arXiv:2603.07838v1 [math.PR] 8 Mar 2026

FA随机集与 III 型 Arveson 系统

REMUS FLORICEL

Abstract. 我们在代表元层面，为基于平稳可分解测度类型的 Liebscher–Tsirelson 随机集构造 Arveson 系统建立了一个框架。

我们引入了时间区间闭子集超空间上概率测度的可测因子化族这一概念，并证明每个此类族都能规范地产生一个 Arveson 系统。在此框架下，我们获得了空间性的纯测度论刻画：正归一化单位恰好对应于严格因子化的受控测度族。

随后，我们通过可测因子化族的无限乘积，提出了一种构造 III 型 Arveson 系统的一般机制。从满足定量 Hellinger 小性条件的 II 型$_0$ 种子出发，我们构造了一个以 $[0,1]\times\mathbb{N}$为指标的带标记无穷乘积，并利用 Kakutani 判据证明所得乘积系统不具有任何单位。这为 III 型随机集系统提供了一项稳健的构造原理。

作为应用，我们分析布朗运动的零点集。经过适配锚点的局部化和 Palm 型均匀化后，布朗种子满足所需的重叠估计，而相应的无限乘积构造则产生了 III 型随机集系统的显式例子，正如 Tsirelson 和 Liebscher 的研究所预示的那样。

Contents

1. 引言 11.1. 主要结果与结构安排。 21.2. Arveson 系统背景 31.3. 记号与约定。 42. 随机集系统 42.1. 闭集空间与因子化测度族 42.2. 与 Liebscher 的平稳因子化测度类型的关系 62.3. 从因子化族到代数 Arveson 系统 82.4. 与 Liebscher–Tsirelson 构造的兼容性 102.5. 可测性：从可测族到 Arveson 系统 113. 单位与类型 133.1 空间性 133.2. 完全 L–扩展量泊松随机闭集 174. III型随机集系统 244.1. Hellinger 小种子 244.2. Palm 均匀化代表元与 Hellinger 小种子 294.3. Hellinger 小性的一个充分判据 354.4. 布朗运动零点集种子与 III 型构造 39参考文献 50

1. Introduction

希尔伯特空间的乘积系统又称 Arveson 系统，由 W. Arveson 于 [1] 引入，作为 $\mathcal{B}(H)$ [7] 上 E_0- 端同态半群的完备不变量。在他的

Date：2026年3月10日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主分类号 46L55；次分类号 60G15、60G55、60B11。*Key words and phrases.* Arveson 系统、平稳可分解测度类型、随机闭集、Hellinger 小种子、布朗零点集。本研究部分由加拿大自然科学与工程研究委员会的探索资助提供资金。

奠基性工作中，Arveson 建立了乘积系统的类型分类——I 型、II 型和 III 型，与穆雷–冯·诺伊曼对 W^*-因子 [4]的分类相对应。该分类至今仍是非交换动力学结构理论以及 E_0-半群 [2]分析的核心。

继 Arveson 的工作之后，一个重要问题随之出现：如何构造并理解超越完全空间的（I 型）Arveson 系统。B. Tsirelson [9–14]，取得了决定性的突破，揭示了 Arveson 系统深刻的概率论本质。特别是，他证明了 Arveson 系统可以由随机闭集及相关随机结构构造而成，表明 Arveson 系统可能蕴含微妙的测度论结构。一个具有里程碑意义的例子是，他构造了一个 II 型$_0$ Arveson 系统，该系统源自布朗运动 [12]的随机零点集。这项工作还确立了 Arveson 系统不一定源自福克空间构造（另见 [9]），并表明概率论输入能够产生真正新颖的类型。

随后，V. Liebscher [6],进一步发展并系统化了 Tsirelson 的构造。他引入了定义在 $[0,1]\times L$ 闭子集超空间上的平稳因子化测度类型这一概念，并为随机集 Arveson 系统建立了结构框架。这些工作有力地确立了测度类视角是构造和分类 Arveson 系统的有效工具。

尽管取得了这些进展，如何从平稳的可分解测度类型构造 III 型积系统，仍未得到解决。Liebscher 在 [6, 注 4.4] 中提出，III 型例子或许可以通过无限张量积构造得到。然而，Liebscher-Tsirelson 随机集方法本质上是在测度类的层面上表述的——也就是说，是在相互绝对连续所确定的等价类层面上表述的。虽然这足以定义代数 Arveson 系统，却掩盖了两个基本问题，本文将对此加以解决：

(1) 如何直接从因子化数据构造可测阿维森积系统；(2) 如何以一种对代表元变化保持稳定的方式进行无限乘积构造。

第二个问题尤其棘手：众所周知，无限张量积在代表元变化下极不稳定，而测度类等价与朴素的无限乘积构造并不相容。

因此，从随机集构造 III 型 Arveson 系统的障碍在于概念层面，而不仅仅是技术层面：我们必须建立一个框架，使我们能够一致地使用可测代表元，同时保留足够的结构来进行因子化和受控的无限乘积构造。

本文通过引入概率测度的可测因子化族，系统地发展了平稳因子化测度类型代表元的理论。我们的方法识别出在测度类等价下保持稳定的典范结构特征，并提供了在代表元层面进行受控无限乘积构造的工具。借助这一框架，我们证明了存在完全源自概率测度可测因子化族的 III 型积系统，并阐明了 III 型行为产生的机制。

1.1. **主要结果与结构安排。** 本文结构如下。第2节构建超空间框架，并引入闭子集超空间上的因子化测度族 $\boldsymbol{\mu}=\{\mu_t\}_{t>0}$ $\mathscr{C}_t$ $[0,t]\times L$ （定义 2.3）。除了要求因子化在等价意义下成立之外，我们还施加以下条件：(a) “无确定性时间切片”条件，以消除拼接时的边界歧义；(b) 明确的可测性假设，以便在由此得到的希尔伯特场上赋予可用的博雷尔结构。第一项主要构造表明，每个可测因子化族 $\boldsymbol{\mu}$ 都会典范地生成一个可测 Arveson 乘积系统 $\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}}$ （定理 2.13），以下称为随机集系统。我们进一步证明，这种代表元层面的构造与 Liebscher–Tsirelson 测度类构造相容：由 $\boldsymbol{\mu}$ 得到的代数系统，与和测度类型 $[\mu_1]$ 相关联的 Liebscher–Tsirelson 系统典范同构2.11（命题）。特别是，我们的

构造为 Liebscher–Tsirelson 代数 Arveson 系统$\mathbb{E}^{\mathcal{M}}$提供了一种自然方式，使其能够配备可测结构；该系统与平稳因子化测度类型 $\mathcal{M}$相关联。

第 3 节分析单位和随机集系统的类型 $\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}}$。我们的主要结果揭示了单位内在的测度论内容。我们证明， $\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}}$ 是空间的，当且仅当存在一个精确因子化（而非仅在等价意义下因子化）的受控测度族（定理 3.2）。此外，正归一化单位与这类受控的精确因子化族之间存在双射（推论 3.5）。这种对应关系在乘积系统的希尔伯特空间结构与其底层概率结构之间搭建了一座自然的桥梁，也是我们进行 III 型构造的主要工具。

我们在第 3.2 小节展示了这一框架的有效性：我们证明，泊松随机集系统 $\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}^{(P,L)}}$与完全 L扩展的泊松随机闭集相关，且属于 I 型，其 Arveson 指数为 $\operatorname{ind}\big(\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}^{(P,L)}}\big) = \dim L^2(L,\eta)$（定理 3.16）。

第 4 节构造了一种稳定的代表元层面无穷乘积机制，并通过 Kakutani/Hellinger 判据检测非空间性（即 III 型）。我们从一个种子族 $\boldsymbol{\nu}$ 出发，其所在的 $[0,1]\times\{*\}$ 随机集系统 $\mathbb{E}^{\boldsymbol{\nu}}$ 为 II 型$_0$。在定量短时 Hellinger 小性假设（定义4.3）下，我们沿着一个满足$\{a_n\}$ 的序列对种子进行扩张，且 $\sum_n a_n = \infty$ 并且 $\sum_n a_n^2 < \infty$，然后在 $L = \mathbb{N}$ 上构造带标记无穷乘积：$\mu_t^{(\nu)} = \bigotimes_{n\ge 1} \nu_t^{(n)}$ （定义 4.4）。我们证明这会产生一个可测因子化族（命题 4.5）。接着我们证明一个 III 型判据：如果种子单位在短时间内具有线性的“真空重叠亏损”，那么所得的带标记乘积系统不含任何单位（定理 4.10）。证明结合了： （i）单位的精确因子化刻画， （ii）有限边缘分布中 II 型$_0$ 正单位的唯一性，以及（iii）无穷乘积测度的 Kakutani/Hellinger 奇异性。

为了使 III 型机制能够适用，我们给出一般性步骤，在测度类内修改一个可进行 Palm 均匀化的因子化族，使其成为一个“小”种子，同时满足线性重叠条件。这包括锚点适配的对数局部化（定义 4.17）、锚点的精确 Palm 均匀化（引理4.15），以及真空质量的确定性归一化（定理 4.21）。我们还根据单块稳定性估计，给出了 Hellinger 小性的实用充分条件（命题 4.23和推论 4.24）。作为一个具体应用，我们验证了布朗零点集在经过锚点适配局部化和 Palm 型均匀化之后满足所需的重叠估计，从而得到一个 III 型随机集乘积系统（定理4.34）。

1.2. **Arveson 系统背景**。 下面我们简要回顾本研究所需的 Arveson 系统理论的主要组成部分。关于全面论述，请参阅 [2]。不过，我们不单独介绍 Lieb- scher–Tsirelson 的平稳因子化测度类型理论（见 [6]），而是选择将其直接融入本文的主要论述中。

Arveson 系统是无限维可分希尔伯特空间的可测场 $\mathbb{E} = \bigsqcup_{t>0}\{t\}\times E_t$ （$E_t, \langle\cdot,\cdot\rangle_{E_t}$），并配备标准博雷尔空间的结构。此外，该场被赋予一种“乘法”，由酉算子的可测场$U_{s,t}$：$E_s \otimes E_t \to E_{s+t}$, $s,t>0$构成，它们满足结合律

$$U_{r,\,s+t}\big(\mathbf{1}_{E_r}\otimes U_{s,t}\big) = U_{r+s,\,t}\big(U_{r,s}\otimes \mathbf{1}_{E_t}\big), \tag{1}$$

对所有 $r,s,t>0$成立。最后，假定场 $\mathbb{E}$ 是可平凡化的，即作为希尔伯特空间的可测场，它同构于平凡场$(0,\infty)\ \times H_{\mathrm{triv}}$ ，其中 H_{triv}为某个可分希尔伯特空间。

Arveson 系统将简记为 $\mathbb{E} = \{E_t, U_{s,t}\}_{t>0}$。若略去可测性与可平凡化要求，仅保留满足结合关系的代数数据 $\{E_t, U_{s,t}\}$ ，则 $\mathbb{E}$ 将被称为代数Arveson 系统。

单位 $u = \{u_t\}_{t>0}$ of $\mathbb{E} = \{E_t, U_{s,t}\}_{s,\ t>0}$是一个非零的博雷尔截面 $(0,\ \infty)\ \ni t \mapsto u_t \in E_t$，满足乘法性条件

$$u_{s+t} = u_s \cdot u_t := U_{s,t}(u_s \otimes u_t), \quad s,\, t>0.$$

所有 $\mathbb{E}$ 的单位集合记为 Unit($\mathbb{E}$)。若存在 $u=\{u_t\}_{t>0}$ 和 $v=\{v_t\}_{t>0}$，使得 $\lambda\in\mathbb{C}$ 满足 $u_t=e^{\lambda t}v_t$ 对所有 $t>0$均成立，则称这两个单位等价。集合 Unit($\mathbb{E}$带有 Arveson 协方差核（[2, 命题 3.6。2]）：对于 u, $v\in$ Unit($\mathbb{E}$存在唯一的$c_{\mathbb{E}}(u,\ v)\in\mathbb{C}$ 使得

$$\langle u_t, v_t\rangle = \exp\big(t\, c_{\mathbb{E}}(u,v)\big)\quad (t>0).$$

核 $c_{\mathbb{E}}$ 是条件正定的 [2, 命题 2.5。2]，因而定义了一个希尔伯特空间 $H(\mathbb{E})$。$\mathbb{E}$ 的 Arveson 指数定义为 ind($\mathbb{E}$) := dim $H(\mathbb{E})$，如果 Unit($\mathbb{E}$) $\neq\emptyset$。

如果 Unit($\mathbb{E}$) $\neq\emptyset$，则称 Arveson 系统 $\mathbb{E}$ 为空间的。此外，如果每个希尔伯特空间 E_t 都是有限乘积 $u_{t_1}^{(1)}\cdot u_{t_2}^{(2)}\cdot\cdots\cdot u_{t_k}^{(k)}$ 的闭线性张成，其中 $u^{(i)}$ 是 $\mathbb{E}$ 和 $t_1+\cdots+t_k=t$ 的单位，则称 $\mathbb{E}$ 为 I 型。如果 $\mathbb{E}$ 为空间的但不是 I 型，则称其为 II 型 Arveson 系统。最后，如果 Unit($\mathbb{E}$) $=\emptyset$，则称 $\mathbb{E}$ 为 III 型。

我们注意到，$\mathbb{E}$ 为 II 型$_0$，即 Arveson 指数为 0 的 II 型，当且仅当它具有单位线唯一性：存在一个归一化单位 $u=\{u_t\}_{t>0}$，使得 $\mathbb{E}$ 的每个归一化单位 v 都等价于 u。特别地，每个纤维中单位的张成是一条直线 $\mathbb{C}u_t$。

1.3. **记号与约定**。所有希尔伯特空间均假设为可分的。除非另有明确说明，所有测度均为概率测度。

若同一可测空间上的两个测度 μ 和 ν 相互绝对连续，则称它们等价，记作 $\mu\sim\nu$。测度类型是关于此关系的一个等价类 $\mathcal{M}=[\mu]$。勒贝格测度记作 Leb。

可测空间 $(\mathscr{C}_t,\Sigma_t)$ 上的测度族 $\{\mu_t\}_{t>0}$ of measures μ_t 记作 $\boldsymbol{\mu}=\{\mu_t\}_{t>0}$。对于两个这样的测度族 $\boldsymbol{\mu}=\{\mu_t\}_{t>0}$ 和 $\boldsymbol{\nu}=\{\nu_t\}_{t>0}$，若对所有 $t>0$ 都有 $\nu_t\ll\mu_t$，则记作 $\boldsymbol{\nu}\ll\boldsymbol{\mu}$；若对所有 $t>0$ 都有 $\nu_t\sim\mu_t$，则记作$\boldsymbol{\nu}\sim\boldsymbol{\mu}$。

谈及 Liebscher 关于平稳因子化测度类型的工作时，我们采用 arXiv 版本 [6]。该版本的记号和编号与已发表的文章略有不同，本文的引用遵循 arXiv 版本的编号。

除非另有说明，其他记号均为标准记号；本文将在适当之处引入其他记号。

2. Random-set systems

本节将 Liebscher 的平稳因子化测度类型表述为代表元层面的形式。我们引入概率测度的因子化族，并说明这些族如何通过具体代表元实现 Liebscher 的测度类型。随后我们证明，每个这样的族都会规范地生成一个代数 Arveson 系统；而适当的可测性假设则确保所得系统具有 Arveson 系统的自然可测结构。

2.1. **闭集空间与因子化测度族**。设 L 是一个局部紧、第二可数的豪斯多夫空间。对每个 $t>0$，记 $\mathscr{C}_t$ 为 $[0,t]\times L$ 的闭子集的超空间，并赋予其标准博雷尔 σ–域 Σ_t（例如，闭子集超空间上 Fell（击中或错过）拓扑的博雷尔 σ–域）。在 [6]，中，同一超空间记作 $\mathfrak{F}_{[0,t]\times L}$；本文始终采用较简洁的记号 $\mathscr{C}_t$。

当需要强调对 L 的明确依赖时，我们将使用记号 $\mathscr{C}_t^{\{L\}}$，而不使用 $\mathscr{C}_t$。若 $L=\{*\}$ 是单元素集，则将超空间 $\mathscr{C}_t^{\{L\}}$ 记为 $\mathscr{C}_t^{\{*\}}$。

$\mathscr{C}_t$ 上 Fell 拓扑的一个标准子基由所有命中集 $H(O)=\{F\in\mathscr{C}_t\colon\ F\cap O\neq\varnothing\}$，组成，其中 $O\subset[0,t]\times L$ 是开集；以及未命中集 $M(K)=\{F\in\mathscr{C}_t\colon F\cap K=\varnothing\}$ 组成，其中 $K\subset[0,t]\times L$ 是紧集。

为后续使用，我们记录 Σ_t 的一个可数生成族。取 L 的开集可数基 $\mathcal{G}$，并令 $\mathcal{I}_t^{\mathbb{Q}}$ 为 $[0,t]$ 中由以下三种形式构成的开区间可数基
$\mathcal{I}_t^{\mathbb{Q}}:=\big\{(a,b)\colon\ a,\ b\in\mathbb{Q},\ 0<a<b<t\big\}\cup\big\{[0,b)\colon\ b\in\mathbb{Q},\ 0<b\le t\big\}\cup\big\{(a,\ t]\colon\ a\in\mathbb{Q},\ 0\le a<t\big\}$.定义可数的开矩形族

$$\mathcal{U}_t^{\mathbb{Q}}:=\{\,I\times G:\ I\in\mathcal{I}_t^{\mathbb{Q}},\ G\in\mathcal{G}\,\}. \tag{2}$$

对于 $U \in \mathcal{U}_t^{\mathbb{Q}}$，定义空交事件 $V_t(U) := \{Z \in \mathscr{C}_t : \ Z \cap U = \varnothing\} \in \Sigma_t$.

下面的引理为超空间σ–域确定了一个方便的可数生成类。

引理 2.1. 集族 $\{V_t(U) : U \in \mathcal{U}_t^{\mathbb{Q}}\}$ 对每个 $t > 0$ 生成 Σ_t。

证明. 设 $\mathcal{S}_t$ 为由 $\{V_t(U) : U \in \mathcal{U}_t^{\mathbb{Q}}\}$ 生成的 σ–域。我们断言 $\mathcal{S}_t = \Sigma_t$。事实上，对任意开集 $U \subset [0,t] \times L$，空交事件 $V_t(U) = \mathscr{C}_t \setminus H(U)$ 是 Fell 闭集，特别地是博雷尔的。因此 $\mathcal{S}_t \subset \Sigma_t$。对于反向包含，只需证明命中集 $H(O)$ 与未命中集 $M(K)$ 属于 $\mathcal{S}_t$。

固定一个开集 $O \subset [0,t] \times L$，并记 $O = \bigcup_{U \in \mathcal{U}(O)} U$，其中 $\mathcal{U}(O) := \{U \in \mathcal{U}_t^{\mathbb{Q}} : \ U \subset O\}$。则 $H(O) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}(O)} H(U) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}(O)} (\mathscr{C}_t \setminus V_t(U)) \in \mathcal{S}_t$，因为对每个$U \in \mathcal{U}_t^{\mathbb{Q}}$，$H(U) \in \mathcal{S}_t$，且 $\mathcal{U}(O)$ 可数。

取紧集 $K \subset [0,t] \times L$。我们证明

$$M(K) = \bigcup \Big\{ \bigcap_{j=1}^{n} V_t(U_j) \ : \ n \in \mathbb{N},\ U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}_t^{\mathbb{Q}},\ K \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_j \Big\}. \tag{3}$$

设 $F \in M(K)$，即 F是闭的且 $F \cap K = \varnothing$。则 $([0,t] \times L) \setminus F$是一个包含$K$的开集。对于每个 $x \in K$，选取 $U_x \in \mathcal{U}_t^{\mathbb{Q}}$ 使得 $x \in U_x \subset ([0,t] \times L) \setminus F$.。族 $\{U_x\}_{x \in K}$ 是紧集 K的一个开覆盖，并令 $K \subset U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}$ 为一个有限子覆盖。由于每个$U_{x_j} \subset ([0,t] \times L) \setminus F$，我们对所有 j都有 $F \cap U_{x_j} = \varnothing$，即 $F \in \bigcap_{j=1}^{n} V_t(U_{x_j})$。因此 F属于 (3) 的右侧。

反过来，假设对于某个 $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}_t^{\mathbb{Q}}$，有 $F \in \bigcap_{j=1}^{n} V_t(U_j)$，且满足$K \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_j$。那么对所有 j，都有$F \cap U_j = \varnothing$，因此 F与 $\bigcup_{j=1}^{n} U_j$不相交，从而 $F \cap K = \varnothing$。因此$F \in M(K)$。□

记号 2.2. 对于 $t > 0$，令 $\sigma_t : \mathscr{C}_t \to \mathscr{C}_1$ 为作用于时间坐标的缩放同胚:

$$\sigma_t(Z) := \big\{(t^{-1}r, \ell) : (r, \ell) \in Z\big\}. \tag{4}$$

对于 $s, t > 0$，我们考虑拼接映射$\oplus_{s,t} : \mathscr{C}_s \times \mathscr{C}_t \to \mathscr{C}_{s+t}$,

其中 $s + Z_2 := \big\{(s + r, \ell) : (r, \ell) \in Z_2\big\} \subset [s, s+t] \times L.$ $\oplus_{s,t}(Z_1, Z_2) = Z_1 \cup (s + Z_2)$,

现在我们来介绍本文的主要研究对象。

定义 2.3。 如果测度族 $\boldsymbol{\mu} := \{\mu_t\}_{t>0}$ 定义在 $(\mathscr{C}_t, \Sigma_t)$ 上，并满足以下条件，则称其为 $[0,1] \times L$ 上的因子化族:

(i) (因子化。) $\mu_{s+t} \sim (\mu_s \otimes \mu_t) \circ \oplus_{s,t}^{-1}$, 对所有 $s, t > 0$ 均成立。(ii) (不存在确定性时间切片。) $\mu_t\big(\{Z \in \mathscr{C}_t : \ Z \cap (\{r\} \times L) \neq \varnothing\}\big) = 0$, 对所有$t > 0$ 以及所有 $r \in [0,t]$ 均成立。

若一个因子化族 $\boldsymbol{\mu} := \{\mu_t\}_{t>0}$ 满足以下两个附加条件，则称其为可测的:

(iii) (非退化性。) 对每个 $t > 0$，μ_t 的支撑不包含在有限多个原子上。(iv) (可测性。) (iva) 存在一个固定的可数环 $\mathcal{R} \subset \Sigma_1$，它生成 Σ_1，使得对每个 $A \in \mathcal{R}$，$t \mapsto \widetilde{\mu}_t(A)$ 都是 $(0, \infty)$ 上的博雷尔函数，其中 $\widetilde{\mu}_t := (\sigma_t)_* \mu_t$。(ivb) 存在一个博雷尔映射 $\Delta : (0,\infty)^2 \times \mathscr{C}_1 \to (0, \infty)$，使得对每个 $s, t > 0$,

$$\Delta\big(s, t, \sigma_{s+t}(Z)\big) = \Delta_{s,t}(Z) \qquad \text{for } \mu_{s+t}\text{–a.e. } Z \in \mathscr{C}_{s+t},$$

其中 $\Delta_{s,\ t}$ 是拉东–尼科迪姆导数

$$\Delta_{s,t} := \frac{d\big((\mu_s \otimes \mu_t) \circ \oplus_{s,t}^{-1}\big)}{d\mu_{s+t}} \quad (\mu_{s+t}\text{–a.e.}).$$

观察 2.4。 条件 (ii) 表示，在 μ_t下，典范随机闭集 $Z \subset [0,t] \times L$ 几乎必然避开每个确定性时间切片 $\{r\} \times L$。这消除了拼接时刻处边界切片的歧义。对于 Liebscher 的平稳因子化测度类型，预计类似性质在明显的退化情形之外也成立；参见 [6,注 4。2]。

条件 (iii) 确保了可分希尔伯特空间 $L^2(\mathscr{C}_t, \mu_t)$ 的无限维性。此外，(iv) 中的可测性要求提供了一个方便的充分假设，以确保该构造赋予 Arveson 系统可测结构。

2.2. **与 Liebscher 的平稳因子化测度类型的关系**。 测度可分解族这一概念等价于 Liebscher 的平稳因子化测度类型这一概念（定义 4.1，见 [6]），二者仅在代表元的选择上有所不同。我们将在本文采用的规范化方式下阐述这种等价性。为此，我们先引入一些有用的概念性记号。

记号 2.5。 对于 $0 \le s < t \le 1$，定义限制平移映射 $R_{s,t} : \mathscr{C}_1 \to \mathscr{C}_{t-s}$ 为

$$R_{s,t}(Z) := \big((Z \cap ([s,t] \times L)) - (s,0)\big),$$

其中 $(s,\ 0)$ 表示沿时间坐标平移 s（而 L 保持不变）： $A - (s,0) : = \{(r-s,\ \ell) : (r,\ \ell) \in A\}$. 对于 $u \in \mathbb{R}$，定义 $\mathscr{C}_1$ 上的周期平移（旋转）为

$$S_u(Z) := \big((u+Z) \cup (u-1+Z)\big) \cap ([0,1] \times L). \tag{5}$$

注意，对所有 $n \in \mathbb{Z}$， $S_{u+n} = S_u$ 均成立，因此只需考虑 $u \in [0,1]$。

下一个引理表明，对可分解族作区间限制，可在测度等价意义下恢复该族中预期的成员

引理 2.6. 设 $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_t\}_{t>0}$ 是 $[0,1] \times L$ 上的一个测度因子化族。那么对于每个 $0 \le s < t \le 1$,

$$(R_{s,t})_* \mu_1 \ \sim \ \mu_{t-s}.$$

等价地，限制平移测度类型 $\mathcal{M}_{s,\ t} : = (R_{s,\ t})_* [\mu_1]$ 等于 $[\mu_{t-s}]$.

