arXiv:2603.07807v1 [math.GT] 8 Mar 2026

三股双曲图辫群的流形模型

SAUMYA JAIN，HUONG VO

摘要。给定一个有限图 Γ，其关联的图辫群 $B_n(\Gamma)$ 是该图的无序 n 点配置空间的基本群。Genevois 对哪些图辫群是 Gromov 双曲群进行了分类，并提出了这样一个问题：这些群何时会成为 3-流形群？本文针对 $B_3(\Theta_m)$ 给出了部分答案，其中 Θ_m 是 m点的悬挂广义 Θ图。我们证明，当 $m \geqslant 7$ 时， $B_3(\Theta_5)$ 是一个 3-流形群，而 $B_3(\Theta_m)$ 甚至与一个 3-流形群不拟等距。

1. 引言

Ghrist [Ghr01] 和 Abrams[Abr00] 推广了图上点的配置空间，将其作为机器人在图上无碰撞运动的模型。假设 n 个不可区分的机器人在有限图 Γ 上移动，它们连续的无碰撞运动可由拓扑构型空间 $\mathrm{Conf}_n^{\mathrm{top}}(\Gamma)$ 描述，其定义如下：

$$\mathrm{Conf}_n^{\mathrm{top}}(\Gamma) \coloneqq (\Gamma^n - \Delta)/S_n,$$

其中 $\Delta = \{(x_1, x_2, \dots x_n) \in \Gamma^n \mid x_i = x_j$对某个 $i \neq j\}$ 而言是两两对角线，而 S_n 是作用于 n 个字母上的对称群。

这些商空间是无球的，也就是说，对于所有 $k > 1$， $\pi_k(\mathrm{Conf}_n^{\mathrm{top}}(\Gamma)) = 0$ ，因此其同伦类型由其基本群 [Abr00, Corollary 3.6] 决定。群 $\pi_1(\mathrm{Conf}_n^{\mathrm{top}}(\Gamma))$ 称为图辫群，记作 $B_n(\Gamma)$。

空间 $\mathrm{Conf}_n^{\mathrm{top}}(\Gamma)$ 变形收缩到一个更易处理的 CW 复形 [Świ01][Abr00]。粗略地说，这可以通过设想机器人沿着一条边，从一个顶点离散地移动到另一个顶点来实现。形式上，我们将组合构形空间定义为 $\mathrm{Conf}_n(\Gamma)$，记作

$$\mathrm{Conf}_n(\Gamma) \coloneqq (\Gamma^n - \Delta^{\square})/S_n,$$

其中 $\Delta^{\square} = \{(e_1, e_2, \dots, e_n) \mid e_i$是 Γ中的边， $e_i \cap e_j \neq \varnothing$ 对某个 $i \neq j\}$ 而言是“加厚的”两两对角线。例如，对于三叉图 Y，$\mathrm{Conf}_2(Y)$ 是一个六边形的边界（见图 1）。

空间 $\mathrm{Conf}_n(\Gamma)$ 自然具有如下所述的立方复形结构。$\mathrm{Conf}_n(\Gamma)$ 中的每个顶点都描述了 n 个不可区分的机器人分布在 n 个不同顶点上的一种构形。若可以通过让一个机器人无碰撞地沿一条边移动，从一个相关构形到达另一个构形，则 $\mathrm{Conf}_n(\Gamma)$ 中的两个顶点之间有一条边。当 k 次此类移动能够同时进行时，就对应一个k维立方体。赋予自然的分片欧几里得度量后，根据 Gromov 判据 [Świ01, 命题 2.3， $_n(\Gamma)$是局部 CAT(0) 的，因为复形中所有顶点的链环都是旗复形。特别地，立方复形 $\mathrm{Conf}_n(\Gamma)$是图辫群的分类空间。

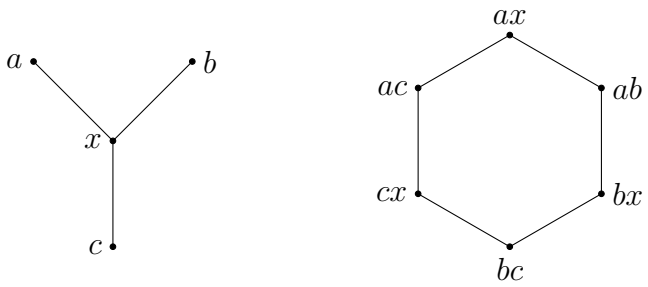


图 1. 三叉树 Y（3 个点的锥）和 $\mathrm{Conf}_2(Y)$。

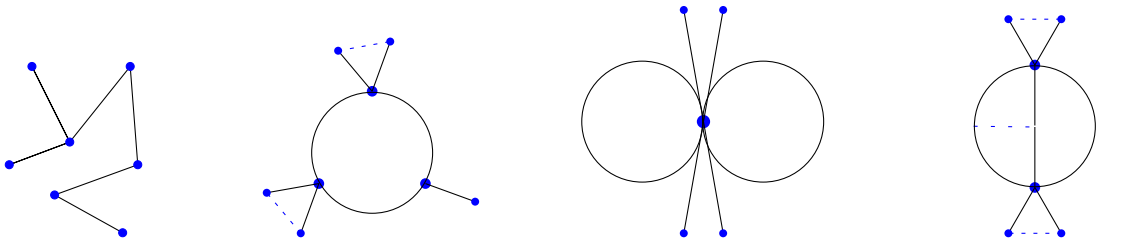


图 2. 满足 $B_3(\Gamma)$为双曲的图族 Γ 。

拓扑构型空间 $\mathrm{Conf}_n^{\mathrm{top}}(\Gamma)$ 只取决于空间Γ的拓扑；然而，它的组合对应物 $\mathrm{Conf}_n(\Gamma)$还取决于 Γ 的 CW 结构。Prue 和 Scrimshaw 证明，经过充分细分（称为容许的细分） Γ 后，组合版本与拓扑版本同伦等价 [PS14, 定理 3.2]。因此，研究图辫群时，我们可以将注意力限制在 $\mathrm{Conf}_n(\Gamma)$ 上。

Genevois 最近从几何群论的视角开始研究图辫群。具体而言，他分类了哪些具有三股或更多股的图辫群是 Gromov 双曲的 [Gen21, 定理 4.1]。如果 $n \geqslant 4$，那么$B_n(\Gamma)$ 的双曲性极为罕见，正如 Genevois 所示， Γ 必须是所谓的玫瑰图，这意味着 $B_n(\Gamma)$ 是自由的 [Gen21, 引理 4.6]。

在三股情形中，他证明有四类图——树、太阳图、玫瑰图和脉冲星图，如图 2 所示——对应双曲的 $B_3(\Gamma)$。此外，他提出了：

问题 1. 双曲图辫群在什么情况下是 3-流形的基本群?

