arXiv:2603.07801v1 [math.DS] 8 Mar 2026

非自治动力系统的变分原理

´ANDRZEJ BIS

Abstract. 我们研究由紧致度量空间上的一列连续自映射所确定的离散非自治动力系统的热力学形式。利用凸分析的方法，我们得到了由该系统确定的压力函数的变分原理。

1. Introduction and structure of the paper

1959 年，Kolmogorov 和 Sinai 将 Shannon 信息论中的度量熵发展到遍历理论中。此后，熵的概念在动力系统研究中发挥了至关重要的作用。1965 年，Adler、Konheim 和 McAndrew 将经典动力系统的拓扑熵引入，并在此记为 $h_{top}(f)$，该系统由紧致拓扑空间 X上的 单个连续自映射 $f: X \to X$ 确定，且将其定义为拓扑共轭不变量。1971 年，Bowen [6] 和 Dinaburg [9] 在所研究空间可度量化的情形下给出了一个新的、但等价的定义。

Bowen [7]采用了另一种方法来扩展非紧集的拓扑熵概念，这种方法类似于豪斯多夫测度和豪斯多夫维数的构造。Pesin 和 Pitskel [19] 发展了这一方法，Pesin[20] 对此进行了详细阐述，并完善了 Carath´eodory 结构的维数理论。

根据连续映射 $f: X \to X$ 的 Krylov-Bogoliubov 定理 [8]，存在一个定义在 X. 上的 Borel $\sigma-$代数上的 Borel 概率 $f-$不变测度 μ。因此，定义在 X 的 Borel 子集所构成的 σ代数 $\mathfrak{B}(X)$ 上的 f-不变概率测度空间$\mathcal{P}_f(X)$非空。由此，可以定义并研究连续变换 f关于测度 $\mu \in \mathcal{P}_f(X)$ 的测度论熵，记作 $h_\mu(f)$，。著名的变分原理将作用在紧致度量空间 X上的连续自映射 $f: X \to X$，的拓扑熵与其测度论熵联系起来。它指出:

$$h_{top}(f) = \sup\{h_\mu(f) : \mu \in \mathcal{P}_f(X)\}.$$

等价地，对于映射 f 的拓扑压力 $P_{\text{top}}(f, \varphi)$，可将其重写为（见 [22] 中的定理 9.10）:

$$P_{\text{top}}(f, \varphi) = \sup_{\mu \in \mathcal{P}_f(X)} \Big\{ h_\mu(f) + \int_X \varphi \, d\mu \Big\}, \tag{1.1}$$

其中 $\varphi: X \to \mathbb{R}$ 是一个连续势函数。

Date: 2026年3月10日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：37D35，37C85；次要分类：43A05，*Key words and phrases.*有限可加集合函数；压力函数；变分原理；非自治动力系统。1

此外，对具有有限拓扑熵的连续自映射$f:\ X\to X$, 已知一个对偶变分原理（ [22]中的定理 9.12）。它借助拓扑压力 $P_{\text{top}}(f,\varphi)$, 来表示 f的测度论熵 $h_{\mu_0}(f)$，并指出 $h_{\mu_0}(f)=\inf\{P_{\text{top}}(f,\varphi)-\int_X\varphi d\mu_0 :\varphi\in C(X)\}$ 当且仅当 $h_{\mu_0}(f)$ 在 μ_0, 处上半连续，其中 $C(X)$ 是所有连续映射 $\phi:X\to\mathbb{R}$. 的空间

热力学形式体系的目标之一是确立最大熵测度的存在性。这类测度称为平衡态，其中包括吉布斯测度和物理测度等具体例子。满足一些附加假设时，经典动力系统存在一个最大熵测度。

人们提出了几种方案，将测度论熵和拓扑压力的概念推广到更一般的情形。其中之一是非自治离散动力系统（简称：NADDS），它由连续自映射序列 $f_{1,\ \infty}:=\{f_n:\ X\to X\}_{n\in\mathbb{N}}$，确定，是经典动力系统的自然推广。

Kolyada 和 Snoha [15] 引入并研究了 NADDS 的拓扑熵概念。多年来，人们研究了这类动力系统的许多性质（参见 [15], [11],[23], [14], [18], [23], [4], [12]）。

例如，Huang、Wen 和 Zeng [11] 引入并研究了非自治离散动力系统的拓扑压力。关于拓扑压力的等价定义以及这些概念的基本性质，可参见 [16]。

为非自治离散动力系统建立变分原理的一大困难在于缺乏共同的不变测度，因此没有与 Krylov-Bogoliubov 定理相对应的定理。

Kawan [12] 同时考虑一列概率空间 $X_{1,\infty}:=\{X_n,\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$以及一列连续映射 $f_{1,\infty}:=\{f_n:\ X_n\to X_{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$，它们定义在一列紧致度量空间 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. 上。一列测度 $\mu_{1,\infty}:=\{\mu_n-$是 $X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$上的一个测度，若对任意 $n\in\mathbb{N}$. 都有 $f_n\mu_n=\mu_{n+1}$，则称其为 $f_{1,\infty}-$不变。设 $\mathcal{P}_n$ 是 X_n 的一个有限可测划分，并设 $\mathcal{P}_{1,\infty}:=\{\mathcal{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是所有有限划分组成的序列。回顾一下，概率空间 $(X,\mathcal{A},\mu)$上的有限可测划分 $P=\{P_1,...,P_m\}$ 的熵定义为 $H_\mu(P):=-\sum_{i=1}^m\mu(A)\cdot\log(\mu(A))$，其中 $\mathcal{A}$ 是由 X构成的一个 $\sigma-$代数。Kawan 以与 Kolyada 和 Snoha 在 [15]中相同的方式定义拓扑熵 $h_{top}(f_{1,\infty})$。由于划分 $\mathcal{P}_{1,\infty}$ 的测度熵定义如下

$$h_{\mu_1}(f_{1,\infty},\mathcal{P}_{1,\infty}):=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}H_{\mu_1}(\bigvee_{i=0}^{n-1}f_1^{-i}\mathcal{P}_{i+1})$$

即使对于简单系统，度量熵也可能是无穷的（参见 [12]中的例14和例18）。他从所有序列$\mathcal{P}_{1,\ \infty}$ 构成的类中选取了一个足够良好的子类 $\mathcal{E}_{max}$，称为极大可容许类（定义见 [12] 的第 3.2 小节），以获得合理的度量熵概念。但为了得到部分变分原理，他甚至选取了一个称为米修维奇类的子类 $\mathcal{E}_M\subset\mathcal{E}_{max}$，该类定义于 [12],的第4.1小节，用于定义测度熵

$$h_{\mathcal{E}_M}(f_{1,\infty}):=\sup_{\mathcal{P}_{1,\infty}\in\mathcal{E}_M}h_{\mu_1}(f_{1,\infty},\mathcal{P}_{1,\infty}).$$

他的主要结果，即部分变分原理，如下所述。

[12]中的定理（28）。对于具有$f_{1,\ \infty}-$不变序列$\mu_{1,\ \infty}$ 的等度连续拓扑非自治动力系统（$X_{1,\ \infty}$，$f_{1,\ \infty}$），有

$$h_{\mathcal{E}_M}(f_{1,\infty})\le h_{top}(f_{1,\infty}).$$

按照 Brin 和 Katok 的定义，局部测度熵 [8], 在离散非自治动力系统中是良定义的。在此背景下，人们提出了若干种方法，将系统的拓扑熵与其局部测度熵联系起来。

例如，Bi´s [4] 应用系统在一点 $x \in X$处相对于定义在 X.上的博雷尔概率测度 μ 的局部下测度熵 $h_\mu^{Low}(f_{1,\infty})(x)$ 和局部上测度熵 $h_\mu^{Upp}(f_{1,\infty})(x)$，给出了 Kawan [12] 结果的某种推广

[4] 中的定理1指出，对于定义在 X 上的博雷尔概率测度 μ，若子集 $E \subset X$ 和 $s > 0$满足：对任意一点 $x \in E$，不等式 $h_\mu^{Low}(f_{1,\infty})(x) \geq s$ 成立，且 $\mu(E) > 0$，那么$h_{top}(f_{1,\infty}, E) \geq s$.

