arXiv:2603.07785v1 [math.GT] 8 Mar 2026

关于5维流形中曲面嵌入的同痕类

RUOYU QIAO

Abstract. 设 $f, f' : \Sigma \hookrightarrow N$ 是闭定向5维流形中闭曲面的两个同伦光滑嵌入。我们证明，若 f 存在一个公共代数对偶3-球面，或若 $\pi_1(N)$ 平凡，则 f 与 f' 必定同痕。这推广了 Kosanovic´c–Schneiderman–Teichner[KST23]的一个结果。证明基于构造一个不变量，该不变量可在同伦类内对环境5维流形中曲面的光滑嵌入同痕类进行分类，且本身可能具有独立研究价值。该不变量以5维流形的同伦群为定义依据。

1. Introduction and Results

同伦与同痕之间的关系是拓扑学中的经典问题。2017年，Gabai [Gab17], [Gab20] 证明了四维灯泡定理：若环境4维流形中的两个嵌入球面存在一个公共几何对偶球面，且环境流形的基本群没有2-挠元，则这两个嵌入球面同痕。最近，Kosanovic´c、Schneiderman 和 Teichner 研究了5维流形中2维球面嵌入的类似问题 [KST23], ，并对同伦类内的所有同痕类给出了完整分类。

Gabai [Gab17] 还将灯泡定理推广到了4维流形中"G-非本质"的曲面嵌入（其中 G 表示几何对偶球面）。相较之下，Lin、Wu、Xie 和 Zhang [LWXZ25]在缺少这一条件时证明了一个否定结果，表明在4维流形中，存在无穷多个彼此同伦的曲面嵌入，它们具有一个共同的几何对偶球面，但彼此并不同痕。

本文研究5维流形中闭定向2维流形的"同伦与同痕"问题。本文所有讨论均在光滑范畴中进行。我们将通过构造同伦的自交不变量，建立一个不变量，用以刻画同伦类中的同痕类；该不变量取值于一个自由 $\mathbb{Z}$模的商中，这个自由模由环境流形基本群的一个（集合论意义上的）商生成。

现在我们简要介绍主要结果。设 Σ 是一个亏格为正的闭定向曲面， g，设 N 是一个5维闭定向流形。考虑典范映射

$$p : \pi_0\mathrm{Emb}(\Sigma, N) \to \pi_0\mathrm{Map}(\Sigma, N). \tag{1.1}$$

这里，Emb(Σ, N) 表示 Σ到 N中的嵌入空间，而 Map(Σ, N) 表示从 Σ 到 N的光滑映射空间。我们将考虑嵌入之间的"同伦

同伦的同伦类”。对于嵌入 $f\colon \Sigma \hookrightarrow N$[5]，我们用 $\mathscr{H}_0^f$ 表示 f的自同伦的同伦类，用 $\mathscr{H}^f$表示以 f 开始的同伦的同伦类（见定义 2.1、3.1）。令 G 为 $f_*\colon \pi_1\Sigma \to \pi_1 N$ 的像。我们将把集合 $\mathbb{A}_f$ 定义为由 $G\backslash\pi_1 N/G$ 生成的自由 $\mathbb{Z}$- 模的某个商（见定义 2.2、3.24），其中 $G\backslash\pi_1 N/G$ 表示双陪集 $\{GgG|g \in \pi_1 N\}$ 的集合。以下结果是本文的主要定理。这里，映射 p 由 (1.1) 给出。

定理 1.1。 存在如下交换图：

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathscr{H}^f & \xrightarrow{\mu} & \mathbb{A}_{[f]} \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ p^{-1}([f]) & \xrightarrow{\cong} & \mathscr{H}^f/\mathscr{H}_0^f & \xrightarrow{\overline{\mu}} & \mathbb{A}_f \end{array}$$

其中 μ 是交数（定义 *2.5*），$\mathscr{H}_0^f$ 作用于 $\mathscr{H}^f$ 并且 $\mathbb{A}_{[f]}$诱导映射 μ （命题 *3.25*），该映射是二个双射。并且存在一个双射 $p^{-1}([f]) \to \mathscr{H}^f/\mathscr{H}_0^f$和 $\mathbb{A}_f$（定理 *3.8*）。并且诱导映射（定义 *4.1*）

$$\mathrm{fq} : p^{-1}([f]) \to \mathbb{A}_f$$

是一个双射。

定理1.1有如下直接推论。

推论 1.2。 假设 $f'\colon \Sigma \hookrightarrow N$与 f同伦。那么 f与 f'同痕，当且仅当 $\mathrm{fq}(f') = 0 \in \mathbb{A}^f$。

请注意，定理 1.1 和推论1.2 均不要求存在对偶球面的任何假设。在第4节中，我们将证明，若 f 存在代数对偶球面，或若 $\pi_1(N)$ 是平凡的，则 $\mathbb{A}_f$ 也是平凡的，因此每个与 f 同伦的嵌入都必与 f同痕。这里，我们称 f 存在代数对偶球面，是指在 $\pi_3(N) \to H_3(N)$ 的像中存在一个元素，其与 f的基本类的代数交数为 1。该结果总结如下列推论所示。

推论 1.3。 设 Σ 是一个紧致定向二维曲面，N 是一个紧致定向 *5* 维流形。设 $f\colon \Sigma \to N$ 是一个嵌入。若 N 是单连通的，或 f 存在代数对偶球面，或同态 $f_*\colon \pi_1\Sigma \to \pi_1 N$是满射，则每个与 f 同伦的嵌入 f' 实际上都与 f同痕。*</output>*

相反，下一个推论表明，存在这样的例子 $f\colon \Sigma \hookrightarrow N$ 其中有无穷多个嵌入 $f'\colon \Sigma \hookrightarrow N$，它们与 f 同伦但不同痕。

推论 1.4. 设 Σ 是一个紧致定向二维曲面，N 是一个紧致定向 *5*-流形。设 $f\colon \Sigma \to N$ 是一个嵌入，且 $G := f_*(\pi_1\Sigma) \in \pi_1 N$。若 $\pi_2 N$、$\pi_3 N$ 均为平凡的，并且陪集集合 $G\backslash\pi_1 N/G$ 在 G 的共轭作用下有无穷多个共轭类，则存在无穷多个嵌入 $f'\colon \Sigma \to N$，它们与 f 同伦，但不同痕于 f。

致谢。 作者谨向 Boyu Zhang 教授致以诚挚谢意，感谢他提出的建设性建议并与作者进行讨论。作者也感谢付建宁给予的重要建议。

2. Intersection Number of Homotopies up to Homotopy

本节将定义一个关于同伦的同伦不变量，以说明何时一个同伦与一个同痕同伦。核心思想源自 Wall 交数 [Wal66], ，它被定义为给定浸入 $f: S^n \to N^{2n}$ 正则同伦到嵌入的障碍。当 $n \geq 3$时，这一障碍是完备的，而这恰好是我们的情形。具体而言，该不变量将浸入的交点与 $\pi_1 N$中的环路联系起来；这些环路由从 N 的基点出发，沿着两个球面或一个球面的两片到达交点的两条弧生成。这里，由于浸入流形可能不是单连通的，我们将使用交数的共轭版本。稍后在定义2.5中，我们将给出更为详细的定义。

我们先给出几个定义：

定义 2.1. 设 $f, f': \Sigma \hookrightarrow N$是从紧致定向二维曲面 Σ 到紧致定向五维流形 N 的两个嵌入。若存在同伦 $H: \Sigma \times I \to N$使得 $H_0 = f, H_1 = f'$，则称 H为连接 f与f'的同伦，或称从 f到 f'的同伦。若将同伦 H视为保持 I 坐标不变的映射 $H: \Sigma \times I \to N \times I$，则称两个这样的同伦 H 和 H' 等价，当且仅当 $H_0 = H_0'$, H_1 与 H_1'同痕，且存在同伦 $J: \Sigma \times I \times I \to \Sigma \times I$，使得 $J|_{\Sigma \times I \times \{0\}} = H$和 $J|_{\Sigma \times I \times \{1\}} = H'$和 $J|_{\Sigma \times \{0\} \times I} = f$。用 $[H]$表示同伦 H的等价类。若同伦 $H: \Sigma \times I \to N$ 满足$H_0 = f$，则称其为嵌入 $f: \Sigma \hookrightarrow N$ 的嵌入的同伦。用 $\mathscr{H}^f$ 表示 f的同伦所构成的同伦等价类空间。