同样，在大多数情况下，图辫群都是自由群。具体而言，当 Γ 是树图、太阳图或玫瑰图时，根据 Farley 和 Sabalka [FS05, 定理 2.5 和定理 4、Appiah 等人 [ADG$^+$25, 定理 1, 以及 Genevois [Gen21, 引理 4 的结果， $B_3(\Gamma)$ 分别是自由群。对于脉冲星图 $B_3(\Gamma) \cong B_3(\Theta_m) * \mathbb{F}$，其中 $\mathbb{F}$ 是有限秩自由群，且 Θ_m 是由 m 个点构成的悬挂 [ADG$^+$25, 定理 14]。因此，我们将研究 3 股图辫群 $B_3(\Theta_m)$ 何时是 3-流形群。

首先，这方面的障碍是 $\mathrm{Conf}_3(\Theta_m)$ 的欧拉示性数。通过简单计算可得，$\chi(\mathrm{Conf}_3(\Theta_m))$ 是 $\frac{m(m-2)(m-7)}{6}$。我们注意到，当~~$m>7$~~时，$\chi(\mathrm{Conf}_3(\Theta_m))>0$。这意味着，对于任意 $m>7$，$B_3(\Theta_m)$ 都不是某个 3-流形的基本群（更多细节参见推论 3.7 后的注）。对于 $m\leqslant 4$，它们是曲面群。特别地，$B_3(\Theta_4)$ 是闭连通可定向三属曲面 Σ_3 [CL18] [WG19] 的基本群。

本文对 Genevois 关于 $m=5$ 的问题给出了肯定回答，对 $m=7$的问题给出了否定回答。

定理1.1。 配置空间 $\mathrm{Conf}_3(\Theta_5)$ 可加厚为一个可定向3-流形。因此，$B_3(\Theta_5)$ 是一个3-流形群。

为证明这一点，我们首先对 $\mathrm{Conf}_3(\Theta_5)$进行细分，得到一个顶点链环均为平面的有限二维复形。并非所有这类复形都能加厚为3-流形。例如，Baumslag-Solitar子群 $BS(1,\ 2)$的表示复形，其顶点链环是三个点的悬挂，无法进行这种加厚，因为对于 $m\neq n$，任何 $BS(m,\ n)$ 都不是3-流形群 [Hei75，命题 2]。我们使用 Lasheras 的一个定理 [Las00，定理1.1]，该定理指出，当且仅当某个余循环平凡时，才能加厚为3-流形。（粗略而言，这个余循环衡量复形中无法“解开”的“扭转”，因此构成了将复形加厚为3-流形的障碍。）我们构造了一个嵌入族，将复形嵌入 $\mathbb{R}^2$，使得相应的上链平凡，从而可以对该复形进行三维加厚。

对于 $m=7$，我们发现这种加厚是不可能的。事实上：

定理 1.2. $B_3(\Theta_7)$ 与一个 3-流形群并非拟等距。

为证明这一点，我们在 $B_3(\Theta_7)$ 的边界中找到了一个完全二部图 $K_{3,\ 3}$。这个 $K_{3,\ 3}$图由拼接边界中的路径构成，这些路径来自 $\mathrm{Conf}_3(\Theta_7)$ 中的某些嵌入曲面。这些子曲面的存在是由自然包含$\Theta_4\hookrightarrow\Theta_7$所诱导的。进而，Bestvina–Kapovich–Kleiner [BKK02] 的研究表明，$B_3(\Theta_7)$ 不是一个 3-流形群。由于格罗莫夫边界是一个拟等距不变量，这就证明了定理 1.2。

与 $\mathrm{Conf}_3(\Theta_5)$ 不同，$\mathrm{Conf}_3(\Theta_6)$ 中的顶点链并非全都是平面的。因此，无法应用 Lasheras加厚准则。此外，Θ_6 中的 Θ_4 自然包含不足以确认 $B_3(\Theta_6)$ 的边界中存在一个 $K_{3,\ 3}$。因此，我们仍需回答以下问题：

问题 2。 $\mathrm{Conf}_3(\Theta_6)$ 是否同伦等价于某个 3-流形？ $B_3(\Theta_6)$ 是否为 3-流形群，哪怕仅在拟等距意义下也是如此?

致谢。 作者感谢 Kevin Schreve 向我们介绍图辫群，并在整个项目期间给予我们宝贵的指导、许多富有启发性的讨论和支持。作者也感谢 Pallavi Dani 对本文草稿提出的建设性意见。在本研究期间，第一作者获得了美国国家科学基金会 DMS-2407104 号奖项以及路易斯安那州立大学数学系的支持。两位作者还获得了美国国家科学基金会 DMS-2203325 号资助。

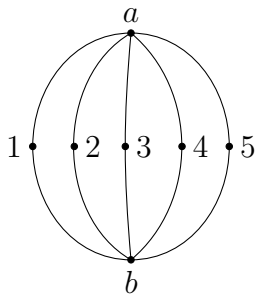


图3。 Θ_5 图。

2. $B_3(\Theta_5)$是一个3-流形群

本节中，我们证明组合构型空间 $\mathbf{Conf}_3(\Theta_5)$ 加厚后是一个可定向3-流形。我们将使用图 Θ_5 的最小可容许细分，如图3所示。细分图 Θ_5 不含三条两两不相交的边。因此，复形 $\mathbf{Conf}_3(\Theta_5)$ 是一个连通局部有限方形复形。我们首先回顾 Lasheras 加厚障碍 [Las00], ，该障碍针对单纯复形提出；随后介绍一种适用于方形复形的修改方案。

定义2.1 ([Las00，定义3.1])。设 X 是一个二维局部有限单纯复形，其中每个顶点 v 的链环 $\mathbf{Lk}\ (v,\ X)$ 在 X 中都是平面的。考虑一个嵌入ϕ_v: $\mathbf{Lk}\ (v,\ X) \longrightarrow \mathbb{R}^2$。沿着 $\mathbb{R}^2$中 $\phi_v(w)$ 周围的顺时针方向，其中$w \in \mathbf{Lk}\ (v,\ X)$，我们得到一个与 w 在 $\mathbf{Lk}\ (v,\ X)$中相邻顶点相关联的元组。我们称该元组为由 ϕ_v 确定的 $\mathbf{Lk}(vw,\ X)$ 上的循环次序，并将其记为 $\theta_{\phi_v}(w)$。

我们注意到，如果边$e = vw$ 至多包含在两个面中，那么 $\mathbf{Lk}\,(e,\ X)$上只有一个循环次序。如果 e 恰好包含在三个面中，则存在两个这样的可能循环次序。

