arXiv:2603.07754v1 [math.OA] 8 Mar 2026

非交换 L^p-空间上的正等距傅里叶乘子

CHRISTOPH KRIEGLER、CHRISTIAN LE MERDY 和 SAFOURA ZADEH

Abstract. 对于局部紧群 G，设 $\mathcal{L}G$ 表示其左群冯·诺依曼代数，并设 $L^p(\mathcal{L}G)$、$1 \le p \le \infty$为相应的非交换 L^p-空间。给定 $\phi \in L^\infty(G)$，我们研究作用于 $L^p(\mathcal{L}G)$ 上的傅里叶乘子 $M_{\phi,\,p}$。我们证明，对于任意 $p \neq 2$，算子 $M_{\phi,\,p}$ 是正满射等距，当且仅当 ϕ 局部几乎处处与 G的某个连续特征一致。这一刻画推广了近期（与 C. Arhancet 合作）在幺模情形下获得的结果。

*2020*年数学主题分类：主要分类 46L51，次要分类 43A15、46B04、43A22。关键词：傅里叶乘子、非交换 L^p-空间、等距。

1. Introduction

设 Γ为交换局部紧群。Parrott [29] 与Strichartz [32] 证明，对于$p \neq 2$， $L^p(\Gamma)$上的傅里叶乘子 T 是等距，当且仅当存在 $c \in \mathbb{T}$、单位圆以及 $\gamma \in \Gamma$，使得 $T = c\,\tau_\gamma$，其中$\tau_\gamma(f) = f(\cdot - \gamma)$表示由 γ给出的平移。$\widehat{\ }$等价地， T 的符号是对偶群 $G = \Gamma$ 的连续特征乘以 $\mathbb{T}$ 中的一个元素。这一刻画揭示了交换情形下等距傅里叶乘子的强刚性现象。

对于非阿贝尔群，调和分析与傅里叶乘子理论自然导向左群冯·诺伊曼代数及其相伴的非交换L^p-空间这一框架。设 G 为配备左哈尔测度的局部紧群，并设$\mathcal{L}G \subset B(L^2(G))$表示其左群冯·诺依曼代数。该代数带有一个典范的正规半有限忠实权，即左普朗歇尔权。当 G为交换时， $\mathcal{L}G$ 等同于对偶群上的 L^∞-空间，且普朗歇尔权与关于对偶群上哈尔测度的积分相一致。普朗歇尔权是迹，当且仅当G是幺模的，此时 L^p 理论大为简化。

近年来，非交换 L^p 空间上的傅里叶乘子研究受到了广泛关注，而研究主要集中于幺模情形；例如参见 [7, 12, 27], 以及 [26] 和其中的参考文献。我们与 C. Arhancet 合作完成的工作 [2], 将等距傅里叶乘子的 Parrott–Strichartz刻画推广到了幺模/迹情形下的 $L^p(\mathcal{L}G)$，为这一研究方向作出了贡献。本文旨在将这一分析拓展到幺模框架之外。在非幺模情形中，模函数在左、右结构之间引入了内在的不对称性，而迹的缺失由此成为新的主要困难之一。因此， [2] 中的一些论证不再适用，必须以针对非迹权情形的新技巧取而代之。

非单模局部紧群自然出现在许多基本例子中，包括形如 $\mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}^+$ 的仿射群，以及更一般的 $ax+b$ 型群。直到最近，人们才开始系统研究这一情形下的 L^p-傅里叶乘子；参见[5, 6, 7, 9, 28, 38, 39, 40]。

在非迹情形下，非交换 L^p 空间有几种等价的构造，其中最著名的是 Haagerup、Connes–Hilsum 和 Kosaki 提出的构造（参见 [14, 18, 17,23, 36, 37]）。这些框架为将经典 L^p 空间自然推广到非交换语境提供了方法。本文采用 Connes–Hilsum 构造，研究 $L^p(\mathcal{L}G)$ 上的傅里叶乘子。

在第3节中，我们按照 [40], 的方法回顾 $1 \leq p < \infty$ 情形下 $L^p(\mathcal{L}G)$ 上有界傅里叶乘子的定义，并证明这一概念的各种自然表述彼此等价。我们特别关注值域 $p < 2$；现有关于非幺模群上傅里叶乘子的文献通常仅简要讨论这一范围。我们的目标是填补这一空白。

设 $1 \leq p < \infty$ 与 $\phi \in L^\infty(G)$。我们称 ϕ 是 $L^p(\mathcal{L}G)$ 上的有界傅里叶乘子，如果存在 $C \geq 0$ 使得对所有 $f \in \mathcal{H} * \mathcal{H}$,

$$\Delta^{\frac{1}{2p}} \lambda(\phi f) \Delta^{\frac{1}{2p}} \in L^p(\mathcal{L}G) \quad \text{and} \quad \left\| \Delta^{\frac{1}{2p}} \lambda(\phi f) \Delta^{\frac{1}{2p}} \right\|_p \leq C \left\| \Delta^{\frac{1}{2p}} \lambda(f) \Delta^{\frac{1}{2p}} \right\|_p.$$

这里， $\mathcal{H} = \{f \in L^2(G) : \text{支集}(f)\text{是紧的}\}$，且 Δ 表示由 G 的模函数作乘法的算子。在此情形下，映射

$$\Delta^{\frac{1}{2p}} \lambda(f) \Delta^{\frac{1}{2p}} \longmapsto \Delta^{\frac{1}{2p}} \lambda(\phi f) \Delta^{\frac{1}{2p}}, \qquad f \in \mathcal{H} * \mathcal{H},$$

唯一地延拓为一个有界算子 $M_{\phi,p}$: $L^p(\mathcal{L}G) \to L^p(\mathcal{L}G)$。

在第4节中，我们证明 ϕ是 $L^p(\mathcal{L}G)$ 上的有界傅里叶乘子当且仅当它是 $L^{p'}(\mathcal{L}G)$ 上的有界傅里叶乘子，其中 $p^{-1} + p'^{-1} = 1$。我们还证明， G 的连续特征对所有 p 都给出 $L^p(\mathcal{L}G)$ 上的正的满射等距傅里叶乘子。我们的主要结果定理 5.3 对 $p \neq 2$ 建立了逆命题：若 $M_{\phi,p}$ 是一个正的傅里叶乘子且为满射等距映射，则 ϕ 与 G 的一个连续特征局部几乎处处重合。

第 6 节专门讨论 $p = 1$ 和 $p = 2$的端点情形。我们证明，为 $1 < p \neq 2 < \infty$ 建立的刚性现象在 $p = 1$仍然成立，无需任何正性假设；而在 $p = 2$，只需满足稍强的条件即可。

2. Group von Neumann algebras and their non-commutative L^p-spaces

2.1. 加权冯·诺伊曼代数$(\mathcal{L}G,\ \varphi_0)$和$(\mathcal{R}G,\ \psi_0)$。我们简要回顾左、右群冯·诺伊曼代数的定义，先介绍局部紧群所需的背景知识；详情请参见 [11], [13, 第 2], [34, 章 18]和 [35, 第 VII 节3]。

设 G 是一个配备固定左哈尔测度 dt 的局部紧群。对于$1 \leq p < \infty$，我们用 $\|\cdot\|_p$ 表示相应 L^p-空间 $L^p(G)$上的范数。

给定任意两个局部可测函数 $\phi_1,\ \phi_2$: $G \to \mathbb{C}$，若集合 $\{\phi_1 \neq \phi_2\}$ 是局部零测集，则称 $\phi_1 = \phi_2$局部几乎处处。令 $L^\infty(G)$ 表示局部可测函数 ϕ: $G \to \mathbb{C}$ 的空间，这些函数除局部零测集外均有界，并对

局部几乎处处为零的函数取商。配备

$$\|\phi\|_\infty = \inf\{c : |\phi(t)| \le c \text{ locally a.e.}\},$$

这是一个巴拿赫空间。对任意 $\phi \in L^\infty(G)$与 $f \in L^1(G)$，乘积 $\phi f \in L^1(G)$都是良定义的。此外，对偶配对 $\langle \phi, f\rangle = \int_G \phi f$给出一个等距等同$L^\infty(G) = L^1(G)^*$。当 G 为 σ-紧时， $L^\infty(G)$与关于哈尔测度的通常勒贝格 L^∞-空间相重合，尽管这两个空间在一般情况下可能不同。详见 [11, 第2节。3]，另见 [2, 引理3。2] 及随后的讨论。在 $L^\infty(G)$中，我们区分两个重要的子空间。子空间 $C_b(G)$由 G上的所有有界连续函数组成，子空间 $C_c(G)$由紧支撑连续函数组成。

最后，我们回顾模函数 $\Delta\colon\ G \to (0, \infty)$。它是一个连续群同态，由左哈尔测度在右平移和取逆下的变换方式定义。更确切地说，我们有

$$\int_G f(t)\,dt = \int_G \Delta(t)^{-1} f(t^{-1})\,dt, \qquad f \in L^1(G),$$

and

$$\int_G f(ts)\,dt = \Delta(s)^{-1} \int_G f(t)\,dt, \qquad f \in L^1(G).$$

在下文中，我们将不时使用这两个性质。

接下来，我们回顾局部紧群的正则表示的定义。左、右表示 λ， $\rho\colon\ G \to B(L^2(G))$ 定义为

$$[\lambda(t)h](s) = h(t^{-1}s), \qquad \text{and} \qquad [\rho(t)h](s) = \Delta(t)^{\frac{1}{2}} h(st),$$

对任意 t， $s \in G$ 和 $h \in L^2(G)$。

令 $\mathcal{L}G \subset B(L^2(G))$ 和 $\mathcal{R}G \subset B(L^2(G))$ 分别表示由 $\lambda(G)$ 和 $\rho(G)$ 生成的冯·诺伊曼代数。它们称为 G的左、右群冯·诺伊曼代数，且互为交换子，即

$$\mathcal{R}G = \mathcal{L}G'. \tag{2.1}$$

代数 $\mathcal{L}G$ 可通过卷积算子作具体描述。事实上，给定$f \in L^1(G)$，我们定义

$$\lambda(f) = \int_G f(t)\lambda(t)\,dt,$$

其中该积分按强意义理解。所得算子通过左卷积作用于 $L^2(G)$，即对所有 $h \in L^2(G)$，有 $[\lambda(f)](h)(s) = (f \star h)(s) = \int_G f(t)h(t^{-1}s)\,dt$。此外， $\lambda(f)$ 属于 $\mathcal{L}G$，且满足 $\|\lambda(f)\| \le \|f\|_1$。像 $\lambda(L^1(G))$ 在 $\mathcal{L}G$ 中是 w^*-稠密的，并且由于 $C_c(G) \subset L^1(G)$ 是稠密子空间，对 $\lambda(C_c(G))$ 同样成立。

映射 $f \mapsto \lambda(f)$ 同时保持代数与对合结构。事实上，对所有 $f_1, f_2 \in L^1(G)$，有 $\lambda(f_1 \star f_2) = \lambda(f_1)\lambda(f_2)$。若对任意 $f \in L^1(G)$， f^* 定义为

$$f^*(t) = \Delta(t)^{-1}\overline{f(t^{-1})},$$

那么 $f^* \in L^1(G)$ 和 $\lambda(f)^* = \lambda(f^*)$。因此， $\lambda(L^1(G))$ 是 $\mathcal{L}G$ 的一个 $*$-子代数。

与 $\mathcal{L}G$ 相关联的是左普朗歇尔权 φ_0: $\mathcal{L}G^+ \longrightarrow [0,\infty]$. 此权是正规、半有限且忠实的，并由以下恒等式刻画：

$$\varphi_0\big(\lambda(f)^*\lambda(f)\big) = \|f\|_2^2, \qquad f \in L^1(G) \cap L^2(G). \tag{2.2}$$

群上的模性质反映在 φ_0的迹性质中： φ_0 是迹，当且仅当 G 是幺模的（即 $\Delta \equiv 1$）。

类似的构造也适用于右 von Neumann 代数 $\mathcal{R}G$。右 Plancherel 权重 ψ_0 在 $\mathcal{R}G$ 上正规、半有限且忠实，并满足

$$\psi_0\big(\rho(f)^*\rho(f)\big) = \|f\|_2^2, \qquad f \in L^1(G) \cap L^2(G).$$

这两个普朗歇尔权重通过群 von Neumann 代数的标准形相关（例如参见 [17, 第 3]章）。事实上，设 $\mathfrak{J}$: $L^2(G) \to L^2(G)$是定义在 $L^2(G)$上的反酉算子，定义为 $[\mathfrak{J}(h)](s) = \Delta(s)^{-\frac{1}{2}} h s^{-1}$。该算子以如下意义交织左正则表示与右正则表示：对于所有 $t \in G$， $\mathfrak{J}\lambda(t)\mathfrak{J} = \rho(t)$。因此，权重 φ_0 和 ψ_0 通过与 $\mathfrak{J}$ 共轭而具有如下关系

$$\psi_0(a) = \varphi_0(\mathfrak{J}a\mathfrak{J}), \qquad a \in \mathcal{R}G^+. \tag{2.3}$$

