结合对称性与亥姆霍兹条件构造拉格朗日量

Merced Montesinos[1] ,* Diego Gonzalez[1, 2] ,† and Jorge Meza[1] ‡
[1] *Department of Physics, Center for Research and Advanced Studies, 2508 National Polytechnic Institute Avenue, San Pedro Zacatenco, 07360, Gustavo A. Madero, Mexico City, Mexico and*
[2] *Higher School of Mechanical and Electrical Engineering, National Polytechnic Institute, Adolfo López Mateos Professional Unit, 07738, Gustavo A. Madero, Mexico City, Mexico*（日期：2026年3月10日）

我们提出了由诺特恒等式推导出的新关系，这些关系揭示了拉格朗日量的海森矩阵各分量、构型变量和时间的无穷小对称变换，以及一个运动常数之间的相容性。利用这些关系，我们发展了两种将对称性要求直接纳入力学逆问题的新方法，从而限制了可接受的拉格朗日量集合。为此，我们将这些关系与亥姆霍兹条件相结合，使我们能够从一开始就构造其作用量呈现特定对称性的拉格朗日量。我们通过一维和二维实例阐释了这一理论。

arXiv:2603.07760v1 [math-ph] 8 Mar 2026

* merced.montesinos@cinvestav.mx
† dgonzalezv@ipn.mx
‡ jorge.meza@cinvestav.mx

1. 引言

动力系统在物理学和数学领域仍然是一个十分活跃的研究方向。例如，近期有研究提出了用于计算物理自由度的非哈密顿方法，见 [1, 2]。本文聚焦于对称性和力学逆问题的研究 [3, 4], 这一问题对构造具有物理意义的作用量具有深远影响 [5, 6]。

假设给定一个运动方程组，我们希望找到一个拉格朗日量，使其对应的欧拉–拉格朗日方程能够重现这些方程。我们可以像往常一样通过观察来寻找这样的拉格朗日量，然后确定由此构造出的作用量的对称性。或者，我们也可以采用一种完全系统化的方法，以亥姆霍兹条件为出发点，确定所需的拉格朗日量及其对应的作用量。提醒读者，亥姆霍兹条件是拉格朗日量存在的充要条件：必要性由亥姆霍兹本人证明 [7], ，充分性则由 Douglas 证明 [4] （力学逆问题）。因此，如果不满足亥姆霍兹条件，就不存在能通过欧拉-拉格朗日方程导出该运动方程组的拉格朗日量。然而，如果满足亥姆霍兹条件，则可能存在多个解。需要注意的是，这些解各自对应不同的拉格朗日量，也就是说，这些拉格朗日量彼此之间并不相差一个关于时间变量 t 的函数 $f(q^i,\ t)$的全导数，该函数仅依赖于坐标 q^i 和时间 t。到此为止，我们描述了力学逆问题，即根据给定的运动方程组求出拉格朗日量的问题。得到拉格朗日量后，下一步自然是研究相应作用量 [8–10]的对称性。

本文提出了两种解决力学逆问题的不同方法。第一种方法从一开始就将对称性与力学逆问题结合起来。若我们手头唯一的信息恰恰就是运动方程 [5]，那么从零开始，我们只能将运动方程的对称性作为出发点来讨论。接下来的目标是寻找一个包含运动方程某些对称性的拉格朗日量。这样做的原因是，在物理学中，我们通常并不关心找出所有仅仅能够导出给定运动方程组的拉格朗日量，而是希望找到一个其作用量具有特定对称性的拉格朗日量 [6]。此外，由于在物理学中，我们通常希望找到一个具有特定对称性的拉格朗日量（从而得到相应的作用量），并通过应用诺特第一定理获得所需的运动常数，因此，第二种方法更进一步，将对称性及其相关的运动常数都直接纳入力学逆问题。本文通过回答以下问题来探讨这两个问题：必须如何修改亥姆霍兹条件 [4, 7] ，才能使由此得到的拉格朗日量所构造的作用量从一开始就具有所需的对称性（或多种对称性）？

为实现上一段所概述的目标，我们首先在第2 节推导刚性对称性对应的诺特恒等式所导出的某些关系 [8–10]（即本文不考虑规范变换）。这些关系的一个重要特点是，它们涉及与某个拉格朗日量相关的海森矩阵的分量；这一点对于实现上述目标至关重要，因为该矩阵是亥姆霍兹条件的核心 [4, 7]。

我们希望本文能够填补该主题文献中的一处空白。

2. 诺特恒等式蕴含新的关系

我们首先回顾诺特第一定理，以确立本文通篇使用的符号和约定。特别是，对于含有重复指标的表达式，我们采用爱因斯坦求和约定。

诺特第一定理。如果作用量的“壳外”变分等于 [8–10]:

$$\Delta S \;=\; \Delta\int_{t_1}^{t_2}\mathscr{L}(q,\dot{q},t)dt=\int_{t_1}^{t_2}\frac{d\mathscr{F}}{dt}dt, \tag{1}$$