定义 2.2. 设 N 是一个紧致定向五维流形。设 Σ 是一个紧致定向二维曲面。若 F 是一个浸入 $\Sigma \times I \looparrowright N \times I$，且 $G := F_*(\pi_1(\Sigma \times I)) \in \pi_1(N \times I)$。定义群 $\mathbb{A}_{[F]}$ 为商群 $\mathbb{Z}G \backslash \pi_1(N \times I)/G \Big/ \langle 1, \ g + g^{-1} \rangle$，其中 $\mathbb{Z}G \backslash \pi_1(N \times I)/\bar{G}$是双陪集 $G \backslash \pi_1(N \times I)/G$ 的 $\mathbb{Z}$ 模。由于 $\Sigma \times 0$ 是 Σ 的变形收缩，且 $N \times \{0\}$ 是 $N \times I$ 的变形收缩，令 $f = F|_{\Sigma \times \{0\}}$，我们也用 $\mathbb{A}_{[f]}$ 表示 $\mathbb{A}_{[F]}$。

本节中，我们将建立一个从 $\mathscr{H}^f$ 到 $\mathbb{A}_{[f]}$ 的映射 μ，并证明这个交数也是一个障碍。

因此，本节的主要结果是：

定理 2.3。 考虑映射

$$\mu : \mathscr{H}^f \to \mathbb{A}_{[f]},$$

在定义 2.5中，映射 $H: \Sigma \times I \to N \times I$ 的 f 与边界相对同伦于一个同痕，当且仅当交数 $\mu([H]) \in \mathbb{A}_{[H]} = \mathbb{A}_{[f]}$为零。

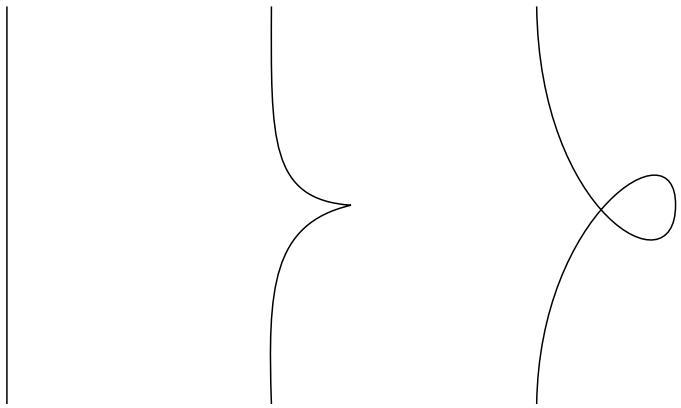


FIGURE 1. 一个尖点同伦

这里的交数与 Wall 交数不变量的原始版本之间有两个主要区别。首先，Wall 交数是一个正则同伦不变量，而我们在这里需要的是一个同伦不变量。其次，Wall不变量适用于单连通流形的嵌入，但 $\pi_1(\Sigma)$ 可能并非平凡。

对于第一个问题，由于我们只考虑从3维流形到6维流形的嵌入，因此两个浸入之间的同伦与正则同伦的唯一区别是尖点同伦，见图1。

更具体地说，我们有以下引理：

引理2.4。 设 Σ 为一个紧致定向二维曲面。设 N 为一个定向紧致5维流形。记 $q\colon \pi_0\mathrm{Imm}(\Sigma\times I, N\times I)\to \pi_0\mathrm{Map}(\Sigma\times I, N\times I)$为从正则同伦类到固定边界的浸入同伦类的投影映射。那么对于给定的浸入 $F\colon \Sigma\times I\to N\times I$，由该浸入 F上的尖点同伦给出的正则同伦类为 $q^{-1}([F])\cong\mathbb{Z}$ 。

由于这一点并非本文的核心内容，我们仅简要概述证明。

证明概述。 根据 Smale-Hirsch定理 [Hir59，Sma59], 存在一个由微分给出的弱同伦等价：

$$D:\mathrm{Imm}(\Sigma\times I, N\times I)\to \mathrm{Mono}(T(\Sigma\times I), T(N\times I))$$
$$F\mapsto DF: T(\Sigma\times I)\to T(N\times I),$$

其中，$\mathrm{Mono}(T(\Sigma\times I)\ T(N\times I))$ 表示丛单态射空间。因此，$q^{-1}([F])$（同一个同伦类中的所有浸入）与 $\mathrm{Mono}_F(T(\Sigma\times I)\ T(N\times I))$ 弱同伦等价；后者是底空间映射与 f 同伦的丛单态射空间。我们可以对丛单态射应用同伦，并将其视为一个纤维丛

$$V_{3,6}\to \nu_F(T(\Sigma\times I), T(N\times I))\to \Sigma\times I.$$

这里，$\nu_F(T(\Sigma\times I)\ T(N\times I))$是由点对 $(x,\ u)$ 构成的空间，其中 $x\in\Sigma\times I$和$u:\ T_x(\Sigma\times I)\to T_{F(x)}(N\times I)$ 是线性单射，而 $V_{3,\ 6}$ 是 Stiefel 流形。空间 $\mathrm{Mono}_F(T(\Sigma\times I)\ T(N\times I))$ 与该空间同伦等价

这个纤维丛的截面空间，记作 $\Gamma\nu_F(T(\Sigma \times I)\ T(N \times I))$。因此，我们需要计算 $\pi_0\Gamma(\nu_i(TM,\ TN'))$。

众所周知，$\pi_1(V_{3,6}) = \pi_2(V_{3,6}) = 0$ 和 $\pi_3(V_{3,6}) = \mathbb{Z}$。最后，考虑 CW 分解 $\Sigma = e^0 \cup \Sigma^1 \cup e^2$。如果两个截面在$e^0 \times I$的边界上相同，那么可以证明，这两个截面不同伦的障碍由 π_1中的一个元素给出，见 [Hat02]。但是，由于$V_{3,6}$是单连通的，因此不存在这样的障碍，这意味着任何在边界上相同的截面实际上都是同伦的。对于 1-骨架 Σ^1，同样的讨论也成立。对于唯一的 2-胞腔 e^2，障碍由 $\pi_3(V_{3,6}) \cong \mathbb{Z}$ 给出，并且可由一次尖点同伦实现。□

现在给出交数的如下定义。

定义 2.5。设 N 是一个紧致定向 5-流形。设 Σ是一个紧致定向二维曲面。再设 F 是一个一般浸入 $\Sigma \times I \to N \times I$，带有触须 ν。定义 G 和 $\mathbb{A}_{[F]}$ 如定义 2.2中所述。然后定义如下总和:

$$\mu(F) := \Sigma_{p\in F\pitchfork F}\epsilon(p)\overline{\alpha}(p)/\sim \in \mathbb{A}_{[F]}$$

其中

(a) 触须 ν 是从 $\Sigma \times I$ 的基点到$N \times I$的基点的一条路径，它也确定包含映射 F_*: $\pi_1(\Sigma \times I) \to \pi_1(N \times I)$; (b) γ_1^p 和 γ_2^p 是 $N \times I$ 中从基点到 p 的任意路径，分别沿着两个不同的片；(c) 如果 p 处 M 的定向与 N' 在两个片上诱导的定向（按顺序）一致，则 $\epsilon(p) \in \{\pm 1\}$ 为 $+1$；(d) $\alpha(p)$是环路 $\nu\gamma_1^p(\gamma_2^p)^{-1}\nu^{-1} \in \pi_1(N \times I)$，而$\alpha(p)$是$G\backslash\pi_1(N \times I)/G$ 中由该等价类给出的元素；(e) $\sim$ 指 $\mathbb{Z}G\backslash\pi_1(N \times I)/G$中的等价关系 $1 = 0$ 和 $g^{-1} = -g$。

此定义基本沿用 Wall不变量的定义。等价关系源于以下事实：对于任意自交点，若交换两片的顺序，$\alpha(p)$ 会得到逆元，而 $\epsilon(p)$ 会变成相反数；此外，尖点同伦会生成一个对应于 $\pi_1(N \times I)$ 中平凡元的单个自交点。我们有以下命题:

命题 2.6。设 Σ、N 和 F 如上所定义。自交数 μ 具有以下性质。

(1) 在 $N \times I$ 内进行同伦时，自交数 $\mu(F)$ 保持不变。(2) 对 F 选择不同的触须 ν'，会使 $\mu(F)$ 被 $\pi_1(N \times I)$ 中的元素 $\nu'\nu^{-1}$ 共轭。