2.2. 空间 $L^p(\mathcal{L}G)$。 我们简要回顾适用于群 von Neumann 代数的形式下，非交换 L^p-空间的 Connes–Hilsum 构造。关于一般构造及其基本性质，以及它与 [14], 中定义的 Haagerup 非交换L^p-空间之间的关系，请参阅 [17, 第 11 节3]或原始论文 [18]。更多背景知识及相关结果可见于 [36] 和 [15, 第 1] 节。

对于 $1 \le p \le \infty$，我们用 $L^p(\mathcal{L}G)$ 表示与三元组 $(\mathcal{L}G,\ L^2(G)\ \psi_0)$ 相关联的 *Connes–Hilsum* 非交换 -空间。 这些空间在 [38] 中得到了详细研究。下文中，我们仅回顾后续将用到的性质；证明及更多细节请参阅 [38] （另见 [17, 第 11] 章和 [40]）。

在下文中，我们将 Δ 与乘法算子

$$h \mapsto \Delta h$$

在 $L^2(G)$ 上等同起来。这是一个闭的稠密定义算子，其定义域为

$$\{h \in L^2(G) : \Delta h \in L^2(G)\}.$$

同样的约定也适用于以任意可测函数 $G \to \mathbb{C}$ 替代 Δ的情形，尤其适用于任意 $z \in \mathbb{C}$对应的函数 Δ^z。

给定 $\mathcal{L}G$上的正规半有限权 φ ，我们用$\frac{d\varphi}{d\psi_0}$ 表示其相对于ψ_0 的空间导数（例如，参见 [17, 定义 11.14]）。这是作用在 $L^2(G)$ 上的正算子。如 [38, 第 551], 页所示，左普朗歇尔权相对于右 Plancherel 权重的空间导数为

$$\frac{d\varphi_0}{d\psi_0} = \Delta. \tag{2.4}$$

这个恒等式也可以由 [8, 引理 10]或 [17, 命题11.6], 利用(2.3)推出。

设 A_0 为 $L^2(G)$上附属于 $\mathcal{L}G$的闭且稠密定义算子所构成的空间。对实数 $\alpha \neq 0$，设 A_α 为 $L^2(G)$上所有闭且稠密定义算子 a 的集合，使得若 $a = u|a|$ 是 a的极分解，则 $u \in \mathcal{L}G$，并且存在 $\mathcal{L}G$ 上的正规半有限权 φ 满足

$$|a| = \Big(\frac{d\varphi}{d\psi_0}\Big)^{\alpha}. \tag{2.5}$$

在这种情况下，权重 φ 由 a 唯一确定。

每个 A_α 在算子的强和与通常的数乘运算下都是一个复向量空间。它与所谓的（$-\alpha$）齐次算子相一致（参见 [38, 第 2] 节或 [17, 第 202–203] 页），并且在取伴随算子时封闭。此外，族 $(A_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ 与乘法相容：若 $a \in A_\alpha$, $b \in A_\beta$，则算子 ab 的定义域为

$$\{h \in \mathrm{dom}(b) \,:\, b(h) \in \mathrm{dom}(a)\},$$

是可闭的，其闭包属于 $A_{\alpha+\beta}$（参见 [38, 注 2.2] 或 [40, 引理 2.4.2]），而且这一运算满足结合律。ab 的闭包称为 a 与 b 的强积，按照惯例，后文将其简记为 ab 。

根据 (2.4)，Δ 属于 A_1。因此，对于任意 $z \in \mathbb{C}$，都有 $\Delta^z \in A_{\mathrm{Re}(z)}$。所以，对于任意$f \in L^1(G)$和 z_1，$z_2 \in \mathbb{C}$，算子

$$\Delta^{z_1}\lambda(f)\Delta^{z_2} \in A_{\mathrm{Re}(z_1)+\mathrm{Re}(z_2)} \tag{2.6}$$

是良定义的。

令 $\mathcal{L}G_*$ 表示 $\mathcal{L}G$的预对偶，并令 $1 \leq p < \infty$。根据定义，非交换L^p-空间 $L^p(\mathcal{L}G)$ 是所有满足以下条件的$a \in A_1$ 的集合：对于某个$\varphi \in \mathcal{L}G_*^+$，(2.5) 成立。在这种情况下，我们定义

$$\|a\|_p = [\varphi(1)]^{\frac{1}{p}}.$$

赋予此范数后，$L^p(\mathcal{L}G)$ 成为一个巴拿赫空间，并且自然地包含于A_p中。此外，对于所有 $a \in L^p(\mathcal{L}G)$，$a^* \in L^p(\mathcal{L}G)$，并满足

$$\|a^*\|_p = \|a\|_p.$$

按照约定，$L^\infty(\mathcal{L}G) = \mathcal{L}G$。

正锥 $L^p(\mathcal{L}G)^+$ 按定义由这样的 $a \in L^p(\mathcal{L}G)$组成：它们作为希尔伯特空间上的（闭且稠密定义的）算子，按照（2.5）的意义是正的；而有界算子 S：$L^p(\mathcal{L}G) \to L^p(\mathcal{L}G)$ 若将 $L^p(\mathcal{L}G)^+$ 映射到 $L^p(\mathcal{L}G)^+$中，则称为正。

对任意 $1 \leq p, q, r \leq \infty$ 且 $p^{-1} + q^{-1} = r^{-1}$，乘积映射

$$A_{\frac{1}{p}} \times A_{\frac{1}{q}} \longrightarrow A_{\frac{1}{r}}$$

由上述讨论所产生者限制为一个压缩双线性映射

$$L^p(\mathcal{L}G) \times L^q(\mathcal{L}G) \longrightarrow L^r(\mathcal{L}G).$$

特别地，取 $q = \infty$ 表明，对每一个 $p \geq 1$，空间 $L^p(\mathcal{L}G)$ 是一个压缩$\mathcal{L}G$-双模。

该对应

$$\varphi \in \mathcal{L}G_*^+ \longmapsto \frac{d\varphi}{d\psi_0} \in L^1(\mathcal{L}G)^+$$

可延拓为等距的 $\mathcal{L}G$-双模同构 $\tau\colon \mathcal{L}G_* \to L^1(\mathcal{L}G)$。这一识别使我们能够定义一个压缩线性泛函

$$\mathrm{Tr}\colon L^1(\mathcal{L}G) \longrightarrow \mathbb{C}$$

通过对每个 $\varphi \in \mathcal{L}G_*$ 设 $\mathrm{Tr}(\tau(\varphi)) = \varphi(1)$。这个泛函通常称为相对于 ψ_0 的积分（参见 [17, 第 203] 页或 [38, 第 554] 页），并在非幺模情形下提供了迹的恰当替代。

令 $p' = p/(p-1)$ 表示 p 的共轭指数。利用这个泛函，可以在 $L^p(\mathcal{L}G)$ 与 $L^{p'}(\mathcal{L}G)$ 之间定义自然的对偶配对：

$$\langle a, b\rangle = \mathrm{Tr}(ab), \qquad a \in L^p(\mathcal{L}G),\ b \in L^{p'}(\mathcal{L}G).$$

这个配对将 $L^{p'}(\mathcal{L}G)$ 等距地识别为 $L^p(\mathcal{L}G)$ 的对偶空间。

最后，空间 $L^2(\mathcal{L}G)$ 带有希尔伯特空间结构，其内积为

$$(a \mid b) = \mathrm{Tr}(b^*a), \qquad a, b \in L^2(\mathcal{L}G).$$

2.3.一些稠密子空间。本节中，我们介绍$L^p(\mathcal{L}G)$的某些稠密子空间，它们构成了定义有界傅里叶乘子的基础。我们首先回顾与左普朗歇尔权 φ_0相关时常用的 $\mathcal{L}G$ 子空间。令

$$\mathcal{N} = \{x \in \mathcal{L}G\,:\,\varphi_0(x^*x) < \infty\} \qquad \text{and} \qquad \mathcal{M} = \mathrm{Span}\{y^*x\,:\,x, y \in \mathcal{N}\}. \tag{2.7}$$

众所周知，$\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{L}G$的一个 w^*-稠密左理想，而 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{L}G$的一个 w^*-稠密 $*$-子代数；例如参见 [35, 第 VII.1]节。应用适用于一般 Connes-Hilsum L^p-空间的 [37, 定理 26], ，可得以下结果。

引理 2.1。设 $1 \le p < \infty$。

(1) 若 $p \ge 2$，则对所有 $x \in \mathcal{N}$，$x\Delta^{\frac{1}{p}} \in L^p(\mathcal{L}G)$。(2) 对任意 p，乘积 $\Delta^{\frac{1}{2p}} x \Delta^{\frac{1}{2p}}$ 对所有 $x \in \mathcal{M}$都属于$L^p(\mathcal{L}G)$ 。

在特殊情形 $p = 2$ 下，我们进一步有 $\lambda(L^1(G) \cap L^2(G)) \subset \mathcal{N}$ 且

$$\|\lambda(f)\Delta^{\frac{1}{2}}\|_2 = \|f\|_2, \qquad f \in L^1(G) \cap L^2(G), \tag{2.8}$$

见 [38, 定理 3.2]。

令 $C_c(G) \star C_c(G)$ 表示由所有卷积 $f \star g$ with $f,\ g \in C_c(G)$ 线性张成的空间。由引理 2.1 可知，对所有 $1 \le p < \infty$,

$$\Delta^{\frac{1}{2p}}\, \lambda(C_c(G) \star C_c(G))\, \Delta^{\frac{1}{2p}} \subset L^p(\mathcal{L}G),$$

且对所有 $2 \le p < \infty$,

$$\lambda(C_c(G))\, \Delta^{\frac{1}{p}} \subset L^p(\mathcal{L}G).$$

下一个引理证明这些子空间实际上是稠密的。

引理 2.2。设 $1 \le p < \infty$。

(1) 若 $p \ge 2$，则 $\lambda(C_c(G))\Delta^{\frac{1}{p}}$ 是 $L^p(\mathcal{L}G)$ 的稠密子空间。

(2) 对于任意 p，空间

$$\Delta^{\frac{1}{2p}}\lambda(C_c(G)\star C_c(G))\Delta^{\frac{1}{2p}}$$

在 $L^p(\mathcal{L}G)$ 中稠密。

证明。 断言 (1) 由 [38, 定理 4.5 的证明]得出。断言 (2) 是将 (1) 应用于指标 $2p$，再利用压缩乘积

$$L^{2p}(\mathcal{L}G)\times L^{2p}(\mathcal{L}G)\longrightarrow L^p(\mathcal{L}G).$$ □

3. Bounded Fourier multipliers on $L^p(\mathcal{L}G)$

本节中，我们在 $L^p(\mathcal{L}G)$ 上引入有界傅里叶乘子，并证明这些乘子的所有自然定义彼此等价。我们的方法依赖于与左普朗歇尔权 φ_0 相关的模结构，以及对 $L^p(\mathcal{L}G)$ 中一个便利的稠密子空间的识别；在该子空间上，傅里叶乘子可以通过规范的方式定义。此子空间由紧支撑函数所对应的算子构成，并且在模作用下具有良好的稳定性和解析性。

设 $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 是权 φ_0的模自同构群。那么

$$\sigma_t(x)=\Delta^{it}x\Delta^{-it}$$

对所有 $x\in\mathcal{L}G$ 和所有 $t\in\mathbb{R}$，见 [13, 第 2] 节。这意味着

$$\sigma_t(\lambda(f))=\lambda(\Delta^{it}f),\qquad f\in L^1(G),\, t\in\mathbb{R}.$$

我们用 $\mathcal{L}G_a$ 表示满足以下条件的所有 $x\in\mathcal{L}G$ 的集合： $t\mapsto\sigma_t(x)$ 可延拓为定义在 $\mathbb{C}$ 上的整函数。这样的元素称为解析的，参见例如 [35, 第 VIII.2] 节。

接下来，我们引入空间

$$\mathcal{H}=\big\{f\in L^2(G)\,:\,\mathrm{Supp}(f)\text{ is compact}\big\}.$$

显然， $\mathcal{H}\subset L^1(G)\cap L^2(G)$，因此 $\lambda(f)$ 对于 $f\in\mathcal{H}$ 是良定义的。此外，对于任意 $z\in\mathbb{C}$，我们有 $\Delta^z f\in\mathcal{H}$。因此， $\lambda(f)$ 属于 $\mathcal{L}G_a$，且我们有

$$\sigma_{-iz}(\lambda(f))=\lambda(\Delta^z f),\qquad f\in\mathcal{H},\, z\in\mathbb{C}.$$

因此，由上述内容可得

$$\lambda(\Delta^z f)=\Delta^z\lambda(f)\Delta^{-z},\qquad f\in\mathcal{H},\, z\in\mathbb{C}. \tag{3.1}$$

我们还注意到

$$\mathcal{H}\star\mathcal{H}\subset\mathcal{H}\qquad\text{and}\qquad L^\infty(G)\cdot\mathcal{H}=\mathcal{H}. \tag{3.2}$$

对于任意 $1\le p<\infty$，我们引入

$$\mathcal{B}_p=\Delta^{\frac{1}{2p}}\lambda(\mathcal{H}\star\mathcal{H})\Delta^{\frac{1}{2p}}.$$