在‘小’无穷小变换[1]下，$\mathrm{F}\ =\mathrm{F}_a(q(t)\ t)\epsilon^a$

$$t'=t+\Delta t,\quad \Delta t=T_a(q(t),t)\epsilon^a,\quad a=1,\dots,r, \tag{2}$$

$$q'^i(t')=q^i(t)+\Delta q^i,\quad \Delta q^i=Q^i_a(q(t),t)\epsilon^a,\quad i=1,\dots,n, \tag{3}$$

[1] 有些作者采用一种版本的诺特第一定理，其中 Δt 和 Δq^i 也允许依赖于速度 $\dot{q}^i$。在这种情况下，$\mathscr{F}\ =\mathscr{F}_a(q(t)\ \dot{q}(t)\ t)\epsilon^a$ 也必须成立（例如参见文献 [11, 12]）。本文采用物理学中的标准情形，即 Δt，Δq^i，且$\mathscr{F}$ 均独立于 $\dot{q}^i$ （例如参见 [6, 13]）。不过，参见第6节。

then

$$\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}^i}\right)\delta q^i+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i+\mathscr{L}\Delta t-\mathscr{F}\right)=0. \tag{4}$$

无穷小变换之所以是'小'的，是因为如果将 ϵ^a 在（2）和（3）右侧线性出现的无穷小常参数设为零，即 $\epsilon^a=0$，就会得到恒等变换。利用$\Delta=\delta+\Delta t\frac{d}{dt}$（它将总变分 Δ 与变分 δ联系起来，且满足 $\delta\frac{d}{dt}-\frac{d}{dt}\delta=0$），表达式（4）也可写成

$$\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}^i}\right)\delta q^i+\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}^i}\Delta q^i+\left(\mathscr{L}-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right)\Delta t-\mathscr{F}\right]=0. \tag{5}$$

关系式（4）或（5）称为诺特恒等式。请注意，这是一个"壳外"关系，也就是说，无须调用运动方程，该关系便成立。由（4）可清楚看出

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i+\mathscr{L}\Delta t-\mathscr{F} \tag{6}$$

是一个运动常数，根据（5）也可写为

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}^i}\Delta q^i+\left(\mathscr{L}-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right)\Delta t-\mathscr{F}. \tag{7}$$

在讨论对称性和力学逆问题之前，我们先推导由诺特恒等式（4）或（5）得出的一些相关新关系。下文给出的新关系并未收录于诺特关于对称性的开创性论文 [8–10] 中；当然，在本文发表之前，该主题的大量文献中也未曾报道这些关系。

第一组关系。 我们将诺特恒等式（5）中涉及的运动常数（7）记作如下形式：

$$\mathscr{C}:=\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}^i}\Delta q^i+\left(\mathscr{L}-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right)\Delta t-\mathscr{F}. \tag{8}$$

考虑到 Δq^i，Δt，以及$\mathscr{F}$ 均与 $\dot{q}^i$无关，由（8）可得

$$\frac{\partial \mathscr{C}}{\partial \dot{q}^i}=M_{ij}\delta q^j, \tag{9}$$

与 $M_{ij}=\frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial \dot{q}^i\partial \dot{q}^j}$。等价地，

$$\delta q^i=M^{ij}\frac{\partial \mathscr{C}}{\partial \dot{q}^j}, \tag{10}$$

其中 M^{ij}是 M_{ij}的逆。这是一个非常精妙的表达式，它将构型变量的变分表示为几何结构 M^{ij}和运动常数 C 的函数。

一般而言，式（10）的左边也等于 $\delta q^i=\Delta q^i-\dot{q}^i\Delta t$。令两个表达式相等，并假设 Δq^i 和 Δt 与 $\dot{q}^i$无关，对速度 $\dot{q}^i$求偏导，得到

$$\Delta t=-\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left(M^{ij}\frac{\partial \mathscr{C}}{\partial \dot{q}^j}\right). \tag{11}$$

因此，利用式（10）和（11），可得

$$\Delta q^i=\delta q^i+\dot{q}^i\Delta t=M^{ij}\frac{\partial \mathscr{C}}{\partial \dot{q}^j}-\frac{1}{n}\dot{q}^i\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}\left(M^{jk}\frac{\partial \mathscr{C}}{\partial \dot{q}^k}\right). \tag{12}$$

请注意，表达式（11）和（12）巧妙地结合了三个关键要素：无穷小对称变换Δt 和 Δq^i、拉格朗日量 $\mathscr{L}$（包含在 M^{ij}中），以及运动常数 $\mathscr{C}$。换言之，无穷小对称变换 Δt 和 Δq^i 可用运动常数$\mathscr{C}$ 和 M_{ij}来表示。