证明。性质 (1) 类似于 Wall 交数的性质，这里我们只需验证我们的交数是良定义的。对于 γ_1^p 和 γ_2^p 的不同选取，可能得到不同的环路 $\alpha(p) = \nu\gamma_1^p(\gamma_2^p)^{-1}\nu^{-1}$。设 η_1^p, η_2^p 是从基点到 N' 中的另一组路径

p，那么 $\gamma_1^p(\eta_1^p)^{-1}$、 $\gamma_2^p(\eta_2^p)^{-1}$ 是 $N\times I$ 中的两个环路，因此 $\eta_1^p = g_1\gamma_1^p$, $\eta_2^p = g_2\gamma_2^p$，其中 g_1， $g_2\in G$，所以 $\nu\gamma_1^p(\gamma_2^p)^{-1}\nu^{-1}\in\pi_1(N\times I)$ 和 $\nu\eta_1^p(\eta_2^p)^{-1}\nu^{-1}\in\pi_1(N\times I)$ 在 $G\backslash\pi_1(N\times I)/G$ 中属于同一个陪集，这意味着 $\alpha(p)$ 是良定义的，并且 $\mu(F)$ 在同伦下保持不变。

(2) 的证明很直接，只需注意到

$$\nu'\gamma_1^p\gamma_2^p\nu'^{-1} = \nu'\nu^{-1}\nu\gamma_1^p\gamma_2^p\nu^{-1}(\nu'\nu^{-1})^{-1}.$$

□

类似于 Wall 交数，我们有以下定理。

定理2.7。 浸入 $F\colon\ \Sigma\times I\to N\times I$ 可相对于边界同伦于一个嵌入，当且仅当 $\mu(F) = 0$

定理2.7 的证明。若 F 同痕于一个嵌入，则不存在自交，因此 $\mu(F) = 0$。另一方面，若 $\mu(F) = 0$，根据定义μ， F 的每个交点 p 都可以与另一个交点 q 配对，使得 $\epsilon(p)\alpha(p) + \epsilon(q)\alpha(q) = 0$；或者 $\alpha(p) = 0$。

对于第一种情况，$\overline{\alpha(p)} = -\overline{\alpha(q)}$。设 γ_i，对于 $i\in\{1,2,3,4\}$，它们是 $\Sigma\times I$ 中互不相交的嵌入弧，使得 γ_1 从 F 的基点沿着 F 在 p 处的第二个片到达 p； γ_2 从 p 出发并回到自身，在 F 的 p 处离开第二个片并从第一个片返回； γ_3 从 p 到达 q，在 i 的 p 处离开第一个片，并在 F 的 q 处终止于第二个片； γ_4 从 q 出发并回到自身，在 F 的 q 处离开第二个片并从第一个片返回。然后 $\epsilon(p)\alpha(p) = \epsilon(p)\nu\gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1}\nu^{-1}$，类似地， $\epsilon(q)\alpha(q) = \epsilon(q)\nu\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_3^{-1}\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-1}\nu^{-1}$。于是，通过适当选择 γ_3 和 γ_4，我们可以得到 $\nu\gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1}\nu^{-1} = \nu\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_3^{-1}\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-1}\nu^{-1}$ 作为 $\pi_1(N\times I)$ 中的元素。换言之，$(\nu\gamma_1\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-1}\nu^{-1})(\nu\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_3^{-1}\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-1}\nu^{-1}) = \nu\gamma_1\gamma_3\gamma_4\gamma_3^{-1}\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-1}\nu^{-1}$ 在 $\pi_1(N\times I)$ 中是平凡的。这是一个避开环路 $\gamma_3\gamma_4\gamma_3^{-1}\gamma_2^{-1}$ 的基点变换共轭，因此该环路在 $N\times I$ 中是零伦的。因此， p 和 q 可以由一个 Whitney圆盘配对。

对于第二种情况，注意到 $\overline{\alpha(p)} = 0 = 1$，且一次尖点同伦会产生一个自交 q ，其对应于 $\pi_1(N\times I)$ 中的平凡元。因此， p和 q 可视为情况（a）中的两个交点，它们可以通过一个Whitney圆盘配对。

由于流形是三维的，而余维数也是 3，通过 Whitney移动，所有交点都可以成对消除 [MSS65], 因此 F 同伦于一个没有交点的浸入映射，而这就是一个嵌入。□

由于 μ 是一个同伦不变量，我们现在可以在同伦类$\mathscr{H}^f$上定义 μ ，从而诱导出一个映射 $\mu\colon\ \mathscr{H}^f\to\mathbb{A}_{[f]}$。现在，让我们证明本节的主要定理。

定理证明*2.3*。 必要性是显然的。同痕没有自交点，因此交数为零。

为证明充分性，若 $\mu([H]) = 0$，通过一次小扰动，我们可以假设 H是一个浸入，且 $\mu(H) = 0$；于是由定理 2.7， H 与一个嵌入 $G\colon\Sigma\times I\to N\times I$ 在边界上相对同伦。一般情况下，

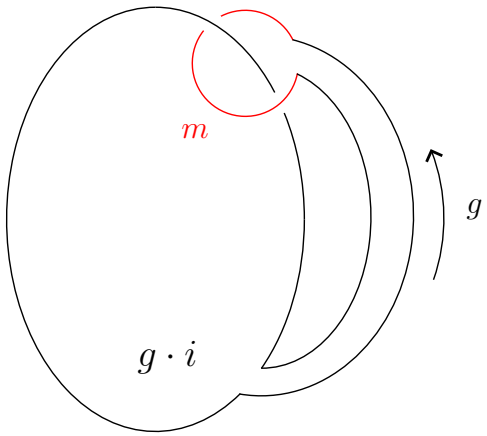


FIGURE 2. 对 g 在 i上的作用

该嵌入可能不是一个同痕，因为它可能不保持“I”坐标；这种情况称为“协和”。不过，我们有以下定理。

定理2.8 ([Hud70])。 若 M 和 Q是紧致光滑流形，令 $F: M \times I \to Q \times I$ 为一个允许的光滑协和。若 维数$M \leq \mathrm{Q}-3$，则存在一个环境微分同伦 J，使 $Q \times I$在 $Q \times 0$上保持不变，且 $J_1 F = F_0 \times id$。

由于 $G: \Sigma \times I \to N \times I$的余维为3，我们可以应用这一定理，得知 G 同伦于一个同痕，这意味着 H 相对于边界同伦于一个同痕。□

下面的图2展示了商基本群的一个元素如何作用于同伦曲面。对于 $g \in \pi_1 N$ 和 $i: \Sigma \hookrightarrow N$，我们如下定义$g \cdot i: \Sigma \hookrightarrow N$。首先注意到，$i$的法丛是 3–维的，因此其子午线 m 是一个 2–球面；我们在靠近基点$p := i(e)$的一个点上选取它，并根据 Σ 和 N的定向为其定向。然后，我们将$g \cdot i$ 定义为 i 与 m 沿着一根管作环境连通和，该管沿表示 g的弧延伸；弧的起点和终点都靠近 p，且其内部与 i不相交。

类似地，线性组合 $\Sigma_i n_i g_i$ 通过沿着 g_i进行多次连通和，作用于 m，持续 n_i 次；而如果 $n < 0$，则只需反转定向。关系 $g = g^{-1}$ 和 $0 = 1$ 很容易验证，见图3。

如果群 $G = i_*(\pi_1 \Sigma)$非平凡，那么元素 $g \in G \subset \pi_1 N$的作用也会是平凡的。从几何上看，可以通过沿 g 在 i中的表示反转该作用来理解，见图4。

3. AFFINE ACTION OF SELF-HOMOTOPIES

从上一节可知，如果有两个同伦的嵌入f和 f'，以及一个从 f到 f'的同伦 H，使得 $\mu([H]) = 0$，那么 H同伦于一个相对于边界的同痕，这意味着 f 与 f'同痕。然而，它们之间的同伦并不唯一。若 G 是 f的一个自同伦，换言之，G 是一个从 f 到其自身 f 的同伦，那么 G 与 H 的拼接便给出了另一个从 f 到 f'的同伦。因此，即使 $\mu([H]) \neq 0$，我们