定义2.2 ([Las00])。设 X 如定义2.1所述， $X^{(1)}$ 表示其1-骨架。令X' 为 $X^{(1)}$ 的子图，由 X 中包含在至少三个面中的边$e = vw$ 组成。考虑 $\overline{X'}$ 在 $\mathbb{Z}_2$上的余链复形，

$$0 \longrightarrow C^0(X';\mathbb{Z}_2) \longrightarrow C^1(X';\mathbb{Z}_2) \longrightarrow 0.$$

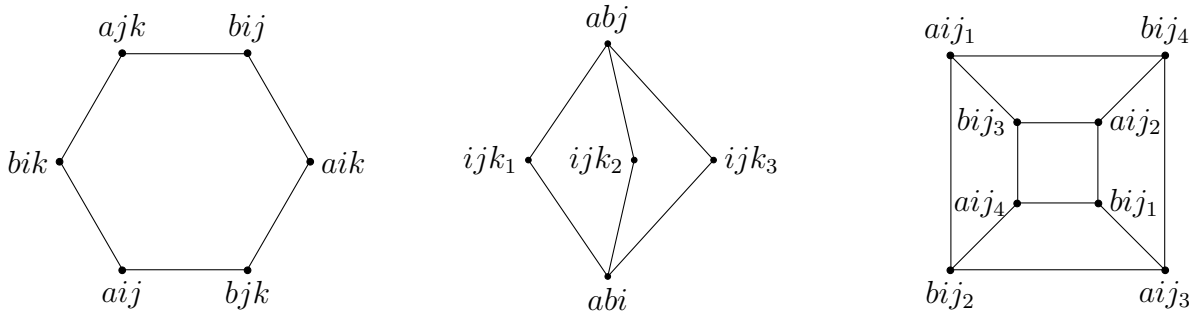
给定嵌入族 $\Phi = \{\phi_v:$ 链接 $(v,\ X) \longrightarrow \mathbb{R}^2\}$，我们关联一个余循环

$$\omega_\Phi = \sum_{e\in X'} \omega_\Phi(e)\cdot e \in C^1(X';\mathbb{Z}_2),$$

其中

$$\omega_\Phi(e) = \begin{cases} 0 \text{ if } \theta_{\phi_v}(w) \text{ and } \theta_{\phi_w}(v) \text{ are opposite cyclic orders on } \mathrm{Lk}\,(e,X), \\ 1 \text{ otherwise.} \end{cases}$$

在 [Las00 中，定理 1.1], Lasheras 证明，这样的单纯复形能够加厚为可定向 3-流形，当且仅当对于某个嵌入族 Φ， ω_Φ 是平凡的。现在我们将这一结果推广到方形复形。通过添加方形的重心，可以对方形复形进行细分，从而得到单纯复形。这不会改变



(a) 链接 (ijk) (b) 链接 (aij) (c) 链接 (abi)

图4。$\mathrm{Conf}_3(\Theta_5)$中 ijk、 aij和 abi 的链环。

原顶点的链环的同胚类型，而新重心的链环与 S^1 同构。此外，新边恰好包含在两个面中，因此对于任何嵌入族 Φ，它们都不会对上链 ω_Φ 作出贡献。因此， [Las00] 的定理 1.1 推出:

定理2.3。 二维连通局部有限立方复形 X 可加厚为可定向3-流形，当且仅当

(i) 对于 X的每个顶点 v，链环 (v, X) 都是平面的。(ii) 存在嵌入族 $\Phi = \{\phi_v$： 链环 $(v, X) \longrightarrow \mathbb{R}^2\}$，使得相应的上链 ω_Φ 是平凡的。

为了应用定理2.3，我们需要了解 $\mathrm{Conf}_3(\Theta_m)$ 中顶点的链。

注。 设 $v_1v_2v_3$ 是 $\mathrm{Conf}_3(\Theta_m)$ 中的一个顶点，其中每个 v_i 都是 Θ_m 的一个顶点。$\mathrm{Lk}(v_1v_2v_3,$ $\mathrm{Conf}_3(\Theta_m))$ 中的顶点对应于 Θ_m 中的一条边，该边包含顶点 v_i 之一，且与另外两个顶点不相交。$\mathrm{Lk}(v_1v_2v_3,$ $\mathrm{Conf}_3(\Theta_m))$ 中的一条边对应于 Θ_m 中两条互不相交的边，它们各自包含顶点 v_i之一。

由于 $\mathrm{Conf}_3(\Theta_m)$ 中没有三维立方体，因此顶点的链中没有二维单形。现在我们用定理2.3证明，方形复形 $\mathrm{Conf}_3(\Theta_5)$ 可以加厚为一个可定向3-流形。

定理*1.1*的证明。 设 a 和 b 为悬挂顶点， $1 \leqslant i,\ j,\ k \leqslant 5$ 为图3所示 Θ_5 中的悬挂顶点。那么，方形复形 $\mathrm{Conf}_3(\Theta_5)$ 中的四类顶点为 abi、 aij、 bij 和 ijk。$\mathrm{Conf}_3(\Theta_5)$ 中所有顶点的链都是平面的（见图4）。因此，定理2.3的第一个假设得以满足。

我们需要证明定理2.3的第二个条件成立。也就是说，我们需要找出一个明确的嵌入族 $\Phi = \{\phi_v\}_{v\in \mathrm{Conf}_3(\Theta_5)}$ into $\mathbb{R}^2$ ，使得相应的上链 ω_Φ 是平凡的。

从图4a可以看出，每个 $w \in$ 链接 $(ijk,\ \mathrm{Conf}_3(\Theta_5))$ 的度数都是二。因此，$\mathrm{Conf}_3(\Theta_5)$ 中的边 $(ijk)(\overline{aij})$ or $(ijk)(\overline{bij})$ 恰好包含在两个面中，所以不会对任何链环嵌入所关联的余循环作出贡献。

因此，我们需要嵌入形如 aij、 bij和 abi的顶点的链，使得相应的上链是平凡的。首先，考虑 $\mathrm{Conf}_3(\Theta_5)$的1-骨架中如定义2.2所述的子图 X' 。类型为 abi的每个顶点都与 $i \neq j$的顶点 aij 和 bij 相连，而这些顶点又与顶点 abj相连。这对所有 $i \neq j \in \{1, 2, 3,4, 5\}$都成立。因此， X'