证明。 固定 $0 \le s < t \le 1$。首先，假设 $t < 1$。反复应用定义 2.3 中的因子化 (i)，得到三重分解

$$\mu_1 \ \sim \ (\mu_s \otimes \mu_{t-s} \otimes \mu_{1-t}) \circ \oplus_{s,\, t-s,\, 1-t}^{-1}, \tag{6}$$

其中 $\oplus_{s,\, t-s,\, 1-t}(Z_1, Z_2, Z_3) := Z_1 \cup (s + Z_2) \cup (t + Z_3) \in \mathscr{C}_1$. 令 $Z = \oplus_{s,\, t-s,\, 1-t}(Z_1, Z_2, Z_3)$。于是 $Z \cap ([s,t] \times L) = (s + Z_2) \cup \big(Z_1 \cap ([s,t] \times L)\big) \cup \big((t + Z_3) \cap ([s,t] \times L)\big)$. 最后两个交集只能在时刻 s 或 t 产生边界切片。根据定义 2.3(ii)，在 $\mu_s \otimes \mu_{t-s} \otimes \mu_{1-t}$ 下，我们几乎必然有 $Z_1 \cap (\{s\} \times L) = \varnothing$ 以及 $Z_2 \cap (\{0\} \times L) = \varnothing$ 和 $Z_3 \cap (\{0\} \times L) = \varnothing$，因此边界切片歧义只会发生在一个零测集上。因此，对于 $(\mu_s \otimes \mu_{t-s} \otimes \mu_{1-t})$–几乎处处的 (Z_1, Z_2, Z_3),

$$R_{s,t}(Z) = \big(Z \cap ([s,t] \times L)\big) - (s,0) = Z_2.$$

因此，在$R_{s,t}$ 下，式（6）右侧的推前恰好是 μ_{t-s}，因为它就是投影到中间坐标。由于推前保持相互绝对连续，将 $R_{s,t}$ 应用于（6）便得到 $(R_{s,t})_* \mu_1 \sim \mu_{t-s}$。

接下来，假设 $t = 1$。因子化 (i) 给出 $\mu_1 \sim (\mu_s \otimes \mu_{1-s}) \circ \oplus_{s,\, 1-s}^{-1}$。根据 (ii)，对于 $(\mu_s \otimes \mu_{1-s})$– 几乎处处的 (Z_1, Z_2)，我们有 $Z_1 \cap (\{s\} \times L) = \varnothing$ 且 $Z_2 \cap (\{0\} \times L) = \varnothing$，因此 $R_{s,1}(Z_1 \oplus_{s,1-s} Z_2) = Z_2$ 几乎处处。取推前可得 $(R_{s,1})_* \mu_1 \sim \mu_{1-s}$。 □

以下命题表明，每个因子化族都确定一个 Liebscher 意义下的平稳因子化测度类型 [6, 定义 4.1]。

命题 2.7. 设 $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_t\}_{t>0}$ 是一个因子分解测度族，并令 $\mathcal{M} := [\mu_1]$ 定义在$\mathscr{C}_1$上。那么 $\mathcal{M}$ 是 $[0,1] \times L$上的一个（非退化）平稳因子化测度类型，即：

(F)（子区间上的因子分解。）$\mathcal{M}_{r,\ t} = \mathcal{M}_{r,\ s} * \mathcal{M}_{s,\ t}$，对所有 $0 \le r < s < t \le 1$ 均成立，其中$\mathcal{M}_{a,\ b} : = (R_{a,\ b})_* \mathcal{M}$，且 $*$ 是由并集／拼接诱导的卷积。*(S)*（平稳性。） $\mathcal{M}^{+u} : = (S_u)_* \mathcal{M} = \mathcal{M}$，对每个 $u \in \mathbb{R}$ 均成立。*(N)*（非退化性。） $\mathcal{M}$ 不支撑在有限多个原子上。

此外，对所有 $0 \le s < t \le 1$ 均有 $\mathcal{M}_{s,\,t} = [\mu_{t-s}]$。

证明。固定 $0 \le r < s < t \le 1$。由引理 2.6，$\mathcal{M}_{r,\,t} = [\mu_{t-r}]$，$\mathcal{M}_{r,\,s} = [\mu_{s-r}]$，以及 $\mathcal{M}_{s,\,t} = [\mu_{t-s}]$.在第一坐标平移下对时间区间的自然同一化中，$[r,t] \times L$ 上的并集映射对应于 $[0, t-r] \times L$ 上的拼接映射 $\oplus_{s-r,\;t-s}$。因此 $\mathcal{M}_{r,\,s} * \mathcal{M}_{s,\,t} = \big[\,(\mu_{s-r} \otimes \mu_{t-s}) \circ \oplus_{s-r,\;t-s}^{-1}\big]$. 利用定义 2.3(i)，取 $(s-r) + (t-s) = t-r$，得到 $\mu_{t-r} \sim (\mu_{s-r} \otimes \mu_{t-s}) \circ \oplus_{s-r,\;t-s}^{-1}$，从而 $\mathcal{M}_{r,\,t} = \mathcal{M}_{r,\,s} * \mathcal{M}_{s,\,t}$。

为检验平稳性，只需证明 $(S_u)_*\mu_1 \sim \mu_1$ 对 $u \in [0,1]$。固定 $u \in [0,1]$ 并令$a := 1-u$。定义坐标翻转

$$\mathrm{swap} : \mathscr{C}_a \times \mathscr{C}_u \to \mathscr{C}_u \times \mathscr{C}_a, \qquad \mathrm{swap}(Z_1, Z_2) := (Z_2, Z_1).$$

对 (5) 的直接检验表明，$S_u\big(Z_1 \oplus_{a,u} Z_2\big) = Z_2 \oplus_{u,a} Z_1$ 每当 $Z_1 \cap (\{a\} \times L) = \varnothing$ 且$Z_2 \cap (\{0\} \times L) = \varnothing$。根据定义 2.3(ii)，例外集的 $(\mu_a \otimes \mu_u)$–测度为 0。因此映射 $S_u \circ \oplus_{a,u}$ 与 $\oplus_{u,a} \circ$互换后在 $(\mu_a \otimes \mu_u)$–几乎处处一致，从而它们对$\mu_a \otimes \mu_u$ 的推前测度重合。将 $\mu_1 \sim (\mu_a \otimes \mu_u) \circ \oplus_{a}^{-1},_{u}$ 沿 S_u推前，即得

$$(S_u)_*\mu_1 \;\sim\; (\mu_a \otimes \mu_u) \circ (S_u \circ \oplus_{a,u})^{-1} = (\mu_u \otimes \mu_a) \circ \oplus_{u,a}^{-1} \sim \; \mu_1,$$

因此 $\mathcal{M}^{+u} = \mathcal{M}$。

非退化性由定义 2.3在 $t = 1$处应用 (iii) 得出。 □

Liebscher 的 [6, 定义 4.1] 从单个测度类型 $\mathcal{M}$ 出发，定义其在 $\mathscr{C}_1$ 上的限制类型$\mathcal{M}_{s,\,t}$ 适用于子区间。下一个命题给出了从 Liebscher 的测度类型框架反向构造因子分解测度族的方法，前提是选取一个没有确定性时间切片的代表元。

命题 2.8。设 $\mathcal{M}$是 $\mathscr{C}_1$ 上的平稳因子化测度类型（按 *Liebscher* 的定义）。假设 $\mathcal{M}$ 存在一个代表元 $\mu \in \mathcal{M}$，满足无确定性切片性质

$$\mu\big(\{Z \in \mathscr{C}_1 :\; Z \cap (\{r\} \times L) \neq \varnothing\}\big) = 0, \qquad r \in [0,1].$$

那么 $\mathcal{M}$ 给出一个因子分解测度族 $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_t\}_{t>0}$，其对应的区间测度类型恰好是$\{\mathcal{M}_{s,t}\}_{s,\;t>0}$。

证明。取这样的代表性概率测度 $\mu \in \mathcal{M}$，并在 $\mathscr{C}_t$ 上定义测度 μ_t，其中$t \in (0,1]$ 通过限制/平移，即 $\mu_t := (R_{0,t})_*\mu_\circ$ 应用 Liebscher 因子分解 (F)，取 $r = 0$ 和 s，使得 t 满足 $s + t \le 1$，我们得到 $\mathcal{M}_{0,s+t} = \mathcal{M}_{0,s} * \mathcal{M}_{s,s+t}$.。由平稳性 (S)，平移 s 会将条带 $[0,t] \times L$ 映射到 $[s, s+t] \times L$，并保持测度类型不变，因此 $\mathcal{M}_{s,s+t}$ 在平移回起点 0 后与 $\mathcal{M}_{0,t}$ 相对应。于是 $\mathcal{M}_{0,s+t} = \mathcal{M}_{0,s} * \mathcal{M}_{0,t}$，这恰好是 $[\mu_{s+t}] = \big[(\mu_s \otimes \mu_t) \circ \oplus_{s}^{-1},_{t}\big]$，从而得到所需的相互绝对连续性。假设的 μ 无确定性切片性质意味着，对于所有满足 $t \in (0,1]$的 μ_t，定义 2.3(ii) 均成立。

要从 $(0,1]$推广到所有 $t > 0$，写作 $t = n + \alpha$，其中 $n \in \mathbb{N}$，且 $\alpha \in (0,1],$，并通过迭代拼接定义 μ_t:

$$\mu_t := (\mu_1^{(\otimes n)} \otimes \mu_\alpha) \circ \oplus_{1,\cdots,1,\alpha}^{-1}.$$

拼接的结合性保证测度类定义良好，由此得到的族对所有 $s,\; t > 0$ 都是可分解的。□

观察 2.9（非单点 L 无确定性时间切片性质的失效）。当 L 是单点时，Liebscher推论 4.2(i)表明，对于 $[0,1]$ 上任意不同于 $\delta_{[0,1]}$（集中于全集 $[0,1]$的测度类型）的平稳因子化测度类型，以及该测度类型中的任意代表元 μ，都有 $\mu(\{Z :\quad t \in Z\}) = 0$ 对所有 $t \in [0,1]$均成立。特别地，在无标记情形下，只要排除退化情形，命题 2.8中的假设便自动成立。参见 [6, 推论 4。2]。

对于非单点 L，相应的“无确定性时间切片”性质可能不成立。假设 L 是一个非单点紧度量空间，并固定 $\ell_0 \in L$。在 $L \setminus \{\ell_0\}$上选取一个 Borel概率测度 η，并固定 $\lambda > 0$。设 Y是定义在 $(0,\;1) \times (L \setminus \{\ell_0\})$ 上的一个泊松点过程，其

强度为 $\nu := \lambda$勒贝格测度 $\restriction_{(0,1)} \otimes \eta$，并令 $Y \subset (0,\ 1) \times (L \setminus \{\ell_0\})$ 表示其（有限）原子集。定义随机闭集

$$Z := ([0,1] \times \{\ell_0\}) \cup Y \ \subset\ [0,1] \times L,$$

并令 μ 为 $\mathscr{C}_1$上的 Z 分布，其测度类型为 $\mathcal{M} := [\mu]$。那么对每个 $r \in [0,1]$，几乎必然有 $(r,\ \ell_0) \in Z$，因此

$$\mu\big(\{Z \in \mathscr{C}_1 :\ Z \cap (\{r\} \times L) \neq \varnothing\}\big) = 1, \qquad r \in [0,1].$$

特别是，命题 2.8 要求存在一个没有确定性时间切片的代表元这一假设，对 $\mathcal{M}$ （实际上，对每个 $\mu' \sim \mu$）都不成立。

另一方面， $\mathcal{M}$ 按照 Liebscher 的意义是平稳且可分解的： S_u 保持 $[0,1]\times\{\ell_0\}$不变，并且保持泊松分布不变，因为 $(S_u)_*\nu = \nu$；此外， Y 在互不相交的时间区间上的限制彼此独立，且通过并集进行拼接，因此子区间上的因子分解成立。最后， μ 是非退化的（不集中于有限多个原子上），因为泊松分量有无穷多种具有正概率的可能构型。

2.3. **从因子化族到代数 Arveson 系统**。 给定一个因子分解测度族 $\boldsymbol{\mu} := \{\mu_t\}_{t>0}$，考虑希尔伯特空间

$$E_t^{\boldsymbol{\mu}} := L^2(\mathscr{C}_t, \mu_t) \qquad (t > 0)$$

以及结构酉算子$U_{s,t}$： $E_s^{\boldsymbol{\mu}} \otimes E_t^{\boldsymbol{\mu}} \to E_{s+t}^{\boldsymbol{\mu}}$ 最初在简单张量上定义为

$$(U_{s,t}(f \otimes g))(Z) \ :=\ \Delta_{s,t}(Z)^{1/2}\, f(Z \cap ([0,s] \times L))\, g\big((Z \cap ([s,s+t] \times L)) - (s,0)\big). \tag{7}$$

命题 2.10. $\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}} := \{E_t^{\boldsymbol{\mu}}, U_{s,t}\}_{t>0}$ **是一个代数** *Arveson* **系统。**

证明。 首先，我们证明每个$U_{s,t}$ 都是简单张量上的等距映射。将 $E_s^{\boldsymbol{\mu}} \otimes E_t^{\boldsymbol{\mu}}$ 与$L^2(\mathscr{C}_s \times \mathscr{C}_t, \mu_s \otimes \mu_t)$等同，并令$\nu_{s,t} :\ = (\mu_s \otimes \mu_t) \circ \oplus_s^{-1}{}_{,t}$。根据定义，$d\nu_{s,t} = \Delta_{s,t}\, d\mu_{s+t}$。对于简单张量 $f \otimes g$，我们于是有

$$\|U_{s,t}(f \otimes g)\|^2_{L^2(\mu_{s+t})} = \int_{\mathscr{C}_{s+t}} |f(Z \cap ([0,s] \times L))|^2 \left|g((Z \cap ([s,s+t] \times L)) - (s,0))\right|^2 d\nu_{s,t}(Z).$$

在推前$\nu_{s,t}$ 下作变量替换，得到

$$\|U_{s,t}(f\otimes g)\|^2_{L^2(\mu_{s+t})} = \int_{\mathscr{C}_s\times\mathscr{C}_t} |f((Z_1\oplus_{s,t}Z_2)\cap([0,s]\times L))|^2 \left|g(((Z_1\oplus_{s,t}Z_2)\cap([s,s+t]\times L))-(s,0))\right|^2 d(\mu_s\otimes\mu_t).$$

根据定义 2.3(ii)（不存在确定性时间切片）， $\mu_t(\{Z_2 :\ Z_2 \cap (\{0\} \times L)\ \neq \varnothing\})\ = 0$且 $\mu_s(\{Z_1 :\ Z_1 \cap (\{s\} \times L)\ \neq \varnothing\})\ = 0$，因此对于$(\mu_s \otimes \mu_t)$–几乎处处 (Z_1, Z_2) 我们有

$$(Z_1 \oplus_{s,t} Z_2) \cap ([0,s] \times L) = Z_1, \qquad ((Z_1 \oplus_{s,t} Z_2) \cap ([s,s+t] \times L)) - (s,0) = Z_2.$$

因此 $\|U_{s,t}(f \otimes g)\|^2 = \|f\|^2\|g\|^2$，所以 $U_{s,t}$ 可延拓为一个等距映射。

为了证明 $U_{s,t}$ 是酉算子，定义 $V_{s,t} : E_{s+t}^{\boldsymbol{\mu}} \to E_s^{\boldsymbol{\mu}} \otimes E_t^{\boldsymbol{\mu}}$ 在 $h \in L^2(\mathscr{C}_{s+t}, \mu_{s+t})$ b 上 y

$$(V_{s,t}h)(Z_1, Z_2) := \Delta_{s,t}(Z_1 \oplus_{s,t} Z_2)^{-1/2}\, h(Z_1 \oplus_{s,t} Z_2), \qquad (Z_1, Z_2) \in \mathscr{C}_s \times \mathscr{C}_t.$$

同样的变量替换计算表明 $\|V_{s,t}h\|_{L^2(\mu_s\otimes\mu_t)}\ = \|h\|_{L^2(\mu_{s+t})}$，因此 $V_{s,t}$ 是一个等距映射。此外，对于简单张量 $f \otimes g$，可以验证 $V_{s,t}U_{s,t}(f \otimes g)\ = f \otimes g$ 且$U_{s,t}V_{s,t}h = h$ μ_{s+t}–几乎处处成立。因此 $V_{s,t} = U_{s,t}^*$ 和 $U_{s,t}$ 是酉算子。

接下来，我们证明族 $\{U_{s,t}\}_{s,t>0}$ 满足结合律（1）。固定 $r, s, t > 0$，并定义三重拼接映射 $\oplus_{r,s,t}$: $\mathscr{C}_r \times \mathscr{C}_s \times \mathscr{C}_t \to \mathscr{C}_{r+s+t}$ 如下

$$\oplus_{r,s,t}(Z_1, Z_2, Z_3) = Z_1 \cup (r + Z_2) \cup (r + s + Z_3).$$

令 $\nu_{r,s,t} := (\mu_r \otimes \mu_s \otimes \mu_t) \circ \oplus_{r\ s,,t}^{-1}$ 并定义

$$\Delta_{r,s,t} := \frac{d\nu_{r,s,t}}{d\mu_{r+s+t}} \qquad (\mu_{r+s+t}\text{-a.e.}).$$

另定义限制/平移映射（由于不存在确定性时间切片，故其对 μ_{r+s+t}–几乎处处都有定义）：

$$R_r^{(s+t)}(Z)\colon=\big((Z\cap([r,r+s+t]\times L))-(r,\ 0)\big)\in\mathscr{C}_{s+t},\qquad R_{r+s}^{(t)}(Z)\colon=\big((Z\cap([r+s,r+s+t]\times L))-(r+s,\ 0)\big)\in\mathscr{C}_t,$$

类似地，$R_0^{(r+s)}(Z)\colon=Z\cap([0,r+s]\times L)\in\mathscr{C}_{r+s}$。我们声称，$\Delta_{r,\,s,\,t}$ 以两种方式可分解：

$$\Delta_{r,s,t}(Z)=\Delta_{r,s+t}(Z)\,\Delta_{s,t}\big(R_r^{(s+t)}(Z)\big)=\Delta_{r+s,t}(Z)\,\Delta_{r,s}\big(R_0^{(r+s)}(Z)\big)\qquad(\mu_{r+s+t}\text{-a.e. }Z).\tag{8}$$

为此，定义分解测度 $\nu_{s,\,t}\colon=(\mu_s\otimes\mu_t)\circ\oplus_{s\,t}^{-1}$，在 $\mathscr{C}_{s+t}$ 上，$\nu_{r,\,s+t}\colon=(\mu_r\otimes\mu_{s+t})\circ\oplus_r^{-1}$，$_{s+t}$ 在 $\mathscr{C}_{r+s+t}$ 上，以及 $\nu_{r,\,s,\,t}\colon=(\mu_r\otimes\mu_s\otimes\mu_t)\circ\oplus_{r\,s,\,,\,t}^{-1}$ 在 $\mathscr{C}_{r+s+t}$. 上。根据定义，

$$\Delta_{s,t}:=\frac{d\nu_{s,t}}{d\mu_{s+t}}\quad(\mu_{s+t}\text{-a.e.}),\qquad\Delta_{r,s+t}:=\frac{d\nu_{r,s+t}}{d\mu_{r+s+t}}\quad(\mu_{r+s+t}\text{-a.e.}),\qquad\Delta_{r,s,t}:=\frac{d\nu_{r,s,t}}{d\mu_{r+s+t}}\quad(\mu_{r+s+t}\text{-a.e.}).$$

令 $F\colon\mathscr{C}_{r+s+t}\to[0,\infty)$ 为任意非负可测函数。则

$$\begin{aligned}\int_{\mathscr{C}_{r+s+t}}F(Z)\,d\nu_{r,s,t}(Z)&=\int_{\mathscr{C}_r\times\mathscr{C}_s\times\mathscr{C}_t}F\big(\oplus_{r,s,t}(Z_1,Z_2,Z_3)\big)\,d\mu_r(Z_1)\,d\mu_s(Z_2)\,d\mu_t(Z_3)\\&=\int_{\mathscr{C}_r\times\mathscr{C}_s\times\mathscr{C}_t}F\big(Z_1\oplus_{r,s+t}(Z_2\oplus_{s,t}Z_3)\big)\,d\mu_r(Z_1)\,d\mu_s(Z_2)\,d\mu_t(Z_3)\\&=\int_{\mathscr{C}_r\times\mathscr{C}_{s+t}}F\big(Z_1\oplus_{r,s+t}W\big)\,d\mu_r(Z_1)\,d\nu_{s,t}(W)\\&=\int_{\mathscr{C}_r\times\mathscr{C}_{s+t}}F\big(Z_1\oplus_{r,s+t}W\big)\,\Delta_{s,t}(W)\,d\mu_r(Z_1)\,d\mu_{s+t}(W).\end{aligned}$$

现在将测度 $\mu_r\otimes\mu_{s+t}$ 在 $\oplus_{r,s+t}$下推前。根据定义，该推前测度为 $\nu_{r,s+t}$，并且在边界时间切片 $\{r\}\times L$ 未被命中的满测度集合上（因此不存在边界歧义），有 $R_r^{(s+t)}\big(Z_1\oplus_{r,s+t}W\big)=W.$。因此，前面的积分变为

$$\int_{\mathscr{C}_{r+s+t}}F(Z)\,d\nu_{r,s,t}(Z)=\int_{\mathscr{C}_{r+s+t}}F(Z)\,\Delta_{s,t}\big(R_r^{(s+t)}(Z)\big)\,d\nu_{r,s+t}(Z).$$

这表明 $\nu_{r,s,t}\ll\nu_{r,s+t}$，其拉东–尼科迪姆导数为 $d\nu_{r,s,t}/d\nu_{r,s+t}=\Delta_{s,t}\circ R_r^{(s+t)}$($\nu_{r,s+t}$-几乎处处)。由于 $d\nu_{r,s+t}=\Delta_{r,s+t}\,d\mu_{r+s+t}$，拉东–尼科迪姆链式法则给出

$$\frac{d\nu_{r,s,t}}{d\mu_{r+s+t}}=\frac{d\nu_{r,s,t}}{d\nu_{r,s+t}}\cdot\frac{d\nu_{r,s+t}}{d\mu_{r+s+t}}=\big(\Delta_{s,t}\circ R_r^{(s+t)}\big)\cdot\Delta_{r,s+t},$$

这就是 (8) 中的第一个因子化。第二个因子化的证明方法相同，将括号按 $(r+s)\ +t$ 而不是 $r+(s+t)$ 排列：定义 $\nu_{r+s,t}:=(\mu_{r+s}\otimes\mu_t)\circ\oplus_{r+s,t}^{-1}$ 并如前所述推理，得到 $d\nu_{r,s,}$ $_t/d\mu_{r+s+t}=\big(\Delta_{r,s}\circ R_0^{(r+s)}\big)\cdot\Delta_{r+s,t}$ (μ_{r+s+t}-几乎处处)，这恰好就是 (8) 中的第二个等式。

现在在初等张量 $f\otimes g\otimes h$（其中 $f\in E_r^{\boldsymbol{\mu}}$、$g\in E_s^{\boldsymbol{\mu}}$、$h\in E_t^{\boldsymbol{\mu}}$）上检验结合律（1），并在 $Z\in\mathscr{C}_{r+s+t}$ 处取值。两次使用（7），并利用（ii）忽略边界切片，可得

$$\begin{aligned}\big(U_{r,s+t}(\mathrm{id}\otimes U_{s,t})(f\otimes g\otimes h)\big)(Z)&=\Delta_{r,s+t}(Z)^{1/2}\,f(Z\cap([0,r]\times L))\,\big(U_{s,t}(g\otimes h)\big)(R_r^{(s+t)}(Z))\\&=\Delta_{r,s+t}(Z)^{1/2}\,\Delta_{s,t}(R_r^{(s+t)}(Z))^{1/2}\,f(\cdots)\,g(\cdots)\,h(\cdots)\\&=\Delta_{r,s,t}(Z)^{1/2}\,f(\cdots)\,g(\cdots)\,h(\cdots),\end{aligned}$$

其中最后一步使用了（8）。类似地，

$$\begin{aligned}\big(U_{r+s,t}(U_{r,s}\otimes\mathrm{id})(f\otimes g\otimes h)\big)(Z)&=\Delta_{r+s,t}(Z)^{1/2}\,\big(U_{r,s}(f\otimes g)\big)(R_0^{(r+s)}(Z))\,h(R_{r+s}^{(t)}(Z))\\&=\Delta_{r+s,t}(Z)^{1/2}\,\Delta_{r,s}(R_0^{(r+s)}(Z))^{1/2}\,f(\cdots)\,g(\cdots)\,h(\cdots)\\&=\Delta_{r,s,t}(Z)^{1/2}\,f(\cdots)\,g(\cdots)\,h(\cdots),\end{aligned}$$

再次由 (8). 因此两边一致 μ_{r+s+t}–几乎处处于一个稠密的张量集上，故（1）成立。 □

2.4. **与 Liebscher–Tsirelson 构造的相容性。** 下一个命题将由因子化族构造的代数乘积系统等同于附属于相应平稳可分解测度型的 Liebscher–Tsirelson 乘积系统。

命题 2.11. 设 $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_t\}_{t>0}$ 是 $[0,1] \times L$ 上的一个因子化族，且 $\mathcal{M} := [\mu_1]$ 是与之对应的平稳因子化测度类型。设 $\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}} = \{E_t^{\boldsymbol{\mu}}, U_{s,t}\}_{t>0}$ 是与 $\boldsymbol{\mu}$ 对应的代数 *Arveson* 系统。那么 $\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}}$ 同构于与 $\mathcal{M}$ 对应的 *Liebscher–Tsirelson* 代数 *Arveson* 系统 $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}$ 。

证明。 我们简要回顾 Liebscher–Tsirelson 构造（参见 [6, 12, 13]），并采用适合本文记号的表述。

设 (X, Σ) 为标准博雷尔空间，且 $\mathcal{M}$ 是 X 上的一种测度类型。对于 $\mu, \mu' \in \mathcal{M}$，定义测度变换酉算子 $U_{\mu,\mu'}$: $L^2(X,\mu) \to L^2(X,\mu')$，如下所示

$$(U_{\mu,\mu'} f)(x) := \Big(\frac{d\mu}{d\mu'}(x)\Big)^{1/2} f(x) \qquad (\mu'\text{-a.e. } x),$$