由引理 2.1 和 2.2 可知，这是 $L^p(\mathcal{L}G)$ 的一个稠密子空间。

定义 3.1。 设 $\phi\in L^\infty(G)$，并设 $1\le p<\infty$。若存在常数 $C\ge 0$，使得对所有 $f\in\mathcal{H}\star\mathcal{H}$, 均有 ϕ，则称 ϕ 是 $L^p(\mathcal{L}G)$ 上的有界傅里叶乘子。

$$\Delta^{\frac{1}{2p}}\lambda(\phi f)\Delta^{\frac{1}{2p}}\in L^p(\mathcal{L}G)\qquad and\qquad \big\|\Delta^{\frac{1}{2p}}\lambda(\phi f)\Delta^{\frac{1}{2p}}\big\|_p\le C\big\|\Delta^{\frac{1}{2p}}\lambda(f)\Delta^{\frac{1}{2p}}\big\|_p.$$

注意，由 (2.6) 可知，对于任意 $f \in \mathcal{H}\star\mathcal{H}$，$\Delta^{\frac{1}{2p}}\lambda(\phi f)\Delta^{\frac{1}{2p}}$属于 A_p。然而，没有任何先验理由表明它属于 $L^p(\mathcal{L}G)$。

若 ϕ 是 $L^p(\mathcal{L}G)$上的有界傅里叶乘子，则映射

$$\Delta^{\frac{1}{2p}}\lambda(f)\Delta^{\frac{1}{2p}} \mapsto \Delta^{\frac{1}{2p}}\lambda(\phi f)\Delta^{\frac{1}{2p}}, \qquad f \in \mathcal{H},$$

可唯一延拓为有界算子 $M_{\phi,\,p}\colon\ L^p(\mathcal{L}G) \longrightarrow L^p(\mathcal{L}G)$。

现在我们汇总一系列注记，说明关于 $L^p(\mathcal{L}G)$上有界傅里叶乘子的所有合理表述都是等价的。

注 3.2。考虑 $\phi \in L^\infty(G)$、$1 \le p < \infty$和 $\theta \in [0,1]$。我们证明，ϕ 是 $L^p(\mathcal{L}G)$上的有界傅里叶乘子，当且仅当存在常数 $C \ge 0$，使得对所有$f \in \mathcal{H}\star\mathcal{H}$,

$$\Delta^{\frac{\theta}{p}}\lambda(\phi f)\Delta^{\frac{1-\theta}{p}} \in L^p(\mathcal{L}G) \quad \text{and} \quad \big\|\Delta^{\frac{\theta}{p}}\lambda(\phi f)\Delta^{\frac{1-\theta}{p}}\big\|_p \le C\big\|\Delta^{\frac{\theta}{p}}\lambda(f)\Delta^{\frac{1-\theta}{p}}\big\|_p. \tag{3.3}$$

假设 $\theta \in \big[\frac{1}{2},1\big]$，并令 $c \ge 0$满足 $\frac{\theta}{p} = \frac{1}{2p} + c$。对于任意 $f \in \mathcal{H}\star\mathcal{H}$，利用 (3.1) 可得

$$\Delta^{\frac{\theta}{p}}\lambda(f)\Delta^{\frac{1-\theta}{p}} = \Delta^{\frac{1}{2p}}\lambda(\Delta^c f)\Delta^{\frac{1}{2p}}.$$

由于 Δ 是 乘法性的，乘以 Δ^c 会将 $\mathcal{H}\star\mathcal{H}$ 映射到其自身，因此

$$\mathcal{B}_p = \Delta^{\frac{\theta}{p}}\lambda(\mathcal{H}\star\mathcal{H})\Delta^{\frac{1-\theta}{p}}.$$

同样，由 (3.2) 和 (3.1)，对所有 $f \in \mathcal{H}\star\mathcal{H}$，我们有

$$\Delta^{\frac{\theta}{p}}\lambda(\phi f)\Delta^{\frac{1-\theta}{p}} = \Delta^{\frac{1}{2p}}\lambda(\phi\Delta^c f)\Delta^{\frac{1}{2p}}.$$

由此可知，(3.3) 中的不等式等价于映射

$$\Delta^{\frac{1}{2p}}\lambda(f)\Delta^{\frac{1}{2p}} \longmapsto \Delta^{\frac{1}{2p}}\lambda(\phi f)\Delta^{\frac{1}{2p}}$$

在 $L^p(\mathcal{L}G)$ 的稠密子空间$\Delta^{\frac{1}{2p}}\lambda(\mathcal{H}\star\mathcal{H})\Delta^{\frac{1}{2p}}$ 上有界，而这恰好就是 ϕ 是 $L^p(\mathcal{L}G)$ 上有界傅里叶乘子的定义。在这种情况下，

$$M_{\phi,p}\Big(\Delta^{\frac{\theta}{p}}\lambda(f)\Delta^{\frac{1-\theta}{p}}\Big) = \Delta^{\frac{\theta}{p}}\lambda(\phi f)\Delta^{\frac{1-\theta}{p}}, \qquad f \in \mathcal{H}\star\mathcal{H}.$$

当 $\theta \in \big[0,\frac{1}{2}\big]$时，可以用类似的论证，写作 $\frac{1-\theta}{p} = \frac{1}{2p} + c$。

在情形 $p = 2$ 下，情况大为简化，我们得到如下.

推论 3.3. 设 $\phi \in L^\infty(G)$。则 ϕ 是 $L^2(\mathcal{L}G)$ 上的有界傅里叶乘子，而且，$\|M_{\phi,2}\| = \|\phi\|_\infty$.

证明。设 $f \in \mathcal{H}\star\mathcal{H}$。利用 (2.8)，我们有 $\|\lambda(f)\Delta^{\frac{1}{2}}\|_2 = \|f\|_2$ 和 $\|\lambda(\phi f)\Delta^{\frac{1}{2}}\|_2 = \|\phi f\|_2$。将注 3.2 应用于 $p = 2$ 和 $\theta = 0$，即可得到结论。□

注 3.4. 设 $\phi \in L^\infty(G)$，并设 $2 \le p < \infty$。

(1) 我们设

$$\mathcal{C}_p = \lambda(\mathcal{H})\Delta^{\frac{1}{p}}.$$

由引理 2.1 和 2.2 可知，这是 $L^p(\mathcal{L}G)$ 的一个稠密子空间。此外，根据 (3.2) 的后半部分，对于任意 $f \in \mathcal{H}$，$\lambda(\phi f)\Delta^{\frac{1}{p}}$属于 $L^p(\mathcal{L}G)$。我们声称，ϕ是 $L^p(\mathcal{L}G)$ 上的有界傅里叶乘子，当且仅当存在常数 $C \geq 0$ 使得

$$\big\|\lambda(\phi f)\Delta^{\frac{1}{p}}\big\|_p \leq C\big\|\lambda(f)\Delta^{\frac{1}{p}}\big\|_p, \qquad f \in \mathcal{H}. \tag{3.4}$$

“如果 part’由定义 3.1 的前半部分和注 3.2 a pp与 $\theta = 0$一起应用。

为证明“仅当”部分，假设 ϕ 是 $L^p(\mathcal{L}G)$上的有界傅里叶乘子，并考虑所得映射$M_{\phi,p}$: $L^p(\mathcal{L}G) \to L^p(\mathcal{L}G)$。我们需要 [38, 定理 4.5，(1)] ，它断言

$$\big\|\lambda(f)\Delta^{\frac{1}{p}}\big\|_p \leq \|f\|_{p'}, \qquad f \in L^1(G) \cap L^2(G). \tag{3.5}$$

这里 p' 是 p的共轭指数。

设 $f \in \mathcal{H}$。存在一个紧子集 $K \subset G$ 以及一个序列 $(g_n)_{n\geq 1}$，其中各项属于 $\mathcal{H} \star \mathcal{H}$，使得对于所有 $n \geq 1$ 和 $\|g_n - f\|_{p'} \to 0$，都有 $\mathrm{Supp}(g_n) \subset K$。这意味着 $\|\phi g_n - \phi f\|_{p'} \to 0$。然后，将 (3.5) 应用两次，可得

$$\lambda(\phi f)\Delta^{\frac{1}{p}} = \lim_n \lambda(\phi g_n)\Delta^{\frac{1}{p}} = \lim_n M_{\phi,p}\big(\lambda(g_n)\Delta^{\frac{1}{p}}\big) = M_{\phi,p}\big(\lambda(f)\Delta^{\frac{1}{p}}\big).$$

由此得到 (3.4)，其中 $C = \|M_{\phi,\ p}\|$。

(2) 按照注 3.2 中的论证，我们得到对于任意 $\theta \in [0,1]$,

$$\mathcal{C}_p = \Delta^{\frac{\theta}{p}}\lambda(\mathcal{H})\Delta^{\frac{(1-\theta)}{p}},$$

并且，ϕ 是 $L^p(\mathcal{L}G)$ 上的有界傅里叶乘子，当且仅当存在一个常数$C \geq 0$ 使得

$$\big\|\Delta^{\frac{\theta}{p}}\lambda(\phi f)\Delta^{\frac{(1-\theta)}{p}}\big\|_p \leq C\big\|\Delta^{\frac{\theta}{p}}\lambda(f)\Delta^{\frac{(1-\theta)}{p}}\big\|_p, \qquad f \in \mathcal{H}.$$

此外，在这种情况下，

$$M_{\phi,p}\Big(\Delta^{\frac{\theta}{p}}\lambda(f)\Delta^{\frac{(1-\theta)}{p}}\Big) = \Delta^{\frac{\theta}{p}}\lambda(\phi f)\Delta^{\frac{(1-\theta)}{p}}, \qquad f \in \mathcal{H}.$$

我们以一个对偶结果结束本节，该结果推广了 [1, 引理 6.4]。对于任意 $g \in L^1(G) + L^\infty(G)$，令 $\check{g}(t) = g(t^{-1})$。采用这一记号，对于所有 $g \in L^1(G)$，有 $g^* = \Delta^{-1}\check{\bar{g}}$。显然，对于任意 $g \in \mathcal{H}$，$\Delta^{-\frac{1}{2}}\check{g} \in \mathcal{H}$。因此，$g^* \in \mathcal{H}$，进而由引理 2.1 的第 (1) 部分可得，$\Delta^{\frac{1}{2}}\lambda(g) = \big(\lambda(g^*)\Delta^{\frac{1}{2}}\big)^* \in L^2(\mathcal{L}G)$。现在我们断言

$$\mathrm{Tr}\big(\Delta^{\frac{1}{2}}\lambda(g)\lambda(f)\Delta^{\frac{1}{2}}\big) = \int_G \Delta(t)^{-1}g(t^{-1})f(t)\,dt, \qquad f, g \in \mathcal{H}. \tag{3.6}$$

根据上述讨论，该等式两边都有定义。由极化可知，只需在 $g = f^*$ 时证明该等式。在这种情况下，根据 (2.8)，(3.6) 两边都等于 $\|f\|_2^2$。因此，所需的等式成立。

命题 3.5. 设 $1 < p < \infty$，设 p' 表示其共轭指数，并设 $\phi \in L^\infty(G)$。若 ϕ 是 $L^p(\mathcal{L}G)$ 上的有界傅里叶乘子，则 $\check{\ }\ \phi$ 是$L^{p'}(\mathcal{L}G)$ 上的有界傅里叶乘子，且 $M^*_{\phi,p} = M_{\check{\phi},p'}$.