Feng 和 Huang [10] 证明，非自治离散动力系统的拓扑熵等于下局部测度熵函数积分的上确界，其中上确界取遍所有具有全支撑的博雷尔概率测度。

本文证明，对于非自治动力系统的拓扑压力，抽象变分原理和对偶抽象变分原理（定理A）成立。在定理 B 中，假设拓扑压力满足经典变分原理，我们揭示了系统不同测度熵与不变测度之间的关系。随后，我们采用 Misiurewicz构造，并引入 Misiurewicz 压力和 Misiurewicz 熵。在定理 C 中，我们证明，Misiurewicz 压力同样满足抽象变分原理和抽象对偶变分原理。在定理 D 中，假设 Misiurewicz 压力满足经典变分原理，我们揭示了系统不同测度熵与不变测度之间的关系。

本文的组织结构如下。在第2节中，我们介绍将凸分析应用于非自治离散动力系统的方法。特别地，我们给出表述定理A所需的概念和思路，该定理涉及非自治动力系统$f_{1,\infty} := \{f_n : X \to X\}_{n\in\mathbb{N}}$的拓扑压力的抽象变分原理。我们证明，拓扑压力决定一个压力函数。定理A中关于拓扑压力的变分原理保证，总存在使（2.1）右端达到最大值的测度。推论1指出，这样的测度是唯一的。我们定义由$f_{1,\infty}$−不变测度构成的空间$\mathcal{P}_{f_{1,\infty}}(X)$，并给出例子（例2.3和例2.4），说明存在一些非自治动力系统，其相应空间$\mathcal{P}_{f_{1,\infty}}(X)$非空。在定理 B 中，假设非自治动力系统 $f_{1,\infty} := \{f_n : X \to X\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的拓扑压力也满足经典变分原理，我们给出系统不同熵之间的关系。特别地，我们证明，$f_{1,\infty}$−不变测度由抽象测度熵的正性确定。随后，我们定义非自治动力系统$f_{1,\infty} := \{f_n : X \to X\}_{n\in\mathbb{N}}$. 的 Misiurewicz 熵和 Misiurewicz 压力。我们证明，Misiurewicz 压力决定一个压力函数。我们陈述定理 C，该定理针对 Misiurewicz 压力表述，是定理A（针对非自治动力系统的拓扑压力表述）的类比。定理 C 中关于 Misiurewicz 压力的变分原理保证，总存在使（2.6）右端达到最大值的测度。推论 2 指出，这样的测度是唯一的。随后我们陈述定理 D，该定理针对 Misiurewicz 压力表述，是定理 B（针对拓扑压力表述）的类比。

第 3 节专门介绍 Bi´s 等人 [2], 的主要结果，他们运用凸分析中的方法，构造出适用于任意压力

函数的上半连续熵型映射，该函数定义在适当的巴拿赫空间上，且无需借助任何动力系统。文中引入了定义在巴拿赫空间上的抽象压力函数（定义 3.2）。在针对抽象压力函数提出的定理 3.3 中，我们得到了抽象测度熵、抽象变分原理和抽象对偶变分原理。

在第4节中，我们详细介绍非自治离散动力系统的拓扑压力概念，应用 [2], 的结果，并给出定理A和定理 B的证明。在第5节中，我们基于 [17], 介绍非自治动力系统的Misiurewicz 压力，并给出定理 C和定理 D的证明。

2. Main results

在这篇自包含的论文中，我们介绍由连续自映射$f_{1,\infty} := \{f_n : X \to X\}_{n\in\mathbb{N}}$. 确定的非自治离散动力系统压力的两种不同定义。第一种称为拓扑压力（见定义4.1），第二种称为Misiurewicz 压力（见定义5.1）。对于这两种压力，我们均应用 [2], 的主要结果；该文作者运用凸分析中的方法，在适当的巴拿赫空间上构造出适用于任意抽象压力函数的上半连续熵型映射，而无需引入任何动力系统。

对于紧致度量空间 (X, d)，我们用 $P(X)$ 表示其上所有博雷尔概率测度构成的空间，用 $C(X)$ 表示所有连续映射 $\varphi : X \to \mathbb{R}$，的空间，这些映射称为势函数。令 $P_{\text{top}}(f_{1,\infty}, \varphi)$（分别地，$h_{top}(f_{1,\infty})$）表示关于势函数 $\varphi \in C(X)$的非自治离散动力系统 $f_{1,\infty} = \{f_n : X \to X\}_{n=1}^{\infty}$ 上的拓扑压力（分别地，拓扑熵）。将 [2] 的策略应用于非自治离散动力系统的拓扑压力，我们得到如下抽象变分原理和抽象对偶变分原理。

定理A。对于定义在紧致度量空间 (X, d) 上的非自治离散动力系统 $f_{1,\infty} = \{f_n : X \to X\}_{n=1}^{\infty}$，若 $h_{top}(f_{1,\infty}) < +\infty$，则存在一个上半连续函数$\mathfrak{h}_{f_{1,\infty}} : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}$，使得

$$P_{\text{top}}(f_{1,\infty}, \varphi) = \max_{\mu\in\mathcal{P}(X)} \left\{ \mathfrak{h}_{f_{1,\infty}}(\mu) + \int_X \varphi \, d\mu \right\} \qquad \forall \varphi \in C(X) \tag{2.1}$$

and

$$\mathfrak{h}_{f_{1,\infty}}(\mu) = \inf_{\varphi\in C(X)} \left\{ P_{\text{top}}(f_{1,\infty}, \varphi) - \int \varphi \, d\mu \right\} \qquad \forall \mu \in \mathcal{P}(X). \tag{2.2}$$

推论1. 对于一个非自治离散动力系统 $f_{1,\infty} = \{f_n : X \to X\}_{n=1}^{\infty}$, 若其拓扑熵 $h_{top}(f_{1,\infty})$ 有限, 且连续势函数为 $\varphi \in C(X)$，则存在唯一的测度 $\mu \in P(X)$，使得 $P_{\text{top}}(f_{1,\infty}, \varphi) = \mathfrak{h}_{f_{1,\infty}}(\mu) + \int_X \varphi \, d\mu$.

在下一个定理中，我们为非自治离散动力系统引入一种新的类熵量$h^*_{f_{1,\infty}}(\mu)$（定义见第4.3小节），并介绍非自治动力系统的抽象测度熵的一些性质。

设 $\mathcal{P}_{f_{1,\infty}}(X)$ 为 $f_{1,\infty}-$不变测度空间，即

$$\mathcal{P}_{f_{1,\infty}}(X) := \{\mu \in \mathcal{P}(X) : \int (\psi \circ f_n) d\mu = \int \psi d\mu, \forall_{n\in\mathbb{N}}, \psi \in C(X)\}.$$

下面给出一些存在不变测度的非自治离散动力系统的例子。

例2.3. 假设 (X,d) 是一个紧致度量空间，并且存在两个可交换连续映射 $f,g\colon X\to X$, 它们在 X. 上都不同于恒等映射。那么，博雷尔概率测度 μ 若为 $f-$ 不变，则也为 $g-$ 不变（见 [21] 第98页）。因此，对于由两两可交换映射组成的 $f_{1,\infty}=\{f_n\colon X\to X\}_{n=1}^{\infty}$ （即对于任意 $m,n\in\mathbb{N}$， $f_n\circ f_m=f_m\circ f_n$ ），存在一个共同的 $f_{1,\infty}-$ 不变测度 ν，且 $\mathcal{P}_{f_{1,\infty}}(X)\neq\emptyset$.

例2.4。 正交群 $O(m)$作用于 $m-$维球面 S^m 上，它是一个非阿贝尔群，并存在 $O(m)-$不变的哈尔测度。因此，对于任意$f_{1,\infty}=\{f_n:S^m\to S^m\}_{n=1}^{\infty}$，若对任意 $n\in\mathbb{N}$，都有 $f_n\in O(m)$，则哈尔测度是 $f_{1,\infty}-$ 不变的，并且$\mathcal{P}_{f_{1,\infty}}(X)\neq\emptyset$.

定理 *B.* 给定一个非自治离散动力系统$f_{1,\infty}=\{f_n\colon X\to X\}_{n=1}^{\infty}$，定义在紧致度量空间$(X,d)$上。设 $P_{\mathrm{top}}(f_{1,\infty},\cdot)\colon C(X)\to\mathbb{R}$ 为压力函数，且$\mathfrak{h}_{f_{1,\infty}}\colon\mathcal{P}(X)\to\mathbb{R}$ 为其变分度量熵，由等式 *(2.2)* 给出。假设$\mathcal{P}_{f_{1,\infty}}(X)\neq\emptyset$，且 $P_{\mathrm{top}}(f_{1,\infty},\cdot)$也满足变分原理

$$P_{\mathrm{top}}(f_{1,\infty},\varphi)=\sup_{\mu\in\mathcal{P}_{f_{1,\infty}}(X)}\left\{h_{f_{1,\infty}}(\mu)+\int\varphi\,d\mu\right\}\qquad\forall\,\varphi\in C(X)\tag{2.5}$$

with 关于非负度量熵映射 $h_{f_{1,\infty}}\colon\ \mathcal{P}_{f_{1,\infty}}(X)\ \to[0,+\infty[$。 n

（a）如果 $\varphi\in C(X)$ 和 $\mu_\varphi\in\mathcal{P}(X)$ 在（*2.3*）中取得最大值，那么 μ_φ 是 $f_{1,\infty}$-不变的，即

$$\int(\psi\circ f_n)\,d\mu_\varphi=\int\psi\,d\mu_\varphi\qquad\forall\,n\in\mathbb{N}\quad\forall\,\psi\in C(X).$$

（*b*）给定 $\mu\in\mathcal{P}(X)$，当且仅当 $\mathfrak{h}_{f_{1,\infty}}(\mu)\geqslant 0$时，有 $\mu\in\mathcal{P}_{f_{1,\infty}}(X)$。（*c*）对于每个 $\mu\in\mathcal{P}_{f_{1,\infty}}(X)$，有 $0\leqslant h_{f_{1,\infty}}(\mu)\leqslant\mathfrak{h}_{f_{1,\infty}}(\mu)\leqslant h^*_{f_{1,\infty}}(\mu)$。（*d*）对于每个 $\varphi\in C(X)$

$$P_{\mathrm{top}}(f_{1,\infty},\varphi)=\max_{\mu\in\mathcal{P}_{f_{1,\infty}}(X)}\left\{\mathfrak{h}_{f_{1,\infty}}(\mu)+\int\varphi\,d\mu\right\}=\max_{\mu\in\mathcal{P}_{f_{1,\infty}}(X)}\left\{h^*_{f_{1,\infty}}(\mu)+\int\varphi\,d\mu\right\}.$$