使得 $\int |U_{\mu,\mu'} f|^2 \, d\mu' = \int |f|^2 \, d\mu$。于是，根据 Radon–Nikodym 链式法则，有 $U_{\mu,\mu''} = U_{\mu',\mu''} U_{\mu,\mu'}$。我们还考虑希尔伯特空间

$$L^2(\mathcal{M}) := \Big\{ \psi = (\psi_\mu)_{\mu\in\mathcal{M}} : \psi_\mu \in L^2(X,\mu),\ \psi_{\mu'} = U_{\mu,\mu'}\psi_\mu \ \forall\, \mu,\mu' \in \mathcal{M} \Big\},$$

内积为 $\langle \psi, \phi \rangle := \int_X \psi_\mu \phi_\mu \, d\mu$。对于任意 $\mu_0 \in \mathcal{M}$，求值算子 $\mathrm{ev}_{\mu_0}: L^2(\mathcal{M}) \to L^2(X,\mu_0)$，$\mathrm{ev}_{\mu_0}(\psi) := \psi_{\mu_0}$ 是酉算子。

现在设 $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_t\}_{t>0}$ 是一个因子化族，且 $\mathcal{M} = [\mu_1]$。那么 $\mathcal{M}$ 具有区间限制类型

$$\mathcal{M}_{0,t} = [\mu_t] \qquad (0 < t \le 1).$$

根据 [6, 命题 4.1]，Liebscher–Tsirelson 代数系统 $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}$ 的纤维为 $E_t^{\mathcal{M}} := L^2(\mathcal{M}_{0,t})$，其中 $t \in (0,1]$。接着考虑酉算子 $\theta_t := \mathrm{ev}_{\mu_t}: E_t^{\mathcal{M}} \longrightarrow E_t^{\boldsymbol{\mu}}$。

对于 $t > 1$，Liebscher 将乘法从 $[0,1]$ 延拓到所有 $t > 0$，采用的是标准延拓过程（参见 [6, 命题 3.1]）。我们利用乘法性将 θ_t 延拓到所有 $t > 0$ （使用 $\theta_1^{\otimes n} \otimes \theta_\alpha$ 和结构映射来定义 $\theta_{n+\alpha}$ ）。只需验证 $s, t \in$ （$0,1]$ 且$s + t \le 1$）时的乘积关系。

固定这样的 s，t，并令 $f \in L^2(\mathscr{C}_s, \mu_s)$ 和 $g \in L^2(\mathscr{C}_t, \mu_t)$。构造 $\xi_s := \theta_s^{-1}(f) \in E_s^{\mathcal{M}}$和 $\xi_t := \theta_t^{-1}(g) \in E_t^{\mathcal{M}}$。根据 [6, 命题 4.1]，中的显式乘法公式，乘积$V_{s,t}(\xi_s \otimes \xi_t) \in E_{s+t}^{\mathcal{M}}$由其相对于因子化代表测度 $\nu_{s,t} := (\mu_s \otimes \mu_t) \circ \oplus_{s,t}^{-1} \in [\mu_{s+t}]$的分量确定：对于 $\nu_{s,t}$–几乎处处的 $Z \in \mathscr{C}_{s+t}$，

$$\big(V_{s,t}(\xi_s \otimes \xi_t)\big)_{\nu_{s,t}}(Z) = f(Z \cap ([0,s] \times L))\, g\big((Z \cap ([s, s+t] \times L)) - (s,0)\big).$$

由于定义 2.3(ii)，边界切片歧义只会出现在一个零测集上。

现在应用 $\theta_{s+t} = \mathrm{ev}_{\mu_{s+t}}$，即取 μ_{s+t}–分量。由于 $\nu_{s,t} \sim \mu_{s+t}$，一致性关系给出

$$\big(V_{s,t}(\xi_s \otimes \xi_t)\big)_{\mu_{s+t}} = \Big(\frac{d\nu_{s,t}}{d\mu_{s+t}}\Big)^{1/2} \big(V_{s,t}(\xi_s \otimes \xi_t)\big)_{\nu_{s,t}}.$$

根据定义，$\Delta_{s,t} := \frac{d\nu_{s,t}}{d\mu_{s+t}}$，因此

$$\theta_{s+t} V_{s,t}(\xi_s \otimes \xi_t) = \Delta_{s,t}^{1/2}\, f(Z \cap ([0,s] \times L))\, g\big((Z \cap ([s, s+t] \times L)) - (s,0)\big),$$

这恰好是 $U_{s,t}(f \otimes g)$ 根据 (7). 因此，

$$\theta_{s+t}\, V_{s,t} = U_{s,t}\, (\theta_s \otimes \theta_t) \qquad \text{for } s,t \in (0,1],\ s+t \le 1,$$

在稠密子空间上成立，因此处处成立。将乘积系统从 $[0,1]$ 扩展到所有 $t > 0$ 后，这个交织恒等式对所有 s，$t > 0$ 都成立。□

2.5. **可测性：从可测族到 Arveson 系统**。以下引理给出了建立所得希尔伯特场可测性所需的基本依赖参数的积分原理。

引理 2.12. 设(X,Σ) 是标准博雷尔空间，设 T 是标准博雷尔空间，并设 $t\mapsto\nu_t$ 是定义在(X,Σ) 上的有限测度族，使得对于生成 Σ的某个固定可数环$\mathcal{R}$ 中的每个 A， $t\mapsto\nu_t(A)$ 都是博雷尔集。若 F: $T\times X\to[0,\infty)$ 是博雷尔的，则 $t\mapsto\int_X F(t,x)\,d\nu_t(x)$ 是博雷尔的。

证明。 由于 T 是标准博雷尔空间，取一个生成博雷尔 σ-代数 Bor(T) 的可数 π–系 $\mathcal{P}_T$。如有必要，可扩大 $\mathcal{R}$ （仍保持可数），从而假设 $X\in\mathcal{R}$。

对于 $E\subset T\times X$和 $t\in T$，记 $E_t:=\{x\in X:(t,x)\in E\}$,并定义 $\mathcal{D}:=\big\{E\in\text{Bor}(T)\otimes\Sigma:\ t\mapsto\nu_t(E_t)$在 $T\big\}$. 上是博雷尔的。于是 $\mathcal{D}$ 是一个 Dynkin 系统，因为每个 ν_t 都是有限测度，且 $t\mapsto\nu_t(X)$ 是博雷尔的。此外，对于每个 $B\in\mathcal{P}_T$和 $A\in\mathcal{R}$，都有$(B\times A)_t=\begin{cases}A,&t\in B\\ \varnothing,&t\notin B\end{cases}$

因此 $\nu_t\big((B\times A)_t\big)=\mathbb{1}_B(t)\,\nu_t(A)$。于是，对所有 $B\in\mathcal{P}_T$, $A\in\mathcal{R}$, $B\times A\in\mathcal{D}$都成立。由于族 $\{B\times A:\ B\in\mathcal{P}_T,\ A\in\mathcal{R}\}$是一个 π–系统，且 $\sigma(\mathcal{P}_T)\otimes\sigma(\mathcal{R})=\text{Bor}(T)\otimes\Sigma$，由 π–λ定理可得 Bor$(T)\otimes\Sigma\subset\mathcal{D}$。因此，对每个 $E\in\text{Bor}(T)\otimes\Sigma$，映射 $t\mapsto\nu_t(E_t)$ 都是博雷尔的。

现在设 $F:\ T\times X\to[0,\infty)$ 是一个博雷尔函数。取非负简单函数$F_n=\sum_{k=1}^{m_n}a_{n,\,k}\,\mathbb{1}_{E_{n,\,k}}$, 其中 $a_{n,\,k}\geq0$且 $E_{n,\,k}\in\text{Bor}(T)\otimes\Sigma$，并且 $F_n\uparrow F$逐点成立。于是，对每个 n,

$$t\longmapsto\int_X F_n(t,x)\,d\nu_t(x)=\sum_{k=1}^{m_n}a_{n,k}\,\nu_t\big((E_{n,k})_t\big)$$

是博雷尔的，因为每个 $t\mapsto\nu_t((E_{n,\,k})_t)$ 都是博雷尔集。由单调收敛，

$$\int_X F_n(t,x)\,d\nu_t(x)\ \uparrow\ \int_X F(t,x)\,d\nu_t(x)\qquad(t\in T),$$

因此 $t\mapsto\int_X F(t,\ x)\,d\nu_t(x)$ 是博雷尔函数的逐点极限，因而是博雷尔的。 □

下一个定理表明，对一个因子化族所作的附加可测性假设，恰好足以将代数构造提升为 Arveson 系统。

定理 2.13。 设 $\boldsymbol{\mu}=\{\mu_t\}_{t>0}$ 是 $[0,1]\times L$上的可测因子化族。那么$\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}}=\{E_t^{\boldsymbol{\mu}},U_{s,t}\}_{t>0}$ 是一个 *Arveson* 系统。

证明。 由于 $\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}}$ 根据命题 2.10是一个代数 Arveson 系统，因此只需验证可测性要求。

令 $\mathscr{C}:=\mathscr{C}_1$ 以及 $\Sigma:=\Sigma_1$。置 $\widetilde{\mu}_t:=(\sigma_t)_*\mu_t$，其中 $\sigma_t:\ \mathscr{C}_t\to\mathscr{C}$ 是缩放同胚（4）。该酉算子

$$(S_tf)(W):=f(\sigma_t^{-1}(W))\qquad\big(f\in L^2(\mathscr{C}_t,\mu_t),\ W\in\mathscr{C}\big)\tag{9}$$

将 $E_t^{\boldsymbol{\mu}}$ 与 $\widetilde{E}_t^{\boldsymbol{\mu}}$ 对应起来：$=L^2(\mathscr{C},\ \widetilde{\mu}_t)$。因此，只需由$\{\widetilde{E}_t^{\boldsymbol{\mu}}\}_{t>0}$构造一个可测希尔伯特场。

令 $\mathcal{R}=\{A_n\}_{n\geq1}$ 为定义 2.3(iva) 中固定的可数环，并定义截面~ ~ $\xi_n(t)\in E_t^{\boldsymbol{\mu}}$ 如下：$\xi_n(t):=\mathbb{1}_{A_n}$。则 $\{\xi_n(t)\}_n$ 的线性张成在每个 $E_t^{\boldsymbol{\mu}}$ 上都是稠密的 t。此外

$$t\mapsto\langle\xi_m(t),\xi_n(t)\rangle_{\widetilde{E}_t^{\boldsymbol{\mu}}}=\widetilde{\mu}_t(A_m\cap A_n)$$

is 由可测性 (iva) 可知是博雷尔的。因此，$\{\xi_n\}_{n\geq1}$ 是一个可测基本序列 e.

定义 σ场于 $\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}}:=\bigsqcup_{t>0}\{t\}\times$ 令$E_t^{\boldsymbol{\mu}}$ 为使所有系数映射

$$(t,\xi)\longmapsto\langle\xi,\xi_n(t)\rangle_{\widetilde{E}_t^{\boldsymbol{\mu}}}\in\mathbb{C},\qquad n\in\mathbb{N},$$

~ ~博雷尔。这使 $\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}}$ 成为一个标准博雷尔空间，并使 $t\mapsto E_t^{\boldsymbol{\mu}}$ 成为一个可测场。对 $\{\xi_n\}_{n\geq1}$ 逐点应用格拉姆–施密特过程，便可得到一个可测的正交~基 $\{e_k(t)\}_{k\geq1}$，它是 $E_t^{\boldsymbol{\mu}}$ 在每个 t处的基（参见 [4, II.1.2]）。

Let $H_{\mathrm{triv}} := \ell^2(\mathbb{N})$及其标准基 $\{\varepsilon_k\}_{k\geq 1}$，并定义 $\Phi:\ \widetilde{\mathbb{E}}^{\boldsymbol{\mu}} \to (0,\ \infty)\times H_{\mathrm{triv}}$ b y

$$\Phi(t,\xi) := \Big(t,\ \big(\langle \xi, e_k(t)\rangle_{\widetilde{E}_t}\big)_{k\geq 1}\Big).$$

于是， Φ 是一个纤维映射为酉算子的博雷尔双射，从而给出一个平凡化。沿着 S_t 将博雷尔结构传输回来，便在原始不交并 $\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}}$上得到相应的标准博雷尔结构。

最后，我们证明映射 $(s,\ t,\ \xi,\ \eta)\mapsto U_{s,\ t}(\xi\otimes\eta)$ 是博雷尔的。定义共轭乘法

$$\widetilde{U}_{s,t} := S_{s+t}\,U_{s,t}\,(S_s^{-1}\otimes S_t^{-1}) : \widetilde{E}^{\boldsymbol{\mu}}_s \otimes \widetilde{E}^{\boldsymbol{\mu}}_t \longrightarrow \widetilde{E}^{\boldsymbol{\mu}}_{s+t}.$$

~只需证明 $(s,\ t,\ \xi,\ \eta)\mapsto U_{s,\ t}(\xi\otimes\eta)$ 是博雷尔的。

固定 $s,\ t>0$并令 $u:=\frac{s}{s+t}\in(0,\ 1)$。对于 $W\in\mathscr{C}$，定义两个“限制–重新缩放”映射

$$\rho_u(W) := \sigma_u\big(W\cap([0,u]\times L)\big)\in\mathscr{C},\qquad \tau_u(W) := \sigma_{1-u}\big((W\cap([u,1]\times L))-(u,0)\big)\in\mathscr{C}.$$

~ ~直接代入（7）可得，对于 $\xi\in E^{\boldsymbol{\mu}}_s,\ \ \eta\in E^{\boldsymbol{\mu}}_t$ 以及 $W\in\mathscr{C}$，

$$\big(\widetilde{U}_{s,t}(\xi\otimes\eta)\big)(W) = \Delta(s,t,W)^{1/2}\,\xi(\rho_u(W))\,\eta(\tau_u(W))\qquad \widetilde{\mu}_{s+t}\text{-a.e. } W, \tag{10}$$

其中 $\Delta:\ (0,\infty)^2\times\mathscr{C}\to(0,\infty)$ 是定义 2.3(ivb) 中的联合博雷尔版本。

我们证明映射 $(u,W)\mapsto\rho_u(W)$ 和 $(u,W)\mapsto\tau_u(W)$ 是博雷尔的。根据引理 2.1，在 $t=1$ 处， σ–域由空事件 $V_1(U)$（其中 $U\in\mathcal{U}_1^{\mathbb{Q}}$）生成。因此，只需证明对于每个 $U\in\mathcal{U}_1^{\mathbb{Q}}$， $\rho_u^{-1}(V_1(U))$ 和 $\tau_u^{-1}(V_1(U))$ 都是博雷尔的。

固定 $U_0 = I_0\times G_0\in\mathcal{U}_1^{\mathbb{Q}}$。对于 $u\in(0,1)$，区间 $I_0\subset[0,1]$ 的仿射像定义为

$$uI_0 := \{ur : r\in I_0\}\subset[0,u],\qquad u+(1-u)I_0 := \{u+(1-u)r : r\in I_0\}\subset[u,1].$$

直接展开定义可得，对于 $W\in\mathscr{C}$，

$$\rho_u(W)\in V_1(U_0)\iff W\cap\big((uI_0)\times G_0\big)=\varnothing,\qquad \tau_u(W)\in V_1(U_0)\iff W\cap\big((u+(1-u)I_0)\times G_0\big)=\varnothing.$$

我们处理 ρ_u；对 τ_u 的论证完全相同。考虑相交事件

$$B_{U_0} := \big\{(u,W)\in(0,1)\times\mathscr{C}:\ W\cap\big((uI_0)\times G_0\big)\neq\varnothing\big\}.$$

由于 $\mathcal{U}_1^{\mathbb{Q}}$是 $[0,1]\times L$中开矩形的可数基，我们有

$$W\cap\big((uI_0)\times G_0\big)\neq\varnothing\iff\exists U\in\mathcal{U}_1^{\mathbb{Q}}\text{ with }U\subset(uI_0)\times G_0\text{ and }W\in H(U),$$

其中 $H(U)=\{W\in\mathscr{C}:\ \ W\cap U\neq\varnothing\}$。因此

$$B_{U_0} = \bigcup_{U\in\mathcal{U}_1^{\mathbb{Q}}}\Big(\{u\in(0,1):\ U\subset(uI_0)\times G_0\}\times H(U)\Big). \tag{11}$$

每个 $H(U)$在 $\mathscr{C}$中都是博雷尔的。对于固定的 $U=J\times G\in\mathcal{U}_1^{\mathbb{Q}}$，集合

$$\{u\in(0,1):\ U\subset(uI_0)\times G_0\}$$

是博雷尔的（实际上是一个区间，可能为空）：除非 $G\subset G_0$，否则它为空；并且当 $G\subset G_0$ 时，包含关系 $J\subset uI_0$ 等价于 u 中的有限多个线性不等式，因为 I_0 与 J 都属于 $\mathcal{I}_1^{\mathbb{Q}}$中的有理区间。因此并集（11）中的每一项在（0，1）$\times\mathscr{C}$中是博雷尔的，并且由于该并集可数， B_{U_0} 是博雷尔的。

因此，其补集

$(0,\ 1)\times\mathscr{C}\setminus B_{U_0} = \{(u,\ W):\ W\cap((uI_0)\times G_0)=\varnothing\} = \{(u,\ W):\ \rho_u(W)\in V_1(U_0)\} = \rho^{-1}$ $(V_1(U_0))$ 是博雷尔集。由于这对所有 $U_0\in\mathcal{U}_1^{\mathbb{Q}}$ 都成立，映射 $(u,\ W)\mapsto\rho_u(W)$ 是博雷尔映射。同样的论证（将 uI_0 替换为 $u+(1-u)I_0$）表明，$(u,\ W)\mapsto\tau_u(W)$ 是博雷尔映射。

因此，与博雷尔映射 $(s,\ t)\mapsto s/(s+t)$ 复合可得

$$(s,t,W)\longmapsto\rho_{s/(s+t)}(W),\qquad (s,t,W)\longmapsto\tau_{s/(s+t)}(W) \tag{12}$$

在 $(0,\infty)^2\times\mathscr{C}$ 上是博雷尔的。

固定 $i,j,k\in\mathbb{N}$，并定义函数 $F_{i,j,k}\colon (0,\infty)^2\times\mathscr{C}\to\mathbb{C}$，其定义为

$$F_{i,j,k}(s,t,W):=\Delta(s,t,W)^{1/2}\,\mathbb{1}_{A_i}\big(\rho_{s/(s+t)}(W)\big)\,\mathbb{1}_{A_j}\big(\tau_{s/(s+t)}(W)\big)\,\overline{\mathbb{1}_{A_k}(W)}.$$

由 (ivb) 和 (12)，$F_{i,\,j,\,k}$ 是博雷尔的。此外，定义 2.3(iva) 表明，对每个 $A\in\mathcal{R}$，$t\mapsto\widetilde{\mu}_t(A)$ 都是博雷尔的。由于 $(s,t)\mapsto s+t$ 连续，对每个 $A\in\mathcal{R}$，$(s,t)\mapsto\widetilde{\mu}_{s+t}(A)$ 都是博雷尔的。因此，测度族 $\nu_{s,t}:=\widetilde{\mu}_{s+t}$ 在 $(\mathscr{C},\Sigma)$ 上满足引理 2.12 的假设，其参数空间为 $T=(0,\infty)^2$，基空间为 $X=\mathscr{C}$。

利用（10）和 $\xi=\xi_i(s)=\mathbb{1}_{A_i}$ 以及 $\eta=\xi_j(t)=\mathbb{1}_{A_j}$，可得

$$\Big\langle\widetilde{U}_{s,t}\big(\xi_i(s)\otimes\xi_j(t)\big),\,\xi_k(s+t)\Big\rangle=\int_{\mathscr{C}}F_{i,j,k}(s,t,W)\,d\widetilde{\mu}_{s+t}(W).$$

由引理 2.12，右侧是关于（s，t）的博雷尔函数。因此，所有矩阵系数

$$(s,t)\longmapsto\Big\langle\widetilde{U}_{s,t}\big(\xi_i(s)\otimes\xi_j(t)\big),\,\xi_k(s+t)\Big\rangle$$

~是博雷尔的，因此，根据可测希尔伯特场之间有界算子场的可测性所用的标准矩阵系数判据 [4, II.2.1, Prop.1, p. 179]，$(s,t,\xi,\eta)\mapsto U_{s,t}(\xi\otimes\eta)$ 是博雷尔的。证明至此结束。□

下面的推论以 Liebscher 的测度类型语言记录相应的结论。

推论 2.14。设 $\boldsymbol{\mu}=\{\mu_t\}_{t>0}$ 是一个可测因子化族，且 $\mathcal{M}:=[\mu_1]$ 是其对应的平稳因子化测度类型。那么 $\mathbb{E}^{\mathcal{M}}$ 是一个 *Arveson*积系统。

定义 2.15。Arveson 系统 $\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}}=\{E_t^{\boldsymbol{\mu}},U_{s,t}\}_{t>0}$ 将称为与可测分解族 $\boldsymbol{\mu}=\{\mu_t\}_{t>0}$（在 $[0,1]\times L$上）相关联的随机集系统。

3. Units and Type

本节研究与可测因子化族相关联的随机集乘积系统的单位结构和类型分类。我们用能够精确因子化的受控测度族，对单位作出测度论描述。这一观点为判断空间性和识别 I 型系统提供了实用准则；我们将在第 3.2 小节通过完全 L-扩展量的泊松随机集构造来说明这些准则。

除非另有说明，我们沿用上一节的记号和基本假设；特别是，仍在固定的局部紧、第二可数豪斯多夫空间 L 上进行讨论。

3.1. 空间性。下一个引理表明，在对两个测度族作出温和的可测性假设后，可以选取关于参数和基点联合可测的拉东–尼科迪姆导数。

引理 3.1。设(X,Σ) 为标准博雷尔空间，且 T 为标准博雷尔空间。设 $\mathcal{A}\subset\Sigma$ 是生成 Σ 的可数代数。设 $t\mapsto\mu_t$ 和 $t\mapsto\nu_t$ 是(X,Σ) 上的有限测度族，使得

（i）$t\mapsto\mu_t(A)$ 和 $t\mapsto\nu_t(A)$ 对每个 $A\in\mathcal{A}$ 都是博雷尔的；（ii）对每个 $t\in T$，$\nu_t\ll\mu_t$。

那么存在一个博雷尔函数 $h\colon T\times X\to[0,\infty)$，使得对每个 $t\in T$，

$$h(t,\cdot)=\frac{d\nu_t}{d\mu_t}\qquad\mu_t\text{-a.e. on }X.$$

证明。枚举 $\mathcal{A}=\{A_1,A_2,\dots\}$，并令 $\mathcal{A}_n$为由 A_1、……、A_n生成的有限代数。设 $\{C_{n,1},\dots,C_{n,m_n}\}$ 为 $\mathcal{A}_n$的原子，则 $X=\bigsqcup_{k=1}^{m_n}C_{n,\,k}$，且每个 $C_{n,\,k}\in\mathcal{A}_n\subset\Sigma$。我们定义函数 $h_n\colon T\times X\to[0,\infty)$ 如下：

$$h_n(t,x):=\sum_{k=1}^{m_n}\mathbb{1}_{C_{n,k}}(x)\,\frac{\nu_t(C_{n,k})}{\mu_t(C_{n,k})}\,\mathbb{1}_{\{\mu_t(C_{n,k})>0\}}(t).$$

由于 $t \mapsto \mu_t(C_{n,\,k})$ 和 $t \mapsto \nu_t(C_{n,\,k})$ 均为博雷尔（每个 $C_{n,\,k} \in \mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}$），系数 $t \mapsto \nu_t(C_{n,\,k})\,\mu_t(C_{n,\,k})^{-1}\mathbb{1}_{\{\mu_t(C_{n,\,k})>0\}}$ 是博雷尔；因此 h_n 是博雷尔。

固定 $t \in T$。令 $g_t := \frac{d\nu_t}{d\mu_t}$ 为拉东–尼科迪姆导数。对于每个 n 以及每个原子 $C_{n,k}$，满足 $\mu_t(C_{n,k}) > 0$，我们有

$$\frac{\nu_t(C_{n,k})}{\mu_t(C_{n,k})} = \frac{1}{\mu_t(C_{n,k})}\int_{C_{n,k}} g_t\, d\mu_t,$$

因此，$h_n(t,\cdot)$ 与条件期望 $\mathbb{E}_{\mu_t}[g_t \mid \mathcal{A}_n]$ 几乎处处相等（将 g_t 视为一个非负可积函数）。因此，根据鞅收敛定理（莱维向上定理），

$$h_n(t,\cdot) \longrightarrow g_t \qquad \mu_t\text{-a.e. as } n \to \infty.$$

定义 $h(t,x) := \limsup_{n\to\infty} h_n(t,x)$。那么，$h$ 是博雷尔函数的逐点上极限，因此是博雷尔函数；对于每个固定的 t，我们有 $h(t,\cdot) = g_t$ μ_t 几乎处处 □

下面的定理给出了本节中空间性的主要刻画：当且仅当随机集系统存在一个严格分解（而不仅仅是等价意义下的分解）的受控测度族时，它才具有空间性。

定理 3.2. 设 $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_t\}_{t>0}$ 是 $[0,1]\times L$上的可测因子化族，$\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}} = \{E_t^{\boldsymbol{\mu}}, U_{s,t}\}_{t>0}$ 是与之关联的随机集系统。那么，$\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}}$ 是空间的，当且仅当存在一个概率测度族 $\boldsymbol{\nu} = \{\nu_t\}_{t>0}$，其概率测度 ν_t 定义在 $(\mathscr{C}_t, \Sigma_t)$ 上，并满足：

(i) $\boldsymbol{\nu} \ll \boldsymbol{\mu}$;(ii) 精确分解恒等式成立：

$$\nu_{s+t} = (\nu_s \otimes \nu_t)\circ \oplus_{s,t}^{-1} \qquad (s,t>0); \tag{13}$$

