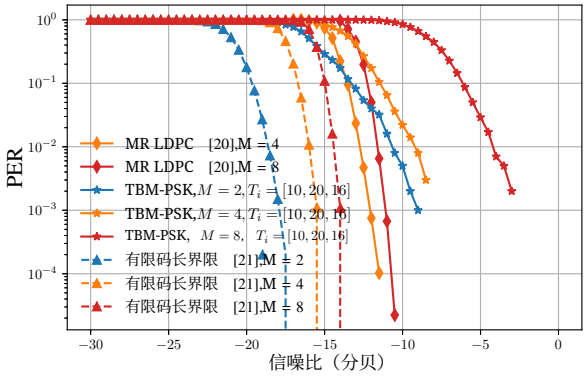


图 5： $T = 3200$ 的分组错误率比较，AWGN信道。

B. 多用户衰落信道设置

现在，我们聚焦于多用户非相干准静态衰落场景，考察 TBM-PSK 在强干扰条件下的表现：多个用户同时通过带有 $N_r = 5$根天线的非相干单输入多输出衰落信道 (2) 进行传输。考虑采用 4-PSK 的张量配置 $T_i = [10, 20, 16]$。此处使用了 [6] 中的联合多用户 vM-BP 译码器。图 6 展示了 [1] 用户错误概率（PUPE）随信噪比的变化，其中活跃用户数分别为 $K_a = 1$，5、10 和 15。尽管活跃用户数 K_a 增加到 15，造成强烈的用户间干扰，PUPE 曲线几乎保持不变。这表明，TBM-PSK 码结合 vM-BP 译码方法能够抵御强干扰，并可作为并行干扰抵消接收机的有效基础。

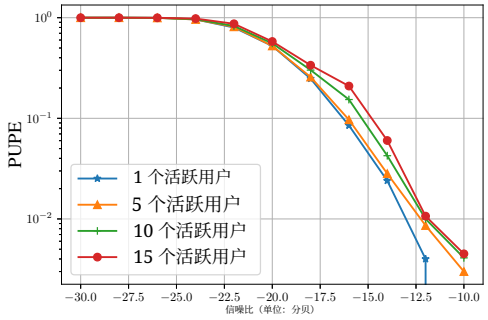


图 6：非相干准静态衰落信道中，TBM-PSK $[10, 20, 16]$, $M = 4$在 $N_r = 5$下的每用户错误概率与信噪比关系。

VII. 结论

本文给出了采用PSK调制的TBM的编码理论解释。我们表明，此类码可使用vM-BP方法进行译码，这在设计执行并行干扰消除的多用户解码器时尤为有益。

参考文献

[1] Y. Polyanskiy，“大规模随机接入的一种视角”，载于*IEEE*信息论国际研讨会（*ISIT*），2017年，第2523–2527页。 [2] G. Liva和Y. Polyanskiy，“无源多址接入：面向大规模随机接入的编码范式”，《*IEEE*会刊》，2024年。 [3] A. Decurninge、I. Land和M. Guillaud，“面向无源大规模随机接入的基于张量的调制”，《*IEEE*无线通信快报》，第10卷，第3期，第552–556页，2021年。 [4] A. Decurninge、P. Ferrand和M. Guillaud，“存在定时偏移时采用基于张量调制的大规模随机接入”，载于*IEEE*全球通信大会论文集，2022年，第1061–1066页。 [5] K. Saied 和 M. Guillaud，“ 基于张量的调制中经由后 CPD 最大似然的多普勒频率估计”，载于*IEEE*无线通信与网络会议（*WCNC*）论文集，2026年。 [6] S. Suresh和M. Guillaud，“面向无源随机接入的基于张量调制的置信传播译码”，载于苏黎世国际宽带通信研讨会论文集，2026年。 [7] H. A. Loeliger，“ 论欧几里得空间群码 ”，博士论文，苏黎世瑞士联邦理工学院，1992年。 [8] H.-A. Loeliger，“与群匹配的信号集”，《*IEEE*信息论汇刊》，第37卷，第6期，第1675–1682页，1991年。 [9] D. Sridhara，“使用低密度奇偶校验码的频谱高效编码调制”，博士论文，圣母大学，2003年。 [10] T. Richardson和R. Urbanke，《现代编码理论》。剑桥大学出版社，2008年。 [11] J. Fang、Y. Liang、G. Sun、H. Hou、Y. Wang、L. You和W. Wang，“采用软判决译码的极化码基于张量的无源随机接入”，《*IEEE*通信汇刊》，第73卷，2025年9月。 [12] T. G. Kolda和B. W. Bader，“张量分解及其应用”，《*SIAM*评论》，第51卷，第3期，第455–500页，2009年。 [13] L. Chiantini、G. Ottaviani和N. Vannieuwenhoven，“复张量一般可识别性与特定低秩可识别性的一种算法”，《*SIAM*矩阵分析与应用杂志》，第35卷，第4期，第1265–1287页，2014年。 [14] G. D. Forney，“几何均匀码”，《*IEEE*信息论汇刊》，第37卷，第5期，第1241–1260页，1991年。 [15] R. G. Gallager，“低密度奇偶校验码”，博士论文，马萨诸塞州剑桥：麻省理工学院出版社，1963年。 [16] J. S. Yedidia、J. Chen和M. P. C. Fossorier，“生成适用于置信传播译码的码表示”，载于*Allerton*通信、控制与计算年会论文集，第40卷，第1期，2002年，第447–456页。 [17] D. Sridhara和T. Fuja，“用于PSK调制的环上LDPC码”，《*IEEE*信息论汇刊》，第51卷，第9期，第3209–3220页，2005年。 [18] J. Bariffi、H. Bartz、G. Liva和J. Rosenthal，“Lee信道上正则环线性LDPC码的纠错性能”，《*IEEE*信息论汇刊》，第70卷，第11期，2024年，第7820–7839页。 [19] A. Goupil、M. Colas、G. Gelle和D. Declercq，“阿贝尔群上一般LDPC码的基于FFT的BP译码”，《*IEEE*通信汇刊》，第55卷，第4期，第644–649页，2007年。 [20] K. Kasai、D. Declercq、C. Poulliat和K. Sakaniwa，“乘法重复非二元LDPC码”，《*IEEE*信息论汇刊》，第57卷，第10期，第6788–6795页，2011年。 [21] Y. Polyanskiy和Y. Wu，信息论：从编码到学习。剑桥大学出版社，2025年。