高尔顿板150周年纪念之际的圆柱形高尔顿板

Kanti V. Mardia [1]、Colin Goodall [1] 和 John Rubbo [2]

[1] k.v.mardia@leeds.ac.uk；colin.goodall1@gmail.com；利兹大学，英国利兹 LS2 9JT[2] jrubbo48@aol.com；Little Brown House，美国新泽西州马塔万

arXiv:2603.07742v1 [stat.OT] 8 Mar 2026

摘要

广受赞誉的高尔顿板至今仍是一种广泛使用的装置，可用于演示在三角晶格上进行重复的伯努利试验如何产生近似正态分布。值此 Galton 于1875年建造高尔顿板150周年纪念之际，本文重新审视了这一历史装置，并将其拓展至圆柱形结构：钉阵缠绕在圆柱体上，形成角周期性，并产生经典设计中不存在的高度依赖行为。这一改造将 Galton 关于变异及正态分布形成的原始演示，与圆形统计学的现代发展联系起来，为圆形–线性乘积空间上的二项随机游走提供了一种实体实现。我们区分了缠绕晶格仅覆盖严格弧段的构型与覆盖整个周长的构型，并展示这种几何结构如何产生缠绕二项分布和缠绕正态分布行为。我们介绍了物理模型的设计与建造，概述了复制该模型时的实际注意事项，并分析了这种圆柱形变体的统计性质与教学应用；它为 Galton 的开创性工作提供了一种现代诠释。

关键词： 二项分布、高尔顿板构造、方向统计学、实体圆柱形高尔顿板、包裹二项分布、包裹正态分布

1 引言

这一著名高尔顿板的现代实现形式仍被广泛使用。例如，由Index Fund Advisors（IFA）生产的STEM高尔顿板已

在全球售出超过60,000台，并配有大量教学材料、视频以及一份详尽的用户指南，将该装置与金融市场中的随机行为联系起来。这一当代版本介绍于

https://www.ifa.com/galtonboard。
这类装置经久不衰的魅力，体现了以实物演示概率变异所具有的持续教学价值

经典平面高尔顿板生动地展示了正态分布如何从反复进行的独立二元决策中产生。小球穿过由钉子构成的三角阵列，最终聚集在底部的收集槽中；然而，平面几何不可避免地引入了人为的横向边界，这些边界破坏了平移对称性，并影响最终形成的分布。这些几何约束鲜少得到讨论，却对如何理解该装置有着重要影响。

本文提出一种圆柱形高尔顿板：将钉子晶格连续地卷绕在实心圆柱体上。这种构造在水平方向上实现了周期性边界条件，并形成自然的圆形槽结构。由此得到的装置在流形 $S^1 \times \mathbb{R}$ 上实现了二项随机游走，并自然产生包裹正态分布。圆柱几何恢复了水平方向的对称性，消除了边界效应，也为高尔顿最初的教学目标提供了新的视角。

本文其余部分安排如下。第2节概述高尔顿板的历史发展及其在十九世纪统计思想中的作用。第3节详细介绍一种高尔顿板的参数化设计，其钉阵嵌入实心圆柱体表面。第4节介绍其背后的包裹分布，包括缠绕二项分布和卷绕正态分布。第5节讨论圆柱板上的随机动力学。第6节介绍我们实体圆柱形高尔顿板的建造及其运行方式。第7节以讨论作结。附录A通过卷绕合成伽尔顿板，构造一个圆柱模型。

2 历史背景

Francis Galton 的概率机器，后来称为高尔顿板或五点形装置，在十九世纪统计思想的发展史上占据着独特的地位。如今，人们常在演示中心极限定理时见到这种装置，但它的起源其实与 Galton 更广泛的计划有关：他希望借助实体器具展示变异、误差和回归。

Galton 最早在其 1875年 论文（Galton，1875）中提到了这一机制，当时他使用了一种带钉子的装置来展示回归均值以及正态分布的形成过程。之后，Galton（1877）对其作了更详尽的描述，后来又在他 1889年 出版的著作（高尔顿，1889，第 63–70 页）中进行了深入阐述，

《自然遗传》。在这些著作中，这块板不仅仅是一种奇观，更是二项误差律的具体体现，展示了总体规律性如何从个体随机性中产生。

该装置也频繁出现在 Galton 的公开讲座中，包括他在皇家学会的演示；在这些场合，它生动地展示了中心极限现象。斯蒂格勒的历史分析（Stigler，1986年，第275–281页）将这一装置置于十九世纪更广泛的背景之中：当时人们致力于向科学界和普通大众传播概率思想。五点形装置体现了 Galton 的信念：通过精心设计的物理模型，可以让统计学原理变得通俗易懂。

如今，高尔顿板的数字版本随处可见，包括交互式应用程序和在线模拟工具，用户可以调整行数、概率和视觉设置。这些现代实现延续了 Galton 最初的目标，即让广大受众都能理解概率思想，也展现了该装置历久不衰的教学魅力。

为求完整，读者或许希望观看对 Galton 原始 1873年装置的演示；该装置的运行过程可见于以下视频的前两分钟：

https://www.youtube.com/watch?v=SZoDNfVFS7I.

