arXiv:2603.07761v1 [quant-ph] 8 Mar 2026

标准量子信道中的纠缠保真度

Niccol`o Zanieri 和 Marios Kountouris，安达卢西亚数据科学与计算智能研究所（DaSCI），格拉纳达大学计算机科学与人工智能系，西班牙

摘要—**纠缠保真度用于量化量子信道对传输系统与不可访问参考系统之间关联的保持能力。我们推导了若干标准量子噪声模型对应的纠缠保真度闭式表达式，包括随机泡利-X、退相位、去极化、Werner-Holevo、广义Pauli（Weyl）和振幅阻尼信道。对于每种模型，我们采用Schumacher的Kraus算子方法，以一般输入密度算子 ρ 表示纠缠保真度。该方法提供了一种与信道无关的方案，适用于任何具有有限Kraus表示的完全正保迹（CPTP）映射。随后，我们将分析具体应用于一种通信情景：信源发出双字母参数字母表，从而明确揭示纠缠保持对信道参数和信源参数的依赖关系。所得表达式可直接比较信道性能，并对具有代表性的输入态族进行排序，其中包括常见的量子比特态。**

I. 引言

量子通信协议将信息编码到量子态中，并通过物理介质传输。在量子香农理论中，无记忆信源可建模为以指定概率 $q(x)$ 发射从态系综 $\{|\phi_x\rangle, q(x)\}$ [1] 中抽取的“字母”。即使信源发射的是纯态，传输信号在操作层面上最自然的描述仍是密度算子，因为它能表征经典不确定性、不完美的态制备，以及传输系统与其他自由度之间可能存在的关联。在本文始终考虑的单量子比特情形中，我们写作

$$\rho = \begin{bmatrix} a & c \\ \bar{c} & b \end{bmatrix},$$

其中 $a,\ b \in \mathbb{R}$ 和 $c \in \mathbb{C}$，且 $a + b = 1$ 与正性约束确保 $\rho \succeq 0$。

现实中的传输不可避免地会受到噪声干扰：承载信息的系统会与不受控制的自由度相互作用，这种情况可以通过与环境耦合来建模，也可以通过考察与不可访问参考系统之间的关联来描述。这类相互作用可能使约化态的某些局部特征几乎保持不变，却显著削弱它与参考系统之间的关联。这一区别在量子信息处理中尤为重要，因为性能往往不仅取决于局部量子态的保持，还取决于纠缠以及与外部系统之间其他非经典关联的保持。

用于衡量这一要求的标准指标是纠缠保真度，由 Schumacher 提出 [2]。对于给定的输入态 ρ 和信道 $\mathcal{N}$，$F_e(\rho,\ \mathcal{N})$ 用于量化 $\mathcal{N}$ 对与 ρ 某种特定纯化相对应的系统—参考系统联合态的保持程度。纠缠保真度与量子信息论中的核心主题直接相关，包括量子纠错 [3],纠缠传输和信道容量 [4], [5], ，以及采用对关联敏感的失真度量的率失真表述 [6]。它还与一些广泛使用的协议结构密切相关，例如隐形传态、超密编码和量子密钥分发；在这些协议中，信道作用于一个子系统，而相关联的系统保持不变[7]–[10]。

鉴于这些考虑，本文给出了若干具有实际意义的噪声模型下纠缠保真度的明确且可复用表达式，并利用这些表达式研究信源设计如何影响纠缠保持。我们的贡献如下：

- 我们提出一种与信道无关的过程，利用 Schumacher 对 $\mathcal{N}$ 的 Kraus（算符和）表示来计算 $F_e(\rho,\ \mathcal{N})$，从而推导出仅依赖于 ρ 和 Kraus 算符的表达式，无需显式地对参考系统建模。
- 我们推导出若干标准信道中 $F_e(\rho,\ \mathcal{N})$ 的闭式公式，包括随机泡利-X、相位阻尼、去极化、Werner-Holevo（量子比特情形）、广义泡利（Weyl）和振幅阻尼信道。
- 我们将这些公式应用于一种通信场景，其中信源发出双字母参数字母表，从而明确展示 F_e 对信道参数和信源参数的依赖关系。这使得我们能够针对相关输入态族（包括标准量子比特态）直接比较并排序信道。

本文其余部分组织如下。第二节介绍必要的预备知识，包括量子信道和Kraus表示。第三节建立纠缠保真度框架，并推导本文所研究的单量子比特信道的闭式表达式。第四节和第五节将这些结果应用于双字母参数信源，并分析 F_e 对信道和信源参数的依赖关系。最后，第六节针对代表性信源态对所考虑的信道进行比较和排序。

II. 纠缠保真度

设 $\mathcal{H}$ 为有限维希尔伯特空间，并设 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$表示 $\mathcal{H}$上的线性算子代数。一个量子信道 是完全正、保迹（ CPTP）的线性映射 $\mathcal{N}$： $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$。根据克劳斯表示定理，任何完全正迹保持映射都具有算子和表示 [11]

$$\mathcal{N}(X) = \sum_i K_i X K_i^\dagger, \qquad X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \tag{1}$$

其中 $\{K_i\}_i \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$是满足完备关系的 *Kraus* 算符

$$\sum_i K_i^\dagger K_i = I, \tag{2}$$

这等价于迹保持。反过来，任何满足式 (2) 的式 (1) 形式的映射都定义了一个量子信道。Kraus 表示并非唯一：由等距算子关联的不同 Kraus 算符族表示同一信道。

纠缠保真度由 Schumacher [2],提出，用于量化量子信道保持系统与不可访问参考系统之间纠缠的能力。它是一种依赖于量子态的评价指标，取决于输入密度算子 ρ 以及作用于其上的量子操作（信道） $\mathcal{N}$。重要的是，尽管其定义涉及参考系统， $F_e(\rho,\ \mathcal{N})$仍有等价表达式，可直接根据 ρ 和 $\mathcal{N}$计算，而无需显式建模参考系统。