证明。 首先假设 $p \le 2$，并设 $T = M_{\phi,\ p}$。 设 $g \in \mathcal{H}$ 与 $f \in \mathcal{H} \star \mathcal{H}$。由注 3.2 及 (3.1)，我们有

$$\begin{aligned}\Big\langle T^*\big(\Delta^{\frac{1}{p'}}\lambda(g)\big), \Delta^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\lambda(f)\Delta^{\frac{1}{2}}\Big\rangle &= \Big\langle \Delta^{\frac{1}{p'}}\lambda(g), T\big(\Delta^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\lambda(f)\Delta^{\frac{1}{2}}\big)\Big\rangle \\ &= \Big\langle \Delta^{\frac{1}{p'}}\lambda(g), \Delta^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\lambda(\phi f)\Delta^{\frac{1}{2}}\Big\rangle \\ &= \mathrm{Tr}\Big(\Delta^{\frac{1}{p'}}\lambda(g)\Delta^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\lambda(\phi f)\Delta^{\frac{1}{2}}\Big) \\ &= \mathrm{Tr}\Big(\Delta^{\frac{1}{2}}\lambda\big(\Delta^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}g\big)\lambda(\phi f)\Delta^{\frac{1}{2}}\Big).\end{aligned}$$

因此，由 (3.6) 可得，

$$\Big\langle T^*\big(\Delta^{\frac{1}{p'}}\lambda(g)\big), \Delta^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\lambda(f)\Delta^{\frac{1}{2}}\Big\rangle = \int_G \Delta(t)^{-\frac{1}{p'}-\frac{1}{2}} g(t^{-1})\phi(t)f(t)\,dt.$$

将 g 换成 ϕg，并将 T 换成 I_{L^p}，此恒等式意味着

$$\Big\langle T^*\big(\Delta^{\frac{1}{p'}}\lambda(g)\big), \Delta^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\lambda(f)\Delta^{\frac{1}{2}}\Big\rangle = \Big\langle \Delta^{\frac{1}{p'}}\lambda(\check{\phi}g), \Delta^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\lambda(f)\Delta^{\frac{1}{2}}\Big\rangle.$$

结论得证。

现在假设 $p > 2$。这种情形稍微复杂一些。同样，令 $T = M_{\phi,p}$。这次，我们固定 $g \in \mathcal{H}\star\mathcal{H}$ 并考虑任意的 $f \in \mathcal{H}$。根据 (3.6) 之前的讨论，$\Delta^{\frac{1}{2}}\lambda\big(\check{\phi}g\big)$ 属于 $L^2(\mathcal{L}G)$，因此

$$\Delta^{\frac{1}{2}}\lambda\big(\check{\phi}g\big)\Delta^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{2}}\lambda(f)\Delta^{\frac{1}{p}} \in L^1(\mathcal{L}G).$$

然后，像第一种情形那样推理，可得

$$\Big\langle T^*\big(\Delta^{\frac{1}{2}}\lambda(g)\Delta^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{2}}\big), \lambda(f)\Delta^{\frac{1}{p}}\Big\rangle = \mathrm{Tr}\Big(\Delta^{\frac{1}{2}}\lambda\big(\check{\phi}g\big)\Delta^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{2}}\lambda(f)\Delta^{\frac{1}{p}}\Big).$$

如果我们能够证明

$$\Delta^{\frac{1}{2}}\lambda\big(\check{\phi}g\big)\Delta^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{2}} \in L^{p'}(\mathcal{L}G), \tag{3.7}$$

then 我们便可像第一种情形那样得到结果。此时，我们有一个估 te

$$\Big|\mathrm{Tr}\Big(\Delta^{\frac{1}{2}}\lambda\big(\check{\phi}g\big)\Delta^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{2}}\lambda(f)\Delta^{\frac{1}{p}}\Big)\Big| \lesssim \big\|\lambda(f)\Delta^{\frac{1}{p}}\big\|_p.$$

那么根据对偶性，存在 $\Gamma \in L^{p'}(\mathcal{L}G)$ 使得

$$\mathrm{Tr}\Big(\Delta^{\frac{1}{2}}\lambda\big(\check{\phi}g\big)\Delta^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{2}}\lambda(f)\Delta^{\frac{1}{p}}\Big) = \mathrm{Tr}\Big(\Gamma\lambda(f)\Delta^{\frac{1}{p}}\Big), \qquad f \in \mathcal{H}.$$

利用 (3.2)，我们可以在上述恒等式中将 f 改为 $f\star\Delta^{\frac{1}{p}}h$，其中 $h \in \mathcal{H}$ 任意。再利用 (3.1)，可得

$$\lambda(f\star\Delta^{\frac{1}{p}}h)\Delta^{\frac{1}{p}} = \lambda(f)\lambda\big(\Delta^{\frac{1}{p}}h\big)\Delta^{\frac{1}{p}} = \lambda(f)\Delta^{\frac{1}{p}}\lambda(h)$$

并得到

$$\mathrm{Tr}\Big(\Delta^{\frac{1}{2}}\lambda\big(\check{\phi}g\big)\Delta^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{2}}\lambda(f)\Delta^{\frac{1}{p}}\lambda(h)\Big) = \mathrm{Tr}\Big(\Gamma\lambda(f)\Delta^{\frac{1}{p}}\lambda(h)\Big), \qquad f,h \in \mathcal{H}.$$

由于 $C_c(G) \subset \mathcal{H}$ 以及 $\lambda(C_c(G))$ 在 $\mathcal{L}G$ 中是 w^*-稠密的，这意味着

$$\Delta^{\frac{1}{2}}\lambda\big(\check{\phi}g\big)\Delta^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{2}}\lambda(f)\Delta^{\frac{1}{p}} = \Gamma\lambda(f)\Delta^{\frac{1}{p}}, \qquad f \in \mathcal{H}.$$

我们推得 $\Delta^{\frac{1}{2}}\lambda\big(\check{\phi}g\big)\Delta^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{2}} \equiv \Gamma$，从而得到 (3.7)。

□

4. Extension properties

本节借助 [15] 中的 Haagerup–Junge–Xu 扩张定理，将傅里叶乘子的正性与压缩性从冯·诺伊曼代数层面推广到非交换 $L^p(\mathcal{L}G)$-空间。特别地，我们证明，ϕ 上的连续特征 G 能在所有 $L^p(\mathcal{L}G)$ 上导出正的满射等距傅里叶乘子（推论 4.3）。

对于任意 $1 \le p \le \infty$，我们用 $L^p(\mathcal{L}G;\varphi_0)$ 表示与 φ_0 相关联的 Haagerup 非交换 L^p-空间，见 [14, 36, 15] 或 [17, 第 9] 章。回忆一下，$L^p(\mathcal{L}G;\varphi_0)$ 由作用于 $L^2(\mathbb{R};\, L^2(G))$ 上的闭稠定算子构成。我们令 $\pi\colon \mathcal{L}G \to B(L^2(\mathbb{R};\, L^2(G)))$ 为 $*$-表示，使得 $\pi(\mathcal{L}G) = L^\infty(\mathcal{L}G;\varphi_0)$。

令 D 为所谓的 φ_0 的密度算子，并回顾 (2.7) 中的 $\mathcal{M}$。正如 [15, 备注 5.6],中所指出的,

$$\mathcal{L} := D^{\frac{1}{2}}\pi(\mathcal{M})D^{\frac{1}{2}} \subset L^1(\mathcal{L}G;\varphi_0),$$

且 $\mathcal{L}$ 是一个稠密子空间。这是引理 2.2 第 (2) 部分的一个类似结果。

令 $T\colon \mathcal{L}G \to \mathcal{L}G$ 为一个正映射，使得

$$\varphi_0(T(x)) \le \varphi_0(x), \qquad x \in \mathcal{L}G^+. \tag{4.1}$$

则 T将 $\mathcal{M}$ 映射到 $\mathcal{M}$中。因此，可以通过设定 $T^1\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ 来定义 g

$$T^1\big(D^{\frac{1}{2}}\pi(x)D^{\frac{1}{2}}\big) = D^{\frac{1}{2}}\pi\big(T(x)\big)D^{\frac{1}{2}}, \qquad x \in \mathcal{M}.$$

Haagerup-Junge-Xu 延拓定理（见 [15, 定理 5.1 和备注 5.6]）断言，T^1 可唯一延拓为一个有界算子

$$T^1\colon L^1(\mathcal{L}G;\varphi_0) \longrightarrow L^1(\mathcal{L}G;\varphi_0),$$

且 $\|T^1\| \le 1$。这一结果可以转化到第3节所讨论的框架中，如下所示。在下面的陈述中，我们将用到引理 2.1 第 (2) 部分。

定理 4.1. 设 $T\colon \mathcal{L}G \to \mathcal{L}G$ 是满足 *(4.1)* 的正映射。则该映射

$$\Delta^{\frac{1}{2}}\mathcal{M}\Delta^{\frac{1}{2}} \longrightarrow \Delta^{\frac{1}{2}}\mathcal{M}\Delta^{\frac{1}{2}}, \qquad \Delta^{\frac{1}{2}}x\Delta^{\frac{1}{2}} \mapsto \Delta^{\frac{1}{2}}T(x)\Delta^{\frac{1}{2}},$$

可唯一延拓为压缩映射 $L^1(\mathcal{L}G) \to L^1(\mathcal{L}G)$。

证明。 我们使用 $L^2(\mathbb{R};L^2(G))$ 与希尔伯特张量积 $L^2(\mathbb{R}) \overset{2}{\otimes} L^2(G)$ 之间的自然酉等同。我们将使用分别作用于 $L^2(\mathbb{R})$ 和 $L^2(G)$ 的无界算子的张量积，相关内容请参见 [17, 注 11.33]。在此背景下，我们有 $D = d \otimes 1$，其中 d 是 $L^2(\mathbb{R})$ 上平移算子酉群的解析生成元。将 [17, 第 204-206] 页的结果应用于 $M = \mathcal{L}G$ 上的左普朗歇尔权 φ_0，以及 $M' = \mathcal{R}G$ 上的右普朗歇尔权 $\psi = \psi_0$。由 (2.4) 可知，[17, 第 204] 页第一行定义的算子 d_0 与 Δ 一致。令 $U_0\colon L^2(\mathbb{R};\, L^2(G)) \to L^2(\mathbb{R};\, L^2(G))$

为 [17, 引理 11.30] 中所考虑的酉算子。那么，上述引理给出

$$U_0^*(1\otimes x)U_0=\pi(x),\qquad x\in\mathcal{L}G, \tag{4.2}$$

and

$$U_0^*(d\otimes\Delta)U_0=D. \tag{4.3}$$

由 [17, 引理 11.32], ，存在一个等距同构

$$W\colon L^1(\mathcal{L}G)\longrightarrow L^1(\mathcal{L}G;\varphi_0),\qquad W(a)=U_0^*(d\otimes a)U_0.$$

对于任意 $x\in\mathcal{M}$，我们有

$$\begin{aligned}U_0^*\big(d\otimes\Delta^{\frac12}x\Delta^{\frac12}\big)U_0&=U_0^*\Big(\big(d^{\frac12}\otimes\Delta^{\frac12}\big)(1\otimes x)\big(d^{\frac12}\otimes\Delta^{\frac12}\big)\Big)U_0\\&=U_0^*\big(d^{\frac12}\otimes\Delta^{\frac12}\big)U_0\cdot U_0^*(1\otimes x)U_0\cdot U_0^*\big(d^{\frac12}\otimes\Delta^{\frac12}\big)U_0\\&=\big(U_0^*(d\otimes\Delta)U_0\big)^{\frac12}\cdot U_0^*(1\otimes x)U_0\cdot\big(U_0^*(d\otimes\Delta)U_0\big)^{\frac12}.\end{aligned}$$

利用 (4.2) 和 (4.3)，我们推得

$$W\big(\Delta^{\frac12}x\Delta^{\frac12}\big)=D^{\frac12}xD^{\frac12},\qquad x\in\mathcal{M}.$$

因此，压缩 $W^{-1}T^1W$将 $\Delta^{\frac12}x\Delta^{\frac12}$映射到 $\Delta^{\frac12}T(x)\Delta^{\frac12}$，对所有 $x\in\mathcal{M}$均成立。这就证明了该结果。□

关于 Haagerup-Junge-Xu 延拓定理的更多信息，请参阅 [20, 25] 。

对于任意 $\phi\in C_b(G)$，令 $M_\phi\colon\lambda(G)\to\lambda(G)$ 为线性映射，它对所有 $t\in G$ 都将 $\lambda(t)$ 映为 $\phi(t)\lambda(t)$。按照 [4], ，我们称 ϕ 是 $\mathcal{L}G$ 上的有界傅里叶乘子，如果存在一个（必然唯一的） w^*-连续映射 $\mathcal{L}G\to\mathcal{L}G$ 延拓 M_ϕ。此时，我们仍将这个延拓记为 $M_\phi\colon\mathcal{L}G\to\mathcal{L}G$。

在下文中，我们用 e 表示 G 的单位元。

推论 4.2。 设 $\phi\in C_b(G)$ 满足： ϕ 是 $\mathcal{L}G$ 上的有界傅里叶乘子，且 M_ϕ 是正映射。那么对于任意 $1\le p<\infty$， ϕ 是 $L^p(\mathcal{L}G)$ 上的有界傅里叶乘子，并且有

$$\|M_{\phi,p}\colon L^p(\mathcal{L}G)\longrightarrow L^p(\mathcal{L}G)\|\le\phi(e). \tag{4.4}$$

证明。 正性假设保证 $\phi(e)\ge0$ ，并且

$$\big\|M_\phi\colon\mathcal{L}G\longrightarrow\mathcal{L}G\big\|=\|M_\phi(1)\|=\phi(e).$$

对于任意满足 $\lambda(f)\ge0$ 的 $f\in C_c(G)$，我们有 $\varphi_0(\lambda(f))=f(e)$，例如参见 [34, §18.17]。因此，对于任意这样的 f，$\varphi_0\big(M_\phi(\lambda(f))\big)=\phi(e)f(e)$。根据 Pedersen-Takesaki 定理 [34,定理 6.2], ，这意味着 $\varphi_0\circ M_\phi=\phi(e)\varphi_0.$ 。由此，依据定理 4.1， ϕ 是 $L^1(\mathcal{L}G)$ 上的有界傅里叶乘子，且

$$\big\|M_{\phi,1}\colon L^1(\mathcal{L}G)\longrightarrow L^1(\mathcal{L}G)\big\|\le\phi(e).$$

一旦这一结果得到确立， $L^p(\mathcal{L}G)$上的有界性以及估计式 (4.4) 就可由 Terp 插值定理 [37,第 2] 节推出。□

推论 4.3。 设 ϕ 是 G上的连续特征。对于任意 $1 \le p < \infty$， ϕ 是 L^p（$\mathcal{L}G$）上的有界傅里叶乘子，并且 $M_{\phi,\ p}$ 是 L^p（$\mathcal{L}G$）上的正满射等距。