这些历史资料凸显了该装置背后的教学与概念动机，并为我们的圆柱扩展提供了背景；该扩展旨在保留 Galton 的最初目标，同时克服平面设计固有的几何局限。

3 圆柱几何与钉阵

这里介绍圆柱形高尔顿板所需的几何与晶格参数。半径为 R 的正圆柱体由角坐标 $\theta \in [0, 2\pi$ 和垂直坐标 $z \in \mathbb{R}$ 参数化，如图 1 所示。其周长为 $C = 2\pi R$。

我们考虑圆柱体上的钉柱晶格，其中同一行相邻钉子之间的水平弧长为 $d > 0$，相邻行之间的垂直间距为 $h > 0$。因此，相邻钉子之间的角间距为

$$\Delta\theta = \frac{d}{R},$$

并且我们选择 d （等价地， $\Delta\theta$），使圆被划分为整数个M 角槽：

$$M = \frac{C}{d} = \frac{2\pi}{\Delta\theta}.$$

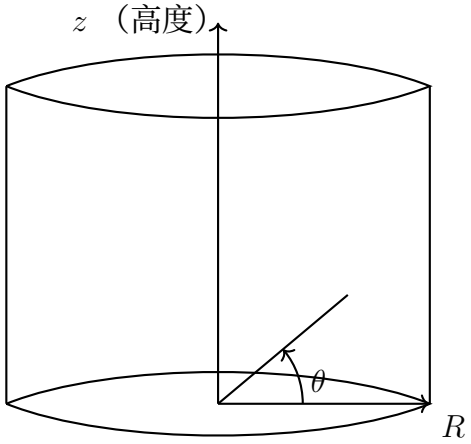


图 1：带有标注坐标轴的圆柱形高尔顿板：小球沿垂直方向（z 方向）下落，碰撞会使角位置旋转（θ），收集槽则环绕圆形底面排列。

行的索引为 $i = 0,1,\ldots,n$。第 i 行在展开后的三角晶格中包含 $i+1$ 个钉子，并且

$$i_M = \min(M,\, i+1)$$

缠绕到圆柱体上的钉子。表 1 总结了几何参数和晶格参数。

表 1：圆柱形高尔顿板参数汇总

参数	说明
M	角向分箱数量
$\Delta\theta$	钉子之间的角间距（箱格宽度）
d	相邻钉子之间的水平弧长
h	钉排之间的垂直间距
n	钉排数量
H	圆柱体总高度
R	圆柱半径
C	周长 , $C = 2\pi R$
r_p	钉半径
r_b	球半径
H_{module}	模块高度（例如 $8h$用于 8 排钉子）
H_{bin}	收集槽高度（例如 $2H_{\text{module}}$）

钉子的角坐标和垂直坐标为

$$\theta_{i,j} = \left(j - \frac{i}{2}\right)\Delta\theta \pmod{2\pi}, \qquad z_i = H - ih,$$

对于 $j = 0$，1，.....，$i_M - 1$ 以及 $i = 0$，1，.....，$n-1$。对应的笛卡尔坐标为

$$x_{i,j} = R\cos\theta_{i,j}, \qquad y_{i,j} = R\sin\theta_{i,j}, \qquad z_{i,j} = z_i.$$

钉阵的展开示意图展示了行索引 i和列索引 j，见图2。

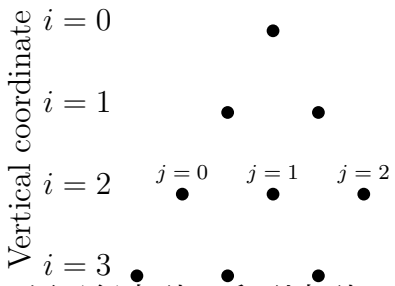


图2：钉阵示意图，展示行索引 i 和列索引 j 对应的角坐标$\theta_{i,\ j}$。



图3：将合成平面高尔顿板卷绕后得到的圆柱形高尔顿板正视图。更多详情见附录A。

图3展示了圆柱形 Galton 板的正视图，说明合成平面模型卷绕后得到的视角。

4 缠绕二项分布和缠绕正态分布

4.1 缠绕二项分布

我们遵循 Mardia 和 Jupp（2000）第 3.5.7 节的做法，引入包裹分布。设 $X \sim \mathrm{Bin}(n,\ p)$ 的支撑集为 $\{0, 1, \ldots, n\}$，且 $M \geq 1$ 为整数。有限循环群 $\mathbb{Z}_M = \{0, 1, \ldots, M-1\}$ 上的缠绕二项分布 定义为

$$Y = X \bmod M.$$

对于 $k \in \mathbb{Z}_M$，概率质量函数为

$$\Pr(Y = k) = \sum_{\ell \geq 0:\, k + \ell M \leq n} \binom{n}{k + \ell M} p^{k+\ell M} (1-p)^{n-k-\ell M}. \tag{4.1}$$