在本文的第二部分，我们考察 Misiurewicz 压力 $P_{Mis}(f_{1,\infty},\varphi)$（见定义5.1）以及 $f_{1,\infty}=\{f_n$ 的 Misiurewicz 熵 $h_{Mis}(f_{1,\infty})\colon\ X\to X\}_{n=1}^{\infty}$， 其由等式$h_{Mis}(f_{1,\infty}):=P_{Mis}(f_{1,\infty},\phi_0)$， 定义，其中 $\phi_0\equiv 0$. 我们得到以下结果，与定理A和定理 B类似。

定理 C。 给定一个定义在紧致度量空间 (X,d)，上的非自治离散动力系统 $f_{1,\infty}=\{f_n\colon X\to X\}_{n=1}^{\infty}$,, 满足 $h_{Mis}(f_{1,\infty},X)<+\infty$. 则存在一个上半连续函数$\mathfrak{h}^{Mis}_{f_{1,\infty}}\colon\mathcal{P}(X)\to\mathbb{R}$ 使得

$$P_{Mis}(f_{1,\infty},\varphi)=\max_{\mu\in\mathcal{P}(X)}\left\{\mathfrak{h}^{Mis}_{f_{1,\infty}}(\mu)+\int_X\varphi\,d\mu\right\}\qquad\forall\,\varphi\in C(X)\tag{2.6}$$

and

$$\mathfrak{h}^{Mis}_{f_{1,\infty}}(\mu)=\inf_{\varphi\in C(X)}\left\{P_{Mis}(f_{1,\infty},\varphi)-\int\varphi\,d\mu\right\}\qquad\forall\,\mu\in\mathcal{P}(X).\tag{2.7}$$

推论 2。 对于一个非自治离散动力系统 $f_{1,\infty}=\{f_n:\ X\to X\}_{n=1}^{\infty}$, ，满足$h_{Mis}(f_{1,\infty})<\infty$ ，且具有连续势函数 $\varphi\in C(X)$，存在唯一的测度 $\mu_1\in P(X)$，使得 $P_{Mis}(f_{1,\infty},\varphi)=\mathfrak{h}_{f_1,\infty}^{Mis}(\mu_1)+\int_X\varphi\,d\mu_1$.

在下一个定理中，我们为一个非自治离散动力系统引入一种新的类熵量$h_{f_1\infty,}^{*Mis}$（见第 5.3 小节），并介绍$f_{1,\ \infty}=\{f_n:X\to X\}_{n=1}^{\infty}$的抽象测度熵的一些性质

定理 *D.* 设非自治离散动力系统$f_{1,\infty}=\{f_n:X\to X\}_{n=1}^{\infty}$定义在紧致度量空间（$X,d$）上。令 $P_{Mis}(f_{1,\infty},\cdot):\ C(X)\to\mathbb{R}$ 为 *Misiurewicz* 压力函数，且$\mathfrak{h}_{f_1}^{Mis},_{\infty}:\ \mathcal{P}(X)\to\mathbb{R}$ 表示由等式 *(2.7)* 给出的其变分度量熵。假设$\mathcal{P}_{f_{1,\infty}}(X)\neq\emptyset$ 和 $P_{Mis}(f_{1,\infty},\cdot)$也满足变分原理

$$P_{Mis}(f_{1,\infty},\varphi)=\sup_{\mu\in\mathcal{P}_{f_{1,\infty}}(X)}\left\{h_{f_{1,\infty}}^{Mis}(\mu)+\int\varphi\,d\mu\right\}\qquad\forall\,\varphi\in C(X)\tag{2.8}$$

with 关于非负度量熵映射 $h_{f_1}^{Mis}{}_{,\ \infty}:\ \mathcal{P}_{f_{1,\ \infty}}(X)\to[0,+\infty[$。该 n

(a) 如果 $\varphi\in C(X)$ 和 $\mu_\varphi\in\mathcal{P}(X)$ 在(2.6)中取得最大值，那么 μ_φ 是 $f_{1,\ \infty}$-不变的，也就是说，

$$\int(\psi\circ f_n)\,d\mu_\varphi=\int\psi\,d\mu_\varphi\qquad\forall\,n\in\mathbb{N}\quad\forall\,\psi\in C(X).$$

(b) 给定 $\mu\in\mathcal{P}(X)$，当且仅当 $\mathfrak{h}_{f_1}^{Mis}{}_{,\ \infty}(\mu)\geqslant 0$ 时，有 $\mu\in\mathcal{P}_{f_{1,\ \infty}}(X)$ 。

(c) 对于每个 $\mu\in\mathcal{P}_{f_{1,\ \infty}}(X)$，都有 $0\leqslant h_{f_1}^{Mis}{}_{,\ \infty}(\mu)\leqslant\mathfrak{h}_{f_1}^{Mis}{}_{,\ \infty}(\mu)\leqslant h_{f_1\infty,}^{*Mis}$ (μ)。(d) 对于每个 $\varphi\in C(X)$

$$P_{Mis}(f_{1,\infty},\varphi)=\max_{\mu\in\mathcal{P}_{f_{1,\infty}}(X)}\left\{\mathfrak{h}_{f_{1,\infty}}^{Mis}(\mu)+\int\varphi\,d\mu\right\}=\max_{\mu\in\mathcal{P}_{f_{1,\infty}}(X)}\left\{h_{f_{1,\infty}}^{*Mis}(\mu)+\int\varphi\,d\mu\right\}.$$

注 2.9。 在群作用或半群作用的背景下，可以在 [3]中找到与定理 B 或定理 D 类似的结果。

3. Abstract variational principle

本节介绍 Bi´s 等人 [2], 的主要结果。作者运用凸分析的方法，在适当的巴拿赫空间上为任意压力函数构造了上半连续熵型映射，而且无需引入任何动力学。因此，这一策略具有足够的普适性，既可用于与单个动力系统相关的经典拓扑压力（如 [2] 中所做的那样），也可用于本文讨论的近期为非自治动力系统定义的拓扑压力和 Misiurewicz 压力。这样的抽象变分原理可用于通过概率测度空间或有限可加集合函数空间来建立变分原理。为了介绍 [2], 的主要结果，我们先引入基本概念和记号。

设 $(X,\ d)$ 是一个局部紧度量空间（距离为 d），$\mathfrak{B}$ 是其由博雷尔集构成的 σ-代数，$\mathcal{P}(X)$ 表示其上赋予弱*拓扑的博雷尔概率测度空间，$\mathcal{P}_a(X)$ 表示总

变差距离的博雷尔实值归一化有限可加集函数集合（我们将其简称为有限可加概率），而 $C(X)$ 表示连续映射 $\psi\colon X\to\mathbb{R}$ 构成的空间，并赋予上确界范数（其元素称为势函数）。

In 下文中，我们考虑一个定义在域 $\mathbb{R}$ 上的巴拿赫空间 $\mathbf{B}$，其中 $\mathbb{R}$ 等于

$$\begin{aligned} L^\infty(X) &= \{\varphi\colon X\to\mathbb{R}\mid \varphi \text{ is measurable and bounded}\} \\ \text{or}\quad C_c(X) &= \{\varphi\in C(X)\mid \varphi \text{ has compact support}\} \end{aligned} \tag{3.1}$$

并赋予范数 $\|\varphi\|_\infty=\sup_{x\in X}|\varphi(x)|$。黎斯表示定理指出，$C_c(X)$ 的对偶空间可与 $(X,\mathfrak{B})$ 上所有有限符号测度构成的集合等同，其中正归一化连续泛函对应于空间 $\mathcal{P}(X)$。众所周知，后者在弱* 拓扑下是紧的。另一方面，$L^\infty(X)$ 的对偶空间与 $(X,\mathfrak{B})$ 上配备全变差范数的正则有限可加有界符号测度空间等距同构，其中正归一化元素构成的子集由 $\mathcal{P}_a(X)$ 表示。

定义 3.2. 若函数 $\Gamma:\mathbf{B}\to\mathbb{R}$ 满足以下条件，则称其为压力函数：

(C_1) 单调递增：$\varphi\leqslant\psi\ \Rightarrow\ \Gamma(\varphi)\leqslant\Gamma(\psi)\,\forall\varphi,\ \psi\in\mathbf{B}$。$(\mathsf{C}_2)$ 平移不变：$\Gamma(\varphi+c)=\Gamma(\varphi)+c\ \ \forall\varphi\in\mathbf{B}\,\forall c\in\mathbb{R}$。$(\mathsf{C}_3)$ 凸：$\Gamma(t\varphi+(1-t)\psi)\leqslant t\Gamma(\varphi)+(1-t)\Gamma(\psi)\,\forall\varphi,\ \psi\in\mathbf{B}\,\forall t\in[0,1]$。

对于压力函数 $\Gamma:\mathbf{B}\to\mathbb{R}$，我们得到如下结果。

$$\Gamma(\psi)-\|\varphi-\psi\|_\infty=\Gamma(\psi-\|\varphi-\psi\|_\infty)\leqslant\Gamma(\varphi)\leqslant\Gamma(\psi+\|\varphi-\psi\|_\infty)=\Gamma(\psi)+\|\varphi-\psi\|_\infty,$$

$|\Gamma(\varphi)-\Gamma(\psi)|\leqslant\|\varphi-\psi\|_\infty$ 对每个 $\varphi,\ \psi\in\mathbf{B}$。以下是我们将在后文中使用的主要抽象变分原理，以及由凸分析得到的上半连续度量熵映射。