考虑到 $\Delta t = T_a(q,t)\epsilon^a$, $\Delta q^i = Q^i_a(q,t)\epsilon^a$, $\mathsf{F} = \mathsf{F}_a(q,t)\epsilon^a$, and $\mathsf{C} = \mathsf{C}_a(q,\dot{q},t)\epsilon^a$，其中 ϵ^a 是分别对应于各个无穷小变换的无穷小常参数，表达式（11）和（12）也可以写成如下形式：

$$T_a = -\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left(M^{ij}\frac{\partial \mathscr{C}_a}{\partial \dot{q}^j}\right), \tag{13}$$

$$Q^i_a = M^{ij}\frac{\partial \mathscr{C}_a}{\partial \dot{q}^j} - \frac{1}{n}\dot{q}^i\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}\left(M^{jk}\frac{\partial \mathscr{C}_a}{\partial \dot{q}^k}\right). \tag{14}$$

我们作出以下三点说明：

首先，请注意，表达式（11）和（12），或其等价形式（13）和（14），清楚地表明：两个导出相同运动方程、但对应不同 M_{ij} 的拉格朗日量，可以具有相同的对称性 Δq^i 和 Δt，前提是相应的运动常数也不同。我们来说明这一点：

拉格朗日量 $\mathsf{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2e^{\lambda t}$ 和 $\mathsf{L} = m(\dot{x}\ln|\dot{x}| - \lambda x)$ 都给出阻尼“自由”粒子的运动方程 $\ddot{x} + \lambda\dot{x} = 0$，其中 m 是质量，λ 是一个正的常数。请注意，第一个拉格朗日量满足 $M_{11} = me^{\lambda t}$，而第二个则满足$M_{11} = m/\dot{x}$。无穷小变换 $\Delta t = -e^{\lambda t}\epsilon$ 和 $\Delta x = 0$ 是由第一个拉格朗日量构造的作用量的严格对称性（$\mathsf{F} = 0$）；同一个无穷小变换也是由第二个拉格朗日量构造的作用量的对称性，但会产生一个边界项（$\mathsf{F} = \lambda mxe^{\lambda t}\epsilon$）。对于第一个拉格朗日量，运动常数为 $\mathsf{C} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2e^{2\lambda t}\epsilon$（参见文献 [14]）；而对于第二个拉格朗日量，运动常数为 $\mathsf{C} = m\dot{x}e^{\lambda t}\epsilon$。因此，同一对称性与两个不同拉格朗日量所导出的两个不同运动常数相关联。[2]

其次，还应注意，表达式（11）和（12），或其等价形式（13）和（14），清楚地表明，两种不同的对称性各自对应两个不同的拉格朗日量，却可以与同一个运动常数$\mathscr{C}$相关联。下面举例说明这一点：

无穷小变换 $\Delta t = 0$ 和 $\Delta x = \epsilon$ 是由拉格朗日量 $\mathsf{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2e^{\lambda t}$ 构造的作用量的精确对称性（$\mathsf{F} = 0$），并给出运动常数 $\mathsf{C} = m\dot{x}e^{\lambda t}\epsilon$。如上所述，同一个运动常数也可以由无穷小变换 $\Delta t = -e^{\lambda t}\epsilon$ 和 $\Delta x = 0$得到；该变换是由拉格朗日量 $\mathsf{L} = m(\dot{x}\ln|\dot{x}| - \lambda x)$构造的作用量的对称性（$\mathsf{F} = \lambda mxe^{\lambda t}\epsilon$）。因此，同一个运动常数可以由两种不同的对称性产生。

第三，请注意，如果将 (11) 和 (12) 代入 (8)，即可得到如下关系：

$$\mathscr{F} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}^i}M^{ij}\frac{\partial \mathscr{C}}{\partial \dot{q}^j} - \frac{1}{n}\mathscr{L}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left(M^{ij}\frac{\partial \mathscr{C}}{\partial \dot{q}^j}\right) - \mathscr{C}. \tag{16}$$

或者，也可以将 (10) 和 (11) 代入由 (6) 表示的运动常数 $\mathscr{C}$，从而得到这一关系。[3]

第二组关系。由诺特恒等式 (4)，我们立即得到壳外关系

$$\delta\mathscr{L} = \frac{d}{dt}\left(\mathscr{F} - \mathscr{L}\Delta t\right), \tag{17}$$

它具有简洁而深刻的性质。该表达式在壳外也等价于

$$\Delta\mathscr{L} + \mathscr{L}\frac{d}{dt}\Delta t = \frac{d\mathscr{F}}{dt}, \tag{18}$$

其显式形式为

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^k}\Delta q^k + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}^k}\left[\frac{d}{dt}\Delta q^k - \dot{q}^k\frac{d}{dt}\Delta t\right] + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial t}\Delta t + \mathscr{L}\frac{d}{dt}\Delta t = \frac{d\mathscr{F}}{dt}. \tag{19}$$

此外，由于 Δq^i 和 Δt 均与速度 $\dot{q}^i$无关，(19) 左端完全不含加速度 $\ddot{q}^i$。右端也同样如此，因为 $\mathscr{F}$ 与 $\dot{q}^i$无关。读者必须