缠绕二项分布的特征函数为

$$\phi_\theta(t) = \mathbb{E}\big[e^{\,it\Theta}\big] = \big(1 - p + p\, e^{\,it 2\pi/M}\big)^n .$$

对于 $p = 1/2$，这可简化为

$$\phi_\theta(t) = \left(\cos\frac{\pi t n}{M}\right)^n \exp\!\left(\frac{i\pi t n}{M}\right), \tag{4.2}$$

且前几个三角矩为

$$\alpha_1 = \cos^2\!\Big(\frac{\pi n}{M}\Big), \qquad \beta_1 = \cos\!\Big(\frac{\pi n}{M}\Big)\sin\!\Big(\frac{\pi n}{M}\Big).$$

因此，合成长度 ρ和平均方向 μ 为

$$\rho = \left|\cos\frac{\pi n}{M}\right|, \qquad \mu = \frac{\pi n}{M}. \tag{4.3}$$

当固定 n 时，$M \to \infty$，我们有 $\rho \to 1$，这表明缠绕二项分布会高度集中于零均值处。反之，若 $M \to \infty$ 且 $n \to \infty$，并保持 $\delta = n/M$ 不变，则根据 (4.2)，特征函数趋于区间 $\mathbb{Z}_M$ 上均匀分布的特征函数，因为 $|\cos(\pi t n/M)| < 1$，而 $\exp(i\pi t n/M) = \exp(i\pi t\delta)$ 保持不变。

对于缠绕二项分布 (4.1)，我们计算 n 取不同值、$M = 24$时的概率；选择 M 与第 6 节中的物理模型相对应。图4表明，要使 $(-\pi,\ \pi]$ 上具有全支撑集，必须满足 $n \geq 24$，并且随着 n 增大，该分布趋近于离散均匀分布。

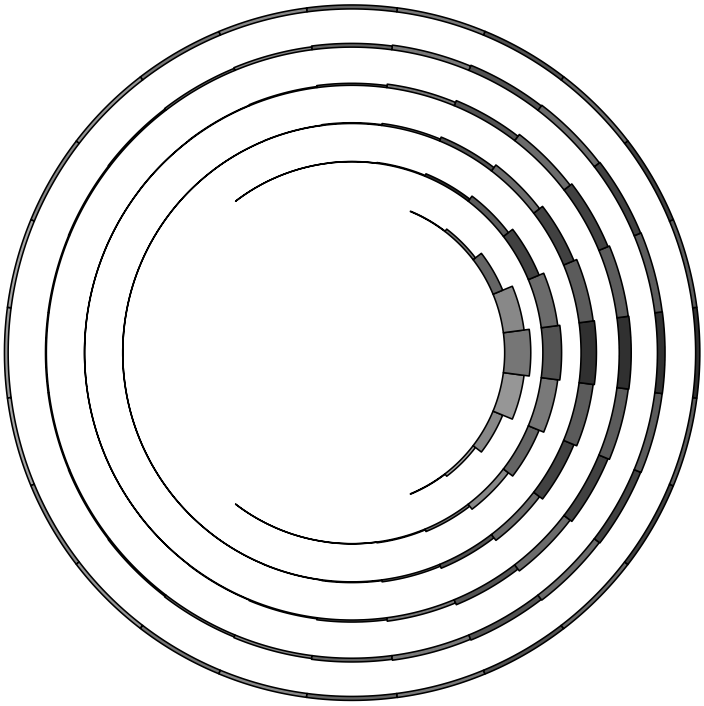


图4： $M = 24$ 和 $n = 8$、16、24、40、100、400 对应的缠绕二项分布概率的同心弯曲条形图。每个条形的高度从对应的圆开始测量。当 n 较小时，支撑集严格小于 $(-\pi, \pi]$；当 n 较大时，缠绕二项分布趋近于离散均匀分布。

4.2 包裹正态分布

包裹正态分布 $\mathrm{WN}(\mu, \sigma^2)$ 通过将正态随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 卷绕到圆上来定义：

$$\Theta = X \bmod 2\pi.$$

其在 $[0, 2\pi)$ 上的概率密度函数为

$$f_{\mathrm{WN}}(\theta \mid \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(\theta - \mu + 2\pi k)^2}{2\sigma^2}\right). \tag{4.4}$$

图5展示了绘制在单位半径竖直圆柱内表面上的包裹正态分布。角坐标 $\theta \in [0, 2\pi)$ 决定水平位置 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$，而竖直轴表示密度的径向高度。