定理 3.3。 [2, 定理 1] 设 (X,d) 是一个度量空间，且 $\Gamma:\mathbf{B}\to\mathbb{R}$ 是一个压力函数。

(a)若 X 是局部紧的，且 $\mathbf{B}=C_c(X)$，则存在一个上半连续熵映射 $\mathfrak{h}$，使得

$$\Gamma(\varphi)=\max_{\mu\in\mathcal{P}(X)}\left\{\mathfrak{h}(\mu)+\int\varphi\,d\mu\right\}\qquad\forall\varphi\in C_c(X) \tag{3.4}$$

此外，

$$\mathfrak{h}(\mu)=\inf_{\varphi\in C_c(X)}\left\{\Gamma(\varphi)-\int\varphi\,d\mu\right\}\qquad\forall\mu\in\mathcal{P}(X)$$

且如果 $\alpha:\mathcal{P}_a(X)\to\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$ 是另一个满足 (3.4) 的函数，那么$\alpha\leqslant\mathfrak{h}$。此外，若 $\mathcal{E}_\varphi(\Gamma)$ 表示 (3.4) 中的极大化元素集合，则存在一个剩余子集 $\mathfrak{R}\subset C_c(X)$，使得对于每个 $\varphi\in\mathfrak{R}$，都有 $\#\mathcal{E}_\varphi(\Gamma)=1$。

(b) 若$\mathbf{B}=L^\infty(X)$，则

$$\Gamma(\varphi)=\max_{\mu\in\mathcal{P}_a(X)}\left\{\mathfrak{h}(\mu)+\int\varphi\,d\mu\right\}\qquad\forall\varphi\in L^\infty(X) \tag{3.5}$$

其中 $\mathfrak{h}(\mu) = \inf_{\varphi\in\mathbf{B}} \{\Gamma(\varphi) - \int \varphi\, d\mu\}$ 对每个 $\mu \in \mathcal{P}_a(X)$ 均成立。此外，映射 $\mathfrak{h}$ 是上半连续的，并且在所有其他于(3.5)中取到上确界的上半连续函数中最大。

4. Topological entropy and topological pressure of NADDS

4.1. 基本定义与性质。 本节介绍由序列 $f_{1,\infty} = \{f_n : X \to X\}_{n=1}^{\infty}$ 个紧致度量空间 (X, d) 上的连续映射所确定的非自治离散动力系统的拓扑熵和拓扑压力。 这一列自映射确定了一列度量

$$d_n(x, y) := max\{d(f_i \circ f_{i-1} \circ ... \circ f_1(x), f_i \circ f_{i-1} \circ ... \circ f_1(y)) : 1 \le i \le n-1\},$$

其中 $x, y \in X$. Following Kolyada and Snoha [13], 我们如下定义由 $f_{1,\infty}$ 确定的非自治离散动力系统的拓扑熵。取正整数 n 和 $\epsilon > 0$. 若对任意不同的点 $a_1, a_2 \in A$，我们称子集 $A \subset X$ 为 (n, ϵ)–分离集。

$$d_n(a_1, a_2) := max\{d(f_i \circ f_{i-1} \circ ... \circ f_1(a_1), f_i \circ f_{i-1} \circ ... \circ f_1(a_2) : 1 \le i \le n-1\} \ge \epsilon.$$

令 $s(n, \epsilon, f_{1,\infty}) := max\{card(A) : A\ is\ (n, \epsilon)\ -\ separated\ subset\ of\ X\}$.

定义 4.1。量

$$h_{top}(f_{1,\infty}) := \lim_{\epsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} log(s(n, \epsilon, f_{1,\infty}))$$

称为由 $f_{1,\ \infty}$. 确定的非自治离散动力系统的拓扑熵

非自治离散动力系统的拓扑压力，由 $f_{1,\ \infty}$，确定，关于势函数 $\varphi \in C(X)$ 定义如下

$$P_{top}(f_{1,\infty}, \varphi) := \lim_{\varepsilon\to 0^+} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P_n(f_{1,\infty}, \varphi, \varepsilon),$$

其中，对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\varepsilon > 0$

$$P_n(f_{1,\infty}, \varphi, \varepsilon) := \sup_E \Big\{ \sum_{x\in E} e^{S_n^{f_{1,\infty}}\varphi(x)} : E \text{ is } (n, \varepsilon) - \text{separated subset of } X \Big\}$$

and

$$S_n^{f_{1,\infty}}\varphi(x) := \varphi(x) + \varphi(f_1(x)) + \varphi(f_2 \circ f_1(x)) + \cdots + \varphi(f_{n-1} \circ f_{n-2} \circ ... \circ f_1(x)).$$

注意，对于势函数 $\varphi_0 \equiv 0$ ，有

$$P_{top}(f_{1,\infty}, \varphi_0) = h_{top}(f_{1,\infty}).$$

由压力的定义可知，对于任意 $\varphi \in C(X)$，有以下不等式

$$h_{top}(f_{1,\infty}) + \inf_{x\in X} \varphi(x) \le P_{top}(f_{1,\infty}, \varphi) \le h_{top}(f_{1,\infty}) + \sup_{x\in X} \varphi(x).$$

拓扑压力具有以下性质。

引理 4.2. $If\ \varphi \le \psi \Rightarrow P_{top}(f_{1,\infty}, \varphi) \le P_{top}(f_{1,\infty}, \psi)$, 对任意 $\varphi, \psi \in C(X)$。

证明。 设 $n \in \mathbb{N}$ 与 $x \in X$。若 $\varphi \leq \psi$，则

$$\begin{aligned} S_n^{f_{1,\infty}}\varphi(x) &= \varphi(x) + \varphi(f_1(x)) + \varphi(f_2 \circ f_1(x)) + \cdots + \varphi(f_{n-1} \circ f_{n-2} \circ ... \circ f_1(x)). \\ &\leq \psi(x) + \psi(f_1(x)) + \psi(f_2 \circ f_1(x)) + \cdots + \psi(f_{n-1} \circ f_{n-2} \circ ... \circ f_1(x)). \\ &= S_n^{f_{1,\infty}}\psi(x), \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} P_n(f_{1,\infty}, \varphi, \varepsilon) &= \sup_E \{ \sum_{x \in E} e^{S_n^{f_{1,\infty}}\varphi(x)} : E \text{ is } (n,\varepsilon) - \text{separated subset of } X\} \\ &\leq \sup_E \{ \sum_{x \in E} e^{S_n^{f_{1,\infty}}\psi(x)} : E \text{ is } (n,\varepsilon) - \text{separated subset of } X\} \\ &= P_n(f_\infty, \psi, \varepsilon). \end{aligned}$$

令 $n \to \infty$ 取上极限，并令 $\varepsilon \to 0^+$ 取极限，我们得到

$$P_{top}(f_{1,\infty}, \varphi) \leq P_{top}(f_{1,\infty}, \psi).$$

□

引理4.3。 $P_{top}(f_{1,\infty}, \varphi + c) = P_{top}(f_{1,\infty}, \varphi) + c$，对任意 $\phi \in C(X)$ 以及 $c \in \mathbb{R}$.

证明。 注意到

$$\begin{aligned} S_n^{f_{1,\infty}}(\varphi + c)(x) &= \varphi(x) + \varphi(f_1(x)) + \varphi(f_2 \circ f_1(x)) + \cdots + \varphi(f_{n-1} \circ f_{n-2} \circ ... \circ f_1(x)) + nc \\ &= S_n^{f_{1,\infty}}\varphi(x) + nc. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} P_n(f_{1,\infty}, \varphi + c, \varepsilon) &= \sup_E \{ \sum_{x \in E} e^{S_n^{f_{1,\infty}}(\varphi+c)(x)} : E \text{ is } (n,\varepsilon) - \text{separated subset of } X\} \\ &= e^{nc} \sup_E \{ \sum_{x \in E} e^{S_n^{f_{1,\infty}}\varphi(x)} : E \text{ is } (n,\varepsilon) - \text{separated subset of } X\} \\ &= e^{nc} P_n(f_{1,\infty}, \varphi, \varepsilon). \end{aligned}$$

对两边取对数，并对 $n \to \infty$ 取上极限、对 $\varepsilon \to 0^+$取极限，我们得到

$$P_{top}(f_{1,\infty}, \varphi + c) = P_{top}(f_{1,\infty}, \varphi) + c.$$

□

引理4.4。 $P_{top}(f_\infty, t\varphi + (1-t)\psi) \leq tP_{top}(f_\infty, \varphi) + (1-t)P_{top}(f_\infty, \psi)$ $\forall t \in [0,1]$ 且对任意$\varphi, \psi \in C(X)$。

证明。 取 $t \in [0,1]$，则

$$\begin{aligned} S_n^{f_{1,\infty}}(t\varphi + (1-t)\psi)(x) &= (t\varphi + (1-t)\psi)(x) + \cdots + (t\varphi + (1-t)\psi)(f_{n-1} \circ f_{n-2} \circ ... \circ f_1(x)) \\ &= tS_n^{f_{1,\infty}}\varphi(x) + (1-t)S_n^{f_{1,\infty}}\psi(x). \end{aligned}$$

由 Holder 不等式（取 $p=\frac{1}{t}$ 和 $q=\frac{1}{1-t}$）可得 —

$$\sum_{x\in E} e^{S_n^{f_{1,\infty}}(t\varphi+(1-t)\psi)(x)} \le (\sum_{x\in E} e^{S_n^{f_{1,\infty}}(\varphi(x))})^t \cdot (\sum_{x\in E} e^{S_n^{f_{1,\infty}}(\psi(x))})^{1-t},$$