(iii) 映射 $t \mapsto \widetilde{\nu}_t(A)$ 在 $(0,\infty)$ 上对每个 $A \in \mathcal{R}$都是博雷尔可测的，其中 $\widetilde{\nu}_t := (\sigma_t)_*\nu_t$，且$\sigma_t$ 是缩放同胚 (4)，而 $\mathcal{R} \subset \Sigma_1$ 是定义 2.3(iva)中固定的可数环。

证明。如有必要，可扩大 $\mathcal{R}$ （仍为可数），假设 $\mathscr{C}_1 \in \mathcal{R}$，于是 $\mathcal{R}$ 是生成 Σ_1的可数代数。为方便起见，我们记 $\nu_{s,t} := (\mu_s \otimes \mu_t)\circ \oplus_s^{-1},_t$ 以及 $\Delta_{s,t} := d\nu_{s,t}/d\mu_{s+t}$（$\mu_{s+t}$-几乎处处）。对 $Z \in \mathscr{C}_{s+t}$，令

$$Z_1 := Z \cap ([0,s]\times L) \in \mathscr{C}_s, \qquad Z_2 := \big(Z \cap ([s,s+t]\times L)\big) - (s,0) \in \mathscr{C}_t.$$

根据定义 2.3(ii)，时间 s 处的边界切片歧义只会出现在零测集上，因此在全文中均可忽略。

(⇒) 假设 $\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}}$ 是空间的，并令 $u = \{u_t\}_{t>0}$ 为归一化单位。定义概率测度 ν_t 如下：$d\nu_t := |u_t|^2\, d\mu_t$. 于是 $\nu_t \ll \mu_t$ 且 $\nu_t(\mathscr{C}_t) = \|u_t\|^2 = 1$。

我们验证 (13)。为此，固定 s，$t>0$ 和 $A \in \Sigma_{s+t}$。由于 u 是单位，且乘法$U_{s,\,t}$ 由 (7) 给出，因此对 μ_{s+t}-几乎处处的 Z，$|u_{s+t}(Z)|^2 = \Delta_{s,\,t}(Z)\,|u_s(Z_1)|^2\,|u_t(Z_2)|^2$. 因此

$$\begin{aligned}
\nu_{s+t}(A) &= \int_{\mathscr{C}_{s+t}} \mathbb{1}_A(Z)\,|u_{s+t}(Z)|^2\, d\mu_{s+t}(Z) = \int_{\mathscr{C}_{s+t}} \mathbb{1}_A(Z)\,|u_s(Z_1)|^2\,|u_t(Z_2)|^2\, d\nu_{s,t}(Z)\\
&= \int_{\mathscr{C}_s\times\mathscr{C}_t} \mathbb{1}_A(Z_1\oplus_{s,t} Z_2)\,|u_s(Z_1)|^2\,|u_t(Z_2)|^2\, d(\mu_s\otimes\mu_t)(Z_1,Z_2)\\
&= \int_{\mathscr{C}_s\times\mathscr{C}_t} \mathbb{1}_A(Z_1\oplus_{s,t} Z_2)\, d(\nu_s\otimes\nu_t)(Z_1,Z_2) = ((\nu_s\otimes\nu_t)\circ\oplus_{s,t}^{-1})(A),
\end{aligned}$$

这就是 (13)。

剩下要证明 (iii)。为此，令 $\widetilde{\nu}_t := (\sigma_t)_*\nu_t$ 且 $\widetilde{\mu}_t := (\sigma_t)_*\mu_t$。在缩放后的图景中 $\widetilde{E}_t := L^2(\mathscr{C}_1, \widetilde{\mu}_t)$，单位对应于 $\widetilde{u}_t := S_t u_t$，其中 S_t 是缩放酉算子 (9)。根据可测结构的构造（定理 2.13），$t \mapsto \widetilde{u}_t$ 是 $\sim\{E_t\}_{t>0}$ 的可测截面。

固定 $A \in \mathcal{R}$。那么

$$\widetilde{\nu}_t(A) = \int_{\mathscr{C}_1} \mathbb{1}_A(W)\,|\widetilde{u}_t(W)|^2\,d\widetilde{\mu}_t(W) = \|M_{\mathbb{1}_A}\widetilde{u}_t\|^2_{\widetilde{E}_t}.$$

~与定理2.13的证明中一样，乘法算子场 $t \mapsto M_{\mathbb{1}_A} \in \mathcal{B}(E_t)$ 是可测的：事实上，取基本序列 $\xi_n(t) = \mathbb{1}_{A_n}\,(A_n \in \mathcal{R})$，有

$$\big\langle M_{\mathbb{1}_A}\xi_m(t), \xi_n(t)\big\rangle = \widetilde{\mu}_t(A \cap A_m \cap A_n),$$

根据定义 t ，其关于2.3(iva) 是博雷尔的。因此 $t \mapsto M_{\mathbb{1}_A}\widetilde{u}_t$ 是一个可测截面，故 $t \mapsto \|M_{\mathbb{1}_A}\widetilde{u}_t\|^2 = \widetilde{\nu}_t(A)$ 是博雷尔的。这就证明了(iii)。

(⇐) 反过来，假设 $\boldsymbol{\nu} = \{\nu_t\}_{t>0}$ 满足 (i)–(iii)。在 $(\mathscr{C}_1, \Sigma_1)$ 上令 $\widetilde{\nu}_t := (\sigma_t)_*\nu_t$ ，且 $\widetilde{\mu}_t := (\sigma_t)_*\mu_t$ 。由 (i) 可知，对所有 $t > 0$，都有 $\widetilde{\nu}_t \ll \widetilde{\mu}_t$；由 (iii) 可知，族 $t \mapsto \widetilde{\mu}_t$ 和 $t \mapsto \widetilde{\nu}_t$ 满足引理 3.1 的假设，其中参数空间为 $T = (0,\infty)$，基空间为 $X = \mathscr{C}_1$ (取 $\mathcal{A} = \mathcal{R}$)。因此存在一个博雷尔函数 $h : (0,\infty) \times \mathscr{C}_1 \to [0,\infty)$，使得

$$h(t,\cdot) = \frac{d\widetilde{\nu}_t}{d\widetilde{\mu}_t} \qquad \widetilde{\mu}_t\text{-a.e.}$$

我们将 $\widetilde{u}_t \in \widetilde{E}_t = L^2(\mathscr{C}_1,\ \widetilde{\mu}_t)$ 定义为 $\widetilde{u}_t(W) := h(t,\ W)^{1/2}$. 于是 $\|\widetilde{u}_t\|^2 = \int h(t,\ W)\ d\widetilde{\mu}_t(W)\ = \widetilde{\nu}_t(\mathscr{C}_1)\ = 1$。

~我们断言 $t \mapsto \widetilde{u}_t$ 是 $\{E_t\}_{t>0}$的可测截面。令 $\mathcal{R} = \{A_n\}_{n\ge1}$ 并考虑 $\xi_n(t) = \mathbb{1}_{A_n}$ ，如定理2.13中所述。对每个 n,

$$\langle \widetilde{u}_t, \xi_n(t)\rangle = \int_{\mathscr{C}_1} \mathbb{1}_{A_n}(W)\,h(t,W)^{1/2}\,d\widetilde{\mu}_t(W).$$

被积函数 $(t,W) \mapsto \mathbb{1}_{A_n}(W)\ h(t,W)^{1/2}$ 是博雷尔可测的，并且根据定义 2.3(iva)， $t \mapsto \widetilde{\mu}_t(B)$ 对 $B \in \mathcal{R}$ 是博雷尔可测的，因此由引理 2.12 可知 $t \mapsto \langle \widetilde{u}_t, \xi_n(t)\rangle$ 是博雷尔可测的。因此 $\widetilde{u}$ 是可测的。现在令 $u_t := S_t^{-1}\widetilde{u}_t \in E_t^{\boldsymbol{\mu}}$ 。由于 $E_t^{\boldsymbol{\mu}}$ 上的可测结构是沿着 S_t 传递的（定理 2.13），截面 $t \mapsto u_t$ 是可测的，并且 $\|u_t\| = 1$。

还需验证单位恒等式。设 $f_t := \frac{d\nu_t}{d\mu_t} \in L^1(\mu_t)$。于是 $\nu_s \otimes \nu_t \ll \mu_s \otimes \mu_t$ 以密度 $(Z_1, Z_2) \mapsto f_s(Z_1)f_t(Z_2)$。通过 $\oplus_{s,t}$ 推前得到 $(\nu_s\otimes\nu_t)\circ\oplus_s^{-1},_t \ll (\mu_s\otimes\mu_t)\circ\oplus_s^{-1},_t = \nu_{s,t}$，并且相对于 $\nu_{s,t}$ 的拉东–尼科迪姆导数为 $d\big((\nu_s\otimes\nu_t)\ \circ\oplus_{s\ t}^{-1}\big),,(Z) = f_s(Z_1)\ f_t(Z_2)$ ($\nu_{s,t}$-几乎处处 Z)。因此

$$\frac{d\big((\nu_s \otimes \nu_t)\circ \oplus_{s,t}^{-1}\big)}{d\mu_{s+t}}(Z) = \Delta_{s,t}(Z)\,f_s(Z_1)\,f_t(Z_2) \qquad (\mu_{s+t}\text{-a.e. } Z).$$

但左侧等于 $d\nu_{s+t}/d\mu_{s+t} = f_{s+t}$ 根据（13）。因此

$$f_{s+t}(Z) = \Delta_{s,t}(Z)\,f_s(Z_1)\,f_t(Z_2), \quad (\mu_{s+t}\text{-a.e. } Z).$$

取平方根得到 $u_{s+t}(Z) = \Delta_{s,\ t}(Z)^{1/2}\,u_s(Z_1)\,u_t(Z_2)$（$\mu_{s+t}$几乎处处） Z），这正是单位方程 $u_{s+t} = U_{s,\ t}(u_s \otimes u_t)$，由（7）可知。因此 $\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}}$ 是空间的。□

下一个推论说明，当标记空间 L 是紧的时，空构型具有正质量，从而产生一个规范的真空单位。

推论 3.3。 如果 L 是紧的，则随机集系统 $\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}} = \{E_t^{\boldsymbol{\mu}}, U_{s,t}\}_{t>0}$ 是空间的。

证明。 首先，我们证明对于每个 $t > 0$， $\mu_t(\{\varnothing\}) > 0$ 。固定 $t > 0$，并令 $\mathscr{C}_t^{\{*\}}$ 为 $[0,t]$ 的闭子集的超空间。考虑时间投影映射 $\pi_t : \mathscr{C}_t \to \mathscr{C}_t^{\{*\}}$，

$$\pi_t(Z) := \{r \in [0,t] : Z \cap (\{r\} \times L) \neq \varnothing\}.$$

由于 L 是紧的，投影 $[0,t] \times L \to [0,t]$ 是闭映射，因此 $\pi_t(Z)$ 是闭的。此外， π_t 是博雷尔集，因为对于任意开区间 $I \subset [0,t]$，有 $\pi_t(Z) \cap I = \varnothing \iff Z \cap (I \times L) = \varnothing$，而右侧是 $\mathscr{C}_t$中的 Fell 闭事件。

在 $\mathscr{C}_t^{\{*\}}$ 上令 $\bar{\mu}_t := (\pi_t)_*\mu_t$。那么 $\{\bar{\mu}_t\}_{t>0}$ 又是 $[0,1]$ 上的一个可分解族（按照定义 2.3 的含义，其中 L 是单元素集），因为 $\pi_{s+t}(Z_1 \oplus_{s,t} Z_2) = \pi_s(Z_1)\oplus_{s,t} \pi_t(Z_2)$。此外，

定义 2.3(ii) 意味着 $\bar{\mu}_t(\{F : \ r \in F\}) = 0$ 对所有 r均成立。因此 $\mathcal{M} := [\bar{\mu}_1]$ 是一种平稳因子化测度类型，并非 $\{\delta_{[0,1]}\}$。根据 Liebscher 的 [6, 推论 4.2(ii)]，对于 $[0,1]$，可得 $\bar{\mu}_1(\{\varnothing\}) > 0$ 对每个 $\bar{\mu}_1 \in \mathcal{M}$ 都成立。因此

$$\mu_1(\{\varnothing\}) = \mu_1(\{\pi_1(Z) = \varnothing\}) = \bar{\mu}_1(\{\varnothing\}) > 0,$$

因为 $\pi_1(Z) = \varnothing$ 当且仅当 $Z = \varnothing$。

对于 $t \in (0,1]$,，引理 2.6 给出 $(R_{0,t})_*\mu_1 \sim \mu_t$，又因为 $(R_{0,t})^{-1}(\{\varnothing\}) \supset \{\varnothing\}$ 具有正的μ_1测度，我们得出 $\mu_t(\{\varnothing\}) > 0$。对于一般的 $t > 1$，写作 $t = n+\alpha$，其中 $n \in \mathbb{N}$ 且 $\alpha \in (0,1]$。利用因子化 $\mu_t \sim (\mu_1^{(\otimes n)} \otimes \mu_\alpha) \circ \oplus_1^{-1,\cdots,1,\alpha}$，并注意到右侧的推前将 $\{\varnothing\}$ 质量赋予 $\mu_1(\{\varnothing\})^n \mu_\alpha(\{\varnothing\}) > 0$，我们得到 $\mu_t(\{\varnothing\}) > 0$。

由此可知，族 $\boldsymbol{\delta} := \{\delta_\varnothing\}_{t>0}$ 满足 $\boldsymbol{\delta} \ll \boldsymbol{\mu}$ 以及精确分解恒等式$\delta_\varnothing = (\delta_\varnothing \otimes \delta_\varnothing) \circ \oplus^{-1}$。因此，定理 3.2 给出了一个规范的归一化单位（即“真空单位”）

$$u_t^{(0)} = \mu_t(\{\varnothing\})^{-1/2} \mathbb{1}_{\{\varnothing\}} \in L^2(\mathscr{C}_t, \mu_t).$$

□

定义 3.4。设 $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_t\}_{t>0}$ 是定义在 $[0,1] \times L$上的可测因子化族。$\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}}$ 假设其是空间的。定义 Unit($\boldsymbol{\mu}$) 为满足定理 $\boldsymbol{\nu} = \{\nu_t\}_{t>0}$ 3.2 的条件 *(i)*、*(ii)* 和 *(iii)* 的、定义在 $(\mathscr{C}_t, \Sigma_t)$ 上的所有概率测度族 $\boldsymbol{\nu} = \{\nu_t\}_{t>0}$ 的集合，并令 $\mathrm{Unit}_+^1(\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}})$ 为 $\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}}$ 的正归一化单位的集合，即

$$\mathrm{Unit}_+^1(\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}}) := \big\{u \in \mathrm{Unit}(\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}}) : \ \|u_t\| = 1, \ u_t \geq 0 \ \mu_t\text{-a.e. for all } t\big\}.$$

下面的推论刻画了正归一化单位与恰好可分解的支配测度族之间的对应关系，并将这一对应关系归纳为一个简单的双射。

推论 3.5。定义 $\Phi\colon \mathrm{Unit}(\boldsymbol{\mu}) \to \mathrm{Unit}_+^1(\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}})$，令 $\Phi(\boldsymbol{\nu}) = u^{\boldsymbol{\nu}}$，其中 $u_t^{\boldsymbol{\nu}} := \left(\frac{d\nu_t}{d\mu_t}\right)^{1/2} \in L^2(\mathscr{C}_t, \mu_t)$。则 Φ 定义良好且为一个双射。

证明。若 $\boldsymbol{\nu} \in \mathrm{Unit}(\boldsymbol{\mu})$，则定理 3.2 的假设均成立，其证明表明 $u^{\boldsymbol{\nu}} = \{u_t^{\boldsymbol{\nu}}\}_{t>0}$ 是一个可测的归一化单位，并且几乎处处为正 μ_t。

反之，给定 $u \in \mathrm{Unit}_+^1(\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}})$，定义 $\nu_t := u_t^2 \mu_t$。则 $\nu_t \ll \mu_t$, $\nu_t(\mathscr{C}_t) = \|u_t\|^2 = 1$，且由单位恒等式可得精确因式分解，如定理 3.2 的 $(\Rightarrow)$ 部分所示。$t \mapsto (\sigma_t)_*\nu_t(A)$ 的可测性可按该证明中的方法得到。最后，根据构造，几乎处处有 $\frac{d\nu_t}{d\mu_t} = u_t^2 \ \mu_t$，故 $\Phi(\boldsymbol{\nu}) = u$。□

观察 3.6。对于一般的（不一定为正的）归一化单位 u，相应的族 $\nu_t^u := |u_t|^2 \mu_t$ 属于 Unit($\boldsymbol{\mu}$)，并满足 $\Phi(\nu^u) = |u| := \{|u_t|\}_{t>0}$。因此，$u \mapsto \nu^u$ 不具单射性，恰恰是因为可能存在模一余循环：若 u，v 是满足 $\nu^u = \nu^v$ 的归一化单位，则几乎处处有 $v_t = g_t \, u_t \ \mu_t$，其中 $g_t : \mathscr{C}_t \to \mathbb{T}$ 是一个可测族，满足 $g_{s+t}(Z_1 \oplus Z_2) = g_s(Z_1) g_t(Z_2)$ $(\mu_s \otimes \mu_t)$–几乎处处。

下一个推论用相关测度族的 Hellinger 亲和度来表示两个正单位的协方差核。

推论 3.7. 假设 $\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}}$ 是空间的。对于 $\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\omega} \in$ 单位($\boldsymbol{\mu}$)，有

$$c_{\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}}}(u^{\boldsymbol{\nu}}, u^{\boldsymbol{\omega}}) = \frac{1}{t} \ln \int_{\mathscr{C}_t} \Big(\frac{d\nu_t}{d\mu_t}(Z)\Big)^{1/2} \Big(\frac{d\omega_t}{d\mu_t}(Z)\Big)^{1/2} d\mu_t(Z),$$

对任意 $t > 0$，且右侧与 t无关。

证明。直接由推论3.5得出。 □

下述准则将 I 型性质归结为来自拼接单位测度族的正单位向量之积的一个稠密性陈述。

推论 3.8. 假设 $\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}}$ 是空间的。对 $t>0$，令 $\mathcal{K}_t$ 为 $\mathscr{C}_t$ 上具有如下形式的概率测度的全体

$$\kappa = (\nu_{t_1}^{(1)} \otimes \cdots \otimes \nu_{t_n}^{(n)}) \circ \oplus_{t_1,\dots,t_n}^{-1},$$

其中 $n \in \mathbb{N}$、$t_1+\cdots+t_n=t$，且每个 $\boldsymbol{\nu}^{(j)} \in$ 单位$(\boldsymbol{\mu})$。于是：

(i) 若对每个 $t>0$，向量集

$$\left\{ \left(\frac{d\kappa}{d\mu_t}\right)^{1/2} : \kappa \in \mathcal{K}_t \right\}$$

在 $E_t^{\boldsymbol{\mu}} = L^2(\mathscr{C}_t, \mu_t)$ 中是全的，则 $\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}}$ 属于 I 型。

(ii) 反过来，若 $\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}}$ 属于 I 型，且每个归一化单位都是一个正归一化单位乘以一个标量相位，那么这些向量在每个 $E_t^{\boldsymbol{\mu}}$ 中都是全的。

证明。对任意 $\kappa \in \mathcal{K}_t$，我们有 $\kappa \ll \mu_t$ 和 $\underline{\left(\frac{d\kappa}{d\mu_t}\right)^{1/2}} = u_{t_1}^{\boldsymbol{\nu}^{(1)}} \cdot u_{t_2}^{\boldsymbol{\nu}^{(2)}} \cdots u_{t_n}^{\boldsymbol{\nu}^{(n)}}$ 属于 $E_t^{\boldsymbol{\mu}}$。

(i) 如果这些向量是全的，那么对每个 t，单位乘积的闭线性张成等于 $E_t^{\boldsymbol{\mu}}$，这正是 I 型的定义。

(ii) 如果该系统是 I 型，且每个单位都是正单位乘以一个标量相位，那么正单位乘积的闭线性张成已经等于所有单位乘积的张成，因此等于 $E_t^{\boldsymbol{\mu}}$；上述向量正是这些正单位乘积。□

3.2. **全 L扩展泊松随机闭集**。固定一个定义在L上的 Borel概率测度 η，以及一个强度参数 $\lambda>0$。对每个 $t>0$，令 $N^{(t)}$ 为定义在 $(0,t)\times L$ 上的泊松点过程，其强度测度为

$$\nu_t := \lambda \,\mathrm{Leb}\restriction_{(0,t)} \otimes \eta.$$

令 $Z_t^{\mathrm{Poi}} \subset (0,t)\times L$ 为 $N^{(t)}$的原子所组成的（有限）集合，将其视为$[0,t]\times L$ 的随机闭子集（它几乎必然是有限的，因此是闭集）。令 μ_t 为 Z_t^{Poi}在 $(\mathscr{C}_t, \Sigma_t)$ 上的分布，并设

$$\boldsymbol{\mu}^{(P,L)} := \{\mu_t\}_{t>0}.$$

我们用 $N(Z) := \#Z \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ 表示 $Z \in \mathscr{C}_t$的（扩展）基数。对于泊松样本 Z_t^{Poi}，几乎必然有 $N(Z_t^{\mathrm{Poi}}) < \infty$。

引理 3.9. 对于每个 $t>0$，映射 $Z \mapsto N(Z)$ 作为一个取值于 $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$的函数，是 Σ_t–可测的。

证明。固定 $t>0$，并令 $\mathcal{U}_t^{\mathbb{Q}}$ 为 $[0,t]\times L$中的开矩形可数基，如（2）所示。容易验证（下文引理 3.13 的证明中也采用了类似论证），对于每个 $n\geq 1$,

$$\{Z : N(Z)\geq n\} = \bigcup_{(U_1,\dots,U_n)\in\mathcal{D}_n} \bigcap_{k=1}^{n} H(U_k),$$

其中 $\mathcal{D}_n$是所有满足以下条件的 n–元组 $(U_1, \dots..., U_n) \in (\mathcal{U}_t^{\mathbb{Q}})^n$ 构成的（可数）集合：这些矩形$U_1, \dots..., U_n$两两不交。因此，对于所有 n，$\{N\geq n\}\in\Sigma_t$，且 N是可测的。□

命题 3.10. 完全 L扩展量的泊松族 $\boldsymbol{\mu}^{(P,L)}$ 是 $[0,1]\times L$上的可测因子化族。

证明. 对于 $s,\ t>0$，泊松点过程在 $(0,s+t)\times L$ 上的限制，在 $(0,s)\times L$ 和 $(s,s+t)\times L$ 上分别是定义于各自区域、强度均为 $\lambda\,dx\otimes\eta$的独立泊松点过程。等价地，若 $Z_1\sim\mu_s$ 和 $Z_2\sim\mu_t$ 相互独立，则 $Z_1\oplus_{s,\ t} Z_2$ 的分布为 μ_{s+t}。因此 $\mu_{s+t} = (\mu_s\otimes\mu_t)\circ\oplus_{s,\ t}^{-1}$，故定义 2.3(i) 在 $\Delta_{s,\ t}\equiv 1$下成立。

接下来，固定 $r\in[0,t]$。由于 $\nu_t(\{r\}\times L) = \lambda$勒贝格测度$(\{r\})\ \eta(L) = 0$，泊松过程几乎必然在 $\{r\}\times L$ 中没有原子。因此 $\mu_t(\{Z:\ Z\cap(\{r\}\times L)\neq\varnothing\}) = 0$。

非退化性 (iii) 是显然的：由于 $N(Z_t^{\mathrm{Poi}})\sim$ 泊松(λt)，分布 μ_t 以正概率赋予无穷多个互不相交的事件 $\{N(Z) = n\}$，因此它并不支撑在有限多个原子上。

对于可测性 (iva)，取由空事件 $V_1(I\times G)=\{Z$ 生成的可数环 $\mathcal{R}\subset\Sigma_1:\ Z\cap(I\times G)=\varnothing\}$，其中 $I\in\mathcal{I}_1^{\mathbb{Q}}$ 与 $G\in\mathcal{G}$。时间坐标上的缩放 σ_t 将 $\sigma_t(Z_t)$ 等同于 $(0,1)\times L$ 上强度为 $\lambda t\,dx\otimes\eta$ 的泊松过程。因此，对每个基本矩形 $I\times G$，

$$\widetilde{\mu}_t\big(V_1(I\times G)\big)=\exp\big(-\lambda t\,\mathrm{Leb}(I)\,\eta(G)\big),$$

t 的连续函数。有限布尔组合由容斥原理处理，因此对所有 $A\in\mathcal{R}$，$t\mapsto\widetilde{\mu}_t(A)$ 是博雷尔的。这证明了 (iva)。条件 (ivb) 在联合博雷尔选择 $\Delta\equiv 1$ 下成立。□

为确定与$\boldsymbol{\mu}^{(P,L)}$ 相关联的泊松随机集系统 $\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}^{(P,L)}}$ 的类型与指标，我们需要若干预备结果。下一引理给出：当底层有限强度测度作绝对连续变换时，泊松点过程的显式测度变换公式。

引理 3.11. 设 $(S,\mathcal{S})$ 为可测空间，并设 ν,ν' 为其上的 有限 测度。设 Π_ν与$\Pi_{\nu'}$ 表示 S 上强度测度分别为 ν 与 ν'的泊松点过程的分布，并视为随机有限计数测度（当 S 为标准博雷尔时，等价于随机有限子集）。若 $\nu'\ll\nu$ 具有密度 $f:=\frac{d\nu'}{d\nu}$，则 $\Pi_{\nu'}\ll\Pi_\nu$ 且

$$\frac{d\Pi_{\nu'}}{d\Pi_\nu}(Z)=\exp\big(\nu(S)-\nu'(S)\big)\prod_{x\in Z}f(x),\tag{14}$$