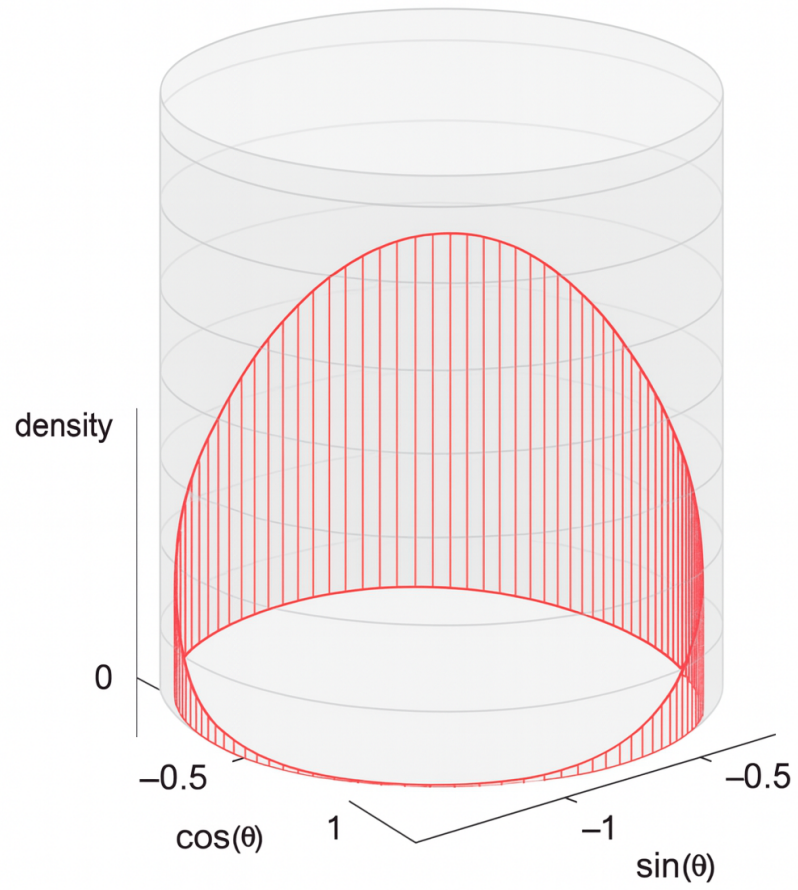


图5：绘制在单位圆柱表面上的包裹正态分布。对于角坐标 $\theta \in [0, 2\pi)$，水平位置为 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$，而竖直轴表示高度 $f_{\mathrm{WN}}(\theta)$。图中显示了 $\mu = 0$ 和尺度参数 σ 对应的密度。竖直线段表示高于底圆的高度，形成平滑的冠状表面。

图3、图4和图5共同展示了几何如何改变分布的极限形式。在平面域 $\mathbb{R}$ 上，水平位移服从标准正态分布

定律；当卷绕到 $\mathbb{S}^1$上时，它成为卷绕正态；而当在圆柱面上以物理方式实现时，该装置会强制实施周期性边界条件。

$\mathbb{R}$ 上的极限高斯形式与经典钉板构造及中心极限行为一致（高尔顿，1889；肯德尔，1948）。由于平面高斯定义在 $\mathbb{R}$ 上，而圆柱面定义在 $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$上，向周期空间的投影会诱导卷绕（Mardia和Jupp，2000），从而证实理论收敛。

单峰性与众数。 包裹正态分布是单峰的，其唯一众数位于平均方向 μ。尽管这一事实广为人知，但简明的证明并不容易获得，因此我们在此给出一个证明。根据傅里叶级数表示（Mardia和Jupp，2000，第50页），

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\sigma^2/2}\cos\big(n(\theta-\mu)\big)\right),$$

对于 $n \geq 1$，每个系数 $e^{-n^2\sigma^2/2}$ 均为正。对于固定的 n，项cos($n(\theta-\mu)$)在 $\theta = \mu$ （模 2π）处取得最大值1，而在其他位置则严格更小。由于级数中的每一项都在 $\theta = \mu$处达到最大，整个和在 $\theta = \mu$处达到最大。唯一性由此得出：在任何其他 θ 处，至少有一个余弦项严格小于1。因此，卷绕正态在 μ 处具有唯一的全局最大值，并且是单峰的。

5 圆柱板上的随机动力学

基于上述几何构造，我们现在将球沿圆柱钉阵下落的随机动力学形式化，并刻画其在收集槽处形成的角分布。

5.1 球体动力学

令 (Θ_k, Z_k) 表示球经过第 k 次偏折后的角位置和垂直位置，其中 (Θ_0, Z_0) =(0,0)。每一排中，球都会发生一次二元角偏折，

$$\Theta_{k+1} = \left(\Theta_k + \xi_k\frac{\Delta\theta}{2}\right) \pmod{2\pi}, \qquad Z_{k+1} = Z_k - h,$$

其中

$$\xi_k = \begin{cases} +1, & \text{with probability } p, \\ -1, & \text{with probability } 1-p, \end{cases} \qquad k = 1, \ldots, n.$$

因此，球在圆柱面上进行螺旋随机游走 。记

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\xi_k, \qquad \Theta_n = \left(S_n\frac{\Delta\theta}{2}\right) \pmod{2\pi},$$

S_n 的分布是二项分布，

$$\mathbb{P}(S_n = 2k - n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, \dots, n.$$