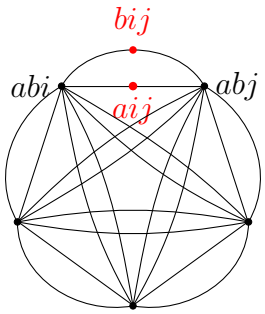
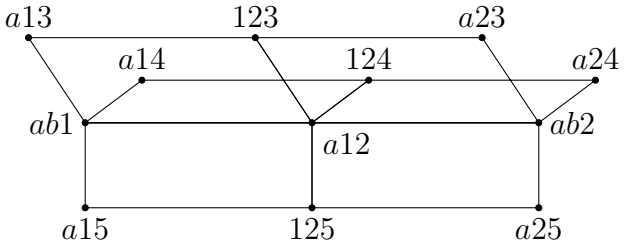
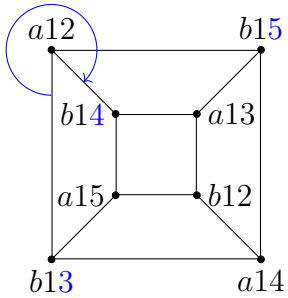


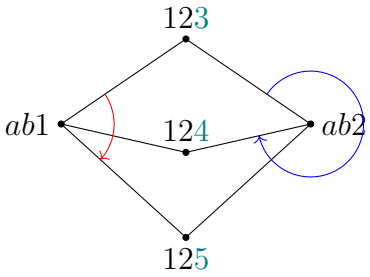
图 5. X' $\mathsf{Conf}_3(\Theta_5)$的底层图。



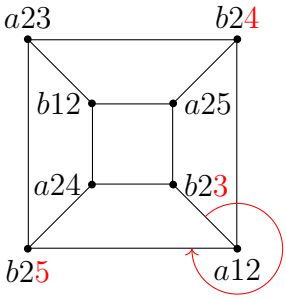
(a) $\mathsf{Conf}_3(\Theta_5)$中 $a12$ 的局部邻域



(b) $(ab1)$链接



(c) $(a12)$链接



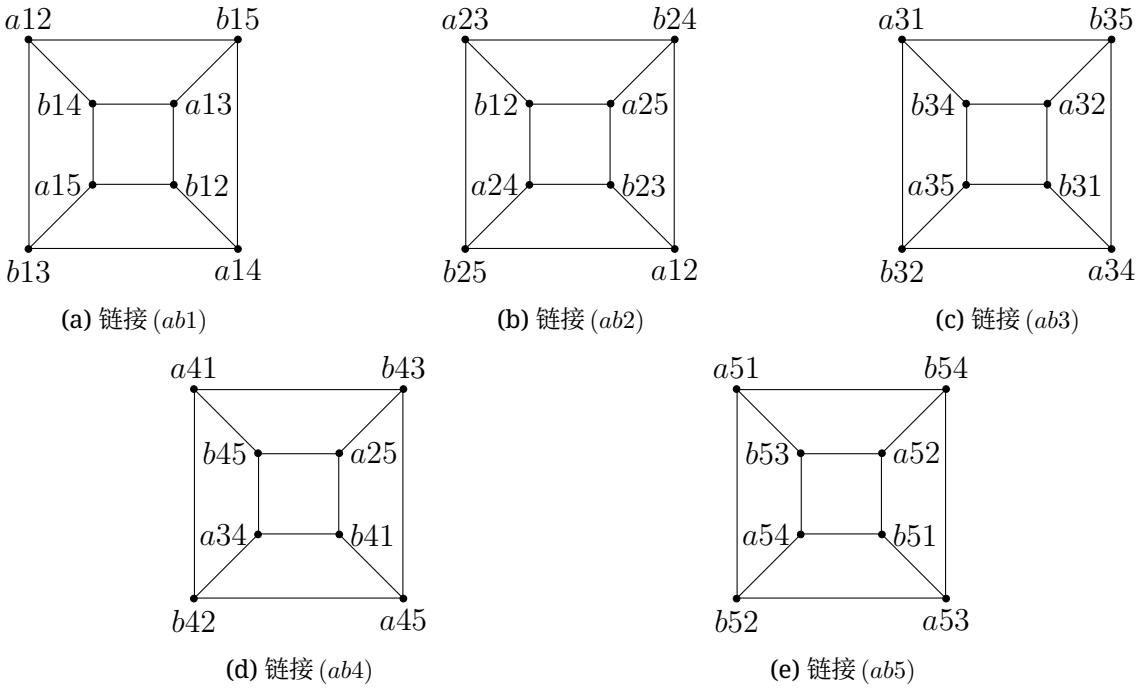
(d) $(ab2)$链接



图 6. $\theta_{\phi_{a12}}(ab1) = (345)$ 与 $\theta_{\phi_{a12}}(ab2) = (354)$ 的次序相反，$\theta_{\phi_{ab1}}(a12) = (354)$ 与 $\theta_{\phi_{a12}}(ab1) = (345)$ 相反，$\theta_{\phi_{ab2}}(a12) = (345)$ 与 $\theta_{\phi_{a12}}(ab2) = (354)$ 相反。当 $a12$ 处于 $\mathsf{Lk}\,(ab1,\ \mathsf{Conf}_3(\Theta_5)))$和 $\mathsf{Lk}\,(ab2,\ \mathsf{Conf}_3(\Theta_5))$ 中的循环次序相反时，路径$(ab1)(ab2)$ 在 X' 中的上链取值为 0。

与一个经重心重分的双边 K_5 同构（见图 5）。如果我们找到 X' 的顶点的链的嵌入族 Φ，使得 X'的每条边 e 都有相应的 $\omega_\Phi(e) = 0$，我们就完成了。

我们声称，只需为所有 $i \in \{1、2、3、4、5\}$ 构造顶点 abi 的嵌入，使得 $\theta_{\phi_{abi}}(aij)$ 与 $\theta_{\phi_{abj}}(aij)$ 相对即可。事实上，对于任意嵌入 ϕ_{aij}：$\mathsf{Lk}(aij,\ \mathsf{Conf}_3(\Theta_5))$,