其中空乘积解释为1。此外，若 $\nu\sim\nu'$，则 $\Pi_\nu\sim\Pi_{\nu'}$。

证明。记 $\Lambda:=\nu(S)$，$\Lambda':=\nu'(S)$。在 Π_ν下，点的总数 N 服从泊松(Λ)分布；给定 $N=n$后，这些点独立同分布，分布为 ν/Λ；ν'的情形类似。根据这一描述，构型 $Z=\{x_1,\dots,x_n\}$ 的似然比为

$$\frac{e^{-\Lambda'}\Lambda'^n}{e^{-\Lambda}\Lambda^n}\cdot\prod_{k=1}^n\frac{d(\nu'/\Lambda')}{d(\nu/\Lambda)}(x_k)=e^{\Lambda-\Lambda'}\prod_{k=1}^n\frac{d\nu'}{d\nu}(x_k),$$

由此得到（14）。当 $\nu\sim\nu'$时，相互绝对连续性成立。 □

在下面的引理中，我们通过改变泊松模型中的标记分布，构造一个范围广且显式的精确可分解测度族，从而得到正归一化单位。

引理 3.12。 固定 $a\in L^2(L,\eta)$，使得 $a\geq 0$ η–几乎处处成立，并令 $q:=a^2\in L^1(L,\eta)$。对于每个 $t>0$，令 $\nu_t^{(a)}$ 为$(\mathscr{C}_t,\Sigma_t)$ 上一个定义在$(0,t)\times L$ 上的泊松点过程的分布，其强度测度为

$$\nu_t^{(a),\mathrm{int}}:=\lambda\,\mathrm{Leb}\restriction_{(0,t)}\otimes(q\,\eta).$$

那么 $\boldsymbol{\nu}^{(a)}:=\{\nu_t^{(a)}\}_{t>0}$ 属于 $\mathrm{Unit}(\boldsymbol{\mu}^{(P,L)})$。此外，

$$\frac{d\nu_t^{(a)}}{d\mu_t}(Z)=\exp\Big(\lambda t\big(1-\|a\|^2_{L^2(\eta)}\big)\Big)\prod_{(r,\ell)\in Z}a(\ell)^2\qquad(\mu_t\text{–a.e. }Z\in\mathscr{C}_t),\tag{15}$$

and 由推论 $u^{(a)}=\Phi(\boldsymbol{\nu}^{(a)})$ 给出的相关正归一化单位*3.5* 为 y

$$u_t^{(a)}(Z)=\exp\Big(\tfrac{\lambda t}{2}\big(1-\|a\|^2_{L^2(\eta)}\big)\Big)\prod_{(r,\ell)\in Z}a(\ell)\qquad(\mu_t\text{–a.e. }Z\in\mathscr{C}_t).\tag{16}$$

证明。固定 $t>0$，并令 $S_t:=(0,t)\times L$。μ_t的参考强度为 $\nu_t^{\mathrm{int}}:=\lambda$勒贝格测度$\restriction_{(0,t)}\otimes\eta$。倾斜强度为 $\nu^{(a)}{}_t^{\ \mathrm{int}}=\lambda$勒贝格测度$\restriction_{(0,t)}\otimes(q\eta)$，而 $\nu^{(a)}{}_t^{\ \mathrm{int}}\ll\nu_t^{\mathrm{int}}$的密度为 $(r,\ell)\mapsto q(\ell)=a(\ell)^2$。在 S_t 上应用引理 3.11 得到 (15)。

$\boldsymbol{\nu}^{(a)}$ 的精确因式分解成立，因为泊松点过程在互不相交的时间区间上的限制彼此独立，且在每个区间上具有相同的倾斜强度；因此

$$\nu_{s+t}^{(a)}=(\nu_s^{(a)}\otimes\nu_t^{(a)})\circ\oplus_{s,t}^{-1}.$$

此外， $\boldsymbol{\nu}^{(a)} \ll \boldsymbol{\mu}^{(P,L)}$ 根据（15），定理 3.2 中的可测性条件 (iii) 可像命题 3.10 中那样推出：缩放至 $[0,1]\times L$ 后，空集概率的形式为

$$t \mapsto \exp(-\lambda t \,\mathrm{Leb}(I) \int_G q\, d\eta),$$

因此在生成环上是博雷尔的。于是 $\boldsymbol{\nu}^{(a)} \in \mathrm{Unit}(\boldsymbol{\mu}^{(P,L)})$ 和 (16) 由推论3.5立即得到。 □

下一个引理表明，超空间 σ-域由有限个矩形计数变量生成，并推导出 L^2 中相应的稠密性陈述。

引理 3.13。 固定 $t>0$。对于 $U \in \mathcal{U}_t^{\mathbb{Q}}$，定义计数泛函

$$N_U(Z) := \#(Z \cap U) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \qquad Z \in \mathscr{C}_t.$$

于是，对于每个 $U \in \mathcal{U}_t^{\mathbb{Q}}$， N_U 是 Σ_t–可测的，并且 $\Sigma_t = \sigma\big(N_U : \ U \in \mathcal{U}_t^{\mathbb{Q}}\big)$. 因此，如果$\mathcal{F}(\mathbf{U}) := \sigma(N_{U_1}, \ldots, N_{U_m})$ 是一个有限元组 $\mathbf{U} = (U_1, \ldots, U_m) \in (\mathcal{U}_t^{\mathbb{Q}})^m$，则

$$\overline{\bigcup_{\mathbf{U}} L^2(\mathcal{F}(\mathbf{U}), \mu_t)}^{\,\|\cdot\|_{L^2(\mu_t)}} = L^2(\mathscr{C}_t, \mu_t),$$

其中并集遍历所有有限元组 $\mathbf{U}$。

证明。 固定 $U \in \mathcal{U}_t^{\mathbb{Q}}$。对每个 $n \geq 1$，定义 $A_{U,\,n} := \{Z \in \mathscr{C}_t : \ N_U(Z) \geq n\}$. 我们断言

$$A_{U,n} = \bigcup_{(V_1,\ldots,V_n)\in \mathcal{D}_n(U)} \bigcap_{k=1}^{n} H(V_k), \tag{17}$$

其中 $\mathcal{D}_n(U)$ 表示所有满足以下条件的 n 元组 $(V_1,\ldots,V_n) \in (\mathcal{U}_t^{\mathbb{Q}})^n$：对所有 k， $V_k \subset U$成立，并且 $V_1, \ldots, V_n$ 两两不交。

首先，令 $Z \in A_{U,n}$，于是 $\#(Z \cap U) \geq n$。选取 n 个互不相同的点 $x_1, \ldots, x_n \in Z \cap U$。空间 $[0,t]\times L$ 是局部紧、第二可数且豪斯多夫的，因此是正则且第二可数的；故它是可度量化的。固定 $[0,t]\times L$上的一个相容度量 d。由于U是开集，对每个 k，选取 $r_k > 0$，使得开球 $B(x_k, r_k) \subset U$。再选取足够小的 r_k，使得 $r_k < \frac{1}{2}\min_{j\neq k} d(x_k, x_j)$。于是开球 $B(x_k, r_k)$ 是 U中的两两不交开子集。根据基 $\mathcal{U}_t^{\mathbb{Q}}$的定义，对每个 k，存在一个矩形 $V_k \in \mathcal{U}_t^{\mathbb{Q}}$，使得$x_k \in V_k \subset B(x_k, r_k) \subset U$. 特别地， V_k 两两不交且包含于 U中，因此 $(V_1,\ldots,V_n) \in \mathcal{D}_n(U)$。由于 $x_k \in Z \cap V_k$，对每个 k，我们有 $Z \in H(V_k)$，从而 $Z \in \bigcap_{k=1}^n H(V_k)$，因此 Z 属于 (17) 的右侧。

反过来，假设 Z 属于 (17) 的右侧。那么，对于某些两两不交的$V_1, \ldots, V_n \subset U$，有 $Z \in \bigcap_{k=1}^n H(V_k)$。取点 $y_k \in Z \cap V_k$。由于这些 V_k 互不相交，点 $y_1, \ldots, y_n$ 彼此不同，且属于 $Z \cap U$。因此 $\#(Z \cap U) \geq n$，即 $Z \in A_{U,n}$。这就证明了 (17)。于是，对所有 $n \geq 1$， $A_{U,n} \in \Sigma_t$，因此 N_U 是 Σ_t–可测的。

接下来我们证明 $\Sigma_t = \sigma(N_U : \ U \in \mathcal{U}_t^{\mathbb{Q}})$。根据引理 2.1， Σ_t 由空事件 $V_t(W) := \{Z \in \mathscr{C}_t : Z \cap W = \varnothing\}$生成，其中 $W \in \mathcal{U}_t^{\mathbb{Q}}$. 但对每个 $W \in \mathcal{U}_t^{\mathbb{Q}}$，我们有$V_t(W) = \{N_W = 0\}$，因此 $V_t(W) \in \sigma(N_U : \ U \in \mathcal{U}_t^{\mathbb{Q}})$。所以 $\Sigma_t \subset \sigma(N_U : \ U \in \mathcal{U}_t^{\mathbb{Q}})$。反向包含成立，因为每个 N_U 都是 Σ_t–可测的，因此 $\sigma(N_U : \ U \in \mathcal{U}_t^{\mathbb{Q}}) \subset \Sigma_t$。因此$\Sigma_t = \sigma(N_U : \ U \in \mathcal{U}_t^{\mathbb{Q}})$。

尚需证明有限-σ–域子空间在 $L^2(\Sigma_t, \mu_t)$ 中稠密。由于 $\mathcal{U}_t^{\mathbb{Q}}$ 可数，将其枚举为 $\mathcal{U}_t^{\mathbb{Q}} = \{U_{(1)}, U_{(2)}, \ldots\}$，并对每个 $n \in \mathbb{N}$. 令 $\mathcal{F}_n := \sigma\big(N_{U_{(1)}}, \ \ldots, N_{U_{(n)}}\big)$，。注意到 $\mathcal{F}_n \uparrow \Sigma_t$。

令 $f \in L^2(\mathscr{C}_t, \mu_t)$。 定义 $f_n := \mathbb{E}_{\mu_t}[f \mid \mathcal{F}_n] \in L^2(\mathcal{F}_n, \mu_t)$。根据 L^2 鞅收敛定理， $f_n \to f$ 在 $L^2(\mu_t)$ 中收敛至 $n \to \infty$。因此， f 属于 $\bigcup_n L^2(\mathcal{F}_n, \mu_t)$ 的 L^2–闭包。最后，每个 $\mathcal{F}_n$ 都等于 $\mathcal{F}(\mathbf{U})$，其中有限元组 $\mathbf{U} = (U_{(1)}, \ldots, U_{(n)})$，所以 $\bigcup_{n\geq 1} L^2(\mathcal{F}_n, \mu_t) \subset$

$\bigcup_{\mathbf{U}} L^2(\mathcal{F}(\mathbf{U})\ \mu_t)$。 因此

$$\overline{\bigcup_{\mathbf{U}} L^2(\mathcal{F}(\mathbf{U}),\mu_t)}^{\ \|\cdot\|_{L^2(\mu_t)}} = L^2(\mathscr{C}_t,\mu_t),$$

如所断言。 □

下面的引理是一个简单的完备性判据：在有限指数矩条件下，有限族计数变量的指数函数已经张成整个相应的 L^2-空间。

引理 3.14。 设 $(M_1,\dots,M_m)$ 为某个概率空间上的 $\mathbb{N}^m$ 值随机向量，使得 $\mathbb{E}\Big[\prod_{j=1}^m b_j^{2M_j}\Big]<\infty$ 对所有 $(b_1,\dots,b_m)\in(0,\infty)^m$. 则

$$\overline{\operatorname{span}}\Big\{\ \prod_{j=1}^m b_j^{M_j}\ :\ b_1,\dots,b_m>0\ \Big\} = L^2(\sigma(M_1,\dots,M_m)).$$

证明。 设 $F\in L^2(\sigma(M_1,\dots,M_m))$，并假设 $\mathbb{E}\Big[F\prod_{j=1}^m b_j^{M_j}\Big]=0$，对所有 $(b_1,\dots,b_m)\in(0,\infty)^m$。将 $F=f(M_1,\dots,M_m)$ 记为某个 $f\colon\ \mathbb{N}^m\to\mathbb{C}$。对 $z=(z_1,\dots,z_m)\in\mathbb{C}^m$ 定义

$$G(z):=\mathbb{E}\Big[f(M)\prod_{j=1}^m z_j^{M_j}\Big].$$

由柯西–施瓦茨不等式以及关于 $b_j=|z_j|$ 的假设，我们有 $|G(z)|\le\|F\|_2\cdot\Big(\mathbb{E}\big[\prod_{j=1}^m|z_j|^{2M_j}\big]\Big)^{1/2}<\infty$，因此 G 对所有 $z\in\mathbb{C}^m$ 都有定义。由于 M 取值于 $\mathbb{N}^m$，

$$G(z)=\sum_{n\in\mathbb{N}^m} f(n)\,\mathbb{P}(M=n)\prod_{j=1}^m z_j^{n_j}$$

因此 G 是 $\mathbb{C}^m$ 上的整函数。根据假设，对所有 $b\in(0,\infty)^m$，都有 $G(b)=0$，因此由恒等定理，$G\equiv0$ 在 $\mathbb{C}^m$ 上成立。于是幂级数中的每个系数都为 0，即

$$f(n)\,\mathbb{P}(M=n)=0\qquad\forall\, n\in\mathbb{N}^m.$$

因此 $f(M)=0$ 几乎处处成立，即 $F=0$ 几乎处处成立。这证明了全性。 □

下一个引理表明，在泊松模型中，有限个矩形计数的单项式可以由单位测度族拼接所产生的拉东–尼科迪姆导数的平方根来实现。

引理 3.15. 固定 $t>0$ 以及一个有限元组 $\mathbf{U}=(U_1,\dots,U_m)$ 满足 $U_i=I_i\times G_i\in\mathcal{U}_t^{\mathbb{Q}}$。设 $b_1,\dots,b_m>0$。则存在 $\kappa\in\mathcal{K}_t$（如推论 3.8中所述）以及常数 $C>0$ 使得

$$\Big(\frac{d\kappa}{d\mu_t}\Big)^{1/2}(Z)=C\prod_{i=1}^m b_i^{N_{U_i}(Z)}\qquad(\mu_t\text{-a.e. } Z\in\mathscr{C}_t).$$

证明。 将每个 $U_i=I_i\times G_i$ 写成具有 $I_i\in\mathcal{I}_t^{\mathbb{Q}}$ 与 $G_i\in\mathcal{G}$ 的形式。设 $\mathcal{Q}$ 为所有有理端点，即出现在 I_i 中的那些，连同 0 与 t。将它们列为 $0=q_0<q_1<\cdots<q_K=t$。若 $K=1$（从而 $\mathcal{Q}=\{0,t\}$），令 $J_1:=(0,\ t]$ 以及 $\ell_1:=t$。若 $K\ge2$，定义不相交区间

$$J_1:=[0,q_1),\quad J_k:=(q_{k-1},q_k)\ (2\le k\le K-1),\quad J_K:=(q_{K-1},t],$$

从而每个 $J_k\in\mathcal{I}_t^{\mathbb{Q}}$，并令 $\ell_k:=|J_k|$ 使得 $\sum_{k=1}^K\ell_k=t$。对 $k=1,\dots,K$，由 $Z|_{J_k}:=\big((Z\cap(J_k\times L))-(q_{k-1},\ 0)\big)$，（约定 $q_0=0$）定义限制／平移映射 $Z\mapsto Z|_{J_k}\in\mathscr{C}_{\ell_k}$。对每个 k，定义 $a_k\colon\ L\to(0,\ \infty)$ 为

$$a_k(\ell):=\prod_{i:\ J_k\cap(0,t)\subset I_i} b_i^{\mathbb{1}_{G_i}(\ell)}.$$

那么 a_k 有界，因此 $a_k\in L^2(L,\ \eta)$ 和 $a_k\ge0$。

令 $\boldsymbol{\nu}^{(a_k)} \in \mathrm{Unit}(\boldsymbol{\mu})$ 为引理 3.12 中对应于 a_k的单位测度族，并定义 $\kappa := (\nu^{(a_1)}_{\ell_1} \otimes \cdots \otimes \nu^{(a_K)}_{\ell_K}) \circ \oplus^{-1}_{\ell_1,\ldots,\ell_K} \in \mathcal{K}_t$. 由于 $\boldsymbol{\mu}$ 恰好可因子分解，且 $\Delta \equiv 1$（命题 3.10），我们有 $\mu_t = (\mu_{\ell_1} \otimes \cdots \otimes \mu_{\ell_K}) \circ \oplus^{-1}_{\ell_1,\ldots,\ell_K}$. 此外，$\mu_t$ 不赋予任何确定性时间切片质量，因此 μ_t–几乎处处，Z 在边界切片 $\{q_j\} \times L$上没有点。在这个满测度集合上，拼接映射的逆映射为 $Z \mapsto (Z|_{J_1}, \ldots, Z|_{J_K})$，因此

$$\frac{d\kappa}{d\mu_t}(Z) = \prod_{k=1}^{K} \frac{d\nu^{(a_k)}_{\ell_k}}{d\mu_{\ell_k}}(Z|_{J_k}) \qquad (\mu_t\text{–a.e. } Z).$$

对每个块取平方根并利用（16）可得，对 μ_t–几乎处处 Z，

$$\Big(\frac{d\kappa}{d\mu_t}\Big)^{1/2}(Z) = C \prod_{k=1}^{K} \prod_{(r,\ell)\in Z:\ r\in J_k} a_k(\ell)$$

对某个确定性常数 $C > 0$（归一化因子的乘积）。代入 a_k 的定义即得

$$\prod_{(r,\ell)\in Z:\ r\in J_k} a_k(\ell) = \prod_{i:\ J_k\cap(0,t)\subset I_i} b_i^{\#\{(r,\ell)\in Z:\ r\in J_k,\ \ell\in G_i\}}.$$

对 k 求积并交换乘积次序可得

$$\prod_{k=1}^{K} \prod_{i:\ J_k\cap(0,t)\subset I_i} b_i^{\#(Z\cap(J_k\times G_i))} = \prod_{i=1}^{m} b_i^{\sum_{k:\ J_k\cap(0,t)\subset I_i} \#(Z\cap(J_k\times G_i))}.$$

最后，由于 $\{J_k\}$ 划分 $[0,t]$ 直至边界时刻 $\{q_1,\ldots,q_{K-1}\}$ 且 μ_t 不对任何确定性时间切片赋正测度（定义2.3（ii）），我们有

$$\sum_{k:\ J_k\cap(0,t)\subset I_i} \#(Z\cap(J_k\times G_i)) = \#(Z\cap(I_i\times G_i)) = N_{U_i}(Z) \qquad (\mu_t\text{–a.e. } Z).$$

Thus

$$\Big(\frac{d\kappa}{d\mu_t}\Big)^{1/2}(Z) = C\prod_{i=1}^{m} b_i^{N_{U_i}(Z)} \qquad (\mu_t\text{–a.e.}),$$

如所断言。 □

本小节的主要结果是证明，完全 L–扩展的泊松随机集系统是一个 I 型系统，并明确计算其 Arveson 指数。$L = \mathbb{N}$ 和 $\eta = \#$ 的情形，Liebscher 已在 [6] 的例 4.1 和注 4.4 中讨论过。

定理 3.16。泊松随机集系统 $\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}^{(P,L)}}$ 是 *I* 型，指标为 I，且指标为 指标$\big(\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}^{(P,L)}}\big)$ =维数 $L^2(L, \eta)$。

证明。为简便起见，记 $\boldsymbol{\mu} := \boldsymbol{\mu}^{(P,L)}$ 和 $E_t := L^2(\mathscr{C}_t, \mu_t)$。由命题 3.10，因子分解是精确的，并且对所有 $s, t > 0$，$\Delta_{s,t} \equiv 1$。特别地，常值截面 $u_t \equiv 1 \in E_t$是一个归一化单位，因此 $\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}}$ 是空间的，推论 3.8 适用。固定 $t > 0$，并令 $\mathcal{K}_t$ 如推论 3.8 中所述。我们必须证明，向量集 $\{(d\kappa/d\mu_t)^{1/2} : \kappa \in \mathcal{K}_t\}$ 在 E_t中是全的。

对于 $U \in \mathcal{U}_t^{\mathbb{Q}}$任意 $N_U(Z) := \#(Z \cap U)$。由引理3.13，$\Sigma_t = \sigma\big(N_U : \ U \in \mathcal{U}_t^{\mathbb{Q}}\big)$，因此子空间的并

$$\bigcup_{\mathbf{U}} L^2(\mathcal{F}(\mathbf{U}), \mu_t)$$

在 E_t 中稠密，其中该并遍历所有有限元组 $\mathbf{U} = (U_1, \ldots, U_m)$，而 $\mathcal{F}(\mathbf{U}) := \sigma(N_{U_1}, \ldots, N_{U_m})$。因此，只需证明对于每个固定的有限元组 $\mathbf{U}$，子空间$L^2(\mathcal{F}(\mathbf{U})\ \mu_t)$ 包含于 $\{(d\kappa/d\mu_t)^{1/2} : \kappa \in \mathcal{K}_t\}$ 的闭线性张成中。

为此，固定一个有限元组$\mathbf{U} = (U_1, \ldots, U_m)$，其中 $U_i \in \mathcal{U}_t^{\mathbb{Q}}$，并令

$$M_i := N_{U_i} \qquad (1 \le i \le m).$$

我们声称 使得（$M_1,\dots,M_m$）按照引理 3.14 的意义具有有限指数矩，即

$$\mathbb{E}_{\mu_t}\Big[\prod_{i=1}^m b_i^{2M_i}\Big]<\infty \qquad \forall\,(b_1,\dots,b_m)\in(0,\infty)^m.$$

事实上，令 $U:=\bigcup_{i=1}^m U_i$ 且 $B:=\prod_{i=1}^m \max(b_i^2,\,1)$。对于每个构型 $Z\in\mathscr{C}_t$ 和每个点 $x\in Z\cap U$，有 $\prod_{i:\ x\in U_i} b_i^2\le B$，因此

$$\prod_{i=1}^m b_i^{2M_i(Z)}=\prod_{i=1}^m b_i^{2\#(Z\cap U_i)}\le B^{\#(Z\cap U)}=:B^{\,N_U(Z)}.$$

在 μ_t 下，$N_U(Z)$ 服从参数为 $\nu_t^{\mathrm{int}}(U)<\infty$（其中 $\nu_t^{\mathrm{int}}=\lambda$勒贝格测度 $\restriction_{(0,t)}\otimes\eta$）的泊松分布，因此$\mathbb{E}_{\mu_t}[B^{N_U}]=\exp(\nu_t^{\mathrm{int}}(U)\,(B-1))<\infty$。这证明了指数矩假设。

Theref引理 3.14附录 $\overset{\text{成立一}}{\text{个}}$ d yields that the l线性张成 f

$$\Big\{\prod_{i=1}^m b_i^{M_i}\ :\ b_1,\dots,b_m>0\Big\}=\Big\{\prod_{i=1}^m b_i^{N_{U_i}}\ :\ b_1,\dots,b_m>0\Big\}$$

在 $L^2(\mathcal{F}(\mathbf{U})\ \mu_t)$ 中稠密。

固定 $b_1,\ldots,\ b_m>0$。由引理 3.15，存在 $\kappa\in\mathcal{K}_t$ 和一个常数 $C>0$ 使得

$$\Big(\frac{d\kappa}{d\mu_t}\Big)^{1/2}(Z)=C\prod_{i=1}^m b_i^{N_{U_i}(Z)}\qquad(\mu_t\text{–a.e. }Z).$$

因此，每个单项式 $\prod_{i=1}^m b_i^{N_{U_i}}$都属于 $\{(d\kappa/d\mu_t)^{1/2}:\ \kappa\in\mathcal{K}_t\}$ 的线性张成，从而

$$L^2(\mathcal{F}(\mathbf{U}),\mu_t)\subset\overline{\operatorname{span}}\Big\{\Big(\frac{d\kappa}{d\mu_t}\Big)^{1/2}:\ \kappa\in\mathcal{K}_t\Big\}.$$

由于 L^2（$\mathcal{F}$（$\mathbf{U}$） μ_t）在所有有限元组 $\mathbf{U}$ 上的并集在 E_t 中稠密（引理 3.13），我们得到

$$\overline{\operatorname{span}}\Big\{\Big(\frac{d\kappa}{d\mu_t}\Big)^{1/2}:\ \kappa\in\mathcal{K}_t\Big\}=E_t.$$

由于 $t>0$ 是任意的，推论 3.8（i）意味着 $\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}}$ 是 I 型的。

接下来只需证明 $\big(\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}}\big)=$维数 $L^2(L,\eta)$。为此，取 $a,b\in L^2(L,\eta)$，其中 $a,b\ge 0\eta$几乎处处成立，并考虑引理 $u^{(a)},u^{(b)}$ 中的相应正归一化单位3.12。由推论 3.7，

$$\langle u_t^{(a)},u_t^{(b)}\rangle=\int_{\mathscr{C}_t}\Big(\frac{d\nu_t^{(a)}}{d\mu_t}\Big)^{1/2}\Big(\frac{d\nu_t^{(b)}}{d\mu_t}\Big)^{1/2}d\mu_t.$$

利用（15），被积函数等于

$$\exp\Big(\tfrac{\lambda t}{2}\big(2-\|a\|_2^2-\|b\|_2^2\big)\Big)\prod_{(r,\ell)\in Z}(a(\ell)b(\ell)),$$

其中 $\|\cdot\|_2$ 是 $L^2(L,\eta)$ 范数。因此

$$\langle u_t^{(a)},u_t^{(b)}\rangle=\exp\Big(\tfrac{\lambda t}{2}\big(2-\|a\|_2^2-\|b\|_2^2\big)\Big)\,\mathbb{E}_{\mu_t}\Big[\prod_{(r,\ell)\in Z_t}a(\ell)b(\ell)\Big].\tag{18}$$

我们通过对泊松计数进行条件化来计算剩余的期望：在 μ_t下，$N:=\#Z_t$ ~服从泊松(λt)分布；给定 $N=n$ 后，标记独立同分布，其分布为 η。因此

$$\mathbb{E}_{\mu_t}\Big[\prod_{(r,\ell)\in Z_t}a(\ell)b(\ell)\ \Big|\ N\Big]=\big(\mathbb{E}_\eta[ab]\big)^N=\langle a,b\rangle_{L^2(\eta)}^N.$$