纠缠保真度在量子通信和量子信息处理的分析中发挥着核心作用，包括评估传输噪声、设计和评估量子纠错码，以及表征那些性能取决于保持量子关联的协议。

设 $\rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 为输入态，即 $\rho \succeq 0$ 且 $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$。设 $\mathcal{H}_R$ 为一个参考希尔伯特空间，令 $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_R \otimes \mathcal{H}$ 为 ρ 的任意纯化，这意味着 $\mathrm{Tr}_R(|\Psi\rangle\langle\Psi|) = \rho$，其中 Tr_R 表示对参考系统取偏迹。 $\mathcal{N}$ 相对于 ρ 的纠缠保真度定义为

$$F_e(\rho, \mathcal{N}) := \langle\Psi| \left(\mathcal{I}_R \otimes \mathcal{N}\right)(|\Psi\rangle\langle\Psi|) \, |\Psi\rangle, \tag{3}$$

其中 $\mathcal{I}_R$ 是作用于 $\mathcal{B}(\mathcal{H}_R)$上的恒等信道。量 $F_e(\rho,\ \mathcal{N})$ 满足 $0 \le F_e(\rho,\ \mathcal{N}) \le 1$，且与所选的具体纯化无关。

将式 (3) 与该信道的 Kraus 表示结合，可得到一个便于显式计算的纠缠保真度表达式。设 $\mathcal{N}(X) = \sum_i A_i X A_i^\dagger$ 是 $\mathcal{N}$ 的一个克劳斯分解，则纠缠保真度为

$$F_e(\rho, \mathcal{N}) = \sum_i \left|\mathrm{Tr}(\rho A_i)\right|^2 = \sum_i \mathrm{Tr}(\rho A_i)\,\mathrm{Tr}(\rho A_i^\dagger). \tag{4}$$

如果所有 Kraus 算符都是厄米的，即 $A_i^\dagger = A_i$ 对所有 i 成立，则 (4) 简化为

$$F_e(\rho, \mathcal{N}) = \sum_i \big(\mathrm{Tr}(\rho A_i)\big)^2 = \sum_i \left|\mathrm{Tr}(\rho A_i)\right|^2, \tag{5}$$

因为在这种情况下 $\mathrm{Tr}(\rho A_i) \in \mathbb{R}$。

直观地说， $F_e \approx 1$ 的取值表明信道对相关输入态的作用几乎等同于恒等操作，既保留了 ρ ，也保留了它与参考系统之间的关联。反之，当 $F_e \ll 1$时，信道会严重破坏系统与参考系统之间的纠缠，即使输出态的局部性质看起来仅受到轻微影响，也可能如此。

III. 标准量子信道的纠缠保真度

本节将推导几种常用量子信道的纠缠保真度闭式表达式。我们考虑如下的一般情形：任意单量子比特态（字母）通过一个信道传输。相应的密度算子可写为

$$\rho = \begin{bmatrix} a & c \\ \bar{c} & b \end{bmatrix}, \tag{6}$$

其中， $a,\ b \in \mathbb{R}$、 $c \in \mathbb{C}$和c 表示 c的复共轭，且 $a,\ b \ge 0$、 $a + b = 1$和 $|c|^2 \le ab$ 确保ρ是一个有效的量子态。为计算每个信道 $\mathcal{N}$的 $F_e(\rho,\ \mathcal{N})$，我们首先给出该信道的 Kraus（算子和）表示，然后应用式 (4)。

我们的结果分为两组。前三种信道基于泡利算符，并由错误概率 $u \in [0, 1]$ 参数化。第四种信道不含参数。第五种信道由参数矩阵 P 指定。最后一种信道则由 γ 参数化，这也是振幅阻尼信道的标准形式。

A. 泡利信道

1) 随机泡利-X 信道： 具有错误概率 $u = p_X \in [0, 1]$ 的单量子比特随机泡利-X （比特翻转）信道的作用为

$$\mathcal{N}_u(\rho) = (1 - u)\rho + u\, X\rho X, \tag{7}$$

其中 X 是泡利-X 算符。其 Kraus（算符和）表示由两个非零 Kraus 算符给出：

$$A_I = \sqrt{1 - u}\, I, \qquad A_X = \sqrt{u}\, X, \tag{8}$$

因此， $\mathcal{N}_u(\rho) = A_I \rho A_I^\dagger + A_X \rho A_X^\dagger$且 $A_I^\dagger A_I + A_X^\dagger A_X = I$。等价地，该信道可视为一般泡利信道形式 $\mathcal{N}(\rho) =$ 的一个特例 $\sum_{P \in \{I,X,Y,Z\}} K_P\, \rho\, K_P^\dagger$，以及 $K_I = \sqrt{1 - u}\, I$、 $K_X = \sqrt{u}\, X$、 $K_Y = K_Z = 0$。

该信道对量子态 (6) 的纠缠保真度 为

$$\begin{aligned} F_e(\rho, \mathcal{N}_u) &= |\mathrm{Tr}(A_X \rho)|^2 + |\mathrm{Tr}(A_I \rho)|^2 \\ &= \left|\mathrm{Tr}\left(\sqrt{u}\, X\rho\right)\right|^2 + \left|\mathrm{Tr}\left(\sqrt{1 - u}\, I\rho\right)\right|^2 \\ &= u\left|\mathrm{Tr}(X\rho)\right|^2 + (1 - u)\,|\mathrm{Tr}(\rho)|^2 \\ &= u\left|\mathrm{Tr}(X\rho)\right|^2 + (1 - u), \end{aligned} \tag{9}$$

其中我们利用了迹的线性性以及 $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$ 这一事实。特别地，对于最大混合态$\rho = I/2$，有 $\mathrm{Tr}(X\rho) = 0$，因此

$$F_e\big(\tfrac{I}{2}, \mathcal{N}_u\big) = 1 - u.$$

接下来，我们计算式 (9) 中出现的项。由于

$$X\rho = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ \overline{c} & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{c} & b \\ a & c \end{bmatrix}, \tag{10}$$