(a) 链接 $(ab1)$ (b) 链接 $(ab2)$ (c) 链接 $(ab3)$

(d) 链接 $(ab4)$ (e) 链接 $(ab5)$

图7. 链接$(abi,\ \mathsf{Conf}_3(\Theta_5))$ 嵌入到 $\mathbb{R}^2$ 中的一个嵌入族，使得相关的上链是平凡的。

abi 和 abj 的顺时针取向分别记为 $\theta_{\phi_{aij}}(abi)$ 和 $\theta_{\phi_{aij}}(abj)$，对于 $i \neq j$ 而言二者相对（例如，参见图6c）。为了得到 $\omega_\Phi((abi)(aij)) = 0$ 和 $\omega_\Phi((abj)\overline{(aij)}) = 0$（显式示例见图 6，其中涉及顶点 $a12$、 $ab1$ 和 $ab2$），取向 $\theta_{\phi_{abi}}(aij)$ 应与 $\theta_{\phi_{aij}}(abi)$ 相对，而取向 $\theta_{\phi_{abj}}(aij)$ 应与$\theta_{\phi_{aij}}(abj)$ 相对（参见图6c、图6b和图6d）。因此，$\mathsf{Lk}(abi,\ \mathsf{Conf}_3(\Theta_5))$ 和 $\mathsf{Lk}(abj,\ \mathsf{Conf}_3(\Theta_5))$ 中 aij 的顺时针取向 $\theta_{\phi_{abi}}(aij)$ 和 $\theta_{\phi_{abj}}(aij)$ 应分别相对。由对称性可知，顶点 bij也满足同样的结论。 X' 的每条边都属于 $(abi)(aij)$ 或 $(abj)(bij)$ 类型。因此，为了对 X' 的每条边 e 得到 $\omega_\Phi(e) = 0$，~~我们需要找到一个嵌入族~~ $\Phi = \{\phi_v :\ \mathsf{Lk}(v,\ \mathsf{Conf}_3(\Theta_5)) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid v = abi$，其中 $1 \leqslant i \leqslant 5\}$，使得对于所有 $1 \leqslant i,\ \ j \leqslant 5$，循环次序 $\theta_{\phi_{abi}}(aij)$ 和 $\theta_{\phi_{abi}}(aij)$ 都彼此相对。

满足这一要求的一种嵌入族如图7所示。在任意两个链环 $\mathsf{Lk}\,(abi,\mathsf{Conf}_3(\Theta_5)))$和 $\mathsf{Lk}\,(abj,\mathsf{Conf}_3(\Theta_5)))$ 中，类型为 aij (和 bij) 的每个顶点的循环次序都相反；因此，底层图 X' 中的所有边在余循环中均赋值为零。□

注。 给定一个如图7所示的 $\mathsf{Lk}(ab1,\mathsf{Conf}_3(\Theta_5))$ 嵌入，任何将 1 映到 i 的对称群 S_5 中的元素都会给出一个新的 $\mathsf{Lk}(abi,\mathsf{Conf}_3(\Theta_5))$嵌入。我们构造的嵌入是通过反复应用循环置换(12345)得到的。我们认为，应用交错群 A_5 中的任意元素都应产生一个 $\mathsf{Lk}(abi,\mathsf{Conf}_3(\Theta_5))$ 嵌入，使得由此得到的 Lasheras余循环是平凡的。

3. $B_3(\Theta_7)$ 不是 3-流形群

本节中，我们证明 $B_3(\Theta_7)$ 不是某个 3-流形的基本群。事实上，我们对任何与 $B_3(\Theta_7)$拟等距的群都证明了这一点；特别地， $B_3(\Theta_7)$ 不是虚拟 3-流形群。为此，我们将在该群的边界中寻找一个阻碍其成为 3-流形群的条件，定义如下。

定义 3.1。 CAT(0) 空间 X的边界记为 $\partial_\infty X$，它是测地射线的等价类集合；两条测地射线 $\alpha(t)$和 $\beta(t)$ 等价，当且仅当存在常数 k，使得对所有 $t \geqslant 0$，都有 $d(\alpha(t),\ \beta(t)) \leqslant k$。边界 $\partial_\infty X$ 带有一种自然拓扑，即锥拓扑；在此拓扑下，当 X 正则时， $X = X \cup \partial_\infty X$ 是紧的（更多细节参见 [BH99，第二部分。8] ）。

CAT(0) 群的视觉边界定义为其适当不连续且余紧作用的 CAT(0) 空间的边界。对于双曲 CAT(0) 群，这一定义是良定义的，并且在拟等距下保持不变。

定理 3.6 随即由下述定理推出，该定理改编自 Bestvina–Kapovich–Kleiner 的工作 [BKK02，定理 1 和推论 19]。

定理 3.2。 设 G 是一个双曲 CAT(0) 群，其视觉边界为 $\partial_\infty G$。若有一个非平面图嵌入 $\partial_\infty G$中，则 G 不是 3-流形群。

我们在视觉边界 $\partial_\infty(B_3(\Theta_7))$中找到了一个嵌入的$K_{3,\ 3}$。以下一系列引理确定了 $B_3(\Theta_7)$的拟凸子群，它们产生了这个嵌入的$K_{3,\ 3}$。

我们将使用 [CW04，定理 1(2)] 中的以下结果，关于局部 CAT(0) 立方复形的子复形顶点的链接，以证明$B_3(\Theta_7)$中存在此类子群。

引理 3.3。 设 A 是一个有限维、局部 CAT(0) 的立方复形，且 B 是 A的子复形。那么 B 是一个局部 CAT(0)、 π_1-内射的子复形，它提升为$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$中 B到 A $\iff$ $\mathrm{Lk}(v,\ B)$ 在 $\mathrm{Lk}(v,\ A)$ 中是一个满子复形，对每个 B中的顶点 v 都成立。

正如 [Abr00 的推论 3.14] 和 [Gen21 的命题 3.10]，对图的构形空间所指出的，这可转化为以下引理。

引理 3.4. 设 Γ' 是连通图 Γ 的一个子图。那么自然包含映射 $\widetilde{\mathrm{Conf}_n(\Gamma')} \hookrightarrow \widetilde{\mathrm{Conf}_n(\Gamma)}$ 是 π_1-单射。此外，该包含映射可提升为 $\mathrm{Conf}_n\,\Gamma'$ 到 $\mathrm{Conf}_n\,\Gamma$ 的等距嵌入。

证明。要证明包含映射 $\mathrm{Conf}_n(\Gamma') \hookrightarrow \mathrm{Conf}_n(\Gamma)$ 是 π_1-单射，只需证明 $\mathrm{Lk}(v, \mathrm{Conf}_n(\Gamma'))$ 是 $\mathrm{Lk}(v, \mathrm{Conf}_n(\Gamma))$ 的一个满子复形。注意，在 $\mathrm{Lk}(v, \mathrm{Conf}_n(\Gamma))$ 中，一个m-单形，其中 $v = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，且每个 v_i 都是 Γ 中的一个顶点，对应于 Γ 中一组 m 两两不相交的边，其中每条边恰好包含一个 v_i。在不改变 $\mathrm{Conf}_n(\Gamma)$ 的同伦类型的前提下，我们可以对不属于 Γ' 的Γ 的边作重心细分，使得 Γ' 成为 Γ 的一个诱导子图。若 Γ'中存在一组在 Γ 中互不相交的边，那么它们在 Γ'中也互不相交。因此，若 $\mathrm{Lk}(v, \mathrm{Conf}_n(\Gamma))$ 中存在一个 m-单形 C，且其所有顶点均位于 $\mathrm{Lk}(v, \mathrm{Conf}_n(\Gamma'))$ 中，那么 C 就属于 $\mathrm{Lk}(v, \mathrm{Conf}_n(\Gamma'))$。□