在 N 中取期望得到

$$\mathbb{E}_{\mu_t}\Big[\prod_{(r,\ell)\in Z_t}a(\ell)b(\ell)\Big]=\mathbb{E}\big[\langle a,b\rangle^N\big]=\exp\big(\lambda t(\langle a,b\rangle-1)\big),$$

因为 $\mathbb{E}[c^N] = \exp(\lambda t(c-1))$，对于 $N \sim$ 泊松(λt)。代入（18）得到

$$\langle u_t^{(a)}, u_t^{(b)} \rangle = \exp\Big(\lambda t\Big(\langle a,b\rangle - \tfrac{1}{2}\|a\|_2^2 - \tfrac{1}{2}\|b\|_2^2\Big)\Big) = \exp\Big(-\tfrac{\lambda t}{2}\|a-b\|_2^2\Big).$$

因此，Arveson 协方差核满足

$$c_{\mathbb{E}}(u^{(a)}, u^{(b)}) = \frac{1}{t}\log\langle u_t^{(a)}, u_t^{(b)}\rangle = \lambda\Big(\langle a,b\rangle - \tfrac{1}{2}\|a\|_2^2 - \tfrac{1}{2}\|b\|_2^2\Big). \tag{19}$$

令 $u^{(1)}$ 表示与 $a \equiv 1$对应的单位。则 $c_{\mathbb{E}}(u^{(1)}, u^{(1)}) = 0$。根据由条件正定核 $c_{\mathbb{E}}$构造希尔伯特空间 $H(\mathbb{E})$ 的标准方法，等价类的内积满足

$$\big\langle [u^{(a)}] - [u^{(1)}],\ [u^{(b)}] - [u^{(1)}] \big\rangle_{H(\mathbb{E})} = c_{\mathbb{E}}(u^{(a)}, u^{(b)}) - c_{\mathbb{E}}(u^{(a)}, u^{(1)}) - c_{\mathbb{E}}(u^{(1)}, u^{(b)}).$$

利用（19）以及 $c_{\mathbb{E}}(u^{(1)}, u^{(1)}) = 0$ 可得

$$\big\langle [u^{(a)}] - [u^{(1)}],\ [u^{(b)}] - [u^{(1)}] \big\rangle_{H(\mathbb{E})} = \lambda\,\langle a-1,\ b-1\rangle_{L^2(\eta)}.$$

因此，该映射

$$\Psi:\ \operatorname{span}\{[u^{(a)}] - [u^{(1)}]\} \ \to\ L^2(L,\eta), \qquad \Psi([u^{(a)}] - [u^{(1)}]) = \sqrt{\lambda}\,(a-1),$$

是一个等距映射。

最后，$\{\sqrt{\lambda}(a-1):\ a \ge 0,\ a \in L^2(L,\eta)\}$ 在 $L^2(L,\eta)$ 中稠密：给定任意有界实值 $h \in L^2(L,\eta)$，并取足够小的 $\varepsilon > 0$ 使得 $1+\varepsilon h \ge 0$，令 $a := 1+\varepsilon h$；则 $\sqrt{\lambda}(a-1) = \sqrt{\lambda}\,\varepsilon h$。由于有界实值函数在 $L^2(L,\eta)$ 中稠密，Ψ 的值域是稠密的。因此$H(\mathbb{E}) \cong L^2(L,\eta)$，并且

$$\operatorname{ind}(\mathbb{E}) = \dim H(\mathbb{E}) = \dim L^2(L,\eta).$$

□

观察 3.17。(i) 若 $L^2(L,\eta)$ 是有限维的，这恰好发生在 η 支持于有限多个原子上的情形，此时 $\operatorname{ind}\big(\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}^{(P,L)}}\big) = \#\operatorname{supp}(\eta)$。否则，$\operatorname{ind}\big(\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}^{(P,L)}}\big) = \infty$。

(ii) 利用 Wiener–Itô 混沌分解（它将泊松点过程的 L^2 识别为对称 Fock 空间），可以直接证明泊松随机集系统 $\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}^{(P,L)}}$ 与对称 Fock/CCR Arveson 系统 $\{\Gamma_s(L^2(0,t)\otimes L^2(L,\eta))\}_{t>0}$（作为 Arveson 系统）同构。因此，根据 Arveson 的 I 型系统分类 [2]，它是一个 I 型系统，其指标为 $\dim L^2(L,\eta)$。

上文所发展的方法可以说在本质上更为直接且更具概率论色彩，并不依赖于 Arveson 对 I 型 Arveson 系统的分类理论。

（iii）在 $[0,1]\times L$ 上构造关于 $\Delta_{s,t} \neq 1$ 的可测因子化族的一种直接方法，是将泊松强度随机化。下面概述具体细节：取 $\rho = \frac{1}{2}\delta_\lambda + \frac{1}{2}\delta_{2\lambda}$ 并定义

$$\mu_t^{(CP)} := \tfrac{1}{2}P_{\lambda,t} + \tfrac{1}{2}P_{2\lambda,t},$$

其中 $P_{\alpha,t}$ 是 $(0,t)\times L$ 上强度为 α 勒贝格测度 $\restriction_{(0,t)}\otimes\eta$ 的泊松点过程在 $\mathscr{C}_t$ 上的分布。令 $\pi_t := P_{\lambda,t}$。于是 $\mu_t^{(CP)} \sim \pi_t$ 并且

$$\frac{d\mu_t^{(CP)}}{d\pi_t}(Z) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,e^{-\lambda t}\,2^{N(Z)}, \qquad N(Z) := \#Z.$$

此外，对于 $s,t>0$ 令 $\kappa_{s,t} := (\mu_s^{(CP)} \otimes \mu_t^{(CP)}) \circ \oplus_{s,t}^{-1}$，则拉东–尼科迪姆导数 $\Delta_{s,t} := \frac{d\kappa_{s,\cdot}}{d\mu_{s+t}^{(CP)}}$（$\mu_{s+t}^{(CP)}$–几乎处处）具有如下显式版本

$$\Delta_{s,t}(Z) = \frac{\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-\lambda s}2^{N_1(Z)}\Big)\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-\lambda t}2^{N_2(Z)}\Big)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-\lambda(s+t)}2^{N_1(Z)+N_2(Z)}} \qquad (\mu_{s+t}^{(CP)}\text{–a.e. } Z \in \mathscr{C}_{s+t}),$$

其中 $N_1(Z) := \#(Z \cap ([0,s]\times L))$，且 $N_2(Z) := \#\big((Z \cap ([s,s+t]\times L)) - (s,0)\big)$。与命题 3.10 中一样，族 $\boldsymbol{\mu}^{(CP,L)} := \{\mu_t^{(CP)}\}_{t>0}$ 是一个可测因子化测度族

测度。最后，由于对于每个 t，$\mu_t^{(CP)} \sim P_{\lambda,\,t} = \mu_t^{(P,L)}$，考克斯-泊松混合 $\boldsymbol{\mu}^{(CP,L)}$具有与 $\boldsymbol{\mu}^{(P,L)}$ 相同的可分解测度类型，因此产生相同的 Arveson 系统（在同构意义下）。

4. Type III random-set systems

本节通过构造 III 型随机集系统，确立本文的主要结果。从一个合适的 II 型$_0$ 随机集种子出发，我们引入一种以 $[0,1]\times\mathbb{N}$ 为指标的带标记无限乘积构造。该构造使用种子的一列时间伸缩副本，并在 $[0,t]\times\mathbb{N}$ 的闭子集超空间上生成一个可测因子化概率测度族。利用测度无限乘积的 Kakutani 定理以及定量 Hellinger 估计，我们证明所得因子化族生成的随机集系统没有单位。

关键的技术要素是一个确保种子满足 Hellinger 小性的充分判据。该判据以块占据事件以及对单块限制律的定量控制来表述。我们证明，对布朗零点集经锚点适配局部化、锚分布的 Palm 型均匀化以及真空质量归一化后得到的种子，该判据成立。由此得到一个由布朗零点集生成的 III 型随机集系统的显式例子。

4.1. **Hellinger 小种子**。

定义 4.1。种子是一个定义在 $[0,1]\times\{*\}$ 上的可测因子化族 $\boldsymbol{\nu}=\{\nu_t\}_{t>0}$，且其关联的随机集系统 $\mathbb{E}^{\boldsymbol{\nu}}:=\{E_t^{\boldsymbol{\nu}},U_{s,t}^{\boldsymbol{\nu}}\}_{t>0}$ 是 II 型$_0$。

在全文中，我们固定具有离散拓扑的 $L:=\mathbb{N}$。闭集 $Z\subset[0,t]\times\mathbb{N}$ 可视为一个序列 $Z=\{Z^{(n)}\}_{n\geq1}$，其中

$$Z^{(n)}:=\{u\in[0,t]:(u,n)\in Z\}\in\mathscr{C}_t^{\{*\}},$$

因为 $\mathbb{N}$ 是离散的，且切片 $[0,t]\times\{n\}$ 是既开又闭的。

下面的引理将超空间 $\mathscr{C}_t^{\{\mathbb{N}\}}$ 与一维超空间的可数乘积对应起来。

引理 4.2。对于每个 $t>0$，映射 $\Phi_t\colon\mathscr{C}_t^{\{\mathbb{N}\}}\to\prod_{n\geq1}\mathscr{C}_t^{\{*\}}$，$\Phi_t(Z):=\big(Z^{(n)}\big)_{n\geq1}$ 是一个 *Borel* 同构，其逆映射为 $\Psi_t\big((Z^{(n)})_{n\geq1}\big):=\bigcup_{n\geq1}\big(Z^{(n)}\times\{n\}\big)\subset[0,t]\times\mathbb{N}.$

证明。由于 $\mathbb{N}$ 是离散的，$[0,t]\times\mathbb{N}$ 是既开又闭集 $[0,t]\times\{n\}$ 的不交并。因此，当且仅当每个切片 $Z\cap([0,t]\times\{n\})$ 都是闭集时，集合 $Z\subset[0,t]\times\mathbb{N}$ 才是闭集。于是，Φ_t 和 Ψ_t 互为逆双射。

为说明可测性，注意根据引理 2.1，σ 上的 σ-域 $\mathscr{C}_t^{\{\mathbb{N}\}}$ 由如下形式的空事件生成：$\{Z\colon Z\cap(U\times\{n\})=\varnothing\}$，其中 $U\subset[0,t]$ 是开集，且 $n\in\mathbb{N}$。在 Φ_t 下，这样的空事件变为柱事件 $\{(Z^{(k)})\colon Z^{(n)}\cap U=\varnothing\}$，它在乘积 σ-域中是博雷尔集$\sigma$。因此 Φ_t 是博雷尔集。同样的论证表明 Ψ_t 是博雷尔集。□

在下文中，我们将自由使用同一化 $\mathscr{C}_t^{\{\mathbb{N}\}}\cong\prod_{n\geq1}\mathscr{C}_t^{\{*\}}$，将其视为标准博雷尔空间；该同一化由引理 4.2给出。

现在设 $\boldsymbol{\nu}=\{\nu_t\}_{t>0}$ 为一个种子。选取正数列 $\{a_n\}_{n\geq1}$，使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\infty,\qquad\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2<\infty,\tag{20}$$

（例如 $a_n:\equiv\frac{1}{n}$）。对于每个 $n\geq1$ 和每个 $t>0$，定义 $\mathscr{C}_t^{\{*\}}$ 上的概率测度 $\nu_t^{(n)}$，如下所示：

$$\nu_t^{(n)}:=(D_{a_n,t})_*\nu_{a_nt},\tag{21}$$

whe关于 $D_{a_n,t}\colon\mathscr{C}_{a_nt}^{\{*\}}\to\mathscr{C}_t^{\{*\}}$ 是时间伸缩映射 $D_{a_n,t}(Z):=\{u/a_n\colon\ u\in Z\}\subset[0,t]$.

为供后续使用，设 $\sigma_{s,t}^{(n)} := (\nu_s^{(n)} \otimes \nu_t^{(n)}) \circ \oplus_{s,t}^{-1}$, $s,t>0$，使得 $\nu_{s+t}^{(n)} \sim \sigma_{s,t}^{(n)}$。定义海灵格积分

$$H_{s,t}^{(n)} := \int_{\mathscr{C}_{s+t}^{\{*\}}} \sqrt{\frac{\mathrm{d}\nu_{s+t}^{(n)}}{\mathrm{d}\sigma_{s,t}^{(n)}}}\, \mathrm{d}\sigma_{s,t}^{(n)} \in (0,1].$$

定义 4.3. 若种子 $\boldsymbol{\nu} = \{\nu_t\}_{t>0}$ 满足：对每个固定的 $s,\ t>0$，都存在有限常数 $C_{s,t}$，使得对所有充分小的 $\lambda>0$，则称其为 Hellinger小。

$$1 - H_{\lambda s,\lambda t}^{(\nu)} \ \le\ C_{s,t}\,\lambda^2,$$

其中 $H_{\lambda s,\lambda t}^{(\nu)}$ 是 $\nu_{\lambda(s+t)}$ 与 $(\nu_{\lambda s}\otimes\nu_{\lambda t})\circ\oplus^{-1}$ 之间的海灵格积分。

这是一个自然的短时间 L^2-小量条件。它表明两个等价分布之间的平方根密度与 1 的差为 $O(\lambda)$ 阶，因此海灵格亏损为 $O(\lambda^2)$。

定义 4.4. 对每个 $t>0$，定义概率测度 $\mu_t^{(\nu)} := \bigotimes_{n=1}^{\infty} \nu_t^{(n)}$ 于 $\mathscr{C}_t^{\{\mathbb{N}\}}$ 上。

等价地，若 $(Z_t^{(n)})_{n\ge1}$ 相互独立且具有分布 $Z_t^{(n)} \sim \nu_t^{(n)}$，则 $Z_t := \bigcup_{n\ge1}\big(Z_t^{(n)} \times \{n\}\big) \subset [0,t]\times\mathbb{N}$ 是一个分布为 $\mu_t^{(\nu)}$ 的随机闭集。

下一个命题表明，海林格小种子的缩放副本的无限乘积构成一个可测因子化族。

命题 4.5。 设 $\{a_n\}_{n\ge1}$ 满足 (20)，并设 $\boldsymbol{\nu} = \{\nu_t\}_{t>0}$ 是一个海林格小种子。那么 $\boldsymbol{\mu}_\nu := \{\mu_t^{(\nu)}\}_{t>0}$ 是定义在 $[0,1]\times\mathbb{N}$上的可测因子化族。

证明。 首先，我们证明 $\boldsymbol{\mu}_\nu = \{\mu_t^{\nu}\}_{t>0}$ 按定义 2.3(i) 的意义是可分解的。为此，固定 $s,\ t>0$。利用同一化 $\mathscr{C}_{s+t}^{\{\mathbb{N}\}} \cong \prod_{n\ge1}\mathscr{C}_{s+t}^{\{*\}}$，我们有 $\mu_{s+t} = \bigotimes_{n\ge1}\nu_{s+t}^{(n)}$ 以及 $(\mu_s\otimes\mu_t)\circ\oplus_{s,t}^{-1} = \bigotimes_{n\ge1}\sigma_{s,t}^{(n)}$。根据无穷乘积测度的 Kakutani 定理 [5]，这两个无穷乘积测度等价当且仅当

$$\prod_{n\ge1} H_{s,t}^{(n)} \ >\ 0.$$

现在 $H_{s,t}^{(n)}$ 是时刻 s 和 t 的缩放分布之间的海灵格积分。由缩放（21），我们有 e

$$H_{s,t}^{(n)} = H_{a_n s,a_n t}^{(\nu)}.$$

由于种子 $\boldsymbol{\nu} = \{\nu_t\}_{t>0}$ 是 Hellinger小的，我们有 $1 - H_{s,t}^{(n)} \le C_{s,t}\,a_n^2$，对所有充分大的 n均成立。但是$\sum_n a_n^2 < \infty$ 因此 $\sum_n (1 - H_{s,t}^{(n)}) < \infty$，从而 $\prod_n H_{s,t}^{(n)} > 0$。因此，无穷乘积测度是等价的。

为验证不存在确定性时间切片，固定 $t>0$ 和 $r\in[0,t]$，并考虑事件 $A_{t,r} := \Big\{Z\in\mathscr{C}_t^{\{\mathbb{N}\}} :\ Z\cap(\{r\}\times\mathbb{N}) \ne \varnothing\Big\}$. 在同一化 $\Phi_t(Z) = (Z^{(n)})_{n\ge1}$下，我们有 $A_{t,r} = \bigcup_{n\ge1}\Big\{(Z^{(k)})_{k\ge1} :\ r\in Z^{(n)}\Big\}$. 因此，由可数次可加性和乘积结构，

$$\mu_t^{(\nu)}(A_{t,r}) \le \sum_{n\ge1} \nu_t^{(n)}\big(\{Z\in\mathscr{C}_t^{\{*\}} :\ r\in Z\}\big).$$

现在，$\nu_t^{(n)} = (D_{a_n,t})_*\nu_{a_n t}$，且 $r\in D_{a_n,t}(Z')$ 当且仅当 $a_n r\in Z'$。因此，$\nu_t^{(n)}(\{Z : r\in Z\}) = \nu_{a_n t}(\{Z' : a_n r\in Z'\})$。由于种子 $\boldsymbol{\nu}$ 本身就是一个因子化族，它满足定义 2.3(ii)，其中$L=\{*\}$，即对于所有 $u>0$ 和所有 $\rho\in[0,u]$，$\nu_u(\{Z' :\ \rho\in Z'\}) = 0$。将其应用于 $u = a_n t$ 和 $\rho = a_n r$，得到 $\nu_{a_n t}(\{Z' :\ a_n r\in Z'\}) = 0$。因此，每一项都为 0，故 $\mu_t^{(\nu)}(A_{t,r}) = 0$。这证明了定义 2.3(ii)。

接下来，我们验证非退化条件 (iii)。固定 $t>0$。由于种子满足定义 2.3(iii)，每个 ν_u 都不支撑在有限多个原子上，因此尤其不是狄拉克

测度。因此，对于每个 $u>0$，存在互不相交的博雷尔集 $B_u,\ C_u\subset\mathscr{C}_u^{\{*\}}$，使得 $\nu_u(B_u)>0$且 $\nu_u(C_u)>0$。（例如，由于 ν_u 不是狄拉克测度，存在某个博雷尔集 B_u，使得$0<\nu_u(B_u)<1$；那么 $C_u:=B_u^c$ 就满足要求。）

对于每个 n，将其应用于 $u=a_nt$，并选取 $B_{a_nt}\subset\mathscr{C}_{a_nt}^{\{*\}}$，使得 $0<\nu_{a_nt}(B_{a_nt})<1$；令$B_t^{(n)}:=D_{a_n,\,t}(B_{a_nt})\subset\mathscr{C}_t^{\{*\}}$。那么 $0<\nu_t^{(n)}(B_t^{(n)})<1$，并且 $0<\nu_t^{(n)}((B_t^{(n)})^c)<1$。

固定 $m\in\mathbb{N}$。对于每个 $\varepsilon=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m)\in\{0,1\}^m$，定义柱集

$$C_\varepsilon:=\Big(\prod_{j=1}^m A_j^{(\varepsilon_j)}\Big)\times\prod_{n>m}\mathscr{C}_t^{\{*\}},\qquad A_j^{(1)}:=B_t^{(j)},\ \ A_j^{(0)}:=(B_t^{(j)})^c.$$

这些集合 C_ε 两两不交，且 $\mu_t^{(\nu)}(C_\varepsilon)=\prod_{j=1}^m\nu_t^{(j)}(A^{(\varepsilon_j)\,j})>0$. 因此，对于每个 m都存在 2^m 互不相交的博雷尔集，其 $\mu_t^{(\nu)}$ 测度严格为正。特别是，$\mu_t^{(\nu)}$ 不能支撑在有限多个原子上。这证明了定义2.3(iii)。

我们聚焦于定义2.3的可测性条件 (iva)。设 $\sigma_t\colon\mathscr{C}_t^{\{*\}}\to\mathscr{C}_1^{\{*\}}$是时间缩放同胚 $\sigma_t(Z)=\{r/t\colon\ r\in Z\}$，并设 $\sigma_t^{\mathbb{N}}\colon\mathscr{C}_t^{\{\mathbb{N}\}}\to\mathscr{C}_1^{\{\mathbb{N}\}}$是 $[0,t]\times\mathbb{N}$上的时间缩放，即 $\sigma_t^{\mathbb{N}}(Z)=\{(r/t,n):(r,n)\in Z\}$。记

$$\widetilde{\nu}_t:=(\sigma_t)_*\nu_t,\qquad \widetilde{\mu}_t:=(\sigma_t^{\mathbb{N}})_*\mu_t^{(\nu)}.$$

由于种子可测，定义 2.3(iva) 给出了一个固定的可数环 $\mathcal{R}_*\subset\Sigma_1^{\{*\}}$，它生成 $\Sigma_1^{\{*\}}$，且 $t\mapsto\widetilde{\nu}_t(A)$ 对每个 $A\in\mathcal{R}_*$ 都是博雷尔的。

我们注意到 $\widetilde{\nu}_t^{(n)}:=(\sigma_t)_*\nu_t^{(n)}$ 满足

$$\widetilde{\nu}_t^{(n)}=\widetilde{\nu}_{a_nt}\qquad(t>0,\ n\geq1).\tag{22}$$

事实上，$\sigma_t\circ D_{a_n,\,t}=\sigma_{a_nt}$ 作为闭子集上的映射，因此 $\widetilde{\nu}_t^{(n)}=(\sigma_t)_*(D_{a_n,\,t})_*\nu_{a_nt}=(\sigma_t\circ D_{a_n,\,t})_*\nu_{a_nt}=(\sigma_{a_nt})_*\nu_{a_nt}=\widetilde{\nu}_{a_nt}$，如所述。

在乘积识别（引理 4.2）下，映射 $\sigma_t^{\mathbb{N}}$按坐标作用，因此

$$\widetilde{\mu}_t=\bigotimes_{n\geq1}\widetilde{\nu}_t^{(n)}=\bigotimes_{n\geq1}\widetilde{\nu}_{a_nt}.$$

现在定义一个可数环 $\mathcal{R}_{\mathbb{N}}\subset\Sigma_1^{\{\mathbb{N}\}}$，它是由形如$\pi_n^{-1}(A)$，的集合生成的柱集环，其中遍历所有 $n\in\mathbb{N}$ 和 $A\in\mathcal{R}_*$，其中 $\pi_n\colon\mathscr{C}_1^{\{\mathbb{N}\}}\to\mathscr{C}_1^{\{*\}}$ 是第 n 个切片投影。等价地，$\mathcal{R}_{\mathbb{N}}$ 由柱集的有限交的有限并组成

$$\bigcap_{j=1}^m\pi_{n_j}^{-1}(A_j),\qquad A_j\in\mathcal{R}_*,\ n_j\in\mathbb{N}.$$

这个环是可数的，并生成 $\Sigma_1^{\{\mathbb{N}\}}$，因为乘积 σ–代数由柱集生成。对于生成元 $B=\bigcap_{j=1}^m\pi_{n_j}^{-1}(A_j$，利用 $\widetilde{\mu}_t$ 的无限乘积结构以及（22），可得

$$\widetilde{\mu}_t(B)=\prod_{j=1}^m\widetilde{\nu}_{a_{n_j}t}(A_j).$$

每个因子$t\mapsto\widetilde{\nu}_{a_{n_j}t}(A_j)$ 都是博雷尔可测的，因为 $u\mapsto\widetilde{\nu}_u(A_j)$ 根据种子可测性是博雷尔可测的，而且 $u=a_{n_j}t$ 在 t上连续。因此，对于生成元，$t\mapsto\widetilde{\mu}_t(B)$ 是博雷尔可测的，进而对所有$B\in\mathcal{R}_{\mathbb{N}}$ 也成立。这证明了定义2.3(iva)。

最后，我们验证可测性条件 (ivb)。由于种子是可测的，定义2.3中的 (ivb) 给出了一个博雷尔映射 $\Delta^{(\nu)}\colon(0,\infty)^2\times\mathscr{C}_1^{\{*\}}\to(0,\infty)$，使得对于每个 $s,t>0$,$\Delta^{(\nu)}(s,t,\sigma_{s+t}(Z))$，其值等于拉东–尼科迪姆导数

$$\frac{d\big((\nu_s\otimes\nu_t)\circ\oplus_{s,t}^{-1}\big)}{d\nu_{s+t}}(Z)\qquad(\nu_{s+t}\text{-a.e. }Z\in\mathscr{C}_{s+t}^{\{*\}}).$$

对于 $n \geq 1$，定义坐标余循环 $\Delta^{(n)}(s,t,W) := \Delta^{(\nu)}(a_n s, a_n t, W)$，对所有 $s,t>0$ 和 $W \in \mathscr{C}_1^{\{*\}}$. 均成立。这是博雷尔映射，因为 $\Delta^{(\nu)}$ 是博雷尔映射，并且 $(s,t) \mapsto (a_n s, a_n t)$ 是连续的。

令 $W = (W^{(n)})_{n\geq 1} \in \mathscr{C}_1^{\{\mathbb{N}\}} \cong \prod_{n\geq 1} \mathscr{C}_1^{\{*\}}$。定义部分乘积

$$\Delta^{[N]}(s,t,W) := \prod_{n=1}^{N} \Delta^{(n)}(s,t,W^{(n)}), \qquad N \in \mathbb{N}.$$

每个 $\Delta^{[N]}$ 在 $(0,\infty)^2 \times \mathscr{C}_1^{\{\mathbb{N}\}}$ 上都是博雷尔的。固定 $s,\ t>0$。令

$$\widetilde{\nu}_{s,t} := (\sigma_{s+t}^{\mathbb{N}})_* \Big((\mu_s^{(\nu)} \otimes \mu_t^{(\nu)}) \circ \oplus_{s,t}^{-1} \Big) \quad \text{on } \mathscr{C}_1^{\{\mathbb{N}\}},$$