其中， E 是 $X.$ 的（n， ε）− 分离子集。因此

$$P_n(f_{1,\infty}, t\varphi+(1-t)\psi, \varepsilon) \le P_n(f_\infty, \varphi, \varepsilon)^t \cdot P_n(f_\infty, \psi, \varepsilon)^{1-t}.$$

对两边取对数，并令 $n\to\infty$ 取上极限、 $\varepsilon\to 0^+$ 取极限，我们得到

$$P_{top}(f_{1,\infty}, t\varphi+(1-t)\psi) \le tP_{top}(f_{1,\infty},\varphi)+(1-t)P_{top}(f_{1,\infty},\psi).$$

□

因此我们得到以下性质。

推论4.5。 给定由$f_{1,\ \infty}=\{f_n:\ X\to X\}_{n=1}^{\infty}$ 确定的非自治离散动力系统，其中 h_{top}（$f_{1,\ \infty}$）$<+\infty$，则 P_{top}（$f_{1,\ \infty}$，$\cdot$）是一个压力函数。

4.2. **定理A的证明**。

证明。 由于 $P_{top}(f_{1,\infty},\cdot):\ C(X)\to\mathbb{R}$ 是一个压力函数，定理 3.3 的统一陈述为由 $f_{1,\infty}=\{f_n:\ X\to X\}_{n=1}^{\infty}$ 确定的非自治离散动力系统，以及关于 $\varphi\in C(X)$

. □的拓扑压力 $P_{top}(f_{1,\infty},\varphi)$, 给出了一个抽象变分原理

4.3. 推论1的证明。 对于压力函数 $\Gamma: C(X)\to\mathbb{R}$ 和势函数 $\phi\in C(X)$，我们称 $\mu\in P(X)$ 是 Γ 在 ϕ 处的一个切泛函，如果对于任意 $\psi\in C(X)$，不等式$\Gamma(\phi+\psi)-\Gamma(\phi)\ge\int\psi d\mu$ 成立。令 $\mathcal{T}_\phi(\Gamma)$ 为 Γ 在 ϕ 处的切泛函空间，并令

$$\mathcal{E}_\phi(\Gamma):=\{\mu\in P(X):\Gamma(\phi)=\mathfrak{h}(\mu)+\int\psi d\mu\}.$$

我们来回顾 Gateaux 微分（或 Gateaux 导数）的定义，它是微分学中方向导数概念的一种推广。设 F 是定义在巴拿赫空间 X 的开集 U 上、取值于巴拿赫空间 Y, ***Gateaux*微分** $dF(u;\psi)$ of F at $u\in U$ in the direction $\psi\in X$ is defined as

$$dF(u;\psi)=\lim_{t\to 0}\frac{F(u+t\cdot\psi)-F(u)}{t}.$$

如果 极限对所有 $\psi\in X$，都存在，则称 F 在 u.处Gateaux可微

现在我们可以给出推论1的证明。

证明。 固定一个有限拓扑熵 $h_{top}(f_{1,\infty})$ 的非自治离散动力系统 $f_{1,\infty}=\{f_n:\ X\to X\}_{n=1}^{\infty}$, 以及连续势函数 $\varphi\in C(X)$。 由定理A可知，对于压力函数 $P_{top}(f_{1,\infty},\cdot):\ C(X)\to\mathbb{R}$ 以及连续势函数 $\varphi\in C(X)$，存在一个测度 $\mu\in P(X)$，使得 $P_{\text{top}}(f_{1,\infty},\varphi)=\mathfrak{h}_{f_{1,\infty}}(\mu)+\int_X\varphi\,d\mu$. 接下来需要

证明该测度 μ 是唯一确定的。由于函数 $P_{top}(f_{1,\infty},\cdot):C(X)\to\mathbb{R}$是凸的，对于任意 $\phi,\psi\in C(X)$, 我们得到函数

$$t\to\frac{P_{top}(f_{1,\infty},\phi+t\cdot\psi)-P_{top}(f_{1,\infty},\phi)}{t}$$

单调递增，因此极限存在:

$$d^+P_{top}(f_{1,\infty},\phi)(\psi):=\lim_{t\searrow 0^+}\frac{P_{top}(f_{1,\infty},\phi+t\cdot\psi)-P_{top}(f_{1,\infty},\phi)}{t},$$

$$d^-P_{top}(f_{1,\infty},\phi)(\psi):=\lim_{t\nearrow 0^-}\frac{P_{top}(f_{1,\infty},\phi+t\cdot\psi)-P_{top}(f_{1,\infty},\phi)}{t},$$

因此，压力函数 $P_{top}(f_{1,\infty},\cdot)$ 在 ϕ 处 Gateaux 可微。

由 [2] 中的定理2可知，对于压力函数 $\Gamma(\cdot)=P_{top}(f_{1,\infty},\cdot)$，有等式 $\mathcal{E}_\phi(\Gamma)=\mathcal{T}_\phi(\Gamma)$，对任意 $\phi\in C(X)$。利用压力函数 $P_{top}(f_{1,\infty},\cdot)$ 的 Gateaux 可微性以及 [2] 中的推论4，可知对于 ϕ，在 $\mathcal{T}_\phi$ 中存在唯一的切泛函，证毕。□

分析推论1的证明可知，对于定义在紧致度量空间 (X,d) 上的非自治离散动力系统 $f_{1,\infty}=\{f_n:X\to X\}_{n=1}^{\infty}$，，抽象压力函数 $\Gamma_{f_{1,\infty}}:C(X)\to\mathbb{R}$，满足 $\Gamma_{f_{1,\infty}}(0)<\infty$，且势函数为 $\varphi\in C(X)$，存在唯一的测度 μ，定义在 X 上，使得 $\Gamma_{f_{1,\infty}}(\varphi)=\mathfrak{h}_{f_{1,\infty}}(\mu)+\int_X\varphi\,d\mu$ 当且仅当 $\Gamma_{f_{1,\infty}}:C(X)\to\mathbb{R}$ 在 $\varphi.$ 处 Gateaux 可微

一般而言，对于非自治动力系统 $f_{1,\infty}=\{f_n:X\to X\}_{n=1}^{\infty}$，对于任意 $n\in\mathbb{N}$，都不存在共同的 f_n–不变博雷尔概率测度（见例4.6）。

例4.6。考虑 $f_{1,\infty}=\{f_n:S^1\to S^1\}_{n=1}^{\infty}$. 假设 f_i，其中 $i=1,2$，是圆微分同胚，且每个映射都有两个不动点：一个源点 p_i 和一个汇点 q_i，它们将 S^1 分成两条弧 A_i 和 B_i，且每条弧都收缩至 q_i. 此外，我们假设 $\{p_1,q_1\}\cap\{p_2,q_2\}=\emptyset$. 根据 [21] 中的命题3.1.6，任何 f_i–不变的测度 μ 都必须支撑在集合 $\{p_i,q_i\}$. 上。因此 f_1 和 f_2 没有共同的不变测度，由此可得 $\mathcal{P}_{f_{1,\infty}}(X)=\emptyset.$

然而，非自治动力系统中存在许多特殊情形，使得不变测度存在（见例2.3和例2.4）。

4.4. 定理 B 的证明。定理 B 推广了针对单个动力系统在 [2]中确立的类似性质。定理 B 的结果将变分度量熵 $\mathfrak{h}_{f_{1,\infty}}$ 在$\mathcal{P}_{f_{1,\infty}}(X)$上的限制与非自治离散动力系统的星熵联系起来，后者定义为

$$\mu\in\mathcal{P}_{f_{1,\infty}}(X)\quad\mapsto\quad h^*_{f_{1,\infty}}(\mu):=\sup\Big\{\limsup_{n\to+\infty}h_{f_{1,\infty}}(\mu_n)\mid\mu_n\in\mathcal{P}_{f_{1,\infty}}(X)\text{ and }\lim_{n\to+\infty}\mu_n=\mu\Big\},$$

其中，$(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的收敛是在弱*-拓扑下发生的。现在我们可以给出一个

定理 B 的证明。

证明。设 $f_{1,\infty}=\{f_n:\ X\to X\}_{n=1}^{\infty}$ 是定义在紧致度量空间 $X,$ 上的非自治离散动力系统，并设 $P_{\text{top}}(f_{1,\ \infty},\ \cdot)$ 为拓扑压力函数。

(a) 由于 $P_{\text{top}}(f_{1,\ \infty},\ \cdot)$ 关于一个共同的 $f_{1,\ \infty}$-不变博雷尔概率测度 μ on X 满足变分原理 (2.5)，因此很容易得出，对于任意 $\varphi,\ \psi\in C(X)$ 和任意 f_n，我们有

$$P_{\text{top}}(f_{1,\infty},\,\varphi+\psi\circ f_n-\psi)\ =\ P_{\text{top}}(f_{1,\infty},\,\varphi)\ =\ P_{\text{top}}(f_{1,\infty},\varphi+\psi-\psi\circ f_n).\tag{4.7}$$

事实上，由变分原理可得

$$P_{\text{top}}(f_{1,\infty},\,\varphi+\psi\circ f_n-\psi)=\sup_{\mu\in\mathcal{P}_{f_{1,\infty}}(X)}\left\{h_{f_{1,\infty}}(\mu)+\int(\varphi+\psi\circ f_n-\psi)\,d\mu\right\}=$$

$$\sup_{\mu\in\mathcal{P}_{f_{1,\infty}}(X)}\left\{h_{f_{1,\infty}}(\mu)+\int\varphi\,d\mu\right\}=P_{\text{top}}(f_{1,\infty},\,\varphi),$$