推论 3.5. 对于 $n \leqslant m$，自然包含映射 $\mathrm{Conf}_3(\Theta_n) \hookrightarrow \mathrm{Conf}_3(\Theta_m)$是 π_1-单射，它提升为万有覆盖 $\mathrm{Conf}_3(\Theta_n)$ 到 $\mathrm{Conf}_3(\Theta_m)$ 的等距嵌入。

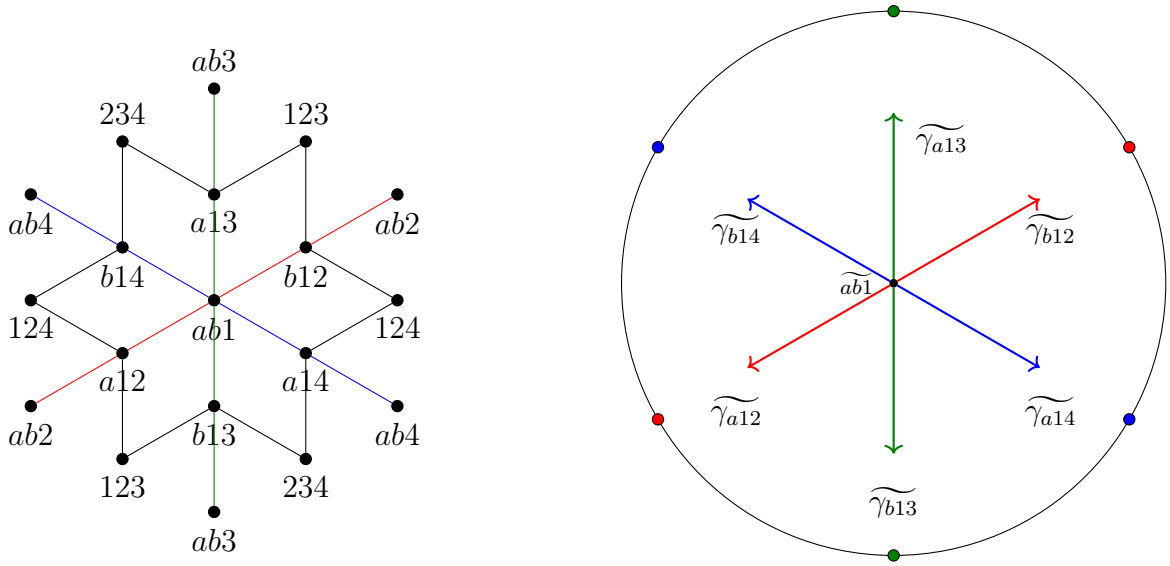


图 8。（左）嵌入 $\mathsf{Conf}_3(\Theta_7)$ 中的 $\mathsf{Conf}_3(\Theta_4)$ 的简单闭曲线；（右）与这些闭曲线对应的六条测地射线，它们位于 $\widetilde{\mathsf{Conf}_3(\Theta_7)}$ 中，以及 $\partial_\infty(\mathsf{Conf}_3(\Theta_7))$ 中的对应点。

特别地，$B_3(\Theta_n)$ 嵌入到 $B_3(\Theta_m)$ 中。此外，这是一个拟凸嵌入 $\widetilde{\qquad}$ $\widetilde{\qquad}$，它延拓为 $\partial_\infty\mathsf{Conf}_3(\Theta_n) \hookrightarrow \partial_\infty\mathsf{Conf}_3(\Theta_m)$ 对于 $n \leqslant m$ 的拓扑嵌入。

上述推论直接由引理 3.4 得出，并且基于这样一个事实：双曲群 G 的拟凸子群H 会导出边界 $\partial_\infty H$ 到$\partial_\infty G$ [Gro87 第 5 节3]中的拓扑嵌入。

对于立方复形 $\mathsf{Conf}_3(\Theta_7)$，这意味着我们可以通过取 Θ_7 的子图，在 $\mathsf{Conf}_3(\Theta_7)$ 中找到 π_1-单射子复形。具体来说，对于 Θ_7 中任意选取的两个顶点 τ_1、$\tau_2 \in$｛1、2、.....、7｝，我们都有一条来自 $\mathsf{Conf}_3(\Theta_2) \simeq S^1$、位于 $\mathsf{Conf}_3(\Theta_7)$ 中的非平凡简单闭曲线。我们将这条闭曲线记为 $\Gamma(\tau_1\tau_2)$。同样，对于 ｛1、2、.....、7｝ 中任意选取的四个顶点 λ_1、λ_2、λ_3、λ_4，我们在 $\mathsf{Conf}_3(\Theta_7)$ 中有一个局部凸曲面 $\Gamma(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4) \simeq \Sigma_3$。$\mathsf{Conf}_3(\Theta_7)$ 中这些子曲面内的简单闭曲线会提升为各自万有覆盖中的双向无限测地线，并对应于它们所在子曲面的边界圆上的点，从而在 $B_3(\Theta_7)$ 的视觉边界中形成一个细分的$K_{3,3}$ 嵌入。这一点在定理 3.6 的证明中有明确展示。

定理 3.6. $B_3(\Theta_7)$不是 3-流形群。

证明。 根据推论 3.5，$\mathsf{Conf}_3(\Theta_7)$中的子复形 $\Gamma(1234)$ 在$\mathsf{Conf}_3(\Theta_7)$中是 π_1-单射的。图 8 中关于顶点 $ab1$ 的局部图示表明，简单闭曲线$\Gamma(12)$、 $\Gamma(13)$和 $\Gamma(14)$ 在 $\Gamma(1234)$中恰好交于 $ab1$ 。此外，这些曲线 $\widetilde{\qquad}$ 提升为万有覆盖 $\Gamma(1234)$中的横截两两相交的双无限测地线 $\widetilde{\ }$，它们恰好交于 $ab1$的一个提升 $ab1$处。

这些双无限测地线各自形成两条从.....发出的无限测地射线 $\widetilde{\ }$ $ab1$，沿着由 $a1j$ 和 $b1j$ 为 $2 \leqslant j \leqslant 4$所确定的方向 $\widetilde{\qquad}$。我们将从 $ab1$ 出发、沿 $a1j$ 方向的测地射线记为 γ_{a1j} ，将从 $ab1$ 出发、沿 $b1j$ 方向的测地射线记为 γ_{b1j}。