[2] 顺便指出，参考文献 [14] 第153页称，运动常数 $\mathsf{C} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2e^{2\lambda t}\epsilon$ 并非由对采用拉格朗日量 $\mathsf{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2e^{\lambda t}$构造的作用量应用诺特第一定理得出；正如我们所证明的，这一说法并不正确。事实上，无穷小变换 $\Delta t = -e^{\lambda t}\epsilon$和 $\Delta x = 0$ 的有限形式为 –

$$t' = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(e^{-\lambda t} + \alpha\lambda\right), \quad x'(t') = x(t), \tag{15}$$

其中 α 是任意常数参数（前提是前一个表达式有意义）。注意，如果 $\alpha = 0$，那么 $t' = t$，因此变换（15）具有所需的性质。它存在逆变换，且两个变换的复合仍属于该变换类。[3] 特别地，对于满足 $\Delta t = 0$的无穷小对称变换，关系（16）具有简单形式 $\mathsf{C} + \mathsf{F}$

$= \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}^i}M^{ij}\frac{\partial \mathscr{C}}{\partial \dot{q}^j}$。

将（19）与（4）和（5）进行对照。诺特恒等式（19）的另一种形式，是寻找由给定拉格朗日量构造的作用量的所有连续对称性（亦称变分对称性）的出发点$\mathscr{L}$。换言之，（4）、（5）、（17）、（18）和（19）是诺特恒等式的五种等价写法，这是一个众所周知的事实。然而，故事并未就此结束。令人惊讶的是，诺特恒等式还蕴含着新的关系。

事实上，利用 Δt，Δq^i以及 $\mathscr{F}$ 均与 $\dot{q}^i$无关这一事实，由（19）可得

$$\frac{\partial M_{ij}}{\partial q^k}\Delta q^k+\frac{\partial M_{jk}}{\partial \dot{q}^i}\left[\frac{d}{dt}\Delta q^k-\dot{q}^k\frac{d}{dt}\Delta t\right]+M_{jk}\left[\frac{\partial}{\partial q^i}\Delta q^k-\dot{q}^k\frac{\partial}{\partial q^i}\Delta t\right]+M_{ik}\left[\frac{\partial}{\partial q^j}\Delta q^k-\dot{q}^k\frac{\partial}{\partial q^j}\Delta t\right]$$
$$+\frac{\partial M_{ij}}{\partial t}\Delta t-M_{ji}\frac{d}{dt}\Delta t=0, \tag{20}$$

当 $M_{ij}=\frac{\partial^2\mathscr{L}}{\partial\dot{q}^i\partial\dot{q}^j}$时，利用 $M_{ij}=M_{ji}$和$\frac{\partial M_{ij}}{\partial\dot{q}^k}=\frac{\partial M_{ik}}{\partial\dot{q}^j}$，我们将（20）写为：

$$\Delta M_{ij}+M_{ik}\frac{\partial}{\partial q^j}\Delta q^k+M_{jk}\frac{\partial}{\partial q^i}\Delta q^k-M_{ik}\dot{q}^k\frac{\partial}{\partial q^j}\Delta t-M_{jk}\dot{q}^k\frac{\partial}{\partial q^i}\Delta t-M_{ij}\frac{d}{dt}\Delta t=0, \tag{21}$$

其中

$$\Delta M_{ij}=\frac{\partial M_{ij}}{\partial q^k}\Delta q^k+\frac{\partial M_{ij}}{\partial\dot{q}^k}\left[\frac{d}{dt}\Delta q^k-\dot{q}^k\frac{d}{dt}\Delta t\right]+\frac{\partial M_{ij}}{\partial t}\Delta t. \tag{22}$$

Al或者，利用 $\Delta q^i=\delta q^i+\dot{q}^i\Delta t$，表达式（21）也可等价地写成

$$\Delta M_{ij}+M_{ik}\frac{\partial}{\partial q^j}\delta q^k+M_{jk}\frac{\partial}{\partial q^i}\delta q^k-M_{ij}\frac{d}{dt}\Delta t=0. \tag{23}$$

我们作如下三点说明：

首先，与（11）和（12）类似，关系式（21）或（23）同样涉及 M_{ij}、其导数以及无穷小变换 Δt 和 Δq^i。这表明，无穷小对称性 Δt 和 Δq^i 对 M_{ij} 施加了限制，反之亦然。换言之，（21）或（23）是无穷小对称变换 Δt 和 Δq^i与分量 M_{ij}之间的相容关系。

其次，与（11）和（12）不同，关系式（21）或（23）并未显式涉及运动常数 $\mathscr{C}$。

第三，若将（10）和（11）代入（23），便可得到一个相容性关系，其中仅涉及 M_{ij} 和运动常数 $\mathscr{C}$。

总之，关系式（10）、（11）、（12）、（16）、（20）、（21）和（23）是本节的新成果，也是主要结果。令人惊讶的是，尽管诺特第一定理在一个多世纪前就已发表 [8–10]，这些关系此前却从未见诸文献。表达式（10）、（11）、（12）、（20）、（21）和（23）的一个显著特点是，除了涉及无穷小对称变换 Δt和 Δq^i之外，还涉及几何结构 M_{ij}。这种依赖关系使得将它们与亥姆霍兹条件 [4, 7], 结合起来显得顺理成章，因为亥姆霍兹条件恰好是关于M_{ij}的方程。这是本文的第二个主题，将在简要概述亥姆霍兹条件后于下文进行研究。