并回忆 $\widetilde{\mu}_{s+t} = (\sigma_{s+t}^{\mathbb{N}})_* \mu_{s+t}^{(\nu)}$。则根据分解性质，$\widetilde{\nu}_{s,\ t} \ll \widetilde{\mu}_{s+t}$。令 $M_{s,\ t} := \frac{d\widetilde{\nu}_{s,\ t}}{d\widetilde{\mu}_{s+t}}$ 为一个 Radon–Nikod´ym 导数。我们声称，对于每个 N，都有

$$\Delta^{[N]}(s,t,\cdot) = \mathbb{E}_{\widetilde{\mu}_{s+t}}\big[M_{s,t} \,\big|\, \mathcal{F}_N \big],$$

其中 $\mathcal{F}_N$是由前 N个坐标生成的 σ–σ-域（$W^{(1)}$, ..., $W_{(N)}$）。事实上，对于任意柱集 $B \in \mathcal{F}_N$，测度 $\widetilde{\mu}_{s+t}$ 和 $\widetilde{\nu}_{s,\ t}$ 分解为无限乘积，并且在前N 个坐标上，密度恰好是各坐标密度的有限乘积。具体而言，

$$\widetilde{\nu}_{s,\ t}(B) = \int_B \Delta^{[N]}(s,\ t,\ W)\ d\widetilde{\mu}_{s+t}(W),$$

并且还有 $\widetilde{\nu}_{s,\ t}(B) = \int_B M_{s,\ t}\, d\widetilde{\mu}_{s+t}$ 根据 $M_{s,\ t}$ 的定义。因此，$\Delta^{[N]}(s,\ t,\ \cdot)$ 是 $M_{s,\ t}$ 在 $\mathcal{F}_N$ 上的条件期望。

根据 鞅收敛定理，$\Delta^{[N]}(s,\ t,\ W) \to M_{s,\ t}(W)$ 对 $\widetilde{\mu}_{s+t}$–几乎处处的 W 成立。定义

$$\Delta(s,t,W) := \limsup_{N\to\infty} \Delta^{[N]}(s,t,W).$$

于是 Δ 是博雷尔可测的，并满足 $\Delta(s,\ t,\ \cdot) = \frac{d\widetilde{\nu}_{s,\ t}}{d\widetilde{\mu}_{s+t}}$（$\widetilde{\mu}_{s+t}$–几乎处处）。最后，定义 $\Delta_{s,\ t}$ 在 $\mathscr{C}_{s+t}^{\{\mathbb{N}\}}$ 上为

$$\Delta_{s,t}(Z) := \Delta\big(s,t,\sigma_{s+t}^{\mathbb{N}}(Z)\big).$$

根据构造，Δ 是联合博雷尔的，并满足定义 2.3(ivb)。证明至此完成。□

定义 4.6。对于 $N \in \mathbb{N}$ 和 $t>0$，令 $\pi_{\leq N,t}\colon \prod_{n\geq 1} \mathscr{C}_t^{\{*\}} \longrightarrow \prod_{n=1}^{N} \mathscr{C}_t^{\{*\}}$ 为坐标投影。根据引理 4.2，我们将 $\pi_{\leq N,t}$ 视为博雷尔映射 $\mathscr{C}_t^{\{\mathbb{N}\}} \to \prod_{n=1}^{N} \mathscr{C}_t^{\{*\}}$。然后定义第 N 个边缘测度

$$\mu_t^{(\leq N)} := (\pi_{\leq N,t})_* \mu_t^{(\nu)} = \bigotimes_{n=1}^{N} \nu_t^{(n)}. \tag{23}$$

下一个引理分析无限乘积构造的有限坐标边缘分布。

引理 4.7。对于每个 $N \in \mathbb{N}$，族 $\boldsymbol{\mu}^{(\leq N)} := \{\mu_t^{(\leq N)}\}_{t>0}$ 是 $[0,1] \times \{1,\dots,N\}$上的可测因子化族（等价地，在乘积空间 $\prod_{n=1}^{N} \mathscr{C}_t^{\{*\}}$ 上亦然）。此外，其关联的随机集系统 $\mathbb{E}^{(\leq N)}$ 属于类型 II_0。

证明。$\boldsymbol{\mu}^{(\leq N)}$ 的可测性与因子化是显然的，因为它是可测因子化族 $\{\nu_t^{(n)}\}_{t>0}$的有限乘积：拼接映射按坐标作用，而Radon–Nikod´ym导数在有限多个坐标上相乘。

与 $\{\nu_t^{(n)}\}$ 相关联的每个因子系统都与种子系统 $\mathbb{E}^{\nu}$ 在时间膨胀下同构（因此是 II 型$_0$，且具有唯一的归一化单位线）。II 型$_0$ 乘积系统的 N 重张量积仍具有唯一的归一化单位线，该线由因子单位的张量积张成。因此 $\mathbb{E}^{(\leq N)}$ 是 II 型$_0$。□

定义 4.8。 设 $u^{(\nu)}=\{u_t^{(\nu)}\}_{t>0}$ 为 II 型$_0$ 种子系统 $\mathbb{E}^{\boldsymbol{\nu}}$ 的正归一化单位（除相位外必然唯一）。对每个 $n\geq 1$，通过膨胀映射传输，定义与 $\{\nu_t^{(n)}\}$ 相关联的第 n 个因子系统的归一化单位 $u^{(n)}=\{u_t^{(n)}\}_{t>0}$：

$$u_t^{(n)}(Z):=u_{a_nt}^{(\nu)}\big(D_{a_n,t}^{-1}(Z)\big),\qquad Z\in\mathscr{C}_t^{\{*\}}.$$

令 $\mathbb{1}\in L^2(\nu_t)$ 表示常值 1 函数。定义种子“真空重叠 ”

$$m(t):=\langle\mathbb{1},u_t^{(\nu)}\rangle_{L^2(\nu_t)}\in(0,1].$$

注记 4.9。 注意，对于每个 n 和 t，都有

$$m_n(t):=\langle\mathbb{1},u_t^{(n)}\rangle_{L^2(\nu_t^{(n)})}=m(a_nt). \tag{24}$$

确实，$\langle\mathbb{1},\ u_t^{(n)}\rangle_{L^2(\nu_t^{(n)})}=\int u_{a_nt}^{(\nu)}(D_{a_n,\ t}^{-1}(Z))\,d(D_{a_n,\ t})_*\nu_{a_nt}(Z)\ =\int u_{a_nt}^{(\nu)}(Z')\ d\nu_{a_nt}(Z')\ =m(a_nt)$。

下面的定理给出了一个简单的充分条件，以确保无限乘积构造产生一个 III 型系统。

定理 4.10。 令 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 满足 (20)，并令 $\boldsymbol{\nu}$ 为一个海林格小种子。假设存在常数 $c>0$ 和 $t_0>0$ 使得

$$1-m(t)\ \geq\ c\,t\qquad(0<t\leq t_0). \tag{25}$$

则与 $\boldsymbol{\mu}_\nu=\{\mu_t^{(\nu)}\}_{t>0}$ 相伴的随机集系统 $\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}_\nu}$ 为III型。

证明。 反设 $\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}_\nu}$ 是空间的。利用定理3.2，存在一个概率测度的可测族 $\boldsymbol{\eta}=\{\eta_t\}_{t>0}$，满足 $\boldsymbol{\eta}\ll\boldsymbol{\mu}_\nu$ 以及 $\eta_{s+t}=(\eta_s\otimes\eta_t)\circ\oplus_{s,\ t}^{-1}$ 对所有$s,\ t>0$成立。

对每个 $N\in\mathbb{N}$ 与 $t>0$，定义边缘测度 $\eta_t^{(\leq N)}:=(\pi_{\leq N,\ t})_*\eta_t$ 于 $\prod_{n=1}^N\mathscr{C}_t^{\{*\}}$上。由于$\pi_{\leq N,\ t}$（逐坐标地）与拼接可交换，故有精确因式分解：

$$\eta_{s+t}^{(\leq N)}=(\eta_s^{(\leq N)}\otimes\eta_t^{(\leq N)})\circ\oplus_{s,t}^{-1}.$$

此外，由于 $\eta_t\ll\mu_t^{(\nu)}$，该边缘测度满足 $\eta_t^{(\leq N)}\ll\mu_t^{(\leq N)}$，其中 $\mu_t^{(\leq N)}$ 是边缘测度（23）。因此 $\boldsymbol{\eta}^{(\leq N)}:=\{\eta_t^{(\leq N)}\}_{t>0}$ 是一个被 $\boldsymbol{\mu}^{(\leq N)}$所控制的精确因式分解族，因而它对应于 $\mathbb{E}^{(\leq N)}$中的一个正归一化单位。

根据引理4.7，$\mathbb{E}^{(\leq N)}$ 是 II 型的$_0$, 因此它具有唯一的正归一化单位。具体地，设 $u^{(n)}=\{u_t^{(n)}\}_{t>0}$ 为 n坐标系统的正归一化单位（a_n的 $u^{(\nu)}$–膨胀），如定义4.8中所述，并设 $\omega_t^{(n)}$ 为其在 $\mathscr{C}_t^{\{*\}}$ 上的相关因子化测度族：

$$d\omega_t^{(n)}:=|u_t^{(n)}|^2\,d\nu_t^{(n)},\qquad t>0.$$

于是，$\mathbb{E}^{(\leq N)}$ 中的唯一正单位是张量积 $u^{(1)}\cdots u^{(N)}$，其相关因子化测度族为 $\omega_t^{(\leq N)}:=\bigotimes_{n=1}^N\omega_t^{(n)}$. 正归一化单位的唯一性意味着

$$\eta_t^{(\leq N)}=\omega_t^{(\leq N)}\qquad\text{for all } t>0 \text{ and } N\in\mathbb{N}.$$

对于每个 $t>0$，令 $\mathcal{C}_t$ 表示 $\prod_{n\geq 1}\mathscr{C}_t^{\{*\}}\cong\mathscr{C}_t^{\{\mathbb{N}\}}$ 中仅依赖有限个坐标的柱集的集合。于是 $\mathcal{C}_t$ 是一个生成完整乘积 σ–域的 π–系统。对于一个仅依赖前 N 个坐标的柱集 B，我们有 $\mathbb{1}_B=\mathbb{1}_{\pi_{\leq N,\ t}^{-1}(B_N)}$ 对于某个

B_N在 N重乘积 σ域中，因此 $\eta_t(B)=\eta_t^{(\leq N)}(B_N)=\omega_t^{(\leq N)}(B_N)=\omega_t(B)$，其中$\omega_t:=\bigotimes_{n\geq 1}\omega_t^{(n)}$。根据 π–λ 定理，这意味着对所有 $t>0.$，$\eta_t=\omega_t$。因此，族$\{\eta_t^{(\leq N)}\}_{N\geq 1}$ 唯一确定 η_t。

由于 $\mu_t^{(\nu)} = \bigotimes_{n\ge1} \nu_t^{(n)}$ 和 $\omega_t = \bigotimes_{n\ge1} \omega_t^{(n)}$，对于每个固定的 $t>0$，Kakutani 定理意味着只有当 Hellinger 亲和度的无限乘积严格为正时，$\omega_t \ll \mu_t^{(\nu)}$ 才可能成立；也就是说，

$$\prod_{n\ge1} \int_{\mathscr{C}_t^{\{*\}}} \sqrt{\frac{d\omega_t^{(n)}}{d\nu_t^{(n)}}}\, d\nu_t^{(n)} = \prod_{n\ge1} \langle \mathbb{1}, u_t^{(n)} \rangle = \prod_{n\ge1} m(a_n t) \;>\; 0.$$

我们证明，当 t 足够小时，该乘积等于 0。为此，固定 $t \in (0, t_0]$。对于所有足够大的 n，我们有 $a_n t \le t_0$（因为 $a_n \to 0$），因此由 (25) 和 (24)，$1 - m(a_n t) \ge c\, a_n t.$。由于 $\sum_n a_n = \infty$，可推出 $\sum_{n=1}^{\infty} \big(1 - m(a_n t)\big) = \infty.$。利用 $-\log x \ge 1 - x$ for $x \in (0,1],$，我们得到 $\sum_{n=1}^{\infty} -\log m(a_n t) = \infty$，因此

$$\prod_{n\ge1} m(a_n t) = \exp\Big(- \sum_{n\ge1} -\log m(a_n t) \Big) = 0,$$

如所声称。因此，ω_t 和 $\mu_t^{(\nu)}$ 互相奇异（特别地，$\omega_t \not\ll \mu_t^{(\nu)}$）。

但是，正如上文所示，一个可分解的 $\boldsymbol{\eta} \ll \boldsymbol{\mu}_\nu$ 的存在迫使 η_t 与乘积构造 ω_t 重合。这与 $\eta_t \ll \mu_t^{(\nu)}$ 矛盾，因为 $\omega_t \perp \mu_t^{(\nu)}$。因此不存在这样的精确因式分解族 $\boldsymbol{\eta}$，从而 $\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}_\nu}$ 没有单位，并且是 III 型。□

4.2. **Palm 均匀化代表元与 Hellinger 小种子。** 本小节通过结合锚点适配局部化与 Palm 均匀化，构造因子化族的便利代表元。所得测度具有均匀锚点和严格的直径控制，这些性质对于建立后文所使用的小种子估计至关重要。

定义 4.11 定义（锚点与扩展量）。对于 $t>0$，定义锚点映射 $\alpha_t : \mathscr{C}_t^{\{*\}} \to [0, t\quad],$

$$\alpha_t(Z) := \begin{cases} \inf Z, & Z \ne \varnothing, \\ 0, & Z = \varnothing, \end{cases}$$

以及扩散映射 $\mathrm{diam}_t : \mathscr{C}_t^{\{*\}} \to [0,t]$,

$$\mathrm{diam}_t(Z) := \begin{cases} \sup Z - \inf Z, & Z \ne \varnothing, \\ 0, & Z = \varnothing. \end{cases}$$

我们将在下文验证，这些基本的超空间泛函是可测的，因此可用于倾斜和条件化。

引理 4.12。对于每个 $t>0$，映射 $Z \mapsto \alpha_t$（Z）和 $Z \mapsto \mathrm{diam}_t$（$Z$）都是博雷尔的。

证明。固定 $a \in [0,t]$。由于 $\alpha_t(\varnothing) = 0$，对于 $a>0$，我们有 $\{\alpha_t(Z) > a\} = \{Z \ne \varnothing\} \cap \{Z \cap [0,a] = \varnothing\}$. 事件 $\{Z \cap [0,a] = \varnothing\}$ 是紧集 $[0,a] \subset [0,t]$的未命中集，因此是博雷尔集。此外，$\{Z = \varnothing\} = \{Z \cap [0,t] = \varnothing\}$ 是紧集 $[0,t]$的未命中集，因此 $\{Z \ne \varnothing\}$ 是博雷尔集。因此，对于所有 a，$\{\alpha_t > a\}$ 都是博雷尔集，所以 α_t 是博雷尔集。

为证明 diam_t 是博雷尔可测的，定义

$$s_t(Z) := 0 \text{ if } Z = \varnothing, \quad \text{and } s_t(Z) := \sup Z \text{ if } Z \ne \varnothing.$$

于是，对于任意 $b \in (0,\ t]$，我们有 $\{s_t(Z) < b\} = \{Z \cap [b,t] = \varnothing\}$，这同样是紧集 $[b,t]$的一个未命中事件，因此是博雷尔集。因此 s_t 是博雷尔可测的。最后，$\mathrm{diam}_t(Z) = s_t(Z) - \alpha_t(Z)$，因此 diam_t 是博雷尔可测的。□

Notation 4.13. 设 μ_t 是 $\mathscr{C}_t^{\{*\}}$ 上的概率测度，其中 $t>0$ 为某个固定值。令

$$p_t^{\mu} := \mu_t(\{\varnothing\}) \in [0,1), \qquad \mu_t^{\neq} := \mu_t(\,\cdot \cap \{Z \ne \varnothing\}), \qquad \kappa_t^{\mu} := (\alpha_t)_* \mu_t^{\neq} \ \text{ on } (0,t].$$

定义 4.14。如果对于每个 $t>0$ 都有 $\kappa_t^{\mu} \sim$ 勒贝格测度$\restriction_{(0,t]}$，则称概率测度 μ_t 在 $\mathscr{C}_t^{\{*\}}$ 上的族 $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_t\}_{t>0}$ 是 Palm可一致化的。

下面的引理在同一测度类中构造出一个代表元，使锚点恰好服从均匀分布。

引理 4.15。设 μ_t 是定义在 $\mathscr{C}_t^{\{*\}}$ 上的概率测度，其中 $t>0$固定。假设 κ_t^μ ~勒贝格测度 $\restriction_{(0,t]}$，并选取拉东–尼科迪姆导数$h_t = d$(勒贝格测度$\restriction_{(0,t]})/d\kappa_t^\mu$ 的一个博雷尔版本 $h_t:(0,t]\to(0,\infty)$。在 $\mathscr{C}_t^{\{*\}}$ 上定义一个新的概率测度 μ_t^{unif}，如下：

$$d\mu_t^{\mathrm{unif}}(Z) := \frac{1}{C_t}\Big(\mathbb{1}_{\{\varnothing\}}(Z) + \mathbb{1}_{\{Z\neq\varnothing\}}(Z)\, h_t(\alpha_t(Z))\Big)\, d\mu_t(Z), \tag{26}$$

其中 C_t 是归一化常数。

则：

(i) $\mu_t^{\mathrm{unif}} \sim \mu_t$；(ii) $\mu_t^{\mathrm{unif}}(\{\varnothing\}) = p_t^\mu/C_t$，且 $C_t = p_t^\mu + t$；

(iii) 在 $\mu_t^{\mathrm{unif}}(\cdot \mid Z\neq\varnothing)$下，锚点 $\alpha_t(Z)$ 恰好服从 均匀分布$(0,t)$。

证明。(i) 式（26）中的密度严格为正 μ_t–几乎处处：它在 $\{\varnothing\}$上等于 1，在 $h_t(\alpha_t(Z))$ 上等于 $\{Z\neq\varnothing\}$。由于 $\kappa_t^\mu\sim$ 勒贝格测度，我们可以（并且确实会）选取 $h_t>0$ κ_t^μ –几乎处处，因此 $h_t(\alpha_t(Z))>0\mu_t$在 $\{Z\neq\varnothing\}$上–几乎处处成立。因此 $\mu_t^{\mathrm{unif}}\sim\mu_t$。

(ii) 由（26）直接得出：$\mu_t^{\mathrm{unif}}(\{\varnothing\}) = \frac{1}{C_t}\int_{\{\varnothing\}} 1\, d\mu_t = \frac{p_t^\mu}{C_t}$。此外

$$C_t = \mu_t(\{\varnothing\}) + \int_{\{Z\neq\varnothing\}} h_t(\alpha_t(Z))\, d\mu_t(Z) = p_t^\mu + \int_{(0,t]} h_t(x)\, d\kappa_t^\mu(x) = p_t^\mu + t.$$

(iii) 设 $A\subset(0,\ t]$ 为博雷尔集。然后，利用变量替换 $x=\alpha_t(Z)$,

$$\mu_t^{\mathrm{unif}}\big(\alpha_t\in A,\ Z\neq\varnothing\big) = \frac{1}{C_t}\int \mathbb{1}_A(\alpha_t(Z))\, h_t(\alpha_t(Z))\, d\mu_t^{\neq}(Z) = \frac{1}{C_t}\int_A h_t(x)\, d\kappa_t^\mu(x) = \frac{1}{C_t}\,\mathrm{Leb}(A).$$

此外 $\mu_t^{\mathrm{unif}}(Z\neq\varnothing)$ = 勒贝格测度$((0,\ t])/C_t = t/C_t$。因此

$$\mu_t^{\mathrm{unif}}(\alpha_t\in A\mid Z\neq\varnothing) = \frac{\mathrm{Leb}(A)/C_t}{t/C_t} = \frac{\mathrm{Leb}(A)}{t},$$

即在给定 $Z\neq\varnothing$ 的条件下，$\alpha_t\sim$ 服从均匀分布$(0,\ t)$。 □

T下述初等引理在指数倾斜下给出一个通用的尾部界 g.

引理 4.16. 设 μ 为可测空间上的概率测度，并设 $Y\geq 0$ 可测。固定 $L>0$，并按下式定义倾斜概率 $\mu^{(L)}$

$$d\mu^{(L)} := \frac{e^{-LY}}{\int e^{-LY}\, d\mu}\, d\mu.$$

那么，对每个 $r>0$，都有 $\mu^{(L)}(Y\geq r)\leq e^{-Lr}$.

证明。在 $\{Y\geq r\}$ 上有 $e^{-LY}\leq e^{-Lr}$，因此

$$\mu^{(L)}(Y\geq r) = \frac{\int \mathbb{1}_{\{Y\geq r\}} e^{-LY}\, d\mu}{\int e^{-LY}\, d\mu} \leq \frac{e^{-Lr}\int e^{-LY}\, d\mu}{\int e^{-LY}\, d\mu} = e^{-Lr}.$$

□

定义 4.17（锚点适配的对数局部化）。固定一个博雷尔可测的非增函数 $L:(0,1)\to(0,\infty)$, 使得 $L(r)\to\infty$当 $r\downarrow 0$ 时（例如 $L(r) = |\ln r|$）。令$\boldsymbol{\mu} = \{\mu_t\}_{t>0}$ 为定义在 $\mathscr{C}_t^{\{*\}}$ 上、满足 $\mu_t(Z\neq\varnothing,\ \alpha_t(Z) = 0) = 0$ 对所有 $t\in(0,1)$ 均成立的概率测度族 μ_t。

定义锚点适配局部化倾斜 $\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{loc},\alpha}$，对于 $t\in(0,1)$，定义为：

$$d\mu_t^{\mathrm{loc},\alpha}(Z) := \frac{1}{Z_t^{\mathrm{loc},\alpha}}\Big(\mathbb{1}_{\{\varnothing\}}(Z) + \mathbb{1}_{\{Z\neq\varnothing,\ \alpha_t(Z)>0\}}(Z)\, \exp\Big(-L(\alpha_t(Z))\,\frac{\mathrm{diam}_t(Z)}{\alpha_t(Z)^2}\Big) + \mathbb{1}_{\{Z\neq\varnothing,\ \alpha_t(Z)=0\}}(Z)\Big)\, d\mu_t(Z), \tag{27}$$

其中 $Z^{\mathrm{loc}}{}_{,t}{}^{\alpha}$ 是归一化常数。对于 $t\geq 1$，令 $\mu^{\mathrm{loc}}{}_{,t}{}^{\alpha} := \mu_t$。

推论 4.18. 对于 $t \in (0,1)$，在 $\mu^{\mathrm{loc},\alpha}_{\cdot,t}(\cdot \mid Z \neq \varnothing)$ 下，有

$$\mu_t^{\mathrm{loc},\alpha}\big(\mathrm{diam}_t(Z) \geq t^2 \,\big|\, Z \neq \varnothing\big) \;\leq\; e^{-L(t)}.$$

特别地，如果 $L(t) = |\ln t|$，那么右侧为 t。

证明。固定 $t \in (0,1)$，并设 $E_t := \{Z \neq \varnothing : \mathrm{diam}_t(Z) \geq t^2\}$. 令 $\mathbb{P}$ 表示概率测度 $\mu^{\mathrm{loc},\alpha}_{\cdot,t}(\cdot \mid Z \neq \varnothing)$。根据引理 4.12，锚点映射 α_t 是博雷尔可测的，因此（由于我们处于标准博雷尔空间上）存在正则条件概率核 $x \longmapsto \mathbb{P}_x(\cdot)$，$(x \in (0,t])$，使得 $\mathbb{P}_x = \mathbb{P}(\cdot \mid \alpha_t = x)$ 且 $\mathbb{P} = \int \mathbb{P}_x \, \eta(dx)$，其中 $\eta := \mathbb{P} \circ \alpha_t^{-1}$是 $\mathbb{P}$ 的 α_t 边缘测度。

现在固定 $x \in (0,t]$。根据锚点适配局部化的定义，在纤维 $\{\alpha_t = x\}$ 上，$\mathbb{P}_x$ 相对于相应条件基准分布 $\mu_t(\cdot \mid Z \neq \varnothing,\ \alpha_t = x)$ 的 Radon–Nikodym 密度正比于

$$Z \;\longmapsto\; \exp\!\Big(-L(x)\,\frac{\mathrm{diam}_t(Z)}{x^2}\Big).$$

因此，我们可以在此纤维上应用引理4.16（尺度为 x^2 且阈值为 t^2），从而对 η-几乎处处的 $x \in (0,t]$,

$$\mathbb{P}_x(E_t) \;\leq\; \exp\!\Big(-L(x)\,\frac{t^2}{x^2}\Big). \tag{28}$$

最后，由于 $x \leq t$ 且 L 单调不增，我们有 $L(x) \geq L(t)$，并且 $\frac{t^2}{x^2} \geq 1$, 因此 $L(x)\,\frac{t^2}{x^2} \geq L(t)$, 因此 $\exp\!\Big(-L(x)\,\frac{t^2}{x^2}\Big) \leq e^{-L(t)}$. 对28式关于 η 积分可得

$$\mu_t^{\mathrm{loc},\alpha}\big(\mathrm{diam}_t(Z) \geq t^2 \mid Z \neq \varnothing\big) = \mathbb{P}(E_t) = \int_{(0,t]} \mathbb{P}_x(E_t)\,\eta(dx) \leq e^{-L(t)},$$

这就是所需的界。 □

下一个引理表明，锚点适配局部化能在尺度 t^2 下实现强直径控制。

引理*4.19*。取定 $t \in (0,1)$，并令 μ_t 为 $\mathscr{C}_t^{\{*\}}$ 上的概率测度。令 $\mu^{\mathrm{loc},\alpha}_{\cdot,t}$ 为定义 *4.17* 中的锚点适配局部化倾斜，并假设 $\kappa^{\mathrm{loc},\alpha}_{\cdot,t} := (\alpha_t)_* \mu^{\mathrm{loc},\alpha}_{\cdot,t}(\cdot \cap \{Z \neq \varnothing\}) \sim$ 勒贝格测度 $\lceil_{(0,t]}$。令 $\mu^{\mathrm{unif},\alpha}_{\cdot,t} := (\mu^{\mathrm{loc},\alpha}_{\cdot,t})^{\mathrm{unif}}$ 为其 *Palm* 均匀化（引理 *4.15*）。