我们得到

$$\mathrm{Tr}(X\rho) = \overline{c} + c = 2\,\Re(c). \tag{11}$$

将此表达式代入式 (9)，得到

$$F_e(\rho, \mathcal{N}_u) = (1-u) + u\left|2\,\Re(c)\right|^2 = 1 + u\left[4\big(\Re(c)\big)^2 - 1\right], \tag{12}$$

其中 $\Re(c)$表示 c的实部。

2）退相位信道：退相位信道也称为相位翻转信道或随机泡利-Z 信道，其退相位概率为 $u \in [0,1]$，定义为

$$\mathcal{N}_u(\rho) = (1-u)\rho + u\, Z\rho Z, \tag{13}$$

其中 Z 是泡利-Z 算符。其 Kraus（算符和）表示由两个 Kraus 算符给出

$$K_0 = \sqrt{1-u}\, I, \qquad K_1 = \sqrt{u}\, Z, \tag{14}$$

因此 $\mathcal{N}_u(\rho) = K_0\rho K_0^\dagger + K_1\rho K_1^\dagger$。

退相位信道的纠缠保真度 为

$$\begin{aligned} F_e(\rho, \mathcal{N}_u) &= \left|\mathrm{Tr}(K_1\rho)\right|^2 + \left|\mathrm{Tr}(K_0\rho)\right|^2 \\ &= \left|\mathrm{Tr}\big(\sqrt{u}\, Z\rho\big)\right|^2 + \left|\mathrm{Tr}\big(\sqrt{1-u}\, I\rho\big)\right|^2 \\ &= u\left|\mathrm{Tr}(Z\rho)\right|^2 + (1-u), \end{aligned} \tag{15}$$

这里用到了 $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$ 这一事实。

对于量子态 (6)，我们计算得

$$Z\rho = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ \overline{c} & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ -\overline{c} & -b \end{bmatrix}, \tag{16}$$

因此

$$\mathrm{Tr}(Z\rho) = a - b. \tag{17}$$

将此表达式代入 F_e 的公式，得到

$$F_e(\rho, \mathcal{N}_u) = (1-u) + u(a-b)^2 = 1 + u\left[(a-b)^2 - 1\right]. \tag{18}$$

3）去极化信道：单量子比特去极化信道的参数为 $u \in [0,1]$，其定义为

$$\mathcal{N}_u(\rho) = (1-u)\rho + u\,\frac{I}{2}. \tag{19}$$

一个等价的算子和表示为 [11]

$$\mathcal{N}_u(\rho) = \left(1 - \frac{3u}{4}\right)\rho + \frac{u}{4}\left(X\rho X + Y\rho Y + Z\rho Z\right), \tag{20}$$

由此可得 Kraus 算符

$$\left\{\sqrt{1 - \frac{3u}{4}}\, I,\ \frac{\sqrt{u}}{2}\, X,\ \frac{\sqrt{u}}{2}\, Y,\ \frac{\sqrt{u}}{2}\, Z\right\}. \tag{21}$$

在前两个小节中，我们计算了 $\mathrm{Tr}(X\rho)$ 和 $\mathrm{Tr}(Z\rho)$。现在还需计算 $\mathrm{Tr}(Y\rho)$。我们有

$$Y\rho = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ \overline{c} & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\overline{c} & -ib \\ ia & ic \end{bmatrix}, \tag{22}$$

因此

$$\mathrm{Tr}(Y\rho) = -i\overline{c} + ic = i(c - \overline{c}) = -2\,\Im(c), \tag{23}$$

其中，$\Im(c)$ 表示 c 的虚部。

因此，去极化信道的纠缠保真度可表示为

$$\begin{aligned} F_e(\rho, \mathcal{N}_u) &= \left(1 - \frac{3u}{4}\right) + \frac{u}{4}\left|\mathrm{Tr}(X\rho)\right|^2 \\ &\quad + \frac{u}{4}\left|\mathrm{Tr}(Y\rho)\right|^2 + \frac{u}{4}\left|\mathrm{Tr}(Z\rho)\right|^2 \\ &= 1 + \frac{u}{4}\left[4(\Re(c))^2 + 4(\Im(c))^2 + (a-b)^2 - 3\right] \\ &= 1 + u\left[|c|^2 + \frac{(a-b)^2}{4} - \frac{3}{4}\right]. \end{aligned} \tag{24}$$

4）*Werner–Holevo* 信道：本小节推导“纯”Werner-Holevo 信道的纠缠保真度。如 [12]，所示，对于任意维数 $d \geq 2$，线性映射 $\Lambda_{\mathrm{WH}}: \mathcal{B}(\mathbb{C}^d) \to \mathcal{B}(\mathbb{C}^d)$ 定义为

$$\Lambda_{\mathrm{WH}}(\rho) = \frac{1}{d-1}\big(\mathrm{Tr}(\rho)\, I - \rho^T\big) \tag{25}$$

是一个有效的量子信道（CPTP）。这里，$(\cdot)^T$ 表示相对于某个固定正交归一基的矩阵转置。

对于 $d \geq 2$，Werner–Holevo信道常被视为一种无法以通常意义传输量子信息的信道的典型例子（例如，在纠缠破坏区间内，其量子容量为零）。然而，在量子比特情形 $d = 2$ 下，该映射具有一种特别简单的形式。由于 $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$，我们有

$$\Lambda_{\mathrm{WH}}(\rho) = I - \rho^T = Y\,\rho\, Y, \tag{26}$$

其中 Y 是泡利-Y 算符。因此，Kraus 表示由单个 Kraus 算符 $A_1 = Y$给出，而纠缠保真度 为

$$F_e(\rho, \Lambda_{\mathrm{WH}}) = \left|\mathrm{Tr}(Y\rho)\right|^2 = \left|-2\,\Im(c)\right|^2 = 4\big(\Im(c)\big)^2, \tag{27}$$

其中 c 是 ρ的非对角元素，如式（6）所示。

5）广义泡利（*Weyl*）信道：接下来，我们讨论广义泡利（Weyl）信道，其容量性质已在 [13]中得到研究。该信道定义在一个 d维希尔伯特空间上，由一个 $d \times d$概率矩阵 $P = (p_{ij})_{i,\,j=0}^{d-1}$ 满足 $\sum_{i,\,j} p_{ij} = 1$来刻画。