3. 亥姆霍兹条件

力学逆问题的核心是亥姆霍兹条件 [4, 7]

$$\frac{dM_{ij}}{dt}+\frac{1}{2}M_{ik}\frac{\partial f^k}{\partial\dot{q}^j}+\frac{1}{2}M_{jk}\frac{\partial f^k}{\partial\dot{q}^i}=0, \tag{24}$$
$$M_{ik}A^k{}_j-M_{jk}A^k{}_i=0, \tag{25}$$
$$M_{ij}=M_{ji}, \tag{26}$$
$$\frac{\partial M_{ij}}{\partial\dot{q}^k}=\frac{\partial M_{ik}}{\partial\dot{q}^j}, \tag{27}$$
$$\det(M_{ij})\neq 0,\quad i,j,k,\ldots=1,\ldots,n, \tag{28}$$

with

$$A^k{}_i:=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f^k}{\partial\dot{q}^i}\right)-2\frac{\partial f^k}{\partial q^i}-\frac{1}{2}\frac{\partial f^k}{\partial\dot{q}^l}\frac{\partial f^l}{\partial\dot{q}^i}. \tag{29}$$

这些条件对于拉格朗日量 [7] 的存在是 [4] 必要且充分的，其中拉格朗日量为 $\mathscr{L}(q,\ \dot{q},\ t)$，其欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}^i} = 0, \tag{30}$$

导出运动方程

$$\ddot{q}^i = f^i(q, \dot{q}, t). \tag{31}$$

注意， M_i $_j$ 是系统动力学所依托的几何结构。此外，请注意 t

$$\frac{dM}{dt} + M\frac{\partial f^i}{\partial \dot{q}^i} = 0, \quad M := \det(M_{ij}), \tag{32}$$

也成立。然而，这 个关系并非独立关系，而是直接由亥姆霍兹条件推得 s.

4. 对称性与力学的逆问题

截至目前，本文的主要成果是第2节报告的、由诺特恒等式推导出的新关系。这些关系本身具有概念和理论意义，而不依赖于任何具体应用。这些关系的一个显著特点是，它们包含了无穷小对称变换的信息，也包含了 M_{ij}。正如 Douglas 所示 [4], 21 ，在诺特关于对称性的开创性工作发表 [8—10]年后， M_{ij} 是力学逆问题中的相关对象。然而，Douglas 的力学逆问题方法并未包含任何关于对称性的信息。因此，将我们在第2 节报告的新关系与亥姆霍兹条件 [4, 7] 结合起来是很自然的，因为这两组方程都包含 M_{ij}。我们利用这些新关系来约束亥姆霍兹条件（24）–（28）的通解，从而使由所得拉格朗日量构造的作用量天然体现所施加的对称性。

由此，我们得到以下两种全新的方法:

方法1。将联系无穷小变换 Δt 和 Δq^i 与几何结构 M_{ij}的相容关系，（21）或（23），直接与亥姆霍兹条件（24）–（28）结合起来。这是可行的，因为亥姆霍兹条件和相容关系都涉及 M_{ij}。这样一来，亥姆霍兹条件从一开始就补充了关系（21）或（23）中所编码的对称变换信息，从而确保由此得到的任何拉格朗日量（以及相应的作用量）都具有所施加的对称性。显然，方法1比力学逆问题的常规方法更强大，因为 Douglas 的方法 [4] 只能得到拉格朗日量，无法从一开始就得到具有特定对称性的拉格朗日量，而方法1可以做到这一点。

方法2。将构型变量的变分与几何结构 M^{ij}以及运动常数$\mathscr{C}$之间的关系，即（10）所给出的关系，与亥姆霍兹条件（24）–（28）结合起来。与方法1不同，这种方法还纳入了运动常数$\mathscr{C}$；该常数必须通过对由编码了所施加对称性的拉格朗日量构造的作用量应用诺特第一定理而得到 Δt 和 Δq^i。因此，这种新方法比方法1的限制更多。它不仅寻找具有所施加对称性 Δt 和 Δq^i的拉格朗日量（或一族拉格朗日量），还确保所得作用量通过应用诺特第一定理导出运动常数$\mathscr{C}$ 。

下一节中，我们将应用这两种新方法。

5. 示例

示例1。作为方法1的示例，我们考虑一个受到与速度成正比的摩擦力作用的单个粒子（也称为阻尼“自由”粒子），其运动方程为 $\ddot{x} = -\lambda\dot{x}$，其中 λ是一个正常数。对于这个系统，亥姆霍兹条件（24）可化简为

$$\frac{dM_{11}}{dt} - \lambda M_{11} = 0, \tag{33}$$

其通解为 $M_{11} = G(\xi_1,\ \xi_2)/\dot{x}$，其中 G 是关于量 $\xi_1 = \dot{x} + \lambda x$ 和 $\xi_2 = \dot{x}e^{\lambda t}$ ([13]) 的任意（可微）函数。利用 M_{11} 的解，Δx 与 Δt 之间的相容关系为