其中，第二个等号源于测度 μ 是不变的这一假设；对于 (4.7) 中的第二个等号，理由类似。

现在我们声称，在 (2.1) 中取到最大值的每个概率测度都是 $f_{1,\ \infty}$-不变的。考虑 $\psi\in C(X),\ \ f_n:\ X\to X$，并固定由 (2.1) 给出的 $\mu_\varphi,\ \ \mu_1,\ \ \mu_2\in\mathcal{P}(X)$，使得

$$\begin{aligned}
P_{\text{top}}(f_{1,\infty},\varphi) &= \mathfrak{h}_{f_{1,\infty}}(\mu_\varphi)+\int\varphi\,d\mu_\varphi\\
P_{\text{top}}(f_{1,\infty},\varphi+\psi\circ f_n-\psi) &= \mathfrak{h}_{f_{1,\infty}}(\mu_1)+\int\varphi\,d\mu_1+\int(\psi\circ f_n)\,d\mu_1-\int\psi\,d\mu_1\\
P_{\text{top}}(f_{1,\infty},\varphi+\psi-\psi\circ f_n) &= \mathfrak{h}_{f_{1,\infty}}(\mu_2)+\int\varphi\,d\mu_2+\int\psi\,d\mu_2-\int(\psi\circ f_n)\,d\mu_2.
\end{aligned}$$

Th前两个等式、性质 (4.7) 和变分原理 (2.1) 现在给出 ld

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h}_{f_{1,\infty}}(\mu_\varphi)+\int\varphi\,d\mu_\varphi &= \mathfrak{h}_{f_{1,\infty}}(\mu_1)+\int\varphi\,d\mu_1+\int(\psi\circ f_n)\,d\mu_1-\int\psi\,d\mu_1\\
&\geqslant \mathfrak{h}_{f_{1,\infty}}(\mu_\varphi)+\int\varphi\,d\mu_\varphi+\int(\psi\circ f_n)\,d\mu_\varphi-\int\psi\,d\mu_\varphi
\end{aligned}$$

因此 $\int(\psi\circ f_n)\,d\mu_\varphi-\int\psi\,d\mu_\varphi\ \leqslant\ 0.$。以类似的方式，我们推导出

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h}_{f_{1,\infty}}(\mu_\varphi)+\int\varphi\,d\mu_\varphi &= \mathfrak{h}_{f_{1,\infty}}(\mu_2)+\int\varphi\,d\mu_2+\int\psi\,d\mu_2-\int(\psi\circ f_n)\,d\mu_2\\
&\geqslant \mathfrak{h}_{f_{1,\infty}}(\mu_\varphi)+\int\varphi\,d\mu_\varphi+\int\psi\,d\mu_\varphi-\int(\psi\circ f_n)\,d\mu_\varphi
\end{aligned}$$

因此 $\int\psi\,d\mu_\varphi-\int(\psi\circ f_n)\,d\mu_\varphi\ \leqslant\ 0.$。所以，对于任意 $n\in\mathbb{N}$，等式 $\int\psi\,d\mu_\varphi=\int(\psi\circ f_n)\ d\mu_\varphi$ 成立，这意味着测度 μ_φ 是不变的。对于任意 $n\in\mathbb{N}.$，因此，μ_φ 是 $f_{1,\infty}$-不变的。

(b) 这一断言的证明与 [22, 第 222] 页中关于单个动力系统的证明类似。事实上，由于假设 $h_{\text{top}}(f_{1,\ \infty})<+\infty$ 成立，并且拓扑压力满足以非负度量熵映射 $h_{f_{1,\ \infty}}$ 为基础的变分原理，我们可以得出以下结论。我们声称，对于给定的 $\mu\in\mathcal{P}(X)$,

$$\mu\in\mathcal{P}_{f_{1,\infty}}(X)\quad\Leftrightarrow\quad\int\varphi\,d\mu\ \leqslant\ P_{\text{top}}(f_{1,\infty},\varphi)\quad\forall\,\varphi\in C(X).$$

事实上，对于 $\mu \in \mathcal{P}_{f_{1,\infty}}(X)$，变分原理表明，对于任意 $\varphi \in C(X)$。，不等式 $\int \varphi\, d\mu \leqslant P_{\text{top}}(f_{1,\infty}, \varphi)$ 成立。

现在假设 μ 是一个有限符号测度，使得对任意 $\varphi \in C(X)$，我们有 $\int \varphi\, d\mu \leqslant P_{\text{top}}(f_{1,\infty}, \varphi)$. 第一步我们证明 μ 只取非负值。为此，假设 $\varphi \geq 0, \epsilon > 0$ 且 $n \in \mathbb{N}$. 则

$$\int n\cdot(\varphi+\epsilon)d\mu = -\int -n\cdot(\varphi+\epsilon)d\mu \geq -P_{\text{top}}(f_{1,\infty}, -n\cdot(\varphi+\epsilon)) \geq -[h_{top}(f_{1,\infty})+\sup_{x\in X}(-n\cdot(\varphi+\epsilon))] =$$

$$-h_{top}(f_{1,\infty}) + n\cdot \inf_{x\in X}(\varphi+\epsilon) > 0 \quad \text{for large n.}$$

因此 $\int (\varphi+\epsilon)d\mu > 0$. 由于 ϵ 任意小，我们得到 $\int \varphi d\mu \geq 0$，且 μ 是一个测度 e.

下一步我们证明 μ 是一个概率测度。取 $n \in \mathbb{Z}$, 则

$$\int n d\mu \leq P_{\text{top}}(f_{1,\infty}, n) = h_{top}(f_{1,\infty}) + n.$$

于是对 $n \in \mathbb{N}$，我们得到 $\mu(X) = \int 1 d\mu \leq 1 + {}^{h_{top}(f_{1,\infty})\ n}$ 从而 $\mu(X) \leq 1$. 另一方面，对负的 n，我们得到 $\mu(X) = \int 1 d\mu \geq 1 + {}^{h_{top}(f_{1,\infty})\ n}$ 由此得到 $\mu(X) \geq 1$. 因此我们证明了 $\mu(X) = 1$.

接下来我们证明 $\mu \in \mathcal{P}_{f_{1,\infty}}(X)$。对于任意 $m \in \mathbb{Z}$，任意的 $\varphi \in C(X)$ 以及固定的$n \in \mathbb{N}$，由 (4.7) 可得

$$m\int (\varphi \circ f_n - \varphi)d\mu \leq P_{\text{top}}(f_{1,\infty}, m\cdot(\varphi\circ f_n - \varphi)) = P_{\text{top}}(f_{1,\infty}, 0) = h_{top}(f_{1,\infty}).$$

若 $m > 1$，则两边除以 m 并令 m趋于 ∞，可得 $\int(\varphi\circ f_n - \varphi)d\mu \leq 0$. 若 $m < -1$，则两边除以 m 并令 m趋于 $-\infty$，可得 $\int(\varphi\circ f_n - \varphi)d\mu \geq 0$. 因此，对于任意势函数$\varphi \in C(X)$ 以及任意的 $n \in \mathbb{N}$，有 $\int \varphi\circ f_n d\mu = \int \varphi d\mu$，故 $\mu \in \mathcal{P}_{f_{1,\infty}}(X)$。断言得证。

因此，由公式 (2.2) 可得

$$\mu \in \mathcal{P}_{f_{1,\infty}}(X) \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{h}_{f_{1,\infty}}(\mu) \geqslant 0.$$

因此我们证明了 映射 $\mathfrak{h}_{f_{1,\infty}}$ 的取值决定了集合 $\mathcal{P}_{f_{1,\infty}}(X)$ 的元素 .

（c）根据定义，对于每个 $\mu \in \mathcal{P}_{f_{1,\infty}}(X)$，都有 $0 \leq h_{f_{1,\infty}}(\mu) \leqslant h^*_{f_{1,\infty}}(\mu)$。此外，根据变分原理 (2.5)，对于每个 $\mu \in \mathcal{P}_{f_{1,\infty}}(X)$

$$h_{f_{1,\infty}}(\mu) \leqslant P_{\text{top}}(f_{1,\infty}, \varphi) - \int \varphi\, d\mu \qquad \forall \varphi \in C(X)$$

因此

$$\mathfrak{h}_{f_{1,\infty}}(\mu) = \inf_{\varphi\in C(X)} \left\{ P_{\text{top}}(f_{1,\infty}, \varphi) - \int \varphi\, d\mu \right\} \geqslant h_{f_{1,\infty}}(\mu). \tag{4.8}$$

因此，如果$h^*_{f_{1,\infty}}(\mu) > \mathfrak{h}_{f_{1,\infty}}(\mu)$ 对某个 $\mu \in \mathcal{P}_{f_{1,\infty}}(X)$ 成立，那么将存在 $\nu \in \mathcal{P}_{f_{1,\infty}}(X)$ 满足 $h_{f_{1,\infty}}(\nu) > \mathfrak{h}_{f_{1,\infty}}(\nu)$，这与（4.8）矛盾。由此证明

$$0 \leqslant h_{f_{1,\infty}}(\mu) \leqslant h^*_{f_{1,\infty}}(\mu) \leqslant \mathfrak{h}_{f_{1,\infty}}(\mu) \qquad \forall \mu \in \mathcal{P}_{f_{1,\infty}}(X). \tag{4.9}$$