在量子比特情形（$d = 2$）下，一个方便的 Kraus 表示为

$$\{\sqrt{p_{00}}\, I,\ \sqrt{p_{10}}\, X,\ \sqrt{p_{01}}\, Z,\ \sqrt{p_{11}}\, XZ\}, \tag{28}$$

其中 p_{00}，p_{10}，p_{01}，$p_{11} \geq 0$ 且 $p_{00}+p_{10}+p_{01}+p_{11}=1$。

通过适当选择 P，可将第 III-A1、III-A2、III-A3 和 III-A4 节中的信道作为特例恢复出来。利用 F_e 的 Kraus 表达式以及上文计算得到的迹恒等式，可得广义泡利（Weyl）信道的纠缠保真度为

$$\begin{aligned} F_e(\rho,\mathcal{N}) &= p_{00}\left|\mathrm{Tr}(I\rho)\right|^2 + p_{10}\left|\mathrm{Tr}(X\rho)\right|^2 \\ &\quad + p_{01}\left|\mathrm{Tr}(Z\rho)\right|^2 + p_{11}\left|\mathrm{Tr}(XZ\rho)\right|^2. \end{aligned} \tag{29}$$

为计算剩余项，注意到 $XZ = -iY$ $XZ\rho = -i\ Y\rho \Rightarrow$。因此，$\mathrm{Tr}(\ )\,\mathrm{Tr}(\ )\,\mathrm{Tr}(\ )\left|\ XZ\rho\ \right|^2 = \left|\ Y\rho\ \right|^2$ $\mathrm{Tr}(\ )$。

将 $\mathrm{Tr}(\rho)=1$、$\mathrm{Tr}(X\rho)=2\Re(c)$、$\mathrm{Tr}(Y\rho)=-2\Im(c)$ 和 $\mathrm{Tr}(Z\rho)=a-b$ 代入 F_e 的表达式，可得

$$F_e(\rho,\mathcal{N}) = p_{00} + 4p_{10}\big(\Re(c)\big)^2 + p_{01}(a-b)^2 + 4p_{11}\big(\Im(c)\big)^2. \tag{30}$$

6) 振幅阻尼信道：振幅阻尼信道描述自发辐射等能量弛豫过程。其标准 Kraus 表示为

$$A_0 = \sqrt{\gamma}\,|0\rangle\langle 1|, \qquad A_1 = |0\rangle\langle 0| + \sqrt{1-\gamma}\,|1\rangle\langle 1|, \tag{31}$$

其中 $\gamma \in [0,1]$ 是阻尼概率。这些算符满足 $A_0^\dagger A_0 + A_1^\dagger A_1 = I$。

在计算基中，相应的 Kraus 算符可写成矩阵形式

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \end{bmatrix}. \tag{32}$$

利用 (4)，对于量子态 (6)，振幅阻尼信道的 纠缠保真度为

$$\begin{aligned} F_e(\rho,\mathcal{N}) &= \left|\mathrm{Tr}(A_0\rho)\right|^2 + \left|\mathrm{Tr}(A_1\rho)\right|^2 \\ &= \mathrm{Tr}(A_0\rho)\,\mathrm{Tr}(A_0^\dagger\rho) + \mathrm{Tr}(A_1\rho)\,\mathrm{Tr}(A_1^\dagger\rho). \end{aligned} \tag{33}$$

我们首先计算该表达式中出现的迹：

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(A_0\rho) &= \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix} \overline{c}\sqrt{\gamma} & b\sqrt{\gamma} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \overline{c}\,\sqrt{\gamma}, \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(A_0^\dagger\rho) &= \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a\sqrt{\gamma} & c\sqrt{\gamma} \end{bmatrix}\right) \\ &= c\,\sqrt{\gamma}, \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(A_1\rho) &= \mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix} a & c \\ \overline{c}\sqrt{1-\gamma} & b\sqrt{1-\gamma} \end{bmatrix}\right) \\ &= a + b\,\sqrt{1-\gamma}. \end{aligned} \tag{36}$$

将这些表达式代入 F_e 的公式，得到

$$F_e(\rho,\mathcal{N}) = \gamma\,|c|^2 + \left(a + b\sqrt{1-\gamma}\right)^2. \tag{37}$$

B. 结果总结

为便于查阅，我们将结果总结于表 I 中，其中 ρ 的定义与式 (6) 中相同。

表 I 所研究量子信道的纠缠保真度

信道 $\mathcal{N}$	$F_e(\rho,\ \mathcal{N})$
随机泡利-X	$1+u\left[4(\Re(c))^2-1\right]$
退相位	$1+u\left[(a-b)^2-1\right]$
去极化	$1+\frac{u}{4}\left[4(\Re(c))^2+4(\Im(c))^2+(a-b)^2-3\right]$
广义泡利 (Weyl)	$p_{00}+4p_{10}(\Re(c))^2$ $+\,p_{01}(a-b)^2+4p_{11}(\Im(c))^2$
振幅阻尼	$\gamma\lvert c\rvert^2+\left(a+b\sqrt{1-\gamma}\right)^2$
Werner-Holevo	$4(\Im(c))^2$

IV. 双字母消息的优化

现在，我们将前述结果应用于一种通信场景：发送方使用两个可能的量子字母之一对消息进行编码。我们的目标是刻画字母对的选择如何影响传输系统与不可访问参考系统之间纠缠的保持。特别地，我们将证明，恰当选择字母对可以优化整体传输的纠缠保真度。

考虑以下一对量子字母：

$$\begin{aligned} |\psi^+\rangle &= \sqrt{p},|0\rangle + \sqrt{1-p},|1\rangle, \\ |\psi^-\rangle &= \sqrt{p},|0\rangle - \sqrt{1-p},|1\rangle. \end{aligned} \tag{38}$$