M_{11} (20) 变为

$$\left[-\frac{G}{\dot{x}^2}+\frac{1}{\dot{x}}\left(\frac{\partial G}{\partial \xi_1}+e^{\lambda t}\frac{\partial G}{\partial \xi_2}\right)\right]\left(\frac{d}{dt}\Delta x-\dot{x}\frac{d}{dt}\Delta t\right)+\frac{2G}{\dot{x}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x-\dot{x}\frac{\partial}{\partial x}\Delta t\right)+\lambda\left(\frac{\partial G}{\partial \xi_1}\frac{\Delta x}{\dot{x}}+e^{\lambda t}\frac{\partial G}{\partial \xi_2}\Delta t\right)$$
$$-\frac{G}{\dot{x}}\frac{d}{dt}\Delta t=0. \tag{34}$$

这表明，无穷小对称性 Δt 和 Δx 对一般函数 G施加了限制。特别是，对于无穷小对称变换 $\Delta t=0$ 和 $\Delta x=\epsilon$，限制条件（34）得出 $\frac{\partial G}{\partial \xi_1}=0$，这意味着只有 $G=G(\xi_2)$。因此， $M_{11}=G(\xi_2)/\dot{x}$与该无穷小变换相容，其中 G 是 ξ_2的任意（可微）函数。两个简便的选择可以说明这一结果。取 $G(\xi_2)=1$，可得 $M_{11}=1/\dot{x}$，由此得到拉格朗日量 $\mathrm{L}=m(\dot{x}\ln|\dot{x}|-\lambda x)$；而取 $G(\xi_2)=\xi_2$，则得到 $M_{11}=e^{\lambda t}$，由此得到众所周知的拉格朗日量 $\mathrm{L}=\frac{1}{2}m\dot{x}^2e^{\lambda t}$ [3]。在这两种情况下，由相应拉格朗日量构造的作用量都在无穷小变换 $\Delta t=0$ 和 $\Delta x=\epsilon$下保持不变，正如预期。这里引入常数 m，以保持与第2节中所给拉格朗日量的齐次性。

若转而考虑无穷小对称变换 $\Delta t=\epsilon$ 和 $\Delta x=0$，则相容关系 (34) 意味着 $\frac{\partial G}{\partial \xi_2}=0$，因此只有 $G=G(\xi_1)$，进而 $M_{11}=G(\xi_1)/\dot{x}$。特别地，选择 $G(\xi_1)=1$ 可恢复 $M_{11}=1/\dot{x}$，由此得到拉格朗日量 $\mathrm{L}=m(\dot{x}\ln|\dot{x}|-\lambda x)$；而特定选择 $G(\xi_1)=\xi_1$则得到 $M_{11}=1+\lambda x/\dot{x}$，由此得到拉格朗日量 $\mathrm{L}=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+m\lambda x\dot{x}(\ln|\dot{x}|-1)-\frac{1}{2}m\lambda^2x^2$。在这两种情况下，由相应拉格朗日量构造的作用量在无穷小变换 $\Delta t=\epsilon$ 和$\Delta x=0$下保持不变，正如所期望的那样。

现在考虑无穷小变换 $\Delta t=0$和 $\Delta x=e^{-\lambda t}\epsilon$。相容关系（34）意味着 $G-\xi_2\frac{\partial G}{\partial \xi_2}=0$，其通解为 $G=\xi_2\Phi$（ξ_1），其中 Φ是 ξ_1的任意（可微）函数。因此 $M_{11}=\xi_2\Phi$（ξ_1）$/\dot{x}$。若选择 Φ（ξ_1）$=1$，则得到 $M_{11}=e^{\lambda t}$，由此得到众所周知的拉格朗日量 $\mathscr{L}=\frac{1}{2}m\dot{x}^2e^{\lambda t}$ [3]。如所期望的，由此拉格朗日量构造的作用量在无穷小变换 $\Delta t=0$ 和 $\Delta x=e^{-\lambda t}\epsilon$下保持不变。

例2。作为方法1的示例，我们考虑一个角频率相同且为常数 ω的二维谐振子，其运动方程如下：

$$\ddot{q}^1=-\omega^2q^1,\quad \ddot{q}^2=-\omega^2q^2. \tag{35}$$

我们希望构造拉格朗日量，使其导出前述运动方程，并使其相应的作用量在下述无穷小“微小”变换下保持不变：

$$\Delta t=0,\quad \Delta q^1=q^2\epsilon,\quad \Delta q^2=-q^1\epsilon, \tag{36}$$