圆柱板的底面被划分为 M 个角向槽位，

$$C_M : \quad \theta_s = s\Delta\theta \pmod{2\pi}, \qquad s = 0, \dots, M-1,$$

其中 $\Delta\theta = 2\pi/M$。在 C_M 上诱导出的分布恰好是第*4*节中介绍的缠绕二项分布。

5.2 矩、漂移与渐近行为

未缠绕角位移的均值和方差为

$$\mathbb{E}[\Theta_n] = n(2p-1)\frac{\Delta\theta}{2}, \qquad \mathrm{Var}(\Theta_n) = np(1-p)\Delta\theta^2.$$

偏差$p \neq \frac{1}{2}$ 会产生系统性的旋转漂移。

对于固定的 M，当 $n \to \infty$ 时，缠绕二项分布收敛于 C_M上的离散均匀分布。这一现象在计算和实际物理实验中均可观察到：一旦 $n > M$，小球便会频繁地越过对跖点。

对于满足 $n/M \to \infty$ 的联合极限 $n \to \infty$ 和 $M \to \infty$，未卷绕的位移满足经典中心极限定理，

$$S_n \frac{\Delta\theta}{2} \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(n(2p-1)\frac{\Delta\theta}{2},\ np(1-p)\Delta\theta^2 \right),$$

而模 2π 卷绕后得到 缠绕正态极限

$$\Theta_n \xrightarrow{d} \mathcal{WN}\left(\mu = n(2p-1)\frac{\Delta\theta}{2},\ \sigma^2 = np(1-p)\Delta\theta^2 \right).$$

例如，若 $n = M^\alpha$ 且 $\alpha > 1$，缠绕二项分布会同时收敛到卷绕正态分布和均匀分布，因此缠绕正态极限是均匀分布。反过来，当 $n = M$ 时，则不会发生卷绕。

5.3 与分箱的联系

这些分箱将圆划分为多个区间

$$I_k = \left[\frac{2\pi(k-1)}{M}, \frac{2\pi k}{M} \right), \qquad k = 1, \dots, M.$$

落入收集槽 k 的概率为

$$p_k = \int_{I_k} f_{\mathrm{WN}}(\theta)\, d\theta,$$

其中， f_{WN} 是上述渐近结果中的折叠正态密度。这种离散分布构成了圆柱形高尔顿板的可观测输出。

5.4 统一框架

角向随机游走的转移核形式如下

$$p_{n+1}(x) = p\, p_n(x-1) + q\, p_n(x+1),$$

这与经典平面高尔顿板相呼应，但作用于紧群 C_M 或 S^1上。这表明，卷绕正态是高斯极限在圆周上的自然类比，这与紧群上的随机游走及圆形统计的一般理论相一致（Dhungana 和 Fragoso，2016；Kato，2010；Mardia和Jupp，2000；Su，1998）。

作为比较，平面高尔顿板产生的水平位移为

$$X_n = 2(X - np) = \sum_{i=1}^{n} S_i, \qquad S_i \in \{-1, +1\},$$

with

$$X_n \Rightarrow \mathcal{N}\big((p-q)n,\ 4npq\big),$$

由此形成了在经典装置底部观察到的熟悉的近似正态分布。对于对称情形，
$X_n \Rightarrow \mathcal{N}\big(0, \quad n\big)$.

6 物理圆柱模型

我们构建了一个由四个主要组件组成的实体圆柱形高尔顿板：

漏斗 顶部设有球料斗和漏斗，内含约 1000 颗小钢球轴承。**模块** 共五个模块，每个模块有 8 行钉子。每行最多包含 M =24 颗钉子，角间距恒定为 $\Delta\theta = 2\pi/24 = 15^\circ$。模块 1–3 含有三角形钉阵，模块 4–5 含有矩形阵列；所有钉排均错列排列。**收集槽** 圆柱体底部周围排列着一组间距相等的收集槽，共 $M = 24$ 个。**框架** 复位机构通过旋转装置，将小球从收集槽送回料斗。

小球落下后，经过 n行钉子后的角分布对应于缠绕二项分布 WB(n， M)，近似于卷绕正态（WN）分布。每增加一行钉子，小球就能越过对跖点再移动 $\Delta\theta/2 = 7.5^\circ$ 的角位移；我们将此称为“绕回至”。

表2：五模块物理模型的离散角分布

模块	**分布**
1	二项分布，其中 $n = 8$，在 $[-60^\circ, +60^\circ]$ 上逼近 WN
1–2	二项分布，其中 $n = 16$，在 $[-120^\circ, +120^\circ]$ 上逼近 WN
1–3	WB(24，24)，以全支撑集逼近 WN（-180°， 180°]
1–4	WB(32，24)，近似于 WN，绕回至 (-180°， -120°] 和 $[120^\circ, 180^\circ]$
1–5	WB(40，24)，近似于 WN，绕回至 (-180°， -60°] 和 $[60^\circ, 180^\circ]$