以下密度算子描述了一个系统：它以概率 q 处于量子态 $|\psi^+\rangle$，以概率 $1-q$ 处于量子态 $|\psi^-\rangle$：

$$\rho = q\,|\psi^+\rangle\langle\psi^+| + (1-q)\,|\psi^-\rangle\langle\psi^-|. \tag{39}$$

密度算子可以明确写为

$$\rho = \begin{bmatrix} p & (2q-1)\sqrt{p(1-p)} \\ (2q-1)\sqrt{p(1-p)} & 1-p \end{bmatrix}. \tag{40}$$

根据 p 和 q 的取值，我们会得到不同的源消息。有五种极端情况，它们不代表实际场景，并会导致特殊行为：

- 如果 $p=0$ 或 $p=1$，那么无论 q 取何值，该源都会退化为单字母字母表，因此无法传递任何信息。
- 情况 $q=0$ 和 $q=1$ 类似：该源同样会退化为单个字母。
- 如果 $p=\frac{1}{2}$，两个字母 $|\psi^+\rangle$ 和 $|\psi^-\rangle$ 正交，因此该消息可以视为有效的经典消息（例如，参见 Preskill [1]）。

其余参数区间对应于实际相关的情形：消息取自由非正交量子态构成的双字母字母表，且两个字母均以非零概率出现。

A. 纠缠保真度计算

对于(40)中的量子态，(6)中定义的参数 a、 b和 c均为实数，并取下列值:

$$\begin{aligned} a &= p, \\ b &= 1-p, \\ c &= (2q-1)\sqrt{p(1-p)}. \end{aligned} \tag{41}$$

利用第三节的结果，我们计算了若干信道在源消息由式 (38) 中的两个字母构成时的纠缠保真度。所得表达式汇总于表 II。

表 II 所研究量子信道的纠缠保真度，其中 ρ 的定义见式 (40)。

信道 $\mathcal{N}$	$F_e(\rho,\ \mathcal{N})$
随机泡利-X	$1+u\left[4(2q-1)^2p(1-p)\ -1\right]$
退相位	$1+4u\,p(p-1)$
去极化	$1+u\left[(2q-1)^2p(1-p)\ +\frac{(2p-1)^2}{4}-\frac{3}{4}\right]$
广义泡利（Weyl）	$p_{00}+4p_{10}(2q-1)^2p(1-p)$ $+p_{01}(2p-1)^2$
振幅阻尼	$p^2+(1-\gamma)(1-p)^2$ $+p(1-p)\ \left[2\sqrt{1-\gamma}+\gamma(2q-1)^2\right]$
Werner-Holevo	0

V. 纠缠保真度分析

一般而言，这里考虑的信道的纠缠保真度 取决于三个参数：一个用于表征信道（例如， u 或 γ）的参数，以及两个用于指定信源字母的参数，即 p 和 q。本节将展示纠缠保真度随p 变化的曲线，并选取 q 和信道参数（u或 γ）的代表性取值。

在实际情形中，这些参数未必都能自由选择。特别是，表征信道的参数可能由问题设定固定，因此不受我们控制。同样， q 的取值由信源消息的统计特性决定，可能无法直接调整。

相比之下，参数 p 指定了作为字母所使用的特定量子态，原则上，发送方可以通过态制备来选择该参数。尽管实际实现可能会对 p 的允许取值施加限制，但它仍然为字母表设计提供了一定的自由度。利用这一自由度，可以选择使给定信道条件下性能最大化的一对字母，这里的性能以纠缠保真度来衡量。

A. 泡利信道

本文考虑的所有泡利信道均由 u 参数化，该参数表示错误概率或噪声强度。当 $u=0$ 时，信道退化为恒等映射，使量子态保持不变。在另一极端情况下， $u=1$ 对应于完全施加相关的泡利错误；或者，取决于该信道，对泡利错误进行完全混合。因此，我们通常预期，取值较小时纠缠保真度会更高。

u，因为信道的作用更接近恒等变换，因此能保留输入态中更大的一部分。

1）随机泡利X 信道：回顾表 II，该信道的纠缠保真度为

$$F_e(\rho,\mathcal{N}_u)=1+u\left[4(2q-1)^2p(1-p)-1\right].$$

由于 $F_e\in[0,1]$，表达式中的第二项必定非正。此外，正如预期， u 的值越小，输入态的保持效果越好。这一现象反映在以下事实中：当 u 足够小时， F_e 可以有严格为正的下界，这意味着该信道可能无法完全破坏纠缠。

固定 u 和 q 后，我们的目标是确定使纠缠保持效果最大化的 p 值。图 1 表明，只要 $q\neq 1/2$，纠缠保真度就在 $p=0.5$ 附近达到最大值。当 $q=1/2$ 时，纠缠保真度与 p 无关，因此 p 的所有取值都同样最优。

当 $p=0.5$ 时，两个字母变得正交，消息实际上退化为经典消息。尽管如此，在满足任何量子态制备约束的前提下，通过选择尽可能接近 0.5 的 p，仍可保留消息中相关的非经典特征，同时提高鲁棒性。

对 p 的选择也受传输两个字母之一的概率 q 影响。具体而言，当 q 接近 0.5 时，纠缠保真度对 p 的具体取值变得不那么敏感，因此可以在不显著降低性能的情况下，允许 p 取更宽的可行范围。