证明。 设 ϕ: $G \to \mathbb{C}$ 为连续特征。则 ϕ 是正定的，且 $\phi(e) = 1$。因此根据 [4, 命题4.2], ϕ是 $\mathcal{L}G$上的有界傅里叶乘子，且 M_ϕ 是正的压缩映射。因此由推论 4.2， ϕ 是$L^p(\mathcal{L}G)$上的有界傅里叶乘子，且$M_{\phi,\ p}$ 是压缩。

由于 $\phi^{-1} = \overline{\phi}$ 也是连续特征，$M_{\phi,\ p}$ 可逆，且$M_\phi^{-1}{}_{,\ p} = M_{\phi,\ p}$ 是压缩。因此，$M_{\phi,\ p}$ 是满射等距映射。

$M_{\phi,\ p}$ 的正性直接由 M_ϕ 的正性以及$M_{\phi,\ p}$的定义的对称性得出。□

注 4.4。 设 $L^p(M) := L^p(M,\ H,\ \psi)$为与冯·诺伊曼代数 $M \subset B(H)$及 M'上的正规半有限忠实权ψ相关联的任意Connes-Hilsum非交换 L^p-空间。对任意整数 $n \ge 1$，设 M_n为所有 $n \times n$矩阵的 C^*-代数，并按通常方式考虑$M_n(M) \subset B(\ell_n^2 \overset{2}{\otimes} H)$。则 $M_n(M)$的换位子为 $I_{\ell_n^2} \otimes M'$。因此我们可以将 ψ 视为 $M_n(M)'$上的权。这使得可以定义Connes-Hilsum空间

$$L^p(M_n(M)) := L^p\big(M_n(M), \ell_n^2 \overset{2}{\otimes} H, \psi\big).$$

众所周知， $L^p(M_n(M))$ 可以视为一个以 $L^p(M)$ 中元素为条目的 $n \times n$ 矩阵空间，因此可以写出一个代数同一识别

$$L^p(M_n(M)) = M_n \otimes L^p(M).$$

对于任意 S: $L^p(M) \to L^p(M)$，我们令 $S_n = I_{M_n} \otimes S$，并称 S 是 n-正的，如果映射 S_n: $L^p(M_n(M)) \to L^p(M_n(M))$ 是正的。接下来，如果对所有 $n \ge 1$， S 都是 n- 正的，我们就称 S 是完全正的。

不难验证（留给读者），在推论 4.2 中，若 M_ϕ: $\mathcal{L}G \to \mathcal{L}G$ 是完全正的，则对任意 $1 \le p < \infty$, $M_{\phi,\ p}$ 在 $L^p(\mathcal{L}G)$ 上都是完全正的。

现在回到推论 4.3。根据 [4, 命题 4.2] ，我们知道，若 ϕ 是 G 上的连续特征，则 M_ϕ: $\mathcal{L}G \to \mathcal{L}G$ 是完全正的。因此，对所有 $1 \le p < \infty$，$M_{\phi,\ p}$ 都是完全正的。

现在我们转而讨论 Haagerup-Junge-Xu 定理在傅里叶乘子中的另一项应用。

命题 4.5. 设 $\phi \in L^\infty(G)$ ，并设 $1 \le p < \infty$。若 ϕ 是 $L^p(\mathcal{L}G)$上的有界傅里叶乘子，则 $\check{\phi}$ 也是有界傅里叶乘子，且 $\|M_{\check{\phi},p}\| = \|M_{\phi,p}\|$。

证明。 我们考虑反-$*$-自同构 κ: $\mathcal{L}G \to \mathcal{L}G$ ，使得对于所有$t \in G$ ，都有 $\kappa(\lambda(t)) = \lambda(t^{-1})$（见 [10, 定理 3.3.6]）。这是一个正的对合等距映射。对于任意 $f \in L^1(G)$，我们有

$$\kappa(\lambda(f)) = \int_G f(t)\lambda(t^{-1})\,dt = \int_G \Delta(t)^{-1} f(t^{-1})\lambda(t)\,dt,$$

因此

$$\kappa(\lambda(f)) = \lambda\big(\overline{f}^*\big), \qquad f \in L^1(G). \tag{4.5}$$

因此，

$$\varphi_0 \circ \kappa\big(\lambda(f)^*\lambda(f)\big) = \varphi_0\big(\kappa(\lambda(f))\kappa(\lambda(f^*))\big) = \varphi_0\big(\lambda(\overline{f})^*\lambda(\overline{f})\big), \qquad f \in L^1(G) \cap L^2(G).$$

应用 (2.8)，我们推出 $\varphi_0 \circ \kappa$ 与 φ_0 在 $\lambda(f)^*\lambda(f)$ 上对任意 $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ 重合。因此 $\varphi_0 \circ \kappa = \varphi_0$ 由 Pedersen-Takesaki 定理 [34, 定理 6.2]。

因此，我们可以对 κ 应用定理 4.1。将这一延拓结果与 Terp 插值定理相结合，如同推论 4.2 的证明中那样，并应用 (4.5)，我们推出存在一个对合等距映射 $\kappa_p\colon\ L^p(\mathcal{L}G) \to L^p(\mathcal{L}G)$，使得

$$\kappa_p\big(\Delta^{\frac{1}{2p}}\lambda(f)\Delta^{\frac{1}{2p}}\big) = \Delta^{\frac{1}{2p}}\lambda\big(\overline{f}^*\big)\Delta^{\frac{1}{2p}}, \qquad f \in \mathcal{H} \star \mathcal{H}.$$

假设 ϕ 是 $L^p(\mathcal{L}G)$ 上的有界傅里叶乘子。一个简单的计算表明 tha t

$$\big(\kappa_p \circ M_{\phi,p} \circ \kappa_p\big)\big(\Delta^{\frac{1}{2p}}\lambda(f)\Delta^{\frac{1}{2p}}\big) = \big(\Delta^{\frac{1}{2p}}\lambda(\check{\phi}f)\Delta^{\frac{1}{2p}}\big) \qquad f \in \mathcal{H} \star \mathcal{H}.$$

这意味着 $\check{}$是 ϕ 是一个有界傅里叶乘子，并且$M_{\check{\phi},p} = \kappa_p \circ M_{\phi,p} \circ \kappa_p$. □

推论 4.6。设 $\phi \in L^\infty(G)$，设 $1 < p < \infty$，其共轭指数为 p'。那么，ϕ在 $L^p(\mathcal{L}G)$ 上是有界傅里叶乘子，当且仅当 ϕ 在 $L^{p'}(\mathcal{L}G)$上是有界傅里叶乘子。此时，我们有 $\|M_{\phi,p'}\| = \|M_{\phi,p}\|$ 以及 $\|\phi\|_\infty \le \|M_{\phi,p}\|$。

证明。假设 $\phi \in L^\infty(G)$ 是 $L^p(\mathcal{L}G)$ 上的有界傅里叶乘子。结合命题 4.5 和命题 3.5，我们得到 ϕ 是$L^{p'}(\mathcal{L}G)$上的有界傅里叶乘子，其中$\|M_{\phi,p'}\| = \|M_{\phi,p}\|$。然后通过插值，$\|M_{\phi,2}\| \le \|M_{\phi,p}\|$，因此由推论 3.3 可得$\|\phi\|_\infty \le \|M_{\phi,p}\|$。□

推论 4.7. 设 $\phi \in L^\infty(G)$ 且设 $1 < p < \infty$。若 ϕ 是$L^p(\mathcal{L}G)$上的有界傅里叶乘子，则 ϕ 也是有界傅里叶乘子，且 $\|M_{\phi,p}\| = \|M_{\phi,p}\|$。

证明。根据推论 4.6，我们可以假设 $p \ge 2$。这使得我们可以应用注 3.4 的第 (2) 部分。设 $C = \|M_{\phi,p}\|$。则

$$\big\|\Delta^{\frac{1}{2p}}\lambda(\phi f)\Delta^{\frac{1}{2p}}\big\|_p \le C\big\|\Delta^{\frac{1}{2p}}\lambda(f)\Delta^{\frac{1}{2p}}\big\|_p, \qquad f \in \mathcal{H}.$$

在 $L^p(\mathcal{L}G)$ 中取伴随，由此得到

$$\big\|\Delta^{\frac{1}{2p}}\lambda(\phi f)^*\Delta^{\frac{1}{2p}}\big\|_p \le C\big\|\Delta^{\frac{1}{2p}}\lambda(f)^*\Delta^{\frac{1}{2p}}\big\|_p, \qquad f \in \mathcal{H}. \tag{4.6}$$

我们注意到

$$(\phi f)^*(t) = \Delta(t)^{-1}\overline{\phi(t^{-1})f(t^{-1})} = \overline{\phi(t^{-1})}f^*(t).$$

$\check{}$因此，我们有 $\lambda(\phi f)^{*\check{}} = \lambda\big(\overline{\phi}f^*\big)$，而 $\lambda(f)^* = \lambda(f^*)$。由于 $\mathcal{H}$在取$\check{}$伴随算子时封闭，(4.6) 实际上表明 ϕ 是 $L^p(\mathcal{L}G)$ 上的有界傅里叶乘子，其范数小于 C。结合命题 4.5，我们推得 ϕ 是 $L^p(\mathcal{L}G)$ 上的有界傅里叶乘子，其范数小于 $\overline{C}$。结论得证。□

5. A characterization of positive isometric Fourier multipliers

本节的主要目标是定理 5.3，它为 $1 < p \neq 2 < \infty$ 给出了推论 4.3 的逆命题。特殊情形 $p = 1$ 和 $p = 2$ 将在下一节讨论。

我们回顾，对于任意局部可测函数 ϕ_1, ϕ_2： $G \to \mathbb{C}$，称 $\phi_1 = \phi_2$局部几乎处处是指集合 $\{\phi_1 \neq \phi_2\}$ 是一个局部零测集。若 ϕ_1, ϕ_2 除在一个局部零测集上外均有界，则上述等价于等式 $\phi_1 = \phi_2$ 在$L^\infty(G)$中成立。

引理 5.1. 设 $1 \leq p < \infty$，并设 $\phi \in L^\infty(G)$ 是 $L^p(\mathcal{L}G)$上的有界傅里叶乘子。若所得算子 $M_{\phi,p}$: $L^p(\mathcal{L}G) \to L^p(\mathcal{L}G)$ 是正的，则对每个紧集$K \subset G$，限制 $\phi_{|K}$ 几乎处处等于一个连续函数 $K \to \mathbb{C}$。

证明. 我们改编 [1, 引理 6.10] 的证明。对任意的 $g \in C_c(G)$，乘积$\Delta^{\frac{1}{2p}}\lambda(g^* \star g)\Delta^{\frac{1}{2p}} = \Delta^{\frac{1}{2p}}\lambda(g)^*\lambda(g)\Delta^{\frac{1}{2p}}$是$L^p(\mathcal{L}G)$ 的一个正元素。因此，由 $M_{\phi,p}$ 上的正性假设，

$$\Delta^{\frac{1}{2p}}\lambda\big(\phi(g^* \star g)\big)\Delta^{\frac{1}{2p}} \in L^p(\mathcal{L}G)^+.$$

任取 $\xi \in C_c(G)$。于是 $\Delta^{\frac{1}{2p}}\xi \in C_c(G)$。由于 $\lambda(\phi(g^* \star g))\Delta^{\frac{1}{2p}}\xi = \phi(g^* \star g) \star \Delta^{\frac{1}{2p}}\xi$，这意味着 $\lambda(\phi(g^* \star g))\Delta^{\frac{1}{2p}}\xi$ 属于 $C_c(G)$。因此，ξ 属于算子 $\Delta^{\frac{1}{2p}}\lambda\big(\phi(g^* \star g)\big)\Delta^{\frac{1}{2p}}$的定义域。令 $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ 表示 $L^2(G)$上的内积。由上述内容可得

$$\big(\Delta^{\frac{1}{2p}}\lambda\big(\phi(g^* \star g)\big)\Delta^{\frac{1}{2p}}\xi \,\big|\, \xi\big) \geq 0.$$

因此，

$$\big(\lambda(\phi(g^* \star g))\Delta^{\frac{1}{2p}}\xi \,\big|\, \Delta^{\frac{1}{2p}}\xi\big) \geq 0.$$

[1]将 ξ替换为 $\Delta^{-\frac{1}{2p}}\xi$，我们推得

$$\big(\lambda(\phi(g^* \star g))\xi \,\big|\, \xi\big) \geq 0, \tag{5.1}$$

对所有 $\xi \in C_c(G)$均成立。由稠密性可知，(5.1) 对所有 $\xi \in L^2(G)$均成立。

对于任意 $g \in C_c(G)$，记

$$(g^* \star g)(v) = \int_G \Delta(u^{-1})\overline{g(u^{-1})}g(u^{-1}v)\,du, \qquad v \in G.$$

于是，我们有

$$\lambda(\phi(g^* \star g)) = \int_{G^2} \Delta(u^{-1})\overline{g(u^{-1})}g(u^{-1}v)\phi(v)\lambda(v)\,dudv.$$

将 u 改为 t^{-1}，再将 v 改为 $t^{-1}s$，我们推得

$$\lambda(\phi(g^* \star g)) = \int_{G^2} \overline{g(t)}g(s)\phi(t^{-1}s)\lambda(t^{-1}s)\,dtds.$$