每个模块都嵌入在半径为 11.5 厘米（4.5 英寸）、高度为 8.3 厘米（3.25 英寸）的正圆柱体表面上，其中包含 8 行钉子。因此，钉区高度范围为 8.3 厘米（一个模块，8 行）至 41.5 厘米（五个模块，40 行），并且可以通过添加更多模块进一步延伸。

i 号钉排（$i = 1$、.....、 $n = 40$）包含 min(i， 24) 个钉子。模块 1–3 分别包含由 1–8、9–16 和 17–24 个钉子组成的三角形排列。模块 4–5 以及之后的任何模块，每行均包含 $M = 24$ 个钉子。每行钉子均以 0° 中线为中心排列，相邻各行按照经典高尔顿板几何结构错开 $\Delta\theta/2 = 7.5^\circ$。五个模块共包含 684 个钉子：三角形区域（模块 1–3 ）中有 300 个，矩形区域（模块 4–5 ）中有 384 个。

物理模型的参数（表3）经过选择，以确保：(i) 小球逐个穿过钉阵且互不干扰；(ii) 每个小球在每一行恰好撞击一颗钉子；(iii) 小球不会偏出钉阵两侧，这一点由前三个模块中的缓冲挡板加以保证；(iv) 五种物理构型对应于五种缠绕二项分布、2，以及缠绕正态极限的五个不同集中参数。

另一项考虑是，小球应沿圆柱面运动，或更准确地说，应保持在圆柱环带之内。钉子沿径向伸出 6 mm（0.25 in），小球直径为 4 mm（0.157 in）。该装置封装在一个透明塑料圆柱体内，其内径为 12.7 cm（5 in），壁厚为 6 mm（0.25 in）。当收集槽围绕同一内径为 4.5 in 的圆柱体布置时，小球以单层堆叠，通常呈 3–2–3–2 的模式，从而使各分箱中小球的相对高度形成一幅直方图，近似于缠绕二项分布和离散化缠绕正态密度。

通过增加容纳圆柱体的高度，可以任意增加模块的数量。六个模块（$n = 48$行）时，缠绕二项分布恰好覆盖圆两次 C_{24} 。表4将表2扩展到更多模块。请注意，将行分为每八行为一个模块只是出于构造上的便利，

表3：实体圆柱形高尔顿板的参数

符号	描述	数量	数值（cm）	数值（in）
H	总板高（5 个模块）		61	24
H_p	钉区高度（5 个模块）		41.5	16.25
W	插钉板直径		11.4	4.5
W^*	外圆筒内径		12.7	5
n	钉排数量（5 个模块）	40		
d	水平钉间距		1.5	0.589
h	垂直钉间距		1.02	0.4
r_{peg}	钉半径		0.1	0.04
r_{ball}	球半径		0.4	0.157
N	球的数量	1000		
M	箱格数量	24		
b	箱格宽度		1.4	0.549
H_b	箱格高度		13	5.1

而非圆柱形五点形装置的固有特征。

表4：扩展模型的进一步离散角分布

模块	**分布**
1–3	WB(24,24)，近似具有全支撑集的 WN（$-180°, 180°$]
1–6	WB(48,24)，近似 WN，绕圆卷绕一次
1–9	WB(72,24)，近似WN，绕圆卷绕两周
1–12	WB(96,24)，近似WN，绕圆卷绕三周

经典平面伽尔顿板通过中心极限定理得到正态分布。当卷绕到圆柱体上时，高尔顿板在$\mathbb{Z} \times S^1$上诱导随机游走，产生由圆统计学支配的缠绕二项分布和缠绕正态分布。

图6展示了我们的实体圆柱形高尔顿板的若干视图。左侧两张装置照片显示了模块1–5以及收集槽，此时小球尚未通过钉阵。右侧两个视图显示了2000个小球在收集槽中的分布，正视图展示了所得近似包裹正态分布的众数区域，下方视图则在装置背面展示了分布的尾部区域，包括卷绕的影响。这些视图表明，该物理模型产生的角分布紧密逼近缠绕正态分布。