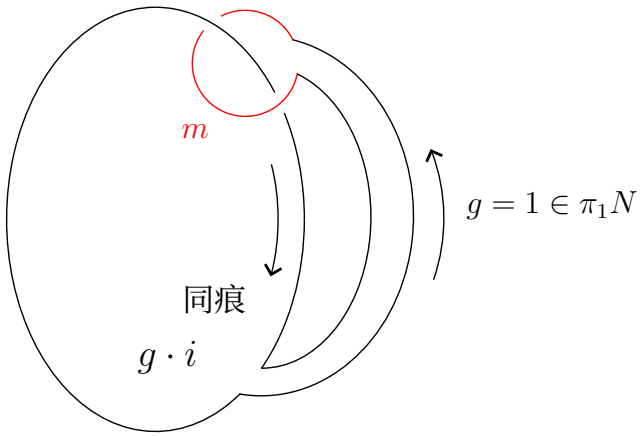


FIGURE 3. 由同痕实现的关系 $1 = 0$

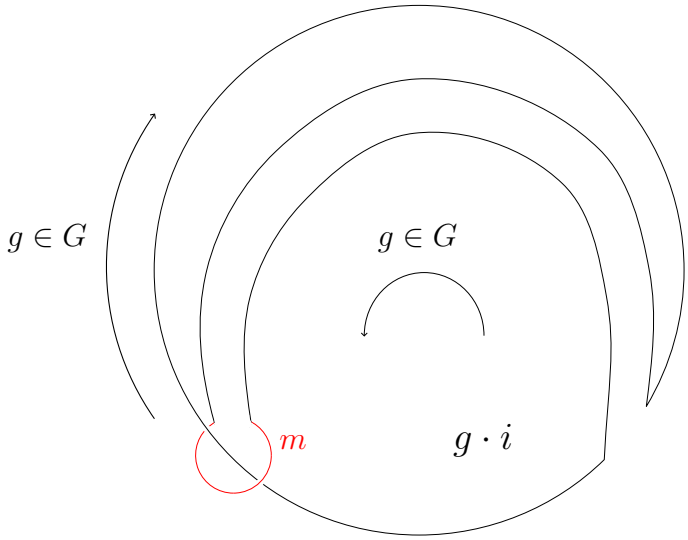


FIGURE 4. 由同痕实现的关系 $0 = g \in G$

也不能断言 f 与 f'不同痕。这启发我们研究自同伦对不变量的影响。

我们先来介绍一些定义。

定义 3.1. 令 $\mathscr{H}_0^f$ 为 $\mathscr{H}^f$ 的子空间，使得对每个 $[H] \in \mathscr{H}_0^f$，都有 $H_0 = H_1 = f$。我们称 $\mathscr{H}_0^f$为 f的自同伦集合。

一个基本事实是，在拼接运算下， $\mathscr{H}_0^f$ 构成一个群。

命题 3.2。 对于 $[H]$、$[H'] \in \mathscr{H}_0^f$，定义 $[H] \cdot [H'] = [H \cdot H']$，其中

$$H \cdot H'(x,t) = \begin{cases} H(x,2t), 0 \le t \le 1/2, \\ H'(x,2t-1), 1/2 < t \le 1 \end{cases}$$

于是 $\mathscr{H}_0^f$ 在该乘法下构成一个群。

证明。 由于 $(H \cdot H')_0 = H_0 = f$ 且 $(H \cdot H')_1 = H'_1 = f$，该乘法是封闭的。设 $E(x,\ t) = f(x)\ \forall t \in I$，则对于每个同伦类 $[H] \in \mathscr{H}_0^f$，考虑同伦 $J\colon\ \Sigma \times I \times I \to \Sigma \times I$,

$$J(x,t,s) = \begin{cases} E(x,2t), 0 \le t \le \dfrac{1-s}{2}, \\ H(x, \dfrac{2}{1+s}t - \dfrac{1-s}{1+s}), \dfrac{1-s}{2} < t \le 1 \end{cases}$$

J 给出了 $E \cdot H$ 与 H之间的一个同伦。因此 $[E] \cdot [H] = [H]$，同理$[H] \cdot [E] = [H]$，所以 $[E]$ 是单位元。此外，设 H 是f的一个自同伦，将 $-H$ 定义为 $-H(x,\ t) = H(x,\ 1-t)$，那么同样容易看出 $H \cdot (-H) \sim (-H) \cdot H \sim E$。因此 $\mathscr{H}_0^f$ 构成一个群。□

为了给出 $\mathscr{H}_0^f$ 在 $\mathscr{H}^f$ 和 $\mathbb{A}_{[f]}$上的作用，我们需要考虑 Σ的CW分解，换言之，设 $\Sigma = e^0 \cup (\cup_\alpha e_\alpha^1) \cup e^2$。用 Σ^1 表示 $e^0 \cup (\cup_\alpha e_\alpha^1)$的1-骨架。考虑 Σ骨架上的自同伦。

定义 3.3。 设 A 是 Σ 的闭子流形。令 $\mathscr{H}_0^f(A,\ N)$ 表示自同伦的同伦类空间 $H\colon\ A \times I \to N \times I$，其中同伦固定边界，并且 $H_0 = H_1 = f|_A$。

根据定义，我们有 $\mathscr{H}_0^f = \mathscr{H}_0^f(\Sigma,\ N)$。
考虑映射

$$\mathscr{H}_0^f(\Sigma, N) \xrightarrow{r_2} \mathscr{H}_0^f(\Sigma^1, N) \xrightarrow{r_1} \mathscr{H}_0^f(e_0, N) \xrightarrow{r_0} *,$$

其中映射 r_1、 r_2 由限制给出。与命题 3.2一样，直接证明可得 $\mathscr{H}_0^f(\Sigma^1,\ N)$ 和 $\mathscr{H}_0^f(e^0,\ N)$ 在拼接运算下构成群，而限制 r_2、r_1 是群同态。为简便起见，我们将 H 称为 Σ的自同伦， H^1 称为 Σ^1的自同伦，以及 H^* 称为基点的自同伦。

定义 3.4。 令 $\mathscr{G}_2$ 为 $\ker(r_2)$， $\mathscr{G}_1$ 为 $\ker(r_1) \cup \mathrm{im}(r_2)$，且 $\mathscr{G}_0$ 为 $\mathrm{im}(r_1 \circ r_2)$。

换言之， $\mathscr{G}_2$ 由所有固定 1-骨架的同伦组成。 $\mathscr{G}_1$由所有固定基点且可延拓为 Σ 的自同伦的 1-骨架同伦组成。 $\mathscr{G}_0$ 则由所有可延拓为 Σ 的自同伦的基点同伦组成。由于 r_2，r_1 是群同态，因此我们有

命题 3.5。 $\mathscr{G}_2$ 是 $\mathscr{H}_0^f(\Sigma, N)$ 的正规子群，且 $\mathscr{G}_1$ 是$\mathrm{im}(r_2)$ 的正规子群。

因此，存在一个群同构 $(\mathscr{H}_0^f/\mathscr{G}_2)/\mathscr{G}_1 \cong \mathscr{G}_0$。为给出定理 1.1中的交换图，我们考虑以下分解后的交换图:

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathscr{H}^f & \xrightarrow{q_2} & \mathscr{H}^f/\mathscr{G}_2 & \xrightarrow{q_1} & (\mathscr{H}^f/\mathscr{G}_2)/\mathscr{G}_1 & \xrightarrow{q_0} & ((\mathscr{H}^f/\mathscr{G}_2^f)/\mathscr{G}_1)/\mathscr{G}_0 \\ \downarrow{\scriptstyle \mu} & & \downarrow{\scriptstyle \mu^1} & & \downarrow{\scriptstyle \mu^*} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\mu}} \\ \mathbb{A}_{[f]} & \longrightarrow & \mathbb{A}_{[f]}/\mathscr{G}_2 =: \mathbb{A}_f^1 & \longrightarrow & \mathbb{A}_f^1/\mathscr{G}_1 =: \mathbb{A}_f^* & \longrightarrow & \mathbb{A}_f^*/\mathscr{G}_0 =: \mathbb{A}_f \end{array}$$

其中， $\mathscr{G}_2$、$\mathscr{G}_1$和 $\mathscr{G}_0$分别作用于相应的集合， q_2、 q_1和 q_0是射影映射，而 μ^1、 μ^*和 μ 是 μ 在轨道空间上的诱导映射。我们将证明 $((\mathscr{H}^f/\mathscr{G}_2^f)/\mathscr{G}_1)/\mathscr{G}_0 \cong \mathscr{H}^f/\mathscr{H}_0^f$。在第 4 节中，我们将进一步证明诱导映射 μ 是一个双射。