（d）现在注意到，不等式（4.9）意味着

$$\begin{aligned}\sup_{\mu\in\mathcal{P}_{f_{1,\infty}}(X)}\left\{h_{f_{1,\infty}}(\mu)+\int\varphi\,d\mu\right\} &\leqslant \max_{\mu\in\mathcal{P}_{f_{1,\infty}}(X)}\left\{h^*_{f_{1,\infty}}(\mu)+\int\varphi\,d\mu\right\}\\ &\leqslant \max_{\mu\in\mathcal{P}_{f_{1,\infty}}(X)}\left\{\mathfrak{h}_{f_{1,\infty}}(\mu)+\int\varphi\,d\mu\right\}.\end{aligned}$$

另一方面，由于$\mathcal{P}_{f_{1,\infty}}(X)\subset\mathcal{P}(X)$且$\mathfrak{h}_{f_{1,\infty}}$是上半连续的，对每个$\varphi\in C(X)$，我们有

$$\max_{\mu\in\mathcal{P}_{f_{1,\infty}}(X)}\left\{\mathfrak{h}_{f_{1,\infty}}(\mu)+\int\varphi\,d\mu\right\}\leqslant\max_{\mu\in\mathcal{P}(X)}\left\{\mathfrak{h}_{f_{1,\infty}}(\mu)+\int\varphi\,d\mu\right\}.$$

因此，由变分原理(2.1)和(2.5)，我们得到

$$\begin{aligned}\max_{\mu\in\mathcal{P}_{f_{1,\infty}}(X)}\left\{\mathfrak{h}_{f_{1,\infty}}(\mu)+\int\varphi\,d\mu\right\} &\leqslant \max_{\mu\in\mathcal{P}(X)}\left\{\mathfrak{h}_{f_{1,\infty}}(\mu)+\int\varphi\,d\mu\right\}\\ &= P_{\mathrm{top}}(f_{1,\infty},\varphi)\\ &= \sup_{\mu\in\mathcal{P}_{f_{1,\infty}}(X)}\left\{h_{f_{1,\infty}}(\mu)+\int\varphi\,d\mu\right\}\\ &\leqslant \max_{\mu\in\mathcal{P}_{f_{1,\infty}}(X)}\left\{h^*_{f_{1,\infty}}(\mu)+\int\varphi\,d\mu\right\}\\ &\leqslant \max_{\mu\in\mathcal{P}_{f_{1,\infty}}(X)}\left\{\mathfrak{h}_{f_{1,\infty}}(\mu)+\int\varphi\,d\mu\right\}.\end{aligned}$$

从而，

$$P_{\mathrm{top}}(f_{1,\infty},\varphi)=\max_{\mu\in\mathcal{P}_{f_{1,\infty}}(X)}\left\{\mathfrak{h}_{f_{1,\infty}}(\mu)+\int\varphi\,d\mu\right\}=\max_{\mu\in\mathcal{P}_{f_{1,\infty}}(X)}\left\{h^*_{f_{1,\infty}}(\mu)+\int\varphi\,d\mu\right\}.$$

证明完毕。 □

5. Misiurewicz entropy and Misiurewicz pressure for NADDS

5.1. 基本定义。1976 年，Misiurewicz [17] 为紧空间上的 $\mathbb{Z}_+^n$ 作用定义了拓扑压力和测度论熵。他著名的结果表明，紧空间上的 $\mathbb{Z}_+^n$ 作用满足变分原理。我们对 $f_{1,\infty}$ 的 Misiurewicz 压力的定义，受到他为 $\mathbb{Z}_+^n$ 作用 [17]定义拓扑压力的启发。

本节考虑定义在紧空间X. 上的非自治离散动力系统 $f_{1,\infty}:=\{f_n:X\to X\}_{n\in\mathbb{N}}$。令 $\mathcal{W}$为对角线 $\{(x,x)$ 的所有邻域组成的集合，并以包含关系 $x\in X\}\subset X\times X$ 定向。已知（ [13]），这是 X.的一致结构。

对于任意 $n\in\mathbb{N}$、邻域 $\delta\in\mathcal{W}$、势函数 $\phi\in C(X)$ 以及任意有限子集 $E\subset X$，我们定义：

$$\delta_n:=\bigcap_{i=1}^{n}(f_i\circ\ldots\circ f_1\times f_i\circ\ldots\circ f_1)^{-1}\delta,$$

$$\phi_n(x):=\sum_{i=1}^{n}\phi\circ f_i\circ\ldots\circ f_1(x),$$

$$p(\phi_n, E) := \log \sum_{x\in E} exp[\sum_{i=1}^{n} \phi(f_i \circ ... \circ f_1(x))].$$

显然， $\delta_n \in \mathcal{W}$ 和 $\phi_n \in C(X)$。有限集 $E \subset X$ 称为:

1) $(n,\delta)_M-$分离，如果对任意不同的点 $x, y \in E$，我们有$(x, y) \notin \delta_n$,

2) $(n,\delta)_M-$生成，如果对任意 $x \in X$ 存在 $y \in E$ 使得$(x, y) \in \delta$ $_n$.

Let

$$P_{n,\delta}(f_{1,\infty}, \phi) := \sup\{p(\phi_n, E) : \ E \subset X \ and \ E \ is \ (n,\delta)_M - separated\},$$

$$P_\delta(f_{1,\infty}, \phi) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} P_{n,\delta}(f_{1,\infty}, \phi).$$

定义5.1. 量 $P_{Mis}(f_{1,\infty}, \phi) := \sup_{\delta\in\mathcal{W}} P_\delta(f_{1,\infty}, \phi)$称为$f_{1,\infty} = \{f_n : X \to X\}_{n\in\mathbb{N}}$, 关于势函数 $\varphi \in C(X)$的*Misiurewicz* 压力。取势函数 $\varphi_0 \equiv 0$ ，我们可以将$f_{1,\infty}$ 的Misiurewicz 熵定义为

$$h_{Mis}(f_{1,\infty}) := P_{Mis}(f_{1,\infty}, \varphi_0).$$

5.2. **压力函数**。

命题5.2. 映射 $\varphi \longmapsto P_{Mis}(f_{1,\infty}, \varphi)$是一个压力函数。

证明。 证明基于以下三个引理。 □

引理 5.3. 若 $\varphi, \psi \in C(X)$ 且 $\varphi \le \psi$，则 $P_{Mis}(f_{1,\infty}, \varphi) \le P_{Mis}(f_{1,\infty}, \psi)$。

证明。 取一个邻域 $\delta \in \mathcal{W}$以及一个 $(n,\delta)_M$-分离集 $E.$。于是，对于 $x \in E$ 和势函数 $\varphi, \psi \in C(X)$，若 $\varphi \le \psi$，则得到以下不等式

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi[f_i \circ ... \circ f_1(x)] \le \sum_{i=1}^{n} \psi[f_i \circ ... \circ f_1(x)],$$

$$\sum_{x\in E} \exp \sum_{i=1}^{n} \varphi[f_i \circ ... \circ f_1(x)] \le \sum_{x\in E} \exp \sum_{i=1}^{n} \psi[f_i \circ ... \circ f_1(x)],$$

$$\log \sum_{x\in E} \exp \sum_{i=1}^{n} \varphi[f_i \circ ... \circ f_1(x)] \le \log \sum_{x\in E} \exp \sum_{i=1}^{n} \psi[f_i \circ ... \circ f_1(x)],$$

$$\sup_E\{\log \sum_{x\in E} \exp \sum_{i=1}^{n} \varphi[f_i \circ ... \circ f_1(x)]\} \le \sup_E\{\log \sum_{x\in E} \exp \sum_{i=1}^{n} \psi[f_i \circ ... \circ f_1(x)]\}.$$

换言之，我们得到了不等式 $P_{n,\delta}(f_{1,\infty}, \varphi) \le P_{n,\delta}(f_{1,\infty}, \psi)$，由此可得

$$P_\delta(f_{1,\infty}, \varphi) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} P_{n,\delta}(f_{1,\infty}, \varphi) \le \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} P_\delta(f_{1,\infty}, \psi) = P_\delta(f_{1,\infty}, \psi).$$

对不等式两边关于 $\delta \in \mathcal{W}$ 取上确界，得到

$$P_{Mis}(f_{1,\infty}, \varphi) = \sup_{\delta\in\mathcal{W}} P_\delta(f_{1,\infty}, \varphi) \le \sup_{\delta\in\mathcal{W}} P_\delta(f_{1,\infty}, \psi) = P_{Mis}(f_{1,\infty}, \psi).$$

引理的证明完毕。

□

引理 5.4. 对于任意 $\varphi \in C(X)$ 和 $c \in \mathbb{R}$，以下等式成立

$$P_{Mis}(f_{1,\infty}, \varphi + c) = P_{Mis}(f_{1,\infty}, \varphi) + c.$$

证明。固定一个势函数 $\varphi \in C(X)$。对于一个邻域 $\delta \in \mathcal{W}$，一个 $(n,\delta)_M$-分离集 E，并且$c \in \mathbb{R}$ 我们得到

$$\log \sum_{x\in E} \exp \sum_{i=1}^{n} (\varphi + c)[f_i \circ ... \circ f_1(x)] = \log \sum_{x\in E} \exp\{n \cdot c + \sum_{i=1}^{n} \varphi[f_i \circ ... \circ f_1(x)]\} =$$

$$\log \sum_{x\in E} \exp\{n \cdot c\} \cdot \exp\{\sum_{i=1}^{n} \varphi[f_i \circ ... \circ f_1(x)]\} = n \cdot c + \log \sum_{x\in E} \exp\{\sum_{i=1}^{n} \varphi[f_i \circ ... \circ f_1(x)]\},$$