因此，

$$\big(\lambda(\phi(g^* \star g))\xi \,\big|\, \xi\big) = \int_{G^2} \overline{g(t)}g(s)\phi(t^{-1}s)\big(\lambda(t^{-1}s)\xi \,\big|\, \xi\big)\,dtds,$$

对所有 $\xi \in L^2(G)$。由 (5.1) 可知，此积分非负。由此推出，对于所有 $\xi \in L^2(G)$，函数 $t \mapsto \phi(t)(\lambda(t)\xi|\xi)$ 按照 [35, 定义 VII.3.20] 的意义是正定的。

根据 [35, 命题 VII.3.21] 及其证明，这意味着该函数属于傅里叶-斯蒂尔杰斯代数 $B(G)$，也就是说，它在局部几乎处处等于 $B(G)$ 中的某个元素。通过极化，对于所有 $\xi,\ \xi' \in L^2(G)$，我们可以推出函数 $t \mapsto \phi(t)\langle\lambda(t)\xi|\xi'\rangle$ 也具有相同性质。因此，对于傅里叶代数 $A(G) = \{\, t \mapsto \langle\lambda(t)\ \xi|\xi'\rangle \mid \xi,\ \xi' \in L^2(G)\ \}$ 中的所有 γ，乘积 $\phi\gamma$ 在局部几乎处处等于一个连续函数。由于对任意紧集 $K \subset G$，都存在一个在 K 上不消失的 $\gamma \in A(G)$，结论得证。□

下一个引理是 Sherman 关于非交换 L^p-空间上的等距的工作的推论 [30]（另见 [31]）。

回想一下，约当同态 $J\colon M \to N$ 是两个冯·诺伊曼代数 M和 N 之间的有界线性映射，并满足

$$J(xy+yx) = J(x)J(y) + J(y)J(x) \qquad \text{and} \qquad J(x^*) = J(x)^*, \tag{5.2}$$

对所有 $x, y \in M$。若进一步 J是双射，则称 J为约当同构。

由 [33, 定理 3.3] 可知， J 是约当同构，当且仅当存在冯·诺伊曼代数分解

$$M = M_1 \oplus M_2 \qquad \text{and} \qquad N = N_1 \oplus N_2, \tag{5.3}$$

以及一个 $*$-同构同态 $\pi\colon\ M_1 \to N_1$ 以及反-$*$-同构 $\rho\colon\ M_2 \to N_2$，使得 t

$$J = \pi \oplus \rho. \tag{5.4}$$

这意味着 J 是 w^*-连续的。有关约当同态的更多信息，请参阅 [16] 和 [22, 练习 10.5.21-10.5.31] 。

引理 5.2。 设 $1 < p \neq 2 < \infty$，并设 M、N是两个冯·诺伊曼代数。设 $L^p(M)$和 $L^p(N)$ 分别是基于 M 和 N 构造的任意 *Connes-Hilsum* 空间。设 $S\colon\ L^p(M) \to L^p(N)$ 是满射正等距映射。则存在一个约当同构 $J\colon\ M \to N$，使得

$$S(ax+xa) = S(a)J(x) + J(x)S(a), \qquad a \in L^p(M),\ x \in M. \tag{5.5}$$

证明。 设 $S\colon\ L^p(M) \to L^p(N)$ 是一个满射正等距映射。Sherman 定理 [30, 定理 1.2] 断言，存在一个约当同构 $J\colon\ M \to N$，使得

$$S(a) = \big(J_*^{-1}(a^p)\big)^{\frac{1}{p}}, \qquad a \in L^p(M)^+. \tag{5.6}$$

在此陈述中， $J_*\colon\ L^1(N) \to L^1(M)$ 是 J 的预伴随算子，同时考虑到自然的等距同构 $M_* \simeq L^1(M)$ 和 $N_* \simeq L^1(N)$，并且

$$J_*^{-1}\colon L^1(M) \longrightarrow L^1(N)$$

是它的逆映射。在 [30, 31], 这一表述是在 Haagerup 非交换 L^p空间框架下给出的。然而，利用 Haagerup 空间与 Connes-Hilsum 空间之间的同构（见 [36, 第四章] 或 [17, 第 11 节3]），我们可以看到，Sherman 的证明在 Connes-Hilsum 框架下同样成立。

我们将证明， J 式 (5.6) 中的映射给出了恒等式 (5.5)。由 [30, 定理 12] 的证明可知, M， N 和 J 具有分解式 (5.3) 和 (5.4)，使得

$$S(ax) = S(a)\pi(x), \qquad a \in L^p(M),\ x \in M_1, \tag{5.7}$$

and

$$S(xa) = \rho(x)S(a), \qquad a \in L^p(M),\ x \in M_2. \tag{5.8}$$

由于 S 为正，我们有 $S(b) = S(b^*)^*$ 对所有 $b \in L^p(M)$均成立。因此，对所有 $a \in L^p(M)$及所有 $x \in M_1$，我们有

$$S(xa) = S(a^*x^*)^* = \big(S(a^*)J(x^*)\big)^* = J(x^*)^*S(a^*)^* = J(x)S(a),$$

由（5.7）可得。再次应用后一个恒等式，我们在 $x \in M_1$的情况下得到（5.5）。现在用（5.8）代替（5.7），我们在 $x \in M_2$的情况下得到（5.5）。这就证明了对所有 $x \in M$，恒等式（5.5）均成立。□

定理 5.3。设 $\phi \in L^\infty(G)$，并设 $1 < p \neq 2 < \infty$。假设 ϕ 是 $L^p(\mathcal{L}G)$ 上的有界傅里叶乘子，并且所得到的映射 $M_{\phi,p}\colon\ L^p(\mathcal{L}G) \to L^p(\mathcal{L}G)$ 是正的满射等距映射。那么， ϕ 在局部几乎处处等于一个连续特征。

证明。为简单起见，我们假设 G 是 σ-紧的，并参见本证明末尾关于一般情形的讨论。因此，“局部几乎处处”仅表示“几乎处处”，且由引理 5.1， ϕ 几乎处处等于一个连续函数。因此，我们可以假设 $\phi \in C_b(G)$。

总之，为了证明 ϕ的乘法性，我们将恒等式 (5.5) 应用于 $\mathcal{L}G$ 中精心选取的近似单位，并取极限，从而得到一个逐点关系，推出所需结论，同时还证明了一些可简化计算的辅助恒等式。

对于任意 $t \in G$ 以及任意 $f \in C_c(G)$，我们定义 $\lambda'(t)f \in C_c(G)$如下：

$$[\lambda'(t)f](s) = f(st^{-1}), \qquad s \in G.$$

我们注意到

$$\Delta(t)\lambda(f)\lambda(t) = \lambda\big(\lambda'(t)f\big), \qquad f \in C_c(G),\ t \in G. \tag{5.9}$$

事实上，

$$\lambda(\lambda'(t)f) = \int_G f(st^{-1})\lambda(s)\,ds = \Delta(t)\int_G f(s)\lambda(st)\,ds = \Delta(t)\Big(\int_G f(s)\lambda(s)\,ds\Big)\lambda(t).$$

考虑一个由 $C_c(G) \star C_c(G)$ 构成的网 $(f_i)_{i\in I}$，使得 $f_i \geq 0$ 且对所有 $i \in I$， $\int_G f_i(t)\,dt = 1$，每个 f_i 的支集都包含于 e的某个紧邻域 V_i 中，网 $(V_i)_{i\in I}$ 递减，并且这些 V_i 的交等于 $\{e\}$。于是，对每个$i \in I$，令 $e_i = \lambda(f_i)$。

设 $C(G)$ 为 G 上的连续函数空间。我们首先注意到

$$\mathrm{SOT}\text{-}\lim_i \lambda(hf_i) = h(e), \qquad h \in C(G). \tag{5.10}$$

事实上，对任意的 $h \in C(G)$ 与 $\xi \in L^2(G)$，我们可以写成

$$\begin{aligned}\lambda(hf_i)\xi - h(e)\xi &= \int_G f_i(t)\big(h(t)\lambda(t)\xi - h(e)\xi\big)\,dt \\ &= \int_G f_i(t)\big(h(t)-h(e)\big)\lambda(t)\xi\,dt \;+ h(e)\int_G f_i(t)\big(\lambda(t)\xi-\xi\big)\,dt.\end{aligned}$$

这意味着

$$\big\|\lambda(hf_i)\xi - h(e)\xi\big\|_2 \le \|\xi\|_2 \int_G f_i(t)\big|h(t)-h(e)\big|\,dt \;+ |h(e)|\int_G f_i(t)\|\lambda(t)\xi-\xi\|_2\,dt.$$

当 $i \to \infty$ 时，这两个积分趋于 0，这就证明了 (5.10)。显然，将 f_i 换成 f_i^* 后，性质 (5.10) 仍然成立。特别地，应用这一结论并取 $h \equiv 1$，可得

$$\text{SOT-}\lim_i e_i = 1 \qquad \text{and} \qquad \text{SOT-}\lim_i e_i^* = 1. \tag{5.11}$$

设 $S = M_{\phi,p}\colon L^p(\mathcal{L}G) \to L^p(\mathcal{L}G)$，并令 J 为引理 5.2 给出的约当同构。设 $s \in G$。我们将对下式应用恒等式 (5.5)：

$$x = e_i\lambda(s) \qquad \text{and} \qquad a = e_i\Delta^{\frac{1}{p}}. \tag{5.12}$$

根据注 3.2，后者属于 $L^p(\mathcal{L}G)$。注意，由 (3.1) 和 (5.9)，我们也可以将其写为

$$a = \Delta^{\frac{1}{p}}\lambda(\Delta^{-\frac{1}{p}}f_i) \qquad \text{and} \qquad x = \Delta(s)^{-1}\lambda(\lambda'(s)f_i). \tag{5.13}$$

在下文中，我们使用 (5.12) 或 (5.13) 来表示 a和 x。

首先，我们写出

$$ax = \Delta(s)^{-1}\Delta^{\frac{1}{p}}\lambda(\Delta^{-\frac{1}{p}}f_i)\lambda(\lambda'(s)f_i) = \Delta(s)^{-1}\Delta^{\frac{1}{p}}\lambda\Big((\Delta^{-\frac{1}{p}}f_i)\star(\lambda'(s)f_i)\Big).$$

然后再次根据注 3.2，我们有

$$S(ax) = \Delta(s)^{-1}\Delta^{\frac{1}{p}}\lambda\Big(\phi\big((\Delta^{-\frac{1}{p}}f_i)\star(\lambda'(s)f_i)\big)\Big).$$

同样地，

$$xa = \Delta(s)^{-1}\lambda\Big((\lambda'(s)f_i)\star f_i\Big)\Delta^{\frac{1}{p}},$$

因此

$$S(xa) = \Delta(s)^{-1}\lambda\Big(\phi\big((\lambda'(s)f_i)\star f_i\big)\Big)\Delta^{\frac{1}{p}}$$

我们还有 $S(a) = \Delta^{\frac{1}{p}}\lambda(\phi\Delta^{-\frac{1}{p}}f_i)$，然后

$$S(a)J(x) = \Delta^{\frac{1}{p}}\lambda(\phi\Delta^{-\frac{1}{p}}f_i)J(e_i\lambda(s)).$$

同样，$S(a) = \lambda(\phi f_i)\Delta^{\frac{1}{p}}$，并且我们有

$$J(x)S(a) = J(e_i\lambda(s))\lambda(\phi f_i)\Delta^{\frac{1}{p}}.$$

对于任意整数 $n \geq 1$，令 $E_n = \{t \in G : \ n^{-1} \leq \Delta(t) \leq n\}$。利用上述计算，我们写出 (5.5)，并在所得恒等式的左侧和右侧分别乘以示性函数 χ_{E_n}。由此得到恒等式

$$\begin{aligned}(5.14)\quad \Delta(s)^{-1}\Big[\chi_{E_n}\Delta^{\frac{1}{p}}\lambda\Big(\phi\big((\Delta^{-\frac{1}{p}}f_i)\star(\lambda'(s)f_i)\big)\Big)\chi_{E_n} + \chi_{E_n}\lambda\Big(\phi\big((\lambda'(s)f_i)\star f_i\big)\Big)\Delta^{\frac{1}{p}}\chi_{E_n}\Big] \\ = \chi_{E_n}\Delta^{\frac{1}{p}}\lambda(\phi\Delta^{-\frac{1}{p}}f_i)J(e_i\lambda(s))\chi_{E_n} + \chi_{E_n}J(e_i\lambda(s))\lambda(\phi f_i)\Delta^{\frac{1}{p}}\chi_{E_n},\end{aligned}$$

[1]对所有 $i \in I$ 和所有 $n \geq 1$ 均成立。函数 $\Delta^p\chi_{E_n^-}$ 有界，因此上述恒等式在 $B(L^2(G))$中成立。

我们暂时固定 $n \geq 1$。令 $i \to \infty$，除非另有说明，在以下极限过程中我们均采用强算子拓扑收敛。注意，由 (5.11) 可知，我们有$e_i\lambda(s) \to \lambda(s)$ 以及 $(e_i\lambda(s))^* = \lambda(s)^*e_i^* \to \lambda(s)^*$。由于 J 是 w^*-连续的，因此由 [2, 引理 2.2] 可得

$$J(e_i\lambda(s)) \longrightarrow J(\lambda(s)).$$

接下来，利用 ϕ 的连续性以及 $\Delta(e) = 1$ 这一事实，由 (5.10) 可推出

$$\lambda(\phi f_i) \longrightarrow \phi(e) \qquad \text{and} \qquad \lambda(\phi\Delta^{-\frac{1}{p}}f_i) \longrightarrow \phi(e).$$