在接下来的讨论中，我们将多次讨论延拓一个同伦的问题。因此，为方便起见，我们在此陈述同伦延拓定理。

引理 3.6（同伦延拓定理，见 [Hat02]）。任意 *CW* 对 (X, A)具有同伦延拓性质，即对任意映射 $F: X \to Y$ 以及一个同伦 $h: A \times I \to Y$的 A 满足 $h_0 = F|_A$，存在一个同伦$H: X \times I \to Y$的 X 使得 $H|_{A\times I} = h$。

3.1. 自同伦在 $\mathscr{H}^f$上的作用。 首先，我们考虑$\mathscr{H}_0^f$ 在同伦上的作用。注意，我们可以将乘积延拓到任意同伦H 与 G ，只要 $H_1 = G_0$；换言之，若 H 与 G 是两个同伦，且满足 $H_1 = G_0$，则定义

$$H \cdot G(x,t) = \begin{cases} H(x,2t), 0 \le t \le 1/2, \\ G(x,2t-1), 1/2 < t \le 1 \end{cases}$$

于是，若令 $[H] \in \mathscr{H}_0^f$ 与 $[G] \in \mathscr{H}^f$，我们便得到一个群作用。

命题 3.7. 左群作用 $\Phi: \mathscr{H}_0^f \times \mathscr{H}^f \to \mathscr{H}^f$，由$\Phi([H],[G]) = [H \cdot G]$定义，是良定义且忠实的。

证明。若 G 是 f 的一个同伦，使得 $G_1 = f'$ 是另一个嵌入，则$H \cdot G$ 是从 f 到 f'的一个同伦，因此该群作用是封闭的。并且对于$\forall H, H' \in \mathscr{H}_0^f$与 $G \in \mathscr{H}^f$，容易证明$(H \cdot H') \cdot G = H \cdot (H' \cdot G)$，故该群作用是良定义的。

此外，若 $H \in \mathscr{H}_0^f$ 与 $G \in \mathscr{H}^f$ 满足 $[H \cdot G] = [G]$，则 $H \cdot G \sim G$，从而 $H \cdot G \cdot (-G) \sim G \cdot (-G)$，于是 $H \sim E$，这意味着 $[H] = 1$，故该群作用是忠实的。□

将 $\mathscr{H}^f/\mathscr{H}_0^f$ 记为 $\mathscr{H}_0^f$ 作用下的轨道集合。回顾一下，我们定义投影 p: $\pi_0\mathrm{Emb}(\Sigma, N) \twoheadrightarrow \pi_0\mathrm{Map}(\Sigma, N)$。现在我们得到以下重要的双射。

定理 3.8。令 P 表示映射

$$P: p^{-1}([f]) \to \mathscr{H}^f/\mathscr{H}_0^f$$
$$g \mapsto \overline{[H]}$$

其中 H 是连接 f 和 g 的同伦， $[H]$ 表示 H的同伦类的轨道类。那么 P 是一个双射。

证明。为了证明 P给出了一个从 $p^{-1}([f])$ 到 $\mathscr{H}^f/\mathscr{H}_0^f$的良定义映射，对于每个 $g \in p^{-1}([f])$ 以及连接 f 和 g的两个同伦 G 和 G'，注意到 $G \cdot (-G')$ 是从 f 到其自身的一个同伦，因此 $[G \cdot (-G')] \in \mathscr{H}_0^f$，且 $(G \cdot (-G')) \cdot G' \sim G$，所以 G 和 G' 位于同一轨道上，这意味着 P是良定义的。关于满射性，只需注意到 f 的每个同伦都是一个.....的同伦

连接 f 和另一个嵌入 f'。为了证明单射性，设两个嵌入 g和 g'满足 $P(g) = P(g')$。这意味着存在两个同伦 G和G'，使得 G 连接 f 和 g，而 G' 连接 f 和 g'；并且存在一个 f的自同伦 H，使得 $H \cdot G \sim G'$。因此 $-G' \cdot H \cdot G \sim E$是一个同痕；又由于 $-G' \cdot H \cdot G$是连接 g' 和 g的同伦，我们得知g 与 g'同痕。□

现在我们考虑 $\mathscr{G}_2$，$\mathscr{G}_1$ 和 $\mathscr{G}_0$的作用。

定义3.9。将作用 $\mathscr{G}_2 \times \mathscr{H}^f \to \mathscr{H}^f$ 定义为 Φ 在 $\mathscr{G}_2$上的限制，其中 $\mathscr{G}_2$是 $\mathscr{H}_0^f$ 的正规子集。记 $\mathscr{H}^f/\mathscr{G}_2$ 为轨道空间，q_2 为商映射 $\mathscr{H}^f \to \mathscr{H}^f/\mathscr{G}_2$。

定义3.10。设 $[H^1] \in \mathrm{im}(r_2)$是 Σ^1的一个自同伦，并设 $[H]$ 是将 $[H^1]$ 延拓为 Σ 的自同伦。记 Ψ 为$\mathrm{im}(r_2)$在$\mathscr{H}^f/\mathscr{G}_2$上的作用，使得 $\Psi([H^1], [G]) = q_2([H \cdot G])$。

命题3.11。 Ψ 是良定义的忠实群作用，并且存在一个双射$(\mathscr{H}^f/\mathscr{G}_2)/\mathrm{im}(r_2) \cong \mathscr{H}^f/\mathscr{H}_0^f$

证明。对于 $[H^1] \in \mathrm{im}(r_2)$，如果存在两个同伦 $[H], [H'] \in \mathscr{H}_0^f$，使得$r_2([H]) = r_2([H'])$，那么 $r_2([H] \cdot [H']^{-1}) = 1$，因此 $[H] \cdot [H']^{-1} \in \mathscr{G}_2$。由此 $q_2([H'] \cdot [G]) = q_2(([H] \cdot [H']^{-1}) \cdot [H'] \cdot [G]) = q_2([H] \cdot [G])$。所以 Ψ是良定义的。此外，对于$[H_1^1], [H_2^1] \in \mathrm{im}(r_2)$，有 $\Psi([H_1^1], \Psi([H_2^1], [G])) = [H_1^1] \cdot [H_2^1] \cdot [G] = \Psi([H_1^1] \cdot [H_2^1], [G])$，因此，$\Psi$ 是一个群作用。最后，如果 $\Psi([H^1], [G]) = q_2([H] \cdot [G]) = q_2[G]$对于 $[G] \in \mathscr{H}^f$成立，那么存在 $[K] \in \mathscr{G}_2$ 使得 $[K] \cdot [H] \cdot [G] = [G]$，因此$[H] = [K]^{-1} \in \mathscr{G}_2$，这意味着 $[H^1] = r_2([H]) = 1$，所以 Ψ 是一个忠实作用。

此外，考虑映射

$$Q : \mathscr{H}^f/\mathscr{G}_2 \to \mathscr{H}^f/\mathscr{H}_0^f$$
$$q_2[G] \mapsto \overline{[G]},$$

由于 $\mathscr{G}_2$ 是 $\mathscr{H}_0^f$ 的正规子群，Q 是良定义的满射。对于每个$[G] \in \mathscr{H}^f/\mathscr{H}_0^f$，$\overline{Q}(q_2[G]') = [G]$ 当且仅当存在$\overline{[H]} \in \mathscr{H}_0^f$ 使得$[H] \cdot [G'] = [G]$，因此 $Q^{-1}([G]) = q_2(\Phi(\mathscr{H}_0^f, [G])) = \Psi(\mathrm{im}(r_2)\ \overline{[G]})$。所以 Q 诱导出一个双射 $\tilde{Q} : (\mathscr{H}^f/\mathscr{G}_2)/\mathrm{im}(r_2) \to \mathscr{H}^f/\mathscr{H}_0^f$。□

类似地，由于 $\mathscr{G}_1$ 是 $\mathrm{im}(r_2)$ 的正规子群，我们可以将作用$\mathscr{G}_1 \times (\mathscr{H}^f/\mathscr{G}_2) \to (\mathscr{H}^f/\mathscr{G}_2)$ 定义为 Ψ 的限制。设 $[H^*] \in \mathrm{im}(r_1 \circ r_2)$ 是 e^0 的一个自同伦，并设 $[H^1]$ 是 $[H^*]$ 到Σ^1的一个自同伦延拓。我们也可以定义 $\mathrm{im}(r_1 \circ r_2) = \mathscr{G}_0$ 在 $(\mathscr{H}^f/\mathscr{G}_2)/\mathscr{G}_1$ 上的作用 Γ，使得 $\Gamma([H^*], [G]) = q_1(\Psi([H^1], [G]))$。通过类似的讨论，可以证明存在双射 $R : ((\mathscr{H}^f/\mathscr{G}_2)/\mathscr{G}_1)/\mathscr{G}_0 \to \mathscr{H}^f/\mathscr{H}_0^f$。