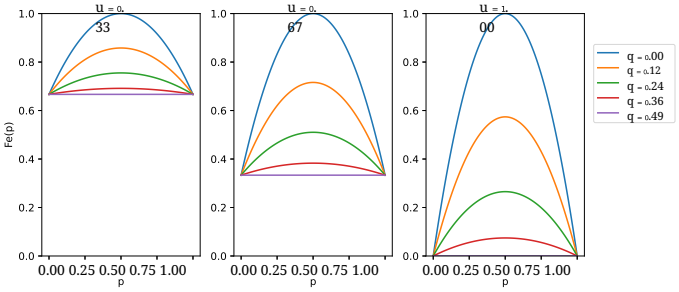

图 1. 随机泡利-X 信道的纠缠保真度 $F_e(p)$，其中 u 和 q 固定。

2）退相位信道：根据表 II，纠缠保真度由退相位信道给出

$$F_e(\rho,\mathcal{N})\ =\ 1+u\big[4p(p-1)\big]. \tag{42}$$

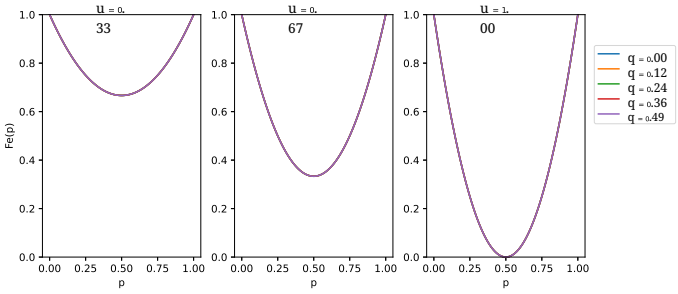

图 2. 退相位信道的纠缠保真度 $F_e(p)$，其中 u 和 q 固定。

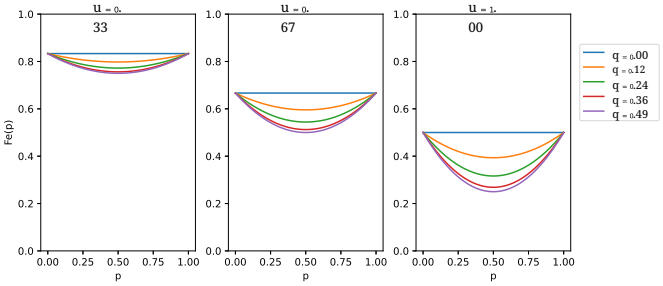

图 3. 固定 u 和 q时，去极化信道的纠缠保真度 $F_e(p)$。

在这种情况下， F_e 仅取决于 u 和 p。一旦固定 u ，纠缠保真度便与 q 无关，并且是 p 的凸二次函数（见图 2）。因此，它在 $p = 0.5$ 处达到唯一的最小值。

与随机泡利-X 信道（V-A1 节）不同，当 p 趋近区间端点时， F_e 取得最大值。然而，这些极限情形对应于退化字母表，其中双字母态重合，因而无法传递信息。因此，在实际中，应在应用允许的范围内将 p选得尽可能接近 0 或 1，以最大化纠缠保持，同时避免完全退化。

尽管在实践中这类选择可能不可行，但在极限情形 $p \to 0$ 或 $p \to 1$ 下，纠缠保真度趋近于 1，也就是说，理论上可以得到F_e 任意接近 1 的值。

3）去极化信道：根据表 II，去极化信道的纠缠保真度为

$$F_e(\rho,\mathcal{N}) = 1 + u\left[(2q-1)^2 p(1-p) + \frac{(2p-1)^2}{4} - \frac{3}{4}\right]. \tag{43}$$

对于固定的 u 和 q， F_e 是关于 p 的凸二次函数（见图 3）；在极限情形 $q \in \{0,1\}$ 下，该函数为常数。与退相位情形（第 V-A2 节）一样，最小值在 $p = 0.5$处取得，而最大值则在 p 趋近其可行范围端点时取得。

这两种信道的一个关键区别在于可达到的最大纠缠保真度。对于去极化信道，若 $u \neq 0$，则无论如何选择 p ，都无法得到 $F_e = 1$；只有在无噪声情形$u = 0$下才能实现完美保持。

另一方面，与第五节 V-A1 节中讨论的随机泡利-X 情形不同，去极化信道即使在 $u = 1$ 时也不会完全破坏纠缠：对于所有 p和 q，纠缠保真度始终远离零，即 F_e 具有严格正的最小值。

正如信道的操作性解释所示， u的值越大，可达到的纠缠保真度就越低。事实上，随着 $u \to 1$，最大混合态 $I/2$对信道输出的贡献增大，进而降低了可达到的最大 F_e。

4）振幅阻尼信道：根据表 II，振幅阻尼信道的纠缠保真度为

$$\begin{aligned} F_e(\rho,\mathcal{N}) &= p^2 + (1-\gamma)(1-p)^2 \\ &+ p(1-p)\left[2\sqrt{1-\gamma} + \gamma(2q-1)^2\right]. \end{aligned} \tag{44}$$

与前述情况不同，该函数关于 $p = 0.5$ 并不对称（见图4）。此外，其凸性可能取决于 q 的取值。尽管如此，当 p 趋近于 1 时，纠缠保真度也趋近于 1。

尽管这种极限情形并不能代表实际应用，但我们得出结论：对于振幅阻尼信道，最好选择式（38）中的字母，使 $|0\rangle$ 成为叠加态中的主导分量。

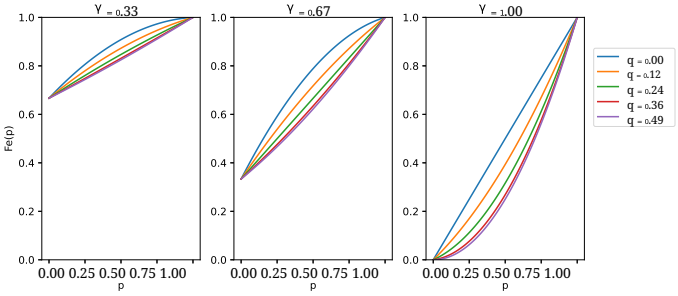

图4. 振幅阻尼信道的纠缠保真度 $F_e(p)$，其中 γ 和 q 固定。

VI. 泡利信道排序

上文介绍的泡利信道具有共同的参数化方式，均以噪声强度 u 表示，但它们对传输态造成的错误类型各不相同。在第五节中，我们考察了对于固定信道，如何调节字母参数 p ，以使由此产生的纠缠保真度最大化。在此，我们探讨一个互补问题：对于固定的源偏置 q ，并遍历 p 的所有允许取值，各泡利信道在纠缠保持方面表现如何？因此，对于给定的 q，我们按照 p 对这三个信道进行排序。回顾表 II 中的结果，并固定 u 和 q，我们定义以下量：