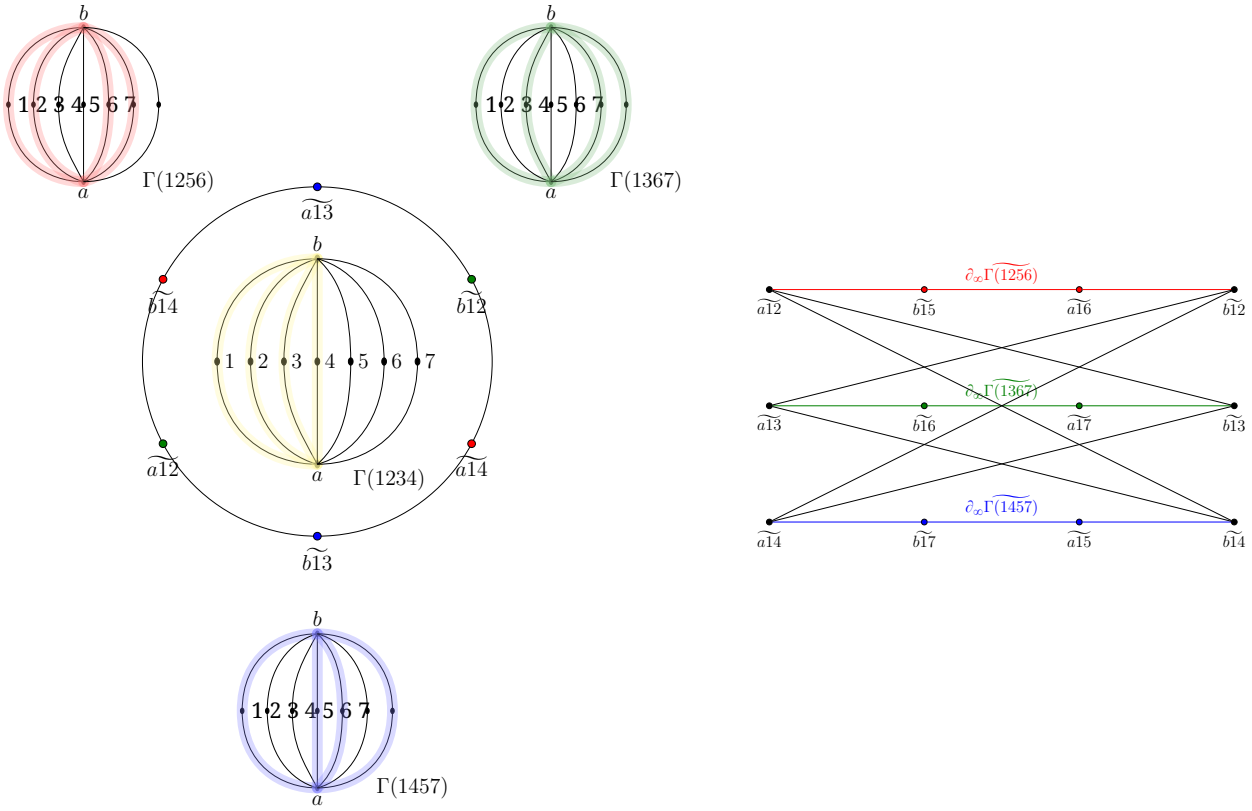
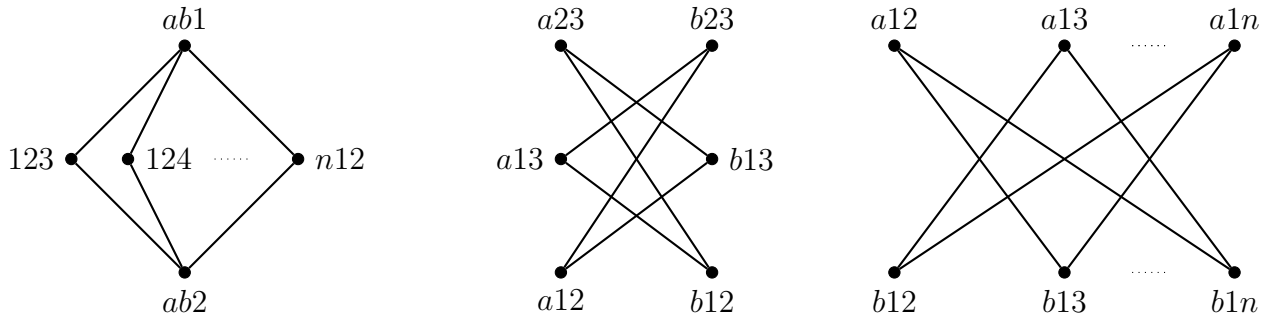


图 9. 子曲面 $\Gamma(1234)$、 $\Gamma(1256)$、 $\Gamma(1367)$和 $\Gamma(1457)$ ， 以及相应的$K_{3,\ 3}$ 在 $\partial_\infty B_3(\Theta_7)$中。

$\widetilde{\text{Conf}_3(\Theta_4)}$ 的视觉边界与 S^1同胚。由于对应于 $\Gamma(12), \Gamma(13)$和 $\Gamma(14)$ 的提升的三条双无限测地线在 $\widetilde{\Gamma(1234)}$中横截相交一次，因此，每条相关的测地射线都恰好在视觉边界$\widetilde{\text{Conf}_3(\Theta_4)}$ 中确定一个点 ∂_∞。我们将这些点记作万有覆盖中确定这些射线方向的点。因此，边界 S^1 上的六个点为 $\widetilde{a12}, \widetilde{b12}, \widetilde{a13}, \widetilde{b13}, \widetilde{a14}$, 和 $\widetilde{b14}$。

这六个点按循环序 $a12$， $b13$， $a14$， $b12$， $a13$，和 $b14$ 位于 $\Gamma(1234)$的边界圆上，如图 8 所示。首先考虑包含测地射线 γ_{a12}、 γ_{b13} 和 γ_{a14} 的 $\widetilde{\Gamma(1234)}$ 半平面，得出顶点的顺序为 $\widetilde{a12}$， $\widetilde{b13}$，和 $\widetilde{a14}$。然后考虑包含测地射线 γ_{b12}、γ_{a13} 和 γ_{b14}的 $\Gamma(1234)$ 半平面，得出顺序为 $b12$， $a13$，和 $b14$。这六个顶点连同$\widetilde{\text{边界圆}}$上的弧，在 $\partial_\infty\text{Conf}_3(\Theta_4)$中构成一个六边形。