对应于无穷小旋转。

根据方法1，分量 M_{ij} 必须满足（20），其具体形式为

$$\begin{aligned}
q^2\frac{\partial M_{11}}{\partial q^1}-q^1\frac{\partial M_{11}}{\partial q^2}+\dot{q}^2\frac{\partial M_{11}}{\partial \dot{q}^1}-\dot{q}^1\frac{\partial M_{12}}{\partial \dot{q}^1}-2M_{12}&=0,\\
q^2\frac{\partial M_{22}}{\partial q^1}-q^1\frac{\partial M_{22}}{\partial q^2}+\dot{q}^2\frac{\partial M_{21}}{\partial \dot{q}^1}-\dot{q}^1\frac{\partial M_{22}}{\partial \dot{q}^1}+2M_{21}&=0,\\
q^2\frac{\partial M_{12}}{\partial q^1}-q^1\frac{\partial M_{12}}{\partial q^2}+\dot{q}^2\frac{\partial M_{21}}{\partial \dot{q}^1}-\dot{q}^1\frac{\partial M_{22}}{\partial \dot{q}^1}+M_{11}-M_{22}&=0,\\
q^2\frac{\partial M_{21}}{\partial q^1}-q^1\frac{\partial M_{21}}{\partial q^2}+\dot{q}^2\frac{\partial M_{11}}{\partial \dot{q}^2}-\dot{q}^1\frac{\partial M_{12}}{\partial \dot{q}^2}+M_{11}-M_{22}&=0.
\end{aligned} \tag{37}$$

注意，第四个方程可利用 $M_{12}=M_{21}$、 $\frac{\partial M_{21}}{\partial \dot{q}^1}=\frac{\partial M_{11}}{\partial \dot{q}^2}$和 $\frac{\partial M_{22}}{\partial \dot{q}^1}=\frac{\partial M_{12}}{\partial \dot{q}^2}$得出，这与 ~~(21)~~ 完全~~一~~致。

方程组（37）与亥姆霍兹条件（24）-（28）联立后有唯一解，为

$$M_{11}=c,\quad M_{12}=0,\quad M_{22}=c, \tag{38}$$

其中 c 是一个非零实常数。

利用（38），Douglas定理 [4]使我们能够得到唯一的拉格朗日量：

$$\mathscr{L}=\frac{c}{2}\left[(\dot{q}^1)^2+(\dot{q}^2)^2-\omega^2(q^1)^2-\omega^2(q^2)^2\right], \tag{39}$$

允许加上一个形式为 $df(q^1,\ q^2,\ t)/dt$的项，该项会导出运动方程（35），且其作用量具有所需的对称性（36）。

例3。如方法2所要求的，必须将关系式（10）与亥姆霍兹条件（24）-（28）结合起来，以确定对于给定的无穷小变换 Δq^i 和 Δt 以及一个运动常数$\mathscr{C}$，是否存在一个拉格朗日量$\mathscr{L}$，使得其作用量在该变换下保持不变，并且给出$\mathscr{C}$。

对于只有一个构型变量 q的系统，可以立即说明这一问题。在这种情况下，由（10）可得：

$$M_{11} = \left(\frac{1}{\delta q}\right)\frac{\partial \mathscr{C}}{\partial \dot{q}} = \left(\frac{1}{\Delta q - \dot{q}\Delta t}\right)\frac{\partial \mathscr{C}}{\partial \dot{q}}, \tag{40}$$

因此， M_{11} 完全由 Δt、 Δq^i和 C 决定。接下来，我们必须检验这个表达式是否满足亥姆霍兹条件。如果满足，则存在一个具有所需性质的拉格朗日量（及其作用量）；如果不满足，则不存在这样的拉格朗日量。

对于具有多个构型变量 q^i的系统，我们必须检验（10）与亥姆霍兹条件是否相容。与一维情形一样：如果相容，则存在一个具有所需性质的拉格朗日量（及其作用量）。如果不相容，则不存在这样的拉格朗日量。

6. 总结

本文表明，力学逆问题 [4] 可以通过从一开始就纳入对称性要求来加以完善。我们直接从诺特第一定理 [8–10]，推导出新的关系式，将海森矩阵、无穷小对称变换及其相关的运动常数整合到统一框架中。这些新关系式（见第2节），结合亥姆霍兹条件 [4, 7]，，使我们能够构造出不仅可以重现运动方程，而且内在地包含所需不变性的拉格朗日量。

为拓展适用范围，我们着重介绍一些自然的推广和应用：

对于正则拉格朗日量，考虑涉及速度 [11, 12] Δt =Δ$(q,\dot{q},t,\epsilon)$和 $\Delta q^i = \Delta q^i(q,\dot{q},t,\epsilon)$、且对常参数 ϵ^a呈线性依赖的刚性无穷小变换，表达式 (4)、(5) 和 (8) 仍然成立。然而，在这种情况下 F =F$(q,\dot{q},t,\epsilon)$，并且我们有以下结果，而非式 (10)：

$$\delta q^i = M^{ij}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}\left(\mathscr{C}+\mathscr{F}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}^k}\frac{\partial \Delta q^k}{\partial \dot{q}^j} - \left(\mathscr{L} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}^k}\dot{q}^k\right)\frac{\partial \Delta t}{\partial \dot{q}^j}\right]. \tag{41}$$