3.2. **自同伦在 $\mathbb{A}_{[f]}$上的作用**。现在我们来考察目标集合上的作用。先更详细地讨论一下 $\mathscr{G}_2$、$\mathscr{G}_1$ 和 $\mathscr{G}_0$。

定理 3.12. 存在一个群同构 $\mathscr{G}_2 \cong \pi_3(N)$。

证明。设 $[G] \in \mathscr{G}_2$。因此， G 是一个固定 1-骨架 Σ^1 的 f 的自同伦。考虑单位同伦 $E = f \times \mathrm{id}$。根据 $\mathscr{G}_1$ 的定义， G 在 3-流形 $\Sigma \times I$ 的 2-骨架 $\Sigma^1 \times I$ 上与 E 一致。设 B^G 是闭3-球 $G|_{D^2\times I}$ 的浸入： $D^2 \times I \to N \times I$，且 B^E 是 $E|_{D^2\times I} = f|_{D^2} \times \mathrm{id}$，其中$D^2 = e^2$ 是 2-胞腔的闭包。沿边界粘合 B^G 和 $-B^E$，得到一个 3-球面的映射 $S^G := B^G \cup (-B^E) : S^3 \to N \times I$。我们将映射 $\mathscr{G}_1 \to \pi_3(N) = \pi_3(N \times I)$ 定义为 $[G] \mapsto [S^G]$。根据 $\mathscr{G}_2$ 与 $\pi_3(N)$ 的乘积定义，$[G \cdot G'] \mapsto [S^G] \cdot [S^{G'}]$。若 $[S^G]$ 是平凡的，则 B^G 与 B^E 同伦，这意味着 $[G]$ 是平凡的。因此，该映射是单射。另一方面，对于每个 $[S] \in \pi_3(N)$，通过一个同伦，S 可以写成映射 $B \cup (-B^E) : S^3 = D^2 \times I \cup D^2 \times I \to N \times I$ 的并，于是我们可以构造一个同伦 $G \in \mathscr{G}_2$，使得 $B^G = B$，这意味着 $S^G = S$。□

定义 3.13. 定义 $\phi : \mathscr{G}_2 \to \mathbb{A}_{[f]}$ 由 $[G] \to \mu([S^G]) + \lambda_N(S^G, \overline{f}(\Sigma))$ 给出，其中 $\overline{\lambda}_N$ 是商群$\mathbb{A}_{[f]}$中公共相交不变量 λ_N 的类。用 $\mathbb{A}_{f_1}$ 表示商群 $\mathbb{A}_{[f]}/\mathrm{im}(\phi)$。

引理 3.14. 若 $[G] \in \mathscr{G}_2$，则 $\mu([G]) = \phi(S^G)$。

证明. 由定义， S^G 是两个 3-球映射 B^G 与 B^E的并。于是，由维数条件，对 $\mu([G])$有贡献的所有自交都来自 3-胞腔 B^G。而对 $\mu(S^G)$有贡献的自交来自 B^G 以及 B^G 与 $-B^E$之间的相交。因此,

$$\mu(S^G) = \mu([G]) + \overline{\lambda}(B^G, -B^E) = \mu([G]) + \overline{\lambda}([G], f \times \mathrm{id})$$

并且我们有 $\overline{\lambda_N}(S^G, f) = \overline{\lambda}(S^G, f \times \mathrm{id}) = \overline{\lambda}([G], f \times \mathrm{id})$，其中前两个等式由于维数条件成立，最后一个等式成立是因为$f(D^2) \times I$ 是可缩的，因此它在 N 中具有平凡法丛，所以我们可以沿某个非零法丛将其稍微移动以消除自交，从而得到

$$\mu([G]) = \mu(S^G) + \overline{\lambda}_N(S, f) = \phi(S).$$

□

引理 3.15. 映射 $\mu : \mathscr{H}^f \to \mathbb{A}_{[f]}$ 诱导出一个良定义映射 $\mu^1 : \mathscr{H}^f/\mathscr{G}_2 \to \mathbb{A}_{f_1}$。并且，如果 $q_2[H] \in \mathscr{H}^f/\mathscr{G}_2$ 满足 $\mu^1(q_2[H]) = 0$，那么 $q_2[H] = q_2[E]$。

证明。对于 $q_2[H] = q_2[H'] \in \mathscr{H}^f/\mathscr{G}_2$，根据定义，存在 $[G] \in \mathscr{G}_2$ 使得 $[G]\cdot[H] = [H'] \in \mathscr{H}^f$。根据交数的定义， $\mu([G\cdot H]) = \mu([G]) + \mu([H])$，因为 $[G] \in \mathscr{G}_2$ 固定基点，因此， $\mu([G]) \in \phi(\mathscr{G}_2)$，所以$\mu([H])$ 和 $\mu([H'])$ 属于 $\mathbb{A}_{f_1} = \mathbb{A}_{[f]}/\phi(\mathscr{G}_2)$ 的同一个轨道。因此，诱导映射 μ^1 是良定义的。此外，如果 $\mu^1(q_2[H]) = 0$，那么存在 $[G] \in \mathscr{G}_2$ 使得 $\mu([H]) = \mu([G])$。因此， $0 = \mu([H]) - \mu([G]) = \mu([H]\cdot[-G]) = \mu([H\cdot(-G)])$，所以根据定理 2.3，$(H \cdot (-G))$ 与 E 同伦，因此 $[H]\cdot(-[G]) = [E]$，这意味着 $q_2[H] = q_2[E]$。□

对于 $\mathscr{G}_1$，我们有类似的讨论。

定义 3.16。对于亏格为 g 的曲面 Σ，其 1-骨架为 $\Sigma^1 \cong \bigvee_{2g} S^1$。因此，固定基点的 Σ^1 的同伦对应于一个基于基点的浸入 $\bigvee_{2g} S^2 \to N \times I$，换言之，$\ker(r_1) \cong \pi_2(N)^{2g}$。对于元素 $a \in \pi_2(N)^{2g}$，记 $\ker(r_1)$ 中对应于 a 的 Σ^1 的同伦为 $[H_a^1] \in$ 。于是由同伦延拓定理（引理 3.6），$H_a^1 : \Sigma^1 \times I \to N \times I$ 可以延拓为一个同伦 $H_a : \Sigma \times I \to N \times I$，使得 $H_a(x, 0) = f(x)\ \forall x \in \Sigma$，且 $H_a|_{\Sigma^1 \times I}(x, t) = H_a^1(x, t)$。因此，$H_a|_{\Sigma \times \{1\}}$ 在 2- 胞腔 e^2 的边界上与 f 一致。沿边界粘合 $H_a|_{D^2 \times \{1\}}$ 和 $f|_{D^2}$，得到一个映射 $S_a : S^2 \to N \times I$。因此，该过程给出一个映射

$$\begin{aligned} \iota : \pi_2(N)^{2g} &\to \pi_2(N) \\ a &\mapsto [S_a]. \end{aligned}$$

定理 3.17. 映射 ι 是一个良定义的群同态，并且 $\mathscr{G}_1 \cong \ker(\iota)$。

证明。显然，$\iota(1) = 1$，并且由 S_a的构造，由于这两个胞腔e^2是可缩的，对 a，$b \in \pi_2(N)^{2g}$，$[S_{a \cdot b}] = [S_a] \cdot [S_b]$，因此 $\iota(ab) = \iota(a)\iota(b)$。设 H_a^1是 Σ^1的一个同伦，并设 H_a、H_a'是 H_a^1的两个延拓。定义$S_a = H_a(D^2, 1) \cup_\partial f(D^2)$以及 $S_a' = H_a'(D^2, 1) \cup_\partial f(e^2)$，则我们只需证明 $[S_a] = [S_a']$ 在 $\pi_2 N$中。注意到 $[S_a] \cdot [S_a']^{-1} = [S_a \cup (-S_a')] = [H_a(D^2, 1) \cup_\partial H_a'(D^2, 1)]$。并且由于 $H_a(D^2, 1)$ $H_a'(D, 1)$ 相对于边界都同伦于 $f(D^2)$，故 $H_a(e^2, 1) \cup_\partial H_a'(e^2, 1)$在 N中是零伦的，因此 $[S_a] = [S_a']$，从而映射 ι 是一个良定义的群同态。