现在，考虑图 9 所示的子曲面 $\Gamma(1256)$、 $\Gamma(1367)$ 和 $\Gamma(1457)$，它们的万有覆盖分别为 $\Gamma(1256)$、 $\Gamma(1367)$ 和 $\Gamma(1457)$，其中$\widetilde{\text{。这些万有覆盖分别与}}$ $\Gamma(1234)$ 相交于不同的测地线。这些测地线将 $\Gamma(1256)$、 $\Gamma(1367)$ 和$\Gamma(1457)$ 划分为半平面，其视觉边界包含细分边（



(a) $v = a12$ 或 $v = b12$ (b) $v = 123$ (c) $v = ab1$

图 10. $\mathsf{Conf}_3(\Theta_n)$的顶点的链接 $\mathsf{Lk}(v,\ \mathsf{Conf}_3(\Theta_n))$ 。

按此顺序） $(\widetilde{a12},\ \widetilde{b15},\ \widetilde{a16},\ \widetilde{b12})$、$(\widetilde{a13},\ \widetilde{b16},\ \widetilde{a17},\ \widetilde{b13})$ 以及 $(\widetilde{a14},\ \widetilde{b17},\ \widetilde{a15},\ \widetilde{b14})$，从而 $\widetilde{\quad}$ 将六边形补全为 $K_{3,\ 3}$ 在 $\partial_\infty \mathsf{Conf}_3(\Gamma_7)$ 中，如图 9 所示。□

注。 嵌入的 $\mathsf{Conf}_3(\Theta_4)$ 的选取，以及相应曲面群的选取，并非唯一，而仅取决于在 Θ_7 图中选择四组各含四股的路径（即从 vertex$a$ 到 b 的路径）；这些路径两两相交于两股。

定理 1.2 的证明。 由于拟等距双曲群的边界同胚，因此任何与 $B_3(\Theta_7)$ 拟等距的群都不是 3-流形群。□

推论 3.7。 由推论 3.5， $B_3(\Theta_n)$ 对于任意 $n \geqslant$ 都不是 3-流形群 7.

注。 利用 3-流形理论中的工具，可以对推论 3.7 给出另一种证明，概要见下一段。不过，定理 1.2 得出了更强的结论，因为它能在拟等距意义下检测出该群的视觉边界中存在嵌入的非平面图。

设 G 是一个无限、非循环的有限生成群，且不能分解为自由积。利用 3-流形理论中的工具，如果 G 是 3-流形群，那么它必定是某个无球的紧致定向不可约 3-流形的基本群，且该流形的欧拉示性数非正。由于 $\mathsf{Conf}_3(\Theta_n)$ 中每个顶点的链环都是连通的，且没有割点或边（见图 10），因此由 [Wil24, 定理 E], 可知，群 $B_3(\Theta_m)$ 是单端的，因而不能分解为自由积。因此，对于 $m > 7$， $B_3(\Theta_m)$ 不是 3-流形群，因为 $\chi(B_3(\Theta_m)) > 0$ 对于 $m > 7$。

现在假设 G 也与 $\chi(G) = 0$ 一样是双曲的，并且存在一个 3-流形，使得 $\pi_1(M) \cong G$。由于 $\chi(M) = 0$，我们有 $\chi(\partial M) = 0$。因为 M 是无球且不可约的，每个边界分支都必须是不可压缩环面。因此，我们得到一个从 $\mathbb{Z}^2$ 到 G 的单射，这与 G 是双曲的相矛盾。由于 $B_3(\Theta_7)$ 是这样一个群，它不可能是 3-流形群。

参考文献

[Abr00] Aaron David Abrams, 《图的配置空间与辫群》, ProQuest LLC, 安娜堡, 密歇根州, 2000年, 博士论文——加利福尼亚大学伯克利分校。MR 2701024[ADG+25]Benjamin Appiah、Pallavi Dani、Wayne Ge、Christopher Hudson、SAUMYA JAIN、Matthew Lemoine、Jake Murphy、Justin Murray、Adithyan Pandikkadan、Kevin Schreve 和 HUONG VO,

双曲图辫群的代数结构，《国际代数与计算杂志》35 (2025)，第 3 期，329–342。MR 4901846[BH99] Martin R. Bridson 和 André Haefliger，《非正曲率度量空间》，《数学科学基础丛书》 [《数学科学基本原理》], 第 319 卷，施普林格出版社，柏林，1999年。MR 1744486[BKK02] Mladen Bestvina、Michael Kapovich 和 Bruce Kleiner，《离散群的范坎彭嵌入障碍》，《数学发明》150 (2002)，第 2 期，219–235。MR 1933584[CL18] Safia Chettih 和 Daniel Lütgehetmann，《带环树的配置空间的同调》，《代数与几何拓扑》18 (2018)，第 4 期，2443–2469。MR 3797072[CW04] John Crisp 和 Bert Wiest，《图辫群和曲面群在直角阿廷群及辫群中的嵌入》，《代数与几何拓扑》4 (2004)，439–472。MR 2077673[FS05] Daniel Farley 和 Lucas Sabalka，《离散莫尔斯理论与图辫群》，《代数与几何拓扑》5 (2005)，1075–1109。MR 2171804[Gen21] Anthony Genevois，《图辫群中的负曲率》，《国际代数与计算杂志》31 (2021)，第 1 期，81–116。MR 4227231[Ghr01] Robert Ghrist，《机器人学中图上的配置空间与辫群》，《纽结、辫与映射类群——献给 Joan S. Birman 的论文集》（纽约，1998），《美国数学会/应用数学研究所高级数学研究》，第 24 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2001年，第 29–40 页。MR 1873106[Gro87] M. Gromov，《双曲群》，《群论论文集》，《数学科学研究所出版物》，第 8 卷，施普林格出版社，纽约，1987年，第 75–263 页。MR 919829[Hei75] Wolfgang H. Heil，《一些有限呈示的非 3-流形群》，《美国数学会会刊》53 (1975)，第 2 期，497–500。MR 438320[Las00] Francisco F. Lasheras，《三维加厚的一个障碍》，《美国数学会会刊》128 (2000)，第 3 期，893–902。MR 1621973[PS14] Paul Prue 和 Travis Scrimshaw，《图辫群的 Abrams 稳定等价》，《拓扑学及其应用》178 (2014)，136–145。MR 3276733[Świ01] Jacek Świątkowski，《图配置空间同调维数的估计》，《数学讨论》89 (2001)，第 1 期，69–79。MR 1853416[WG19] John D. Wiltshire-Gordon，《单纯复形中配置空间的模型》，《数学讨论》155 (2019)，第 1 期，127–139。MR 3887191[Wil24] Henry Wilton，《立方化双曲群和单关系群中的曲面群》，2024年，arXiv:2406.02121。