同样，若不采用（21）或（23），我们会得到一个不同的表达式，而要消去加速度 $\ddot{q}^i$，就需要用到（31）。我们将在后续文章中详细分析这种情况。

对于奇异拉格朗日量，若 det(M_{ij}) $= 0$，表达式（19）同样成立。因此，相容关系（21）和（23）在此情形下仍然有效。于是，方程（19）可用于求出给定奇异拉格朗日量 $\mathscr{L}$的变分对称性。此外，表达式（21）和（23）也可用于求出具有给定刚性对称性 Δt 和 Δq^i的（奇异）拉格朗日量。关于奇异拉格朗日量的完整分析，包括规范对称性，将在后续文章中给出。

对于一维系统，第 2 节中基于诺特恒等式得到并报告的新关系，也可以与力学逆问题的雅可比最后乘子方法结合起来，因为在这种情况下， M_{ij}本质上就成为雅可比最后乘子 [15, 16]。对于变量数多于一个的系统，我们尚不清楚第 2 节报告的结果与雅可比最后乘子方法之间的关系。

最后，只需处理其中通常涉及的技术细节，即可将当前结果推广到场论（关于场论中亥姆霍兹条件的对应形式，见 [17, 18] 。此外，关于一种不基于亥姆霍兹条件的场论拉格朗日量构造方法，见 [19] ）。特别要指出的是，对于麦克斯韦场和杨-米尔斯场，只用诺特第一定理而不借助贝林凡特方法，也能得到对称且规范不变的能量-动量张量 [20–22]。

致谢

我们感谢 Jos´e David Vergara 和 Ira´ıs Rubalcava-Garc´ıa 提出的宝贵意见。我们感谢审稿人提请我们关注参考文献 [3, 15, 16, 19]。Diego Gonzalez 感谢 Instituto 提供的经费支持

Polit´ecnico Nacional（资助项目 SIP-20253696）以及 Consejo Nacional de Humanidades, Ciencia y Tecnolog´ıa（CONAHCyT，M´exico）的博士后奖学金。

---

[1] B. D´ıaz、D. Higuita 和 M. Montesinos，数学物理杂志 55，122901（2014年）。[2] B. D´ıaz 和 M. Montesinos，数学物理杂志 59，052901（2018年）。[3] H. Bateman，Phys. Rev. 38，815（1931年）。[4] J. Douglas，美国数学会汇刊 50，71（1941年）。[5] G. Marmo 和 G. Morandi，数学物理报告 28，389（1989年）。[6] T. M. Helliwell 和 V. V. Sahakian，*Modern Classical Mechanics*（剑桥大学出版社，剑桥，2021年）。[7] 亥姆霍兹，Journal f¨ur die reine und angewandte Mathematik 100，137（1887年）。[8] 诺特，G

¨ **1918**,

235 1918

ottingen 科学学会会讯，数学物理学部（）。[9] 诺特，Transp. Theory and Stat. Phys. 1，186（1971年）。[10] E. Bessel-Hagen，Math. Ann. 84，258（1921年）。[11] P. J. Olver，*Applications of Lie Groups to Differential Equations*，数学研究生教材（施普林格，纽约，NY，1993年）。[12] H. R. Brown，载于 *The Philosophy and Physics of Noether's Theorems: a Centenary Volume*，J. Read 和 N. J. Teh 编（剑桥大学出版社，剑桥，2022年），第7章，第144–168页。[13] G. F. Torres del Castillo，*An Introduction to Hamiltonian Mechanics*，Birkh¨auser 高级教材《巴塞尔教学丛书》（Birkh¨auser，沙姆，2018年）。[14] P. Havas，奥地利物理学报 38，145（1973年）。[15] M. C. Nucci 和 P. G. L. Leach，物理手稿 78，065011（2008年）。[16] M. C. Nucci 和 P. G. L. Leach，非线性数学物理杂志 16，431（2009年）。[17] R. M. Santilli，*Foundations of Theoretical Mechanics I*，理论与数学物理（施普林格，海德堡，1978年）。[18] J. R. Farias，Phys. Rev. D 26，3732（1982年）。[19] M. Scholle，英国皇家学会会刊A：数学、物理与工程科学 460，3241（2004年）。[20] M. Montesinos 和 E. Flores，Revista Mexicana de F´ısica 52，29（2006年）。[21] D. N. Blaschke、F. Gieres、M. Rebound 和 M. Schweda，核物理学B 912，192（2016年）。[22] M. R. Baker、N. Linnemann 和 C. Smeenk，载于 *The Philosophy and Physics of Noether's Theorems: a Centenary Volume*，J. Read 和 N. J. Teh 编（剑桥大学出版社，剑桥，2022年），第8章，第169–196页。