此外，由于 $\mathscr{G}_1 = \mathrm{im}(r_2) \cup \ker(r_1)$，$\mathscr{G}_1$ 是$\ker(r_1)$的一个子群。根据定义，对于 $[H^1] = r_2[H] \in \mathscr{G}_1$, $\iota([H^1]) = [S]$，它由粘合 $H|_{D^2 \times \{1\}}$ 和$f|_{D^2}$生成。然而，$[H] \in \mathscr{H}_0^f$，这意味着 $H|_{\Sigma \times \{1\}} = f$，所以 $\iota([H^1]) = 0$。因此，$\mathscr{G}_1 \cong \ker(\iota)$。□

定义 3.18. 定义

$$\begin{aligned} \psi : \mathscr{G}_1 &\to \mathbb{A}_{f_1} \\ a &\mapsto \mu^1([H_a]). \end{aligned}$$

记 $\mathbb{A}_{f_*}$ 为商群$\mathbb{A}_{f_1}/\psi(\mathscr{G}_1)$。

换言之，$\psi = \mu^1|_{\mathscr{G}_1}$。我们有如下显然的事实。

命题 3.19. ψ 是一个群同态。

同样，将映射与群作用结合起来，我们得到：

引理 3.20。映射 μ^1：$\mathscr{H}^f/\mathscr{G}_2 \to \mathbb{A}_{f_1}$ 诱导出映射 μ^*（$\mathscr{H}^f/\mathscr{G}_2$）$/\mathscr{G}_1 \to \mathbb{A}_{f_*}$。并且，如果 $q_1 \circ q_2[H] \in$（$\mathscr{H}^f/\mathscr{G}_2$）$/\mathscr{G}_1$ 满足 μ^*（$q_1 \circ q_2[H]$）$= 0$，那么我们有 $q_1 \circ q_2[H] = q_2 \circ q_1[E] \in$（$\mathscr{H}^f/\mathscr{G}_2$）$/\mathscr{G}_1$。

证明。对于 $q_1 \circ q_2[H] = q_1 \circ q_2[H'] \in (\mathscr{H}^f/\mathscr{G}_2)/\mathscr{G}_1$，根据定义，存在 $q_2[G] \in \mathscr{G}_1$ 使得 $q_2([G] \cdot [H]) = q_2[H'] \in \mathscr{H}^f/\mathscr{G}_2$。由于 $[G] \in \mathscr{G}_1$ 固定基点，$\mu^1(q_2([G] \cdot [H])) = \mu^1(q_2[G]) + \mu^1(q_2[H])$。并且如果 $\mu^*(q_1 \circ q_2[H]) = 0$，那么存在 $q_1[G] \in \mathscr{G}_1$ 使得 $\mu^1(q_2[H]) = \mu^1(q_2[G])$。因此，$\mu^1(q_2[-G \cdot H]) = 0$，由引理 3.15和定理 2.3可知 $q_2[G \cdot H] = q_2[E]$，因此，$q_1 \circ q_2[H] = q_1 \circ q_2[E]$。□

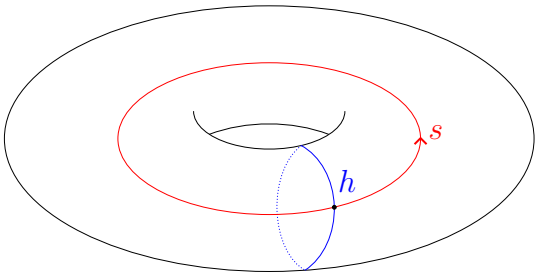


FIGURE 5. 同伦可以延拓的一个例子

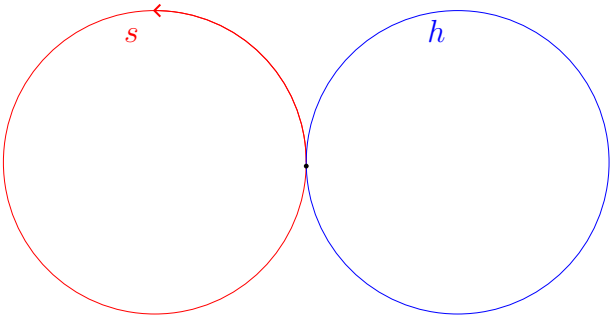


FIGURE 6. 同伦无法延拓的一个例子

最后，我们讨论基点 $\mathscr{G}_0$ 的自同伦。基点的自同伦就是从基点到其自身的一个环路，它自然对应于 $\pi_1 N$ 中的一个元素。换句话说， $\mathscr{H}_0^f(e^0, N) \cong \pi_1 N$

引理*3.21.* 设 $g: S^1 \to N$ 为一个连续映射。固定一个基点 $e^0 \in S^1$，然后考虑限制 $r: \mathscr{H}_0^g(S^1, N) \to \mathscr{H}_0^g(e^0, N)$。记 $[H_s^*]$ 为沿着 $s \in \pi_1 N$, $H_s^* \in \mathit{im}(r)$ 的基点自同伦，当且仅当 s 和 g作为 $\pi_1 N$中的元素可交换，见图*5*和图*6*。

证明。一方面，如果 $H_s^* \in \mathrm{im}(r)$，则存在一个同伦 $[H] \in \mathscr{H}_0^g(S^1, N)$ 使得 $r[H] = [H_s^*]$，因此考虑同伦

$$G(x,t) = \begin{cases} s(3xt), 0 \le x \le 1/3, \\ H(3x-1,t), 1/3 < x \le 2/3, \\ s(3t-3xt), 2/3 < x \le 1 \end{cases}$$

并且 $[G(x,\ 0)] = g$, $[G(x,\ 1)] = sgs^{-1}$，因此 $sgs^{-1} = g$，这意味着 s与 g可交换。

另一方面，若 $sgs^{-1} = g$, $sgs^{-1}g^{-1} = 1$，那么存在一个圆盘 D，使得 $[\partial D] = sgs^{-1}g^{-1}$。定义 $H: S^1 \times I \to N$, $H|_{S^1\times\{0\}} = H|_{S^1\times\{1\}} = g$和 $H|_{e^0\times I} = g$，并在另一块区域上定义 $H = D$。那么，根据构造，$[H] \in \mathscr{H}_0^g(S^1,\ N)$ and$r[H] = [H_s^*]$。□

设 C 是 $G = i_*(\pi_1\Sigma) \in \pi_1 N$的中心化子，即 C 由与 G 中所有元素都可交换的元素组成。根据引理 3.21，$\mathrm{im}(r_1) \cong C$。

定义 3.22。对于 $s \in C$，用 H_s^1 表示将 s延拓到 1-骨架上的同伦。根据同伦延拓定理，我们可以将 H_s^1 延拓为 Σ 的一个同伦 H_s，直到 $\mathscr{G}_2$。因此，H_s 与 f 在 2-胞腔D^2的边界上相一致。定义 $\eta\colon C \to \pi_2 N/\mathrm{im}(\iota)$，使得 $\eta(s) = [H_s|_{D^2\times 1} \cup_\partial f|_{D^2}]$。

定理 3.23. η 是一个群同态，且 $\mathscr{G}_0 \cong \ker(\eta)$。

证明。根据上述讨论，基点的自同伦 $s \in \pi_1 N$ 可以延拓为 Σ 的自同伦 H_s，当且仅当 $\eta(s) = 0$，且该延拓在 $\mathscr{G}_1$ 和 $\mathscr{G}_2$意义下唯一。另一方面，若 $q_1 \circ q_2[H] \in \mathscr{G}_0$ 是一个同伦，则 $H|_{e^0\times I}$ 给出基点的一个自同伦。因此，$\mathscr{G}_0$ 与 $\ker(\eta)$ 之间存在一一对应。此外，利用同伦延拓定理，很容易验证以下性质：

(1) 若 $s = 0 \in \ker(\eta)$，则 H_s 在保持基点不动的同伦意义下同伦于平凡同伦；(2) 拼接自同伦会使下标相乘：$[H_{st}] = [H_s]\cdot[H_t]$；(3) 反转自同伦会使下标取逆：$-[H_s] = [H_{s^{-1}}]$。

因此，存在一个群同构 $\mathscr{G}_0 \cong \ker(\eta)$。 □

定义 3.24. 定义仿射作用

$$\begin{aligned}\zeta : \mathscr{G}_0 \times \mathbb{A}_{f_*} &\to \mathbb{A}_{f_*}\\ (s, a) &\mapsto sas^{-1} + U_s\end{aligned}$$