7 讨论

此处介绍的圆柱形高尔顿板消除了平面设计固有的边缘效应，并为具有

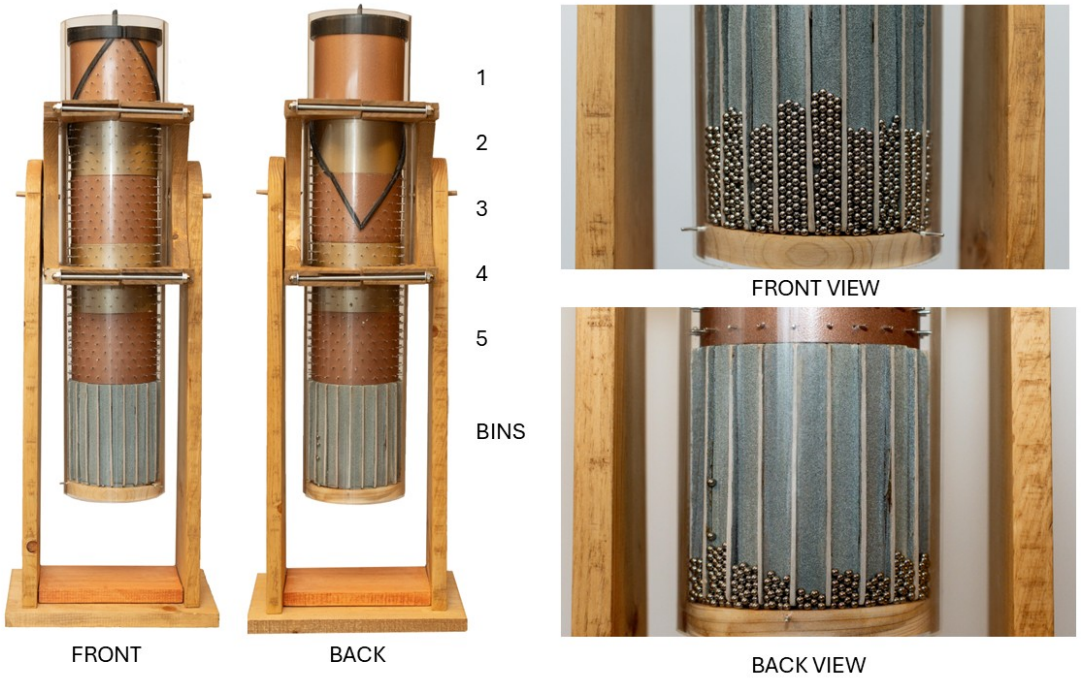


图6：我们的物理模型；左：展示完整正视图和后视图的模型，包含模块1至5和收集槽；右：收集槽中2000个小球的分布，正视图（上）和后视图（下）。

周期性边界条件的二项随机游走提供了自然的实体实现。通过施加角周期性，该装置将经典的左右偏转过程转化为紧流形S^1上的随机游走，从而将人们熟悉的十九世纪装置与圆统计学和流形上的随机过程等现代发展联系起来。

装置的几何形状对最终形成的分布行为起着决定性作用。在平面板上，水平位移在无界的线性区域内演变，经典中心极限定理给出高斯极限。在圆柱板上，相同的局部动力学发生在紧致区域内，从而产生缠绕二项分布和缠绕正态分布；对于固定的 M，最终会收敛到离散均匀分布。这一对比凸显了一个更广泛的原理：即使局部转移机制保持不变，状态空间的拓扑结构也会决定随机游走的整体行为。因此，圆柱板提供了一个罕见的实体演示，展示几何约束和边界条件如何影响概率极限。

从教学角度看，圆柱形高尔顿板具有若干优势。它为周期性边界条件提供了直观例证，而这一概念在从统计物理学到计算建模的诸多领域中都至关重要。它还具体演示了包裹分布；这类分布在方向统计学课程中通常以抽象方式引入。模块化构造使教师能够改变行数和分箱数量，从而让学生直接观察从二项分布到卷绕正态再到均匀分布行为的转变。这种灵活性

使该装置成为阐释几何、随机性与极限分布之间相互作用的宝贵教学工具。

该物理模型还具有方法论价值。由于这种装置可以通过添加模块进行扩展，因此它提供了一个可控环境，用于研究参数 n 和 M 如何影响包裹分布的形成。这使其适用于关注对称性、不变性和边界行为的模拟研究。圆柱板可作为紧群上的随机游走的物理类比，为验证圆统计学、随机过程以及 S^1上的调和分析中的理论结果提供实验平台。

除了直接应用之外，圆柱形高尔顿板还启发了若干值得进一步探索的方向。其中一个方向是研究有偏随机游走的行为：漂移与周期性的相互作用会产生非平凡的平稳分布。另一个方向是将研究扩展到高维流形，例如环面或球面上的随机游走；在曲面上嵌入钉柱晶格，或许可以构造相应的物理类比。第三个方向是进一步研究混合时间，以及收敛到卷绕正态分布或均匀分布的速率；这些可能会显著依赖于比值 n/M 和钉柱晶格的几何结构。

最后，圆柱形高尔顿板为 Galton 最初的装置赋予了现代诠释。Galton 使用平面板来演示回归、变异以及正态分布的形成，而圆柱形版本则将这些理念延伸至圆周情形，把经典概率论演示与当代统计理论联系起来。由此，它在历史直觉与现代几何视角之间架起桥梁，展现了简单的物理构造如何阐明深刻的概率原理。

8 致谢

我们谨向 John Kent 致谢，感谢他提出的宝贵意见。

参考文献

Dhungana, J. 和 Fragoso, M. D.（2016）《有限循环群上的随机游走》。随机过程及其应用，126，3714–3732。Galton, F.（1875年）《通过相互比较进行统计，并论误差频率定律》。《哲学杂志》第四辑，49，33–46。—（1877年）《遗传的典型规律》。英国皇家学会学报，8，282–301。—（1889年）《自然遗传》。伦敦：麦克米伦。