- Random Pauli-X channel: $F_e^X(p) = 1 + u\left[4(2q-1)^2 p(1-p) - 1\right]$
- Dephasing channel: $F_e^Z(p) = 1 + 4u\,p(p-1)$
- Depolarizing channel: $F_e^D(p) = 1 + u\left[(2q-1)^2 p(1-p) + (2p-1)^2/4 - 3/4\right]$

为简化讨论中的记号，我们令 $k := (2q-1)^2$。此外，我们假设 $u \neq 0$，因为 $u = 0$ 的情形对应于恒等信道，因此与现实中的含噪实现无关。

通过求解相应的不等式，我们得到以下结果：

$$F_e^X(p) \geq F_e^Z(p),\ \forall p \in \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{1+k}},\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{1+k}}\right]. \tag{45}$$

$$F_e^D(p) \geq F_e^Z(p),\ \forall p \in \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+k}{3+k}},\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+k}{3+k}}\right]. \tag{46}$$

在分析不等式 $F_e^D(p) \geq F_e^X(p)$ 时，必须区分两种参数范围。这一区别源于当 $q \in$ 时不存在实数解 $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$。

For $q \in \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$, we have

$$F_e^D(p) \geq F_e^X(p) \text{ for all } p \in [0,1]. \tag{47}$$

否则，可得

$$F_e^D(p) \geq F_e^X(p),$$

$$\text{for all } p \in \left[0,\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3k-1}{1+3k}}\right] \cup \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3k-1}{1+3k}},\ 1\right].$$

表 III
随机泡利-X的纠缠保真度排序（F_e^X）、退相位 F_e^Z 和去极化 F^D 信道 $q \in \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right] \cup \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}, 1\right]$.

p	排序
$\left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+k}{3+k}}\right)$	$F_e^Z(p) \geq F_e^D(p) \geq F_e^X(p)$
$\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+k}{3+k}}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{1+k}}\right)$	$F_e^D(p) \geq F_e^Z(p) \geq F_e^X(p)$
$\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{1+k}}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3k-1}{1+3k}}\right)$	$F_e^D(p) \geq F_e^X(p) \geq F_e^Z(p)$
$\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3k-1}{1+3k}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3k-1}{1+3k}}\right)$	$F_e^X(p) \geq F_e^D(p) \geq F_e^Z(p)$
$\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3k-1}{1+3k}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{1+k}}\right)$	$F_e^D(p) \geq F_e^X(p) \geq F_e^Z(p)$
$\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{1+k}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+k}{3+k}}\right)$	$F_e^D(p) \geq F_e^Z(p) \geq F_e^X(p)$
$\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+k}{3+k}}, 1\right]$	$F_e^Z(p) \geq F_e^D(p) \geq F_e^X(p)$

我们有以下不等式，可用于关联相应的 p 区间：

$$\sqrt{\frac{3k-1}{1+3k}} \leq \sqrt{\frac{k}{1+k}} \leq \sqrt{\frac{1+k}{3+k}}, \quad \text{for all } k \geq 1/3$$

$$\text{or equivalently, for all } q \notin \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right). \tag{48}$$

对于 $k < 1/3$，只需考虑最右侧的不等式，且它对所有 $k \in [0,1]$ 都成立。

表 IV 随机泡利-X(F_e^X)、退相位 (F^Z) 和去极化 (F_e^D) 信道的纠缠保真度排序，适用于 $q \in \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$.

p	排序
$\left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+k}{3+k}}\right)$	$F_e^Z(p) \geq F_e^D(p) \geq F_e^X(p)$
$\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+k}{3+k}}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{1+k}}\right)$	$F_e^D(p) \geq F_e^Z(p) \geq F_e^X(p)$
$\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{1+k}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{1+k}}\right)$	$F_e^D(p) \geq F_e^X(p) \geq F_e^Z(p)$
$\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{1+k}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+k}{3+k}}\right)$	$F_e^D(p) \geq F_e^Z(p) \geq F_e^X(p)$
$\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+k}{3+k}}, 1\right]$	$F_e^Z(p) \geq F_e^D(p) \geq F_e^X(p)$

A. 常用量子态

许多量子通信协议并不考虑双字母消息，而是通过信道传输单个固定态（例如，参见 [7]–[10]）。通过考虑极限情形 $q = 0$ 或 $q = 1$，可以将上述结果专门应用于这种情况；在这些情形下，源以概率 1 发出单个字母。

对于这些 q 值，表 III 和表 IV 中给出的区间得以简化，相应的信道排序总结于表 V。

表 V $q = 0$ 或 $q = 1$ 时随机泡利-X(F_e^X)、退相位（F_e^Z）和去极化（F_e^D）信道的纠缠保真度排序。

p	排序
$\left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$	$F_e^Z(p) \geq F_e^D(p) \geq F_e^X(p)$
$\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$	$F_e^X(p) \geq F_e^D(p) \geq F_e^Z(p)$
$\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}, 1\right]$	$F_e^Z(p) \geq F_e^D(p) \geq F_e^X(p)$

通过改变 p和 q，我们可以比较不同信源态下的信道性能。表 VI 汇总了若干常用量子比特态的排序结果。

在复合系统的研究中，一类重要且广泛存在的量子态是贝尔基：

- $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|00\rangle + |11\rangle\big)$

表 VI 常用量子比特态在随机泡利-X(F_e^X)、退相位（F_e^Z）和去极化（F_e^D）信道中的纠缠保真度排序。

q	p	量子态	排序
1	1	$\|0\rangle$	$F_e^Z(p) \geq F_e^D(p) \geq F_e^X(p)$
1	0	$\|1\rangle$	$F_e^Z(p) \geq F_e^D(p) \geq F_e^X(p)$
1	$\frac{1}{2}$	$\|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\|0\rangle + \|1\rangle)$	$F_e^X(p) \geq F_e^D(p) \geq F_e^Z(p)$
0	$\frac{1}{2}$	$\|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\|0\rangle - \|1\rangle)$	$F_e^X(p) \geq F_e^D(p) \geq F_e^Z(p)$