因此，我们知道 (5.14) 右侧的强算子拓扑极限。

移项至左边，得

$$\big(\lambda'(s)f_i\big)\star f_i\big)(t) = \int_G [\lambda'(s)f_i](u)f_i(u^{-1}t)\,du \ = \int_G f_i(us^{-1})f_i(u^{-1}t)\,du,$$

对任意 $t \in G$ 均成立。由此可得

$$\begin{aligned}\lambda\Big(\phi\big((\lambda'(s)f_i)\star f_i\big)\Big) &= \int_{G^2}\phi(t)f_i(us^{-1})f_i(u^{-1}t)\lambda(t)\,dudt \\ &= \int_{G^2}\phi(ut)f_i(us^{-1})f_i(t)\lambda(ut)\,dtdu \\ &= \Delta(s)\int_{G^2}\phi(ust)f_i(u)f_i(t)\lambda(ust)\,dtdu.\end{aligned}$$

同理,

$$\phi(s)\lambda\big((\lambda'(s)f_i)\star f_i\big) = \Delta(s)\int_{G^2}\phi(s)f_i(u)f_i(t)\lambda(ust)\,dtdu,$$

因此

$$\begin{aligned}\Big\|\lambda\Big(\phi\big((\lambda'(s)f_i)\star f_i\big)\Big) - \phi(s)\lambda\big((\lambda'(s)f_i)\star f_i\big)\Big\|_{B(L^2(G))} \\ \leq \Delta(s)\int_{G^2}|\phi(ust)-\phi(s)|f_i(u)f_i(t)\,dtdu.\end{aligned}$$

We 由 ϕ 的连续性以及网（f_i）$_{i\in I}$的性质，推得

$$(5.15)\qquad \Big\|\lambda\Big(\phi\big((\lambda'(s)f_i)\star f_i\big)\Big) - \phi(s)\lambda\big((\lambda'(s)f_i)\star f_i\big)\Big\|_{B(L^2(G))} \longrightarrow 0,$$

当 $i \to \infty$时。由（5.9），我们有

$$\lambda\big((\lambda'(s)f_i) \star f_i\big) = \lambda(\lambda'(s)f_i)\lambda(f_i) = \Delta(s)\lambda(f_i)\lambda(s)\lambda(f_i) = \Delta(s)e_i\lambda(s)e_i.$$

由于 $(e_i)_{i\in I}$ 有界，由 (5.11) 可得

$$\lambda\big((\lambda'(s)f_i) \star f_i\big) \longrightarrow \Delta(s)\lambda(s).$$

结合 (5.15)，我们得到

$$\lambda\Big(\phi\big((\lambda'(s)f_i) \star f_i\big)\Big) \longrightarrow \Delta(s)\phi(s)\lambda(s).$$

类似的计算可得

$$\lambda\Big(\phi\big((\Delta^{-\frac{1}{p}}f_i) \star (\lambda'(s)f_i)\big)\Big) \longrightarrow \Delta(s)\phi(s)\lambda(s).$$

在 (5.14) 中取极限，由这些计算可得

$$\begin{aligned}\chi_{E_n}\Delta^{\frac{1}{p}}\phi(s)\lambda(s)\chi_{E_n} + \chi_{E_n}\phi(s)\lambda(s)\Delta^{\frac{1}{p}}\chi_{E_n}&\\ = \chi_{E_n}\Delta^{\frac{1}{p}}\phi(e)J(\lambda(s))\chi_{E_n} + \chi_{E_n}\phi(e)J(\lambda(s))\Delta^{\frac{1}{p}}\chi_{E_n}.&\end{aligned}$$

设 A，$X \in B(L^2(G))$ 定义为

$$A = \chi_{E_n}\Delta^{\frac{1}{p}} \qquad \text{and} \qquad X = \chi_{E_n}\big(\phi(s)\lambda(s) - \phi(e)J(\lambda(s))\big)\chi_{E_n}.$$

由于

$$\chi_{E_n}^2 = \chi_{E_n} \qquad \text{and} \qquad \chi_{E_n}\Delta^{\frac{1}{p}} = \chi_{E_n}\Delta^{\frac{1}{p}}\chi_{E_n} = \Delta^{\frac{1}{p}}\chi_{E_n},$$

上述恒等式可写为

$$AX + XA = 0.$$

根据 E_n, $\sigma(A) \subset [n^{-\frac{1}{p}}, n^{\frac{1}{p}}]$ 的定义，因此 $\sigma(A) \cap \sigma(-A) = \emptyset$。由 [3, 定理 VII.2.1] 可得 $X = 0$。于是，

$$\chi_{E_n}\big(\phi(s)\lambda(s) - \phi(e)J(\lambda(s))\big)\chi_{E_n} = 0, \qquad n \geq 1.$$

由于 $(E_n)_{n\geq 1}$ 是单调不减的，且 E_n 的并等于 G，故在强算子拓扑下 $\chi_{E_n} \to 1$。因此，由上文可推出

$$\phi(e)J(\lambda(s)) = \phi(s)\lambda(s).$$

有了这个恒等式，定理 [2, 3.7] 证明的最后一部分表明，$\phi(e)\widetilde{\phi}$ 是一个特征。令 $\overline{\phi = \phi(e)\phi}$，则 $M_{\widetilde{\phi},p}$ 是一个正等距，由推论 4.3 得出。由于 $M_{\widetilde{\phi},p} = \phi(e)M_{\phi,p}$，且 $M_{\phi,p}$ 是一个正等距，因此有 $\overline{\phi(e) = 1}$，从而 $\phi = \phi$ 是一个特征。这就完成了 σ-紧情形下的证明。

如果 G 不是 σ-紧的，只需应用 [2, 推论 3.13] 的证明，便可由上述论证得出结果。细节留给读者。□

我们以一个结果结束本节：该结果表明，在 $p \geq 2$的情况下，定理 5.3 中的满射假设是多余的。我们不知道对 $p < 2$ 是否也成立。

命题 5.4. 设 $\phi \in L^\infty(G)$ 且 $2 \leq p < \infty$。假设 ϕ 是 $L^p(\mathcal{L}G)$上的有界傅里叶乘子，并且由此得到的算子 $M_{\phi,p}\colon\ L^p(\mathcal{L}G) \to L^p(\mathcal{L}G)$ 是等距。那么 $M_{\phi,p}$ 是满射。

证明。 我们改编 [2, 引理 3.9] 的证明。假设 $M_{\phi,p}$: $L^p(\mathcal{L}G) \to L^p(\mathcal{L}G)$ 是等距。特别地，$M_{\phi,p}$ 是单射。

设 $K \subset G$ 为任意紧集，并设 $N_K = \{t \in K : \phi(t) = 0\}$。示性函数 $h = \chi_{N_K}$ 属于 $L^1(G) \cap L^2(G)$，因此 $\lambda(h)$ 属于 $\mathcal{N}$。由引理 2.1 、 (1) 和注 3.4， $\lambda(h)\Delta^{\frac{1}{p}}$属于 $L^p(\mathcal{L}G)$，且 $M_{\phi,p}\big(\lambda(h)\Delta^{\frac{1}{p}}\big) = \lambda(\phi h)\Delta^{\frac{1}{p}}$。由于 $\phi h = 0$，这意味着 $M_{\phi,p}\big(\lambda(h)\Delta^{\frac{1}{p}}\big) = 0$。由此可得 $\lambda(h) = 0$，从而 $h = 0$。因此，

$$|N_K| = 0. \tag{5.16}$$

设 $f \in C_c(G)$，并设 $K =$ 支集(f)。对任意 $\delta > 0$，令 $N_\delta = \{t \in K : |\phi(t)| < \delta\}$。则由 (5.16) 可得

$$\lim_{\delta \to 0} |N_\delta| = 0. \tag{5.17}$$

我们可以定义 $\phi^{-1} f \chi_{N_\delta^c}$，其属于 $L^1(G) \cap L^\infty(G)$。因此，按照上面的论证，

$$\lambda\big(\phi^{-1} f \chi_{N_\delta^c}\big)\Delta^{\frac{1}{p}} \in L^p(\mathcal{L}G) \qquad \text{and} \qquad M_\phi\Big(\lambda\big(\phi^{-1} f \chi_{N_\delta^c}\big)\Delta^{\frac{1}{p}}\Big) = \lambda\big(f\chi_{N_\delta^c}\big)\Delta^{\frac{1}{p}}.$$

因此，

$$M_{\phi,p}\Big(\lambda\big(\phi^{-1} f \chi_{N_\delta^c}\big)\Delta^{\frac{1}{p}}\Big) - \lambda(f)\Delta^{\frac{1}{p}} = -\lambda\big(f\chi_{N_\delta}\big)\Delta^{\frac{1}{p}}.$$

由 (3.5) 可知，

$$\Big\| M_{\phi,p}\Big(\lambda\big(\phi^{-1} f \chi_{N_\delta^c}\big)\Delta^{\frac{1}{p}}\Big) - \lambda(f)\Delta^{\frac{1}{p}} \Big\|_p \le \|f\chi_{N_\delta}\|_{p'} \le \|f\|_\infty |N_\delta|^{\frac{1}{p'}}.$$

根据 (5.17)，这意味着 $\lambda(f)\Delta^{\frac{1}{p}} \in$ Ran$(M_{\phi,\ p})$。由稠密性引理 2.2 (1)，这意味着 $M_{\phi,\ p}$ 的值域是稠密的。由于 $M_{\phi,\ p}$ 是等距映射，这意味着 $M_{\phi,\ p}$是满射的。□

6. The cases $p = 1$ and $p = 2$

本节考察端点情形 $p = 1$ 和 $p = 2$。我们首先证明，在不假设正性的情况下，定理 5.3 可推广到 $p = 1$ 的情形，具体如下。

命题 6.1。 设 $\phi \in L^\infty(G)$ 是 $L^1(\mathcal{L}G)$上的有界傅里叶乘子。若算子$M_{\phi,\ 1}$: $L^1(\mathcal{L}G) \to L^1(\mathcal{L}G)$ 是满射等距映射，则存在一个复数 δ，满足$|\delta| = 1$，使得 $\delta\phi$ 在局部几乎处处等于一个连续特征。

证明。 与定理 5.3 的证明相同，为简便起见，我们可以假设 G是 σ-紧的。令$T = M_{\phi,1}^*$: $\mathcal{L}G \to \mathcal{L}G$。命题 3.5 的证明表明，对所有 $g \in \mathcal{H}$，$\check{T}(\lambda(g)) = \lambda(\phi g)$。这意味着

$$\|\lambda(\check{\phi} g)\| \le \|\lambda(g)\|, \qquad g \in L^1(G).$$

于是， [4, 命题 1.2 的 (3)⇒和 (2)]及其证明表明，函数 ϕ属于 $C_b(G)$，$\check{}$且 ϕ 是 $\mathcal{L}G$ 上的有界傅里叶乘子，并且 $T = M_{\check{\phi}}$。

由于 $M_{\phi,1}$ 是一个满射等距映射，其伴随算子 T 也是满射等距映射。因此，根据 [21], 中的Kadison非交换Banach–Stone定理，存在一个约当同构J: $\mathcal{L}G \to \mathcal{L}G$ 以及一个酉元 $U \in \mathcal{L}G$ ，使得

$$T(x) = UJ(x), \qquad x \in \mathcal{L}G.$$

考虑任意的 $s \in G$。令 $(e_i)_{i\in I}$ 为定理 5.3 的证明中引入的网。由 [2, 引理 3.11]（其证明不需要任何幺模性假设）可知，以下强算子拓扑收敛成立：

$$T(\lambda(s)e_i) \to \check{\phi}(s)\lambda(s), \quad T(\lambda(s)e_i^2) \to \check{\phi}(s)\lambda(s) \quad \text{and} \quad T\big(e_i\lambda(s)e_i\big) \to \check{\phi}(s)\lambda(s). \tag{6.1}$$

此外，由定理 5.3 证明中的一个观察可知

$$J(\lambda(s)e_i) \longrightarrow J(\lambda(s)). \tag{6.2}$$

由 (5.2) 的前半部分可得

$$J\big(e_i\lambda(s)e_i + \lambda(s)e_i^2\big) = J(e_i)J\big(\lambda(s)e_i\big) + J\big(\lambda(s)e_i\big)J(e_i).$$

左乘 U 后，这意味着

$$T\big(e_i\lambda(s)e_i\big) + T\big(\lambda(s)e_i^2\big) = T(e_i)J\big(\lambda(s)e_i\big) + T\big(\lambda(s)e_i\big)J(e_i).$$