其中 $s \in \mathscr{G}_0$, $U_s = \mu^*(q_1 \circ q_2[H_s]) \in \mathbb{A}_{f_*}$ 且 H_s 是 s的延拓。定义 $\mathbb{A}_f$为轨道空间 $\mathbb{A}_{f_*}/\mathscr{G}_0$。

命题 3.25. ζ 是一个良定义的群作用，且 $\mu^* : (\mathscr{H}^f/\mathscr{G}_2)/\mathscr{G}_1) \to \mathbb{A}_{f_*}$诱导出一个映射 $\mu : ((\mathscr{H}^f/\mathscr{G}_2)/\mathscr{G}_1)/\mathscr{G}_0 \cong \mathscr{H}^f/\mathscr{H}_0^f \to \mathbb{A}_f$。并且若 $[H] \in \mathscr{H}^f/\mathscr{H}_0^f$ 满足 $\mu([H]) = 0$, 则 $[H] = [E] \in \mathscr{H}^f/\mathscr{H}_0^f$。

证明。注意，$U_s := \mu^*([H_s])$ 由 s确定；在拼接下，对 $s, r \in \ker(\eta)$, $U_{s\cdot t} = U_s + sU_r s^{-1}$，这意味着作用 $\zeta(s, a) := sas^{-1} + U_s$ 满足

$$\zeta(sr, a) = U_{sr} + srar^{-1}s^{-1} = \zeta(s, (U_r + rar^{-1})) = \zeta(s, \zeta(r, a)),$$

这是良定义的。此外，对于 $q_1 \circ q_1[H] \in (\mathscr{H}^f/\mathscr{G}_2)/\mathscr{G}_1$ 和 $[H_s^*] \in \mathscr{G}_0$，我们有 $\mu^1(q_1\circ q_2[H_s\cdot H]) = \mu^1(q_1\circ q_2[H_s]) + s\mu^1(q_1\circ q_2[H])s^{-1}$。出现共轭作用，是因为当我们计算 $[H_s\cdot H]$中 $[H]$ 的交数时，基点沿着 s 移动，这与 $\mathscr{G}_0$ 对 $\mathbb{A}_{f_*}$的作用一致。因此，诱导映射 $\mu : \mathscr{H}^f/\mathscr{H}_0^f \to \mathbb{A}_f$ 是良定义的。并且，如果 $\mu([H]) = 0 \in \mathbb{A}_f$, 那么存在$[H_s^*] \in \mathscr{G}_0$ 使得 $\zeta(s, \mu^1(q_1 \circ q_1[H])) = \mu^1(q_1 \circ q_2[H'])$，因此 $\mu^1(q_1 \circ q_2[H_s \cdot H]) = \mu^1(q_1 \circ q_2[H']) \in \mathbb{A}_{f_*}$。于是，由引理 3.20、3.15 和定理 2.3 可知，$[H] = [E] \in \mathscr{H}^f/\mathscr{H}_0^f$。□

4. The invariant map and applications

经过以上准备，我们可以定义不变映射 fq。

定义 4.1。 将不变映射 fq 定义为

$$\begin{aligned} \mathrm{fq} : p^{-1}([f]) &\to \mathbb{A}_f \\ f' &\mapsto \mathrm{fq}(f') := \overline{\mu}(\overline{[H]}), \end{aligned}$$

其中， H 是从 f 到 f'的同伦。

W我们断言，该映射是一个良定义的双射，这就证明了定理1。 1.

证明。为证明 fq 良定义，我们需要证明它与 H 的选取无关，且仅由 f'的同痕类决定；这一点我们已在上一节详细讨论。若存在两个从f到 f'的同伦 H 和 H'，则乘积 $[H]\cdot[-H']$是 f的一个自同伦，因此 $0=\mu([H\cdot(-H')]) =\mu([H])-\mu([H'])$，也就是说，$\overline{\mu}([H]) = \mu([H'])$。因此，fq 良定义。

为证明 fq 是一个双射，设 f_1， $f_2 \in p^{-1}([f]) \cong \mathscr{H}^f/\mathscr{H}_0^f$是两个与 f同伦的嵌入。根据定义，$\mathrm{fq}(f_1) = \mathrm{fq}(f_2)$意味着存在连接 f 和 f_1 的 H_1，以及连接 f 和 f_2 的 H_2，使得 $\mu([H_1]) = \mu([H_2])$。因此，存在 $[G^*] \in \mathscr{G}_0$ $\mu([G^*\cdot H_1]) = \mu([H_2])$ $\in \mathbb{A}_{f_*}$。于是考虑同伦 $H_3 := -H_2\cdot G\cdot H_1$， H_3 是连接 f 和 f' 的同伦，使得

$$\begin{aligned} \overline{\mu}([H_3]) &= \overline{\mu}([-H_2]) + \overline{\mu}_3([H_s]) + s\overline{\mu}([H_1])s^{-1} \\ &= -\overline{\mu}([H]) + U_s + s\overline{\mu}([H])s^{-1} \\ &= -(U_s + s\overline{\mu}([H])s^{-1}) + U_s + s\overline{\mu}_3([H])s^{-1} \\ &= 0 \in \mathbb{A}_{f_*} \end{aligned} \tag{4.1}$$

由引理 3.20、3.15 和定理 2.3，我们得知 $[H_3] = [E] \in \mathscr{H}^f$，因此 f_1 与 f_2 同痕，所以 fq^i 是单射。定理1.1的证明至此完成。 □

现在我们得到了一个双射，尽管我们并不完全清楚映射ϕ、 ψ以及作用具体是什么。如果N的同伦群满足某些条件，就可以消除这些障碍。

推论 *1.3* 的证明。 在我们的双射中，若 N 是单连通的，或者若 $f_*\colon \pi_1\Sigma \to \pi_1 N$ 是满射，则商集 $\mathbb{A}_{[f]}$ 只有一个元素，这意味着只有一个同痕类。并且，若该曲面有一个代数对偶球面$[S] \in \pi_3(N)$，也就是说 $\lambda_N([S], f) = 1$且 $\mu([S])$ $= 0 \in \mathbb{A}_{[f]}$，那么对任意$\Sigma[g_i] \in \mathbb{Z}G\backslash\pi_3(N)/G$，我们有

$$\phi(g\cdot[S]) = 0 + [\lambda_N(\Sigma g_i\cdot[S], f)] = [\Sigma g_i\cdot\lambda_N([S], i)] = [\Sigma g_i]$$

这意味着 $\phi(\pi_3 N) = \mathbb{A}_{[f]}$，商群 $\mathbb{A}_{f_1}$ 是平凡群， $\mathbb{A}_f$也如此，这意味着只有 1 个同痕类。□

反过来，

推论 *1.4* 的证明。 如果 $\pi_2 N$、 $\pi_3 N$ 都是平凡的，那么映射 ϕ 和 ψ 都是平凡的，因此 $\mathbb{A}_f = \mathbb{A}_{[f]}/\ker\eta$。又由于 $\ker\ \eta \subset \pi_1 N$，且如果 $G\backslash\pi_1 N/G$ 中存在无穷多个共轭类，那么就存在无穷多个轨道，从而存在无穷多个同痕类。□

References

[Gab17] David Gabai, 《四维灯泡定理》, 美国数学会杂志（2017）。[Gab20] , 《自指圆盘与灯泡引理》, 2020。[Hat02] Allen Hatcher, 《代数拓扑》, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2002。MR 1867354 (2002k:55001)[Hir59] Morris W. Hirsch, 《流形的浸入》, 美国数学会会刊 **93** （1959）, 第 2 期, 242–276。[Hud70] J. F. P. Hudson, 《协和、同痕与微分同痕》, 数学年刊 **91**（1970）, 第 3 期, 425–448。[KST23] Danica Kosanovi´c、Rob Schneiderman 和 Peter Teichner, 《同伦与同痕：*5*维流形中的 *2*-球面》, 太平洋数学杂志（2023）。[LWXZ25] Jianfeng Lin、Weiwei Wu、Yi Xie 和 Boyu Zhang, 《*Dax*不变量、灯泡与辛结构的同痕》, 2025。[MSS65] John Milnor、L. Siebenmann 和 J. Sondow, 《*h*余边界定理讲义》, 普林斯顿大学出版社, 1965。[Sma59] Stephen Smale, 《二维球面浸入的分类》, 美国数学会会刊 **90** （1959）, 第 2 期, 281–290。[Wal66] C. T. C. Wall, 《非单连通流形的手术》, 数学年刊**84**（1966）, 第 2 期, 217–276。

Department of Mathematics, University of Maryland, College Park, USA.
电子邮箱地址： wmxq@umd.edu