因此

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{x\in E} \exp \sum_{i=1}^{n} (\varphi + c)[f_i \circ ... \circ f_1(x)] = c + \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{x\in E} \exp \sum_{i=1}^{n} \varphi[f_i \circ ... \circ f_1(x)]$$

对上述等式两边关于 $\delta \in \mathcal{W}$ 取上确界，得到

$$P_{Mis}(f_{1,\infty}, \varphi + c) = P_{Mis}(f_{1,\infty}, \varphi) + c.$$

□

引理 5.5。对于任意 φ，$\psi \in C(X)$ 和 $a \in [0,1]$，有

$$P_{Mis}(f_{1,\infty}, a\varphi + (1-a)\psi) \le a \cdot P_{Mis}(f_{1,\infty}, \varphi) + (1-a) \cdot P_{Mis}(f_{1,\infty}, \psi).$$

证明。设 φ，$\psi \in C(X)$ 和 $a \in [0,1].$。对于一个邻域 $\delta \in \mathcal{W}$，一个 $(n,\delta)_M$-分离集$A \subset X$，分别得到

$$\sum_{i=1}^{n} (a \cdot \varphi + (1-a) \cdot \psi)[f_i \circ ... \circ f_1(x)] = a \cdot \sum_{i=1}^{n} \varphi[f_i \circ ... \circ f_1(x)] + (1-a) \sum_{i=1}^{n} \psi[f_i \circ ... \circ f_1(x)],$$

$$\sum_{x\in A} e^{\sum_{i=1}^{n} (a\cdot\varphi+(1-a)\cdot\psi)[f_i\circ...\circ f_1(x)]} = \sum_{x\in A} e^{a\cdot\sum_{i=1}^{n}\varphi[f_i\circ...\circ f_1(x)]+(1-a)\sum_{i=1}^{n}\psi[f_i\circ...\circ f_1(x)]} \le$$

$$\{\sum_{x\in A} e^{\sum_{i=1}^{n}(\varphi[f_i\circ...\circ f_1(x)]}\}^a \cdot \{\sum_{x\in A} e^{\sum_{i=1}^{n}(\psi[f_i\circ...\circ f_1(x)]}\}^{1-a},$$

其中，最后一个不等式是由 Holder 不等式得出的。因此

$$\log \sum_{x\in A} e^{\sum_{i=1}^{n} (a\cdot\varphi+(1-a)\cdot\psi)[f_i\circ...\circ f_1(x)]} \le a \log \sum_{x\in A} e^{\sum_{i=1}^{n}(\varphi[f_i\circ...\circ f_1(x)]} + (1-a) \log \sum_{x\in A} e^{\sum_{i=1}^{n}(\varphi[f_i\circ...\circ f_1(x)]}.$$

对两边在满足（n,δ）$_M$−分离的集合 A 上取上确界，并应用 $P_{n,\delta}(f_{1,\infty}, \phi)$ 的定义，我们得到

$$P_{n,\delta}(f_{1,\infty}, a \cdot \varphi + (1-a) \cdot \psi) \le a \cdot P_{n,\delta}(f_{1,\infty}, \varphi) + (1-a) \cdot P_{n,\delta}(f_{1,\infty}, \psi),$$

上极限 $\overline{n\to\infty}\ \frac{1}{n} P_{n,\delta}(f_{1,\infty}, a\cdot\varphi+(1-a)\cdot\psi) \le a$ 上极限 $\underline{n\to\infty}\ \frac{1}{n} \cdot P_{n,\delta}(f_{1,\infty}, \varphi)+(1-a)$ 上极限 $\underline{n\to\infty}\ \cdot \frac{1}{n} P_{n,\delta}(f_{1,\infty}, \psi)$.由此我们得到了这些不等式

$$P_{\delta}(f_{1,\infty}, a \cdot \varphi + (1-a) \cdot \psi) \le a \cdot P_{\delta}(f_{1,\infty}, \varphi) + (1-a) \cdot P_{\delta}(f_{1,\infty}, \psi),$$

$$\sup_{\delta\in\mathcal{W}} P_\delta(f_{1,\infty}, a\cdot\varphi+(1-a)\cdot\psi) \le a\cdot \text{上确界}_{\delta\in\mathcal{W}} P_\delta(f_{1,\infty}, \varphi) + (1-a)\cdot \text{上确界}_{\delta\in\mathcal{W}} P_\delta(f_{1,\infty}, \psi)。$$

引理的证明完成。 □

5.3. **定理 C 的证明**。

证明。 由于 $P_{Mis}(f_{1,\infty}, \cdot): C(X) \to \mathbb{R}$ 是一个压力函数，定理 3.3 的统一陈述为由 $f_{1,\infty} = \{f_n$ 确定的非自治离散动力系统提供了一个抽象变分原理： $X \to X\}_{n=1}^{\infty}$ 以及相对于 $\varphi \in C(X)$. □的 Misiurewicz 压力 $P_{Mis}(f_{1,\infty}, \varphi)$

5.4. **推论 2 的证明**。

证明。 推论 2 的证明与推论1的证明非常相似。 □

5.5. **定理 D 的证明**。

证明。 定理 D 的证明与定理 B 的证明非常相似。我们把这一证明留给读者作为一个简单的练习。□

致谢。作者感谢匿名审稿人非常仔细地阅读了稿件，提出了中肯的评论和宝贵的建议，这些意见帮助改进了稿件。

References

[1] R. L. Adler、A. G. Konheim 和 M. H. McAndrew, *Topological entropy.* Trans. Amer. Math. Soc. 114 (1965), 309-319.[2] A. Bi

´ *A Convex Analysis Approach to Entropy Functions Variational* s、M. *Principles and Equilibrium States.* 394 2022 1, 215 256 Carvalho、M. Miguel、P. Varandas, , Comm. Math. Phys. ( ), 第 - 期。[3] A. Bi´s、M. Carvalho、M. Miguel、P. Varandas, *Entropy function for semigroup actions.* Studia Mathematica 285 (2025), 257-288。[4] A. Bi´s, *Topological and Measure-Theoretical Entropies of Nonautonomous Dynamical Systems.* J. Dyn. Differ. Equ. 30 (2018), 273-285。[5] N. N. Bogoliubov 和 N. M. Krylov, *La theorie generale de la mesure dans son application a l' etude de systemes dynamiques de la mecanique non-lineaire* 38 1 。《数学年刊》第二辑（法文）（）（1937），65-113。[6] R. Bowen, *Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces.* Trans. Amer. Math. Soc. 153 (1971), 40-414.[7] R. Bowen, *Topological entropy for noncompact sets.* Trans. Amer. Math. Soc. 184 (1973), 125-136。[8] M. Brin、A. Katok, *On local entropy.* 载于：Palis, J.（编），《几何动力学》。数学讲义丛书，第1007卷。Springer，柏林、海德堡，2006年，第30-38页。[9] E. I. Dinaburg, *A connection between various entropy characterizations of dynamical systems. (Russian).* Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 35 (1971), 324-366.[10] D. Feng 和 W. Huang, *Variational principles for topological entropies of subsets.* Journal of Functional Analysis 263 (2012), 2228-2254.[11] X. Huang、X. Wen 和 F. Zeng, *Topological pressure of nonautonomous dynamical systems.* Nonlinear Dyn. Syst. Theory 8 (2008), 43-48.[12] Ch. Kawan, *Metric Entropy of Nonautonomous Dynamical Systems.* Nonautonomous and Stochastic Dy- namical Systems 1 (2014), 26-52.[13] John L. Kelley, *General Topology.* Van Nostrand，普林斯顿，1955年。[14] S. Kolyada、M. Misiurewicz、L. Snoha, *Topological entropy of nonautonomous piecewise monotone dynamical systems on the inteval.* 160, 1990 161 181 Fund. Math.（），-。

[15] S. Kolyada、L. Snoha, *Topological entropy of nonautonomous dynamical systems.* Random Comput. Dynam. 4, (1996), 205-233。[16] M. Kong、W. Cheng、B. Li, *Topological pressures for nonautonomous systems.* Chaos, Solitons and Fractals 76 (2015) 82-92。[17] M. Misiurewicz,
A short proof of the variational principle for a $\mathbb{Z}_+^n$ action on a compact space. 数学物理动力系统国际会议（雷恩, 1975年），第147-157页，Asterisque，第40期，法国数学会，巴黎，1976年。[18] C. Mouron,
Positive entropy on nonautonomous interval maps and the topology of the inverse limit space. Topology Appl. 154 (2007), 894-907.[19] Ya. Pesin 和 B. Pitskel,
Topological pressure and the variational principle for noncompact sets. Funct. Anal. Appl. 18:4 (1984), 307-318.[20] Ya. Pesin, *Dimension Theory in Dimensional: Contemporary Views and Applications Systems.* 芝加哥大学出版社，1997年。[21] P. Walczak, *Dynamics of Foliations, Groups and Pseudogroups.* Birkhauser Verlag，2004年。[22] P. Walters, *An Introduction to Ergodic Theory.* Springer-Verlag，纽约, 1975年。[23] L. Xu 和 X. Zhou, *Variational principles for entropies of nonautonomous dynamical systems.* J. Dynam. Differential Equations 30:3 (2018), 1053–1062。

Faculty of Mathematics and Computer Science, Łódź University, Łódź, Poland
Email address: andrzej.bis@wmii.uni.lodz.pl