当 $i \to \infty$ 时取强算子拓扑极限，并应用 (6.1) 和 (6.2)，我们推得 $\check{\phi}(s)\lambda(s) + \check{\phi}(s)\lambda(s) = \check{\phi}(e)J(\lambda(s)) + \check{\phi}(s)\lambda(s)$，即，

$$\check{\phi}(e)J(\lambda(s)) = \check{\phi}(s)\lambda(s), \qquad s \in G.$$

现在，我们可以像定理 5.3 的证明中那样得出，$\check{\phi}(e)^{-1}\check{\phi}$ 是一个特征，结论便立即成立。□

注6.2. 设 $\phi \in C_b(G)$，使得 ϕ 是 $\mathcal{L}G$ 上的有界傅里叶乘子，并假设 M_ϕ: $\mathcal{L}G \to \mathcal{L}G$ 是一个等距映射。（定义见推论4.4之前的段落。）那么，对于所有 $t \in G$，都有 $|\phi(t)| = \|M_\phi(\lambda(t))\| = 1$ ，因此 $\lambda(G) \subset \mathrm{Ran}(M_\phi)$。由于 $\mathrm{Ran}(M_\phi)$ 是 w^*-闭的，这意味着 M_ϕ 是满射。接着，命题 6.1 的证明也表明，存在一个复数 δ ，满足 $|\delta| = 1$ ，使得 $\delta\phi$ 是一个特征。

现在我们转向 $p = 2$ 的情形。在引理 6.4 之前，我们考虑任意冯·诺伊曼代数 M 上构造的任意 Connes-Hilsum 非交换 L^2-空间 $L^2(M)$。在 [19], 中，Junge 引入了 ℓ^1 值的非交换空间 $L^p(M;\ell^1)$。这里，我们考虑 $L^2(M;\ell_2^1)$，它是将情形限制为 $p = 2$ ，并将 ℓ^1 替换为二维空间 ℓ_2^1 而得到的。因此， $L^2(M;\ell_2^1)$ 是直和 $L^2(M) \oplus L^2(M)$，并配备了特定范数。有关该范数的信息，可参见例如 [24] （我们在此不会明确使用该范数）。

我们称两个元素 a， $b \in L^2(M)$ 不相交，若 $a^*b = 0$ 且 $ab^* = 0$。接着，若对于 $L^2(M)$ 中任意不相交的 a和 b，其像 $S(a)$ 与 $S(b)$ 不相交，则称有界映射 S: $L^2(M) \to L^2(M)$ 为分离映射。这一术语将 [24, 第 3]节中的术语推广到了可能的非迹情形。

引理 6.3. (1) 设 $a, b \in L^2(M)$。那么， a 和 b 不相交，当且仅当

$$\big\|(a,b)\big\|_{L^2(M;\ell_2^1)} \le \big(\|a\|_2^2 + \|b\|_2^2\big)^{\frac{1}{2}}.$$

(2) 设 $S\colon L^2(M) \to L^2(M)$ 是一个 2-正等距映射。那么 S 是分离的 .

证明。 断言 (1) 在 $L^2(M)$ 为带迹非交换 L^2-空间时，按 [24, 引理 4.1] 证明。该证明可逐字推广至一般情形。

现在设 $S\colon L^2(M) \to L^2(M)$ 是一个 2-正等距映射。那么根据 [24, 命题 5.1], , 我们有

$$\|(S(a), S(b))\|_{L^2(M;\ell_2^1)} \leq \big\|(a,b)\big\|_{L^2(M;\ell_2^1)}. \tag{6.3}$$

同样，这一结果仅对带迹空间给出了证明，但可推广至一般情形。

设 $a,\ b \in L^2(M)$ 是不相交元素。结合 (1) 和 (6.3)，我们得到 n

$$\|(S(a), S(b))\|_{L^2(M;\ell_2^1)} \leq \big(\|a\|_2^2 + \|b\|_2^2\big)^{\frac{1}{2}}.$$

由于 $\|S(a)\|_2 = \|a\|_2$ 且 $\|S(b)\|_2 = \|b\|_2$，这再次由（1）可知， $S(a)$ 与 $S(b)$ 不相交。□

引理 6.4. 设 $S\colon L^2(M) \to L^2(M)$ 是一个正满射等距映射。那么 S^{-1} 是正的。

证明. 元素 $a \in L^2(M)$ 为正，当且仅当对于所有 $b \in L^2(M)^+$，$(a|b) \geq 0$ 。利用这一判据，我们可知，如果 $S\colon\ L^2(M) \to L^2(M)$ 为正，那么 S^* 为正。若进一步 S 是满射等距映射，则 $S^{-1} = S^*$，因此 S^{-1} 为正。□

回顾注 4.4，对于任意 $S\colon\ L^2(M) \to L^2(M)$，我们令

$$S_2\colon L^2(M_2(M)) \longrightarrow L^2(M_2(M))$$

为其自然张量扩张。以下是定理 5.3 对于 $p = 2$的一个类似结果。这是这样一个事实的逆命题：若 ϕ 是 G上的连续特征，则 $M_{\phi,2}$ 是完全等距的满射等距映射（参见推论 4.3 和注 4.4）。

定理 6.5. 设 $\phi \in L^\infty(G)$。若算子 $S := M_{\phi,2}\colon\ L^2(\mathcal{L}G) \to L^2(\mathcal{L}G)$ 满足S_2 是一个正等距映射，则 ϕ 局部几乎处处等于一个连续特征。

证明.假设对于 $S = M_{\phi,2}$，算子 S_2 是一个正等距映射。那么 S 是一个 2-正等距映射，因此根据引理 6.3， S 是分离的。由命题 5.4， S 是满射，这意味着 S_2 是满射。接着，应用引理 6.4 并取 S_2，我们得到 S_2^{-1} 是正的。因此， S^{-1} 是一个 2- 正等距映射，所以以上推理表明 S^{-1} 也是分离的。仔细考察 Sherman 的证明可知， [30, 定理 1.2]适用于任意一个从非交换 L^2-空间到非交换 L^2-空间的满射等距映射，只要该映射及其逆映射都是分离的。于是，如果 S_2 是一个正等距映射，引理 5.2 和定理 5.3 的证明便适用于 $S = M_{\phi,2}$ 。□

我们不知道定理 5.3 是否能完全推广到 $p = 2$。

致谢： 最后两位作者感谢国际数学交流中心（CIRM）通过 RiR 资助营造了卓越的研究环境，极大地加快并促进了本项工作。第三位作者衷心感谢玛丽和路易·巴斯德大学在其访问期间提供了优良的研究环境。

References

[1] C. Arhancet 和 C. Kriegler，《非交换 Lp 空间上的投影、乘子与可分解映射》，法国数学会回忆录（新系列）第 177 号（2023），vi+185 页。[2] C. Arhancet、C. Kriegler、C. Le Merdy 和 S. Zadeh，《分离傅里叶乘子与舒尔乘子》，《傅里叶分析与应用杂志》30（2024），第 1 期，论文编号 5，共 27 页。[3] R. Bhatia，《矩阵分析》，数学研究生教材第 169 卷。施普林格出版社，纽约，1997。[4] J. de Canni`ère 和 U. Haagerup，《某些简单李群及其离散子群的傅里叶代数乘子》，《美国数学杂志》107（1985），455–500。[5] M. Caspers，《局部紧量子群上的 L^p-傅里叶变换》，《算子理论杂志》69（2013），第 1 期，161–193。[6] M. Caspers、J. Parcet、M. Perrin 和 ´E. Ricard，《非交换 de Leeuw 定理》，《Forum Mathematicum Sigma》3（2015），论文编号 e21，共 59 页。[7] M. Caspers 和 M. de la Salle，《可和群作用于非交换 L^p空间时的舒尔乘子与傅里叶乘子》，《美国数学会汇刊》367（2015），第 10 期，6997–7013。[8] A. Connes，《冯·诺依曼代数的空间理论》，《泛函分析杂志》35（1980），第 2 期，153–164。[9] C. Duquet 和 C. Le Merdy，《UCP 自伴傅里叶乘子的绝对膨胀：非幺模情形》，《格拉斯哥数学杂志》67（2025），第 3 期，307–324。[10] M. Enock 和 J.-M. Schwartz，《Kac 代数与局部紧群的对偶性》，施普林格出版社，柏林，1992。x+257页。[11] G. Folland，《抽象调和分析教程》，数学教材。博卡拉顿，2016。[12] A. Gonz´alez-P´erez、M. Junge 和 J. Parcet，《通过索伯列夫维数研究群代数中的光滑傅里叶乘子》，《高等师范学院科学年报》（第 4 辑）50（2017），第 4 期，879–925。[13] U. Haagerup，《冯·诺依曼代数交叉积的对偶权 II》，《斯堪的纳维亚数学杂志》43（1978），119–140。[14] U. Haagerup，《任意冯·诺依曼代数所关联的 L^p 空间》，载于《算子代数及其在数学物理中的应用（1977 年马赛学术研讨会论文集）》，第 175–184 页，法国国家科学研究中心国际研讨会第 274 卷，法国国家科学研究中心，巴黎，1979。[15] U. Haagerup、M. Junge 和 Q. Xu，《非交换 L_p 空间的约化方法及其应用》，《美国数学会汇刊》362（2010），第 4 期，2125–2165。[16] H. Hanche-Olsen 和 E. Størmer，《Jordan 算子代数》，数学专著与研究丛书第 21 卷。波士顿—伦敦—墨尔本：Pitman 高级出版计划，VIII，1984。[17] F. Hiai，《冯·诺依曼代数若干专题讲座》，EMS 数学讲座系列，EMS 出版社，柏林，2021，viii+241 页。[18] M. Hilsum，《由空间导数定义的冯·诺依曼代数的 L_p 空间》，《泛函分析杂志》40（1981），第 2 期，151–169。[19] M. Junge，《非交换鞅的 Doob 不等式》，《纯粹与应用数学杂志》549（2002），149–190。[20] M. Junge 和 Q. Xu，《非交换 Burkholder/Rosenthal 不等式，II：应用》，《以色列数学杂志》167（2008），227–282。[21] R. V. Kadison，《算子代数的等距映射》，《数学年刊》（第 2 辑）54（1951），325–338。[22] R. V. Kadison 和 J. R. Ringrose，《算子代数理论基础》第二卷，数学研究生学习丛书第 16 卷，美国数学会，1997。[23] H. Kosaki，《复插值方法在冯·诺依曼代数中的应用：非交换L_p空间》，《泛函分析杂志》56（1984），29–78。[24] C. Le Merdy 和 S. Zadeh，《非交换 L^p空间上的 ℓ^1-压缩映射》，《算子理论杂志》85（2021），第 2 期，417–442。[25] C. Le Merdy 和 S. Zadeh，《正映射向 Haagerup 非交换 L^p空间的扩张》，《Forum Mathematicum Sigma》13（2025），论文编号 e65，共 20 页。[26] J. Parcet，《舒尔乘子在调和分析与算子代数中的影响》，2026 年国际数学家大会论文集，即将出版（arXiv:2510.17732）。

[27] J. Parcet、 ́E. Ricard 和 M. de la salle， $SL_n(\mathbb{R})$中的傅里叶乘子，《杜克数学杂志》171（2022），第6期，1235–1297页。[28] J. Parcet、M. de la Salle 和 E. Tablate，幂等Schur乘子的局部几何，《Forum Mathematicum Pi》13（2025），论文编号 e14，共21页。[29] S. Parrott，等距乘子，《太平洋数学杂志》25（1968），159–166页。[30] D. Sherman，非交换 L^p 结构恰好编码Jordan结构，《泛函分析杂志》221（2005），第1期，150–166页。[31] D. Sherman，非交换Banach-Stone定理的新证明，载于《量子概率》，363–375页，Banach中心出版物第73卷，波兰科学院数学研究所，华沙，2006。[32] R. Strichartz，群代数的同构，《美国数学会会刊》17（1966），858–862页。[33] E. Størmer，关于 C^* 代数的Jordan结构，《美国数学会汇刊》120（1965），438–447页[34] S. V. Stratila，《算子代数中的模理论》，第二版，剑桥-IISc丛书，剑桥大学出版社，德里，2020，xii+447 页。[35] M. Takesaki，《算子代数理论 II》，数学科学百科全书第125卷，算子代数与非交换几何第6卷，施普林格出版社，柏林，2003，xxii+518 页。[36] M. Terp，与冯·诺伊曼代数相关的 L_p空间，讲义，哥本哈根大学数学研究所，1981。[37] M. Terp，冯·诺伊曼代数及其预对偶之间的插值空间，《算子理论杂志》8（1982），第2期，327–360页。[38] M. Terp， L^p 非幺模局部紧群上的傅里叶变换，《算子理论进展》2（2017），第4期，547–583页。[39] G. Vos，非幺模群上作用于非交换 L^p空间的多线性傅里叶乘子与Schur乘子的转移，《格拉斯哥数学杂志》67（2025），第2期，197–223页。[40] G. Vos，非交换 L_p空间上的乘子与转移，博士论文，代尔夫特，2024。

电子邮箱：christoph.kriegler@uca.frUniversité Clermont Auvergne, CNRS, LMBP, F-63000 Clermont-Ferrand, France电子邮箱：clemerdy@univ-fcomte.fr
Laboratoire de Mathématiques de Besançon, UMR 6623, CNRS, Université Marie et Louis Pasteur, 25030 Besançon Cedex, France电子邮箱：jsafoora@gmail.com
School of Mathematics, University of Bristol, United Kingdom