- $|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|00\rangle - |11\rangle\big)$
- $|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|01\rangle + |10\rangle\big)$
- $|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|01\rangle - |10\rangle\big)$

如果由字母态和参考系统构成的复合系统制备为这些量子态中的任意一个，那么这两个子系统之间的纠缠是最大的。相应的密度算符为

$$|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|,\ |\Phi^-\rangle\langle\Phi^-|,\ |\Psi^+\rangle\langle\Psi^+|,\ |\Psi^-\rangle\langle\Psi^-|.$$

通过对参考系统进行迹运算，我们发现每个贝尔态都是同一个约化密度算符的纯化：

$$\rho = \mathrm{Tr}_R(|\beta\rangle\langle\beta|) = \frac{1}{2}\big(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|\big) = \frac{1}{2}\big(|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|\big), \tag{49}$$

其中 $|\beta\rangle \in \{|\Phi^{\pm}\rangle, |\Psi^{\pm}\rangle\}$ 和 $|\pm\rangle = (|0\rangle \pm |1\rangle)/\sqrt{2}$。

此外，通过设定 $q = \frac{1}{2}$ 和 $p = \frac{1}{2}$，式（49）中的密度算子可以写成字母态 $|\psi^+\rangle$ 和 $|\psi^-\rangle$ 的等权混合：

$$\rho \;=\; \frac{1}{2}\Big(|\psi^+\rangle\langle\psi^+| \;+\; |\psi^-\rangle\langle\psi^-|\Big). \tag{50}$$

在这种设置下，源实际上发出由两个字母组成的消息。此外，在我们的双字母信源模型中，仅当 $p = 1/2$ 和 $q = 1/2$ 时，才能精确得到贝尔态的约化密度算符 $\rho = I/2$。由此可得 $F_e^X = F_e^Z = 1 - u$，而 $F_e^D = 1 - u/2$。因此，如果字母系统与参考系统的初始联合量子态是贝尔态，则泡利信道排序为

$$F_e^D \geq F_e^X = F_e^Z.$$

VII. 结论

我们研究了纠缠保真度，将其作为一种定量指标，用于衡量含噪量子信道在保留输入态的同时，保留其与外部参照之间关联的能力。我们采用克劳斯算符表述，提出了一种与信道无关的过程，可计算具有有限 Kraus 表示的任意 CPTP 映射的 $F_e(\rho,\ \mathcal{E})$，并推导出若干标准信道的显式表达式，包括随机泡利-X、退相位、去极化、Werner-Holevo、广义Pauli 和振幅阻尼信道。

随后，我们将这些公式应用于一种通信场景，其中传输的是双字母参数化消息。该框架明确展示了 F_e 如何共同取决于信道和消息参数，从而能够直接比较不同信道和字母选择。具体而言，我们利用所得表达式，对适用于若干类消息态的泡利型信道进行排序，这些消息态包括常用的量子比特态，以及与贝尔态纯化相关联的最大混合约化态。这些结果为在给定噪声模型下选择能够改善纠缠保持的编码提供了实用指导。

有若干扩展方向可以自然地导出。我们的方法可以直接扩展到其他信道和更高维系统，包括在存在算子和表示时的结构化噪声模型。将这些结果与态制备约束、更大的字母表以及编码或恢复方案下的显式优化相结合，也将很有意义。

致谢

本研究部分得到欧洲研究理事会（ERC）在欧盟地平线2020研究与创新计划下的资助（资助协议编号：101003431）。

参考文献

[1] J. Preskill，“物理学219/计算机科学219课程讲义：量子计算”，加州理工学院课程讲义，2024年。[在线]。网址：https://www.preskill.caltech.edu/ph219/ph219-2024.html [2] B. Schumacher，“通过噪声量子信道传送纠缠”，《物理评论*A*》，第54卷，第4期，第2614–2628页，1996年10月。[3] M. A. Nielsen，“纠缠保真度与量子纠错”，1996年。[在线]。网址：https://arxiv.org/abs/quant-ph/9606012[4] H. Barnum、E. Knill和M. A. Nielsen，“关于量子保真度与信道容量”，*IEEE*信息论汇刊，第46卷，第4期，第1317–1329页，2000年7月。[5] I. Devetak和P. W. Shor，“同时传输经典信息和量子信息的量子信道容量”，《数学物理通讯》，第256卷，第2期，第287–303页，2005年。[6] N. Datta、M.-H. Hsieh和M. M. Wilde，“量子率失真、反向香农定理与信源-信道分离”，*IEEE*信息论汇刊，第59卷，第1期，第615–630页，2013年1月。[7] C. H. Bennett、G. Brassard、C. Cr´epeau、R. Jozsa、A. Peres和W. K. Wootters，“通过经典信道和爱因斯坦-波多尔斯基-罗森信道传送未知量子态”，《物理评论快报》，第70卷，第13期，第1895–1899页，1993年3月。[8] C. H. Bennett和S. J. Wiesner，“通过作用于爱因斯坦-波多尔斯基-罗森态的单粒子和双粒子算符进行通信”，《物理评论快报》，第69卷，第20期，第2881–2884页，1992年11月。[9] C. H. Bennett和G. Brassard，“量子密码学：公钥分发与掷币”，《理论计算机科学》，第560卷，第7–11页，2014年。[10] A. K. Ekert，“基于贝尔定理的量子密码学”，《物理评论快报》，第67卷，第6期，第661–663页，1991年8月。[11] M. A. Nielsen和I. L. Chuang，《量子计算与量子信息》，第10版。剑桥：剑桥大学出版社，2010年。[12] R. F. Werner和A. S. Holevo，“关于量子信道输出纯度可加性猜想的反例”，《数学物理杂志》，第43卷，第9期，第4353–4357页，2002年9月。[13] S. Singh和N. Datta，“检测具有正量子容量的量子信道”，《*npj*量子信息》，第8卷，第1期，第50页，2022年。