Kato, S.（2010）《用于圆周数据的马尔可夫过程》。英国皇家统计学会会刊：*B*辑，**72**，655–672。Kendall, M. G.（1948）《论广义“二项”分布》。*Biometrika*，**35**，28–44。Mardia, K. V. 和 Jupp, P. E.（2000）方向统计学。Wiley。Stigler, S. M.（1986年）统计学史：*1900*年以前的不确定性测量。哈佛大学出版社贝尔纳普出版社。Su, F. E.（1998）《由无理旋转生成的圆上的随机游走的收敛性》。美国数学会会刊，**350**，3717–3741。

A 附录：合成圆柱形高尔顿板

我们现在构造一块合成平面高尔顿板，再将其卷绕成圆柱体，制成圆柱形高尔顿板。该板由 $n = 10$ 排钉子组成，水平间距为 $d = 1$ 厘米，垂直间距为 $h = 0.8$厘米。小球再次以概率 $p = 0.5$在每个钉子处独立地向左或向右偏转，最终落入底部的 $M = n + 1 = 11$ 个收集槽。侧壁的倾斜角为$\theta = 30^\circ$ 。由此得到的收集槽计数近似符合二项分布；当n较大时，则近似符合正态分布，如图7所示。

卷绕合成板。 现在，我们将图7中的合成伽尔顿板卷绕起来。图3展示了卷绕后的圆柱形高尔顿板正视图，其中可以看到漏斗、由 $n = 11$ 排钉子构成的完整三角晶格，以及底部可见的一部分收集槽。该装置是将一块平面A4高尔顿板的短边（210毫米）绕半径为 $r \approx 33.4$ 毫米、高297毫米的圆柱体卷绕而成；板上有 $n = 11$ 排钉子和 $m = 11$ 个收集槽。在此投影中，只能看到圆形槽环的中央部分，因此收集槽标记为3至9，对应于完整的11个收集槽序列中的一段连续部分。这些收集槽中小球呈钟形堆积，反映了小球在每个钉子处随机左右偏转所产生的近似卷绕正态分布；与此同时，圆柱形外壳的弧度清楚地表明，可见范围之外还存在其他收集槽。

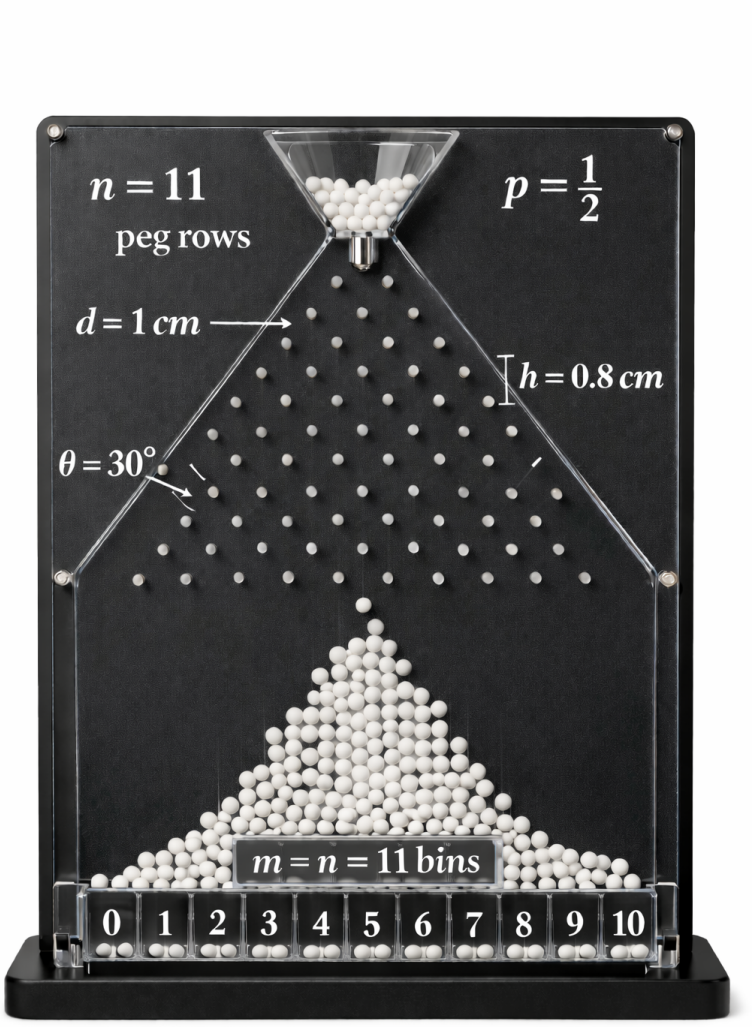


图7：合成伽尔顿板 经典平面高尔顿板 板尺寸= A4尺寸。m=箱格数量，n= 行。



图8：卷绕图7中的合成伽尔顿板。将这块平面A4板的短边卷绕后形成的圆柱形高尔顿板正视图。经论文转载。