那么，在 $\mu^{\mathrm{unif},\alpha}_{\cdot,t}(\cdot \mid Z \neq \varnothing)$ 下，锚点服从$\mathrm{Unif}(0,t)$，且

$$\mu_t^{\mathrm{unif},\alpha}\big(\mathrm{diam}_t(Z) \geq t^2 \mid Z \neq \varnothing\big) \;\leq\; e^{-L(t)}.$$

特别地，若 $L(r) = |\ln r|$，则右侧等于 t。

证明。 将引理 4.15 应用于 $\mu^{\mathrm{loc},\alpha}_{\cdot,t}$，在 $\mu^{\mathrm{unif},\alpha}_{\cdot,t}(\cdot \mid Z \neq \varnothing)$ 下有 $\alpha_t \sim \mathrm{Unif}(0,t)$，且 Palm 均匀化不会改变每个锚点纤维上的条件分布。

固定 $x \in (0,t]$ 并考虑给定 $\alpha_t = x$时的条件分布。在该纤维上，式（27）中的密度与 $\exp(-L(x)\mathrm{diam}_t(Z)/x^2)$成正比，也就是说，它是对 $Y := \mathrm{diam}_t(Z)/x^2$施加参数为 $L(x)$ 的指数倾斜。引理 4.16 因此给出，对每个 $r \geq 0$,

$$\mathbb{P}\Big(\mathrm{diam}_t(Z) \geq r x^2 \;\Big|\; \alpha_t = x,\ Z \neq \varnothing\Big) \leq e^{-L(x)\,r}.$$

将此应用于 $r = t^2/x^2 \geq 1$（因为 $x \leq t$），即可得到

$$\mathbb{P}\Big(\mathrm{diam}_t(Z) \geq t^2 \;\Big|\; \alpha_t = x,\ Z \neq \varnothing\Big) \leq e^{-L(x)\,t^2/x^2} \leq e^{-L(t)},$$

因为 L 是非增的，且 $x \leq t$ 蕴含 $L(x) \geq L(t)$ 和 $t^2/x^2 \geq 1$。现在对$x \sim$ 均匀分布$(0,\ t)$积分，即可得到所述界。□

注 4.20（锚点适配局部化保留 Palm均匀化性）。 取 $t \in (0,\ 1)$，并令 $\mu^{\mathrm{loc},\ \alpha}_{\cdot,\ t}$ 为定义 4.17 中的锚点适配局部化倾斜。权重

$$w_t(Z) := \mathbb{1}_{\{\varnothing\}}(Z) + \mathbb{1}_{\{Z\neq\varnothing,\ \alpha_t(Z)>0\}}(Z)\,\exp\!\Big(-L(\alpha_t(Z))\,\frac{\mathrm{diam}_t(Z)}{\alpha_t(Z)^2}\Big) + \mathbb{1}_{\{Z\neq\varnothing,\ \alpha_t(Z)=0\}}(Z)$$

对所有 $Z \in \mathscr{C}_t^{\{*\}}$ 都严格为正，因此 $\mu^{\mathrm{loc},\ \alpha}_{\cdot,\ t} \sim \mu_t$。限制到 $\{Z \neq \varnothing\}$ 后得到 $\mu^{\mathrm{loc},\ \alpha}_{\cdot,\ t}(\cdot \cap \{Z \neq \varnothing\}) \sim \mu_t(\cdot \cap \{Z \neq \varnothing\})$，且由于 α_t 是博雷尔的，

$$\kappa_t^{\mathrm{loc},\alpha} := (\alpha_t)_*\big(\mu_t^{\mathrm{loc},\alpha}(\cdot \cap \{Z \neq \varnothing\})\big) \sim (\alpha_t)_*\big(\mu_t(\cdot \cap \{Z \neq \varnothing\})\big) = \kappa_t^{\mu}.$$

特别地，若 $\kappa_t^{\mu} \sim$ 勒贝格测度 $\restriction_{(0,t]}$，则也有 $\kappa^{\mathrm{loc},\ \alpha}_{\cdot,\ t} \sim$ 勒贝格测度 $\restriction_{(0,t]}$。

下一个定理具有结构性。由一个 Palm 可均匀化因子化族 $\boldsymbol{\mu}$ 出发，通过锚点适配局部化、对锚点进行精确 Palm 均匀化，并将真空质量规范化为 $\nu_t(\varnothing) = e^{-\beta t}$，我们得到一个新族。测度类型保持不变。

定理 4.21。 设 $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_t\}_{t>0}$ 是定义在 $[0,1] \times \{*\}$ 上的 ***Palm*** 可均匀化可测因子化族，满足对每个 $t > 0$ 都有 $\mu_t(\{\varnothing\}) > 0$。固定 $\beta > 0$ 和 $L(t) = |\ln t|$，其中 $t \in (0,\ 1)$。由 (27) 定义 $\mu^{\mathrm{loc},\ \alpha}_{\cdot,\ t}$，并定义 $\mu^{\mathrm{unif},\ \alpha}_{\cdot,\ t} := (\mu^{\mathrm{loc},\ \alpha}_{\cdot,\ t})^{\mathrm{unif}}$ 为 μ_t^{loc} 的 ***Palm*** 均匀化。最后，定义

$$\nu_t := e^{-\beta t}\,\delta_{\varnothing} + (1 - e^{-\beta t})\,\mu_t^{\mathrm{unif},\alpha}(\,\cdot \mid Z \neq \varnothing). \tag{29}$$

那么：

(i) $\boldsymbol{\nu} = \{\nu_t\}_{t>0}$ 是可测因子化族，并且对每个 t，$\nu_t \sim \mu_t$。(ii) 相应的随机集系统 $\mathbb{E}^{\boldsymbol{\nu}}$ 与 $\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}}$同构。(iii) 真空单位 $v_t = \nu_t(\{\varnothing\})^{-1/2}\mathbb{1}_{\{\varnothing\}}$ 满足 $m(t) := \langle \mathbb{1}, v_t \rangle = \sqrt{\nu_t(\{\varnothing\})} = e^{-\beta t/2}$，因此线性重叠

$$1 - m(t) \geq \frac{\beta}{4}\,t \qquad (0 < t \leq 2/\beta).$$

证明。 我们依次证明 (i)–(iii)。

证明 (i)。对每个 $t > 0$，测度 $\mu^{\mathrm{loc},\ \alpha}_{\cdot,t}$ 由 μ_t 乘以定义4.17中出现的严格正权重得到。因此 $\mu^{\mathrm{loc},\ \alpha}_{\cdot,t} \sim \mu_t$。根据引理 4.15，Palm 均匀化测度 $\mu^{\mathrm{unif},\ \alpha}_{\cdot,t} = (\mu^{\mathrm{loc},\ \alpha}_{\cdot,t})^{\mathrm{unif}}$ 满足 $\mu^{\mathrm{unif},\ \alpha}_{\cdot,\ t} \sim \mu^{\mathrm{loc},\ \alpha}_{\cdot,t}$，因此对所有 $t > 0$，$\mu^{\mathrm{unif},\ \alpha}_{\cdot,t} \sim \mu_t$。

我们断言，对每个 $t > 0$ 都有 $\nu_t \sim \mu_t$。事实上，若 $\mu_t(A) = 0$，那么根据假设，必然有 $\varnothing \notin A$，因为 $\mu_t(\{\varnothing\}) > 0$。因此 $A \subset \{Z \neq \varnothing\}$，又由于 $\mu^{\mathrm{unif},\ \alpha}_{\cdot,\ t} \sim \mu_t$，我们有 $\mu^{\mathrm{unif},\ \alpha}_{\cdot,\ t}(A) = 0$。于是

$$\nu_t(A) = e^{-\beta t}\delta_{\varnothing}(A) + (1 - e^{-\beta t})\,\mu_t^{\mathrm{unif},\alpha}(A \mid Z \neq \varnothing) = 0.$$

反过来，若 $\nu_t(A) = 0$，那么 $\varnothing \notin A$，因为 $\nu_t(\{\varnothing\}) = e^{-\beta t} > 0$。因此又有 $A \subset \{Z \neq \varnothing\}$，且

$$0 = \nu_t(A) = (1 - e^{-\beta t})\,\mu_t^{\mathrm{unif},\alpha}(A \mid Z \neq \varnothing)$$

推出 $\mu_t^{\text{均匀分布 }\alpha}(A) = 0$。由于 $\mu^{\mathrm{unif},\ \alpha}_{\cdot,\ t} \sim \mu_t$，我们得到 $\mu_t(A) = 0$。因此，对每个 $t > 0$ 都有 $\nu_t \sim \mu_t$。

接下来我们验证分解性质。由于 $\nu_s \sim \mu_s$ 以及 $\nu_t \sim \mu_t$，我们有 $\nu_s \otimes \nu_t \sim \mu_s \otimes \mu_t$，因此 $(\nu_s \otimes \nu_t) \circ \oplus_s^{-1}{}_{,\ t} \sim (\mu_s \otimes \mu_t) \circ \oplus_s^{-1}{}_{,\ t} \sim \mu_{s+t} \sim \nu_{s+t}$。因此 $\boldsymbol{\nu} = \{\nu_t\}_{t>0}$ 满足定义 2.3(i)。

定义 2.3 的条件 (ii)（不存在确定性时间切片）由 $\boldsymbol{\mu}$ 继承，因为 $\nu_t \sim \mu_t$ 对每个 t：如果 $r \in [0,t]$，那么 $\mu_t\big(\{Z :\ Z \cap (\{r\} \times \{*\}) \neq \varnothing\}\big) = 0$ 意味着$\nu_t\big(\{Z :\ Z \cap (\{r\} \times \{*\}) \neq \varnothing\}\big) = 0$.

定义 2.3 的条件 (iii)（非退化性）同样由等价性继承：由于每个 μ_t 并非支撑在有限多个原子上，且 $\nu_t \sim \mu_t$，故对 ν_t同样成立。

接下来证明定义2.3的可测性条件 (iva) 与 (ivb)。首先证明 (iva)。为简便起见，记 $\mathscr{C} := \mathscr{C}_1^{\{*\}}$，$\Sigma := \Sigma_1^{\{*\}}$，并令 $\sigma_t : \mathscr{C}_t^{\{*\}} \to \mathscr{C}$为时间缩放同胚。设

$$\widetilde{\mu}_t := (\sigma_t)_*\mu_t, \qquad \widetilde{\mu}_t^{\mathrm{loc}} := (\sigma_t)_*\mu_t^{\mathrm{loc},\alpha}, \qquad \widetilde{\mu}_t^{\mathrm{unif}} := (\sigma_t)_*\mu_t^{\mathrm{unif},\alpha}, \qquad \widetilde{\nu}_t := (\sigma_t)_*\nu_t.$$

将定义 $\mathcal{R} \subset \Sigma$ 2.3中的可数环（必要时）扩充为 $\mathcal{R}$ （仍为可数的）生成 Σ的可数代数，并假设 $\{\varnothing\} \in \mathcal{R}$。根据假设，$t \mapsto \widetilde{\mu}_t(A)$ 在 $(0,\infty)$ 上是博雷尔函数，对每个 $A \in \mathcal{R}$。

令 α_1、$\mathrm{diam}_1 : \mathscr{C} \to [0,1]$ 为定义 4.11中的锚点映射和扩散映射。对于 $(t, W) \in (0,\infty) \times \mathscr{C}$，定义 $w^{\mathrm{loc},\alpha}(t, W) :=$

$$\begin{cases} \mathbb{1}_{\{\varnothing\}}(W) + \mathbb{1}_{\{W\neq\varnothing,\ \alpha_1(W)>0\}}(W)\ \exp\!\Big(-L\big(t\,\alpha_1(W)\big)\,\frac{\mathrm{diam}_1(W)}{t\,\alpha_1(W)^2}\Big) + \mathbb{1}_{\{W\neq\varnothing,\ \alpha_1(W)=0\}}(W), & 0 < t < 1, \\ 1, & t \geq 1. \end{cases}$$

该函数是联合博雷尔的，因为 α_1 和 diam_1 根据引理 4.12是博雷尔函数，L 在 $(0,1)$ 上是博雷尔函数，且两个情形由博雷尔集 $\{t < 1\}$ 和 $\{t \geq 1\}$分隔。

由（27）直接计算可得

$$d\widetilde{\mu}_t^{\mathrm{loc}}(W) = \frac{w^{\mathrm{loc},\alpha}(t, W)}{Z_t^{\mathrm{loc}}}\, d\widetilde{\mu}_t(W), \text{ where } Z_t^{\mathrm{loc}} := \int_{\mathscr{C}} w^{\mathrm{loc},\alpha}(t, W)\, d\widetilde{\mu}_t(W).$$

事实上，对于 $0 < t < 1$ 和 $W = \sigma_t(Z)$，有 $\alpha_t(Z) = t\,\alpha_1(W)$，直径$_t(Z) = t$ 直径$_1(W)$，因此（27）中的指数变为

$$-L(\alpha_t(Z))\,\frac{\mathrm{diam}_t(Z)}{\alpha_t(Z)^2} = -L\big(t\,\alpha_1(W)\big)\,\frac{\mathrm{diam}_1(W)}{t\,\alpha_1(W)^2},$$

而对于 $t \geq 1$，我们有 $\mu^{\mathrm{loc},\alpha}_{\cdot,t} = \mu_t$ 根据定义。

由于 $w^{\mathrm{loc},\alpha}$ 是博雷尔集，且 $t \mapsto \widetilde{\mu}_t(A)$对每个 $A \in \mathcal{R}$都是博雷尔集，引理2.12推出$t \mapsto Z_t^{\mathrm{loc}}$ 是博雷尔集，并且还可推出

$$t \longmapsto \widetilde{\mu}_t^{\mathrm{loc}}(A) = \frac{1}{Z_t^{\mathrm{loc}}} \int_{\mathscr{C}} \mathbb{1}_A(W)\, w^{\mathrm{loc},\alpha}(t, W)\, d\widetilde{\mu}_t(W)$$

对每个 $A \in \mathcal{R}$ 都是博雷尔集。

接下来，定义 $(0, 1]$ 上的有限测度为

$$\widetilde{\kappa}_t^{\mathrm{loc}} := (\alpha_1)_*\Big(\widetilde{\mu}_t^{\mathrm{loc}}(\,\cdot \cap \{W \neq \varnothing,\ \alpha_1(W) > 0\})\Big).$$

因为 $\mu^{\mathrm{loc},\alpha}_{\cdot,t} \sim \mu_t$ 且 μ_t 满足定义2.3(ii)，我们有 $\widetilde{\mu}_t^{\mathrm{loc}}(\{W \neq \varnothing,\ \alpha_1(W) = 0\}) = 0$, so this is精确tly the锚 h或推 hf 向前 d of the非空 ty 部分t.

We claim，使得 $\widetilde{\kappa}_t^{\mathrm{loc}} \sim \lambda_t$:= t 勒贝格测度$\restriction_{(0,1]}$对所有 $t > 0$ 都成立。事实上，在未缩放空间上，我们有

$$(\alpha_t)_*\big(\mu_t^{\mathrm{loc},\alpha}(\cdot \cap \{Z \neq \varnothing\})\big) \sim (\alpha_t)_*\big(\mu_t(\cdot \cap \{Z \neq \varnothing\})\big) = \kappa_t^{\mu} \sim \mathrm{Leb}\restriction_{(0,t]},$$

因为 $\mu^{\mathrm{loc},\alpha}_{\cdot,t} \sim \mu_t$ 且 α_t 是博雷尔的。按 $x \mapsto x/t$ 缩放后，这变为 $\widetilde{\kappa}_t^{\mathrm{loc}} \sim \lambda_t$ 在 $(0, 1]$ 上。固定一个可数代数 $\mathcal{A} \subset \mathrm{Bor}((0, 1])$，它生成 $(0, 1]$，上的博雷尔 σσ-代数，例如有理子区间的有限并。对于 $B \in \mathcal{A}$,

$$\widetilde{\kappa}_t^{\mathrm{loc}}(B) = \int_{\mathscr{C}} \mathbb{1}_{\{W\neq\varnothing,\ \alpha_1(W)>0\}}(W)\, \mathbb{1}_B(\alpha_1(W))\, d\widetilde{\mu}_t^{\mathrm{loc}}(W),$$

且被积函数在 $(0,\infty) \times \mathscr{C}$ 上是博雷尔的。将引理 2.12 应用于族 $\{\widetilde{\mu}_t^{\mathrm{loc}}\}_{t>0}$，可知对于每个 $B \in \mathcal{A}$，$t \mapsto \widetilde{\kappa}_t^{\mathrm{loc}}(B)$ 都是博雷尔的。此外，$t \mapsto \lambda_t(B) = t$勒贝格测度$(B)$ 也是博雷尔的。因此，将引理 3.1 应用于基空间 $(0, 1]$，参数空间为 $(0,\infty)$，可得到一个博雷尔函数$\sim h : (0,\infty) \times (0, 1] \to (0,\infty)$，使得对于每个 $t > 0$,

$$\widetilde{h}(t, \cdot) = \frac{d\lambda_t}{d\widetilde{\kappa}_t^{\mathrm{loc}}} \qquad \widetilde{\kappa}_t^{\mathrm{loc}}\text{-a.e.}$$

现在定义博雷尔权重

$$w^{\mathrm{unif}}(t,W) := \mathbb{1}_{\{\varnothing\}}(W) + \mathbb{1}_{\{W\neq\varnothing,\ \alpha_1(W)>0\}}(W)\,\widetilde{h}(t,\alpha_1(W)) + \mathbb{1}_{\{W\neq\varnothing,\ \alpha_1(W)=0\}}(W).$$

Let

$$p_t^{\mathrm{loc}} := \widetilde{\mu}_t^{\mathrm{loc}}(\{\varnothing\}), \qquad C_t^{\mathrm{unif}} := \int_{\mathscr{C}} w^{\mathrm{unif}}(t,W)\,d\widetilde{\mu}_t^{\mathrm{loc}}(W).$$

由于 $\widetilde{\mu}_t^{\mathrm{loc}}(\{W\neq\varnothing,\alpha_1(W)=0\})=0$，我们得到

$$\begin{aligned} C_t^{\mathrm{unif}} &= p_t^{\mathrm{loc}} + \int_{\mathscr{C}} \mathbb{1}_{\{W\neq\varnothing,\alpha_1(W)>0\}}(W)\,\widetilde{h}(t,\alpha_1(W))\,d\widetilde{\mu}_t^{\mathrm{loc}}(W) \\ &= p_t^{\mathrm{loc}} + \int_{(0,1]} \widetilde{h}(t,x)\,d\widetilde{\kappa}_t^{\mathrm{loc}}(x) \\ &= p_t^{\mathrm{loc}} + \lambda_t((0,1]) \\ &= p_t^{\mathrm{loc}} + t. \end{aligned}$$

特别地，$t\mapsto C_t^{\mathrm{unif}}$是博雷尔的。再次利用 Palm一致化公式，现在将其表述在缩放空间上，我们有

$$d\widetilde{\mu}_t^{\mathrm{unif}}(W) = \frac{w^{\mathrm{unif}}(t,W)}{C_t^{\mathrm{unif}}}\,d\widetilde{\mu}_t^{\mathrm{loc}}(W).$$

因此，对每个 $A\in\mathcal{R}$,

$$\widetilde{\mu}_t^{\mathrm{unif}}(A) = \frac{1}{C_t^{\mathrm{unif}}}\int_{\mathscr{C}} \mathbb{1}_A(W)\,w^{\mathrm{unif}}(t,W)\,d\widetilde{\mu}_t^{\mathrm{loc}}(W),$$

以及引理 2.12 表明 $t\mapsto\widetilde{\mu}_t^{\mathrm{unif}}(A)$ 是博雷尔的。最后，根据 (29),

$$\widetilde{\nu}_t(A) = e^{-\beta t}\,\mathbb{1}_A(\varnothing) + (1-e^{-\beta t})\,\frac{\widetilde{\mu}_t^{\mathrm{unif}}(A\cap\{W\neq\varnothing\})}{\widetilde{\mu}_t^{\mathrm{unif}}(\{W\neq\varnothing\})}.$$

由于

$$\widetilde{\mu}_t^{\mathrm{unif}}(\{W\neq\varnothing\}) = \frac{t}{C_t^{\mathrm{unif}}} > 0,$$

且分子与分母在 t 中均为博雷尔的，由此可得 $t\mapsto\widetilde{\nu}_t(A)$ 对每个$A\in\mathcal{R}$ 都是博雷尔的。这证明了定义 2.3(iva) 对 $\boldsymbol{\nu}$。

接下来我们证明 $\boldsymbol{\nu}$ 满足定义 2.3 的条件 (ivb)。为此，设 $\Delta^{(\mu)}:(0,\infty)^2\times\mathscr{C}\to(0,\infty)$ 是来自定义 2.3(ivb) 的、针对 $\boldsymbol{\mu}$ 的联合博雷尔余循环。由于 $\widetilde{\nu}_t\sim\widetilde{\mu}_t$ 对每个$t>0$ 成立，且两个族在同一可数代数 $\mathcal{R}$ 上满足 (iva)，引理 3.1 给出一个博雷尔函数 $f:(0,\infty)\times\mathscr{C}\to[0,\infty)$，使得

$$f(t,\cdot) = \frac{d\widetilde{\nu}_t}{d\widetilde{\mu}_t} \qquad \widetilde{\mu}_t\text{-a.e.}$$

由于 $\widetilde{\nu}_t\sim\widetilde{\mu}_t$，该导数是 $\widetilde{\mu}_t$-几乎处处严格为正的，且对每个 t 皆如此，因此在必要时于一个博雷尔零测集上修改 f 之后，我们可以并且确实假定 $f:(0,\infty)\times\mathscr{C}\to(0,\infty)$ 是博雷尔的，并且仍然表示相同的拉东–尼科迪姆导数。

对于 $s,\ t>0$和 $u=\frac{s}{s+t}$，令 $\rho_u,\ \tau_u:\ \mathscr{C}\to\mathscr{C}$为定理2.13证明中所述的限制-缩放映射：

$$\rho_u(W) := \sigma_u\big(W\cap[0,u]\big), \qquad \tau_u(W) := \sigma_{1-u}\big((W\cap[u,1])-u\big).$$

这些都是博雷尔映射。定义

$$\Delta^{(\nu)}(s,t,W) := \Delta^{(\mu)}(s,t,W)\,\frac{f\big(s,\rho_{s/(s+t)}(W)\big)\,f\big(t,\tau_{s/(s+t)}(W)\big)}{f(s+t,W)}.$$

这是一个联合博雷尔映射 $(0,\infty)^2\times\mathscr{C}\to(0,\infty)$。

Let

$$\widetilde{\mu}_{s,t} := (\sigma_{s+t})_*\Big((\mu_s\otimes\mu_t)\circ\oplus_{s,t}^{-1}\Big), \qquad \widetilde{\nu}_{s,t} := (\sigma_{s+t})_*\Big((\nu_s\otimes\nu_t)\circ\oplus_{s,t}^{-1}\Big).$$

根据定义 2.3(ivb)，对于 $\boldsymbol{\mu}$，

$$\frac{d\widetilde{\mu}_{s,t}}{d\widetilde{\mu}_{s+t}}(W)=\Delta^{(\mu)}(s,t,W)\qquad \widetilde{\mu}_{s+t}\text{-a.e.}$$

由于 $d\widetilde{\nu}_r=f(r,\ \cdot)\,d\widetilde{\mu}_r$，标准的变量替换计算可得

$$\frac{d\widetilde{\nu}_{s,t}}{d\widetilde{\mu}_{s,t}}(W)=f\big(s,\rho_{s/(s+t)}(W)\big)\,f\big(t,\tau_{s/(s+t)}(W)\big)\qquad \widetilde{\mu}_{s,t}\text{-a.e.}$$

结合链式法则和

$$\frac{d\widetilde{\mu}_{s+t}}{d\widetilde{\nu}_{s+t}}(W)=\frac{1}{f(s+t,W)},$$

我们得到

$$\frac{d\widetilde{\nu}_{s,t}}{d\widetilde{\nu}_{s+t}}(W)=\Delta^{(\mu)}(s,t,W)\,\frac{f\big(s,\rho_{s/(s+t)}(W)\big)\,f\big(t,\tau_{s/(s+t)}(W)\big)}{f(s+t,W)}=\Delta^{(\nu)}(s,t,W)$$

对于 $\widetilde{\nu}_{s+t}$-几乎处处 W。因此，定义 2.3(ivb) 对 $\boldsymbol{\nu}$成立。至此，(i) 的证明完成。

(ii) 的证明。对于每个 $t>0$，由于 $\nu_t\sim\mu_t$，测度变换映射

$$T_t:L^2(\mathscr{C}_t,\mu_t)\to L^2(\mathscr{C}_t,\nu_t),\qquad (T_tf)(Z)=\Big(\frac{d\mu_t}{d\nu_t}(Z)\Big)^{1/2}f(Z),$$

是酉算子。直接应用 Radon–Nikodym 链式法则计算可知，族 $\{T_t\}_{t>0}$交织了 $\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}}$ 和 $\mathbb{E}^{\boldsymbol{\nu}}$的乘法映射。因此， $\mathbb{E}^{\boldsymbol{\nu}}$ 和 $\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}}$ 作为乘积系统是同构的。

（iii）的证明。根据构造， $\nu_t(\{\varnothing\})=e^{-\beta t}$，因此真空单位 $v_t=\nu_t(\{\varnothing\})^{-1/2}\mathbb{1}_{\{\varnothing\}}$满足 $m(t):=\langle\mathbb{1},\ v_t\rangle=\sqrt{\nu_t(\{\varnothing\})}=e^{-\beta t/2}$. 如果 $0<t\le 2/\beta$，那么令 $x=\beta t/2\in(0,1]$，我们有 $1-e^{-x}\ge x/2$，因此

$$1-m(t)=1-e^{-\beta t/2}\ge\frac{\beta}{4}\,t.$$

这证明了（iii），并完成了定理的证明。 □

4.3. **Hellinger 小性的一个充分判据**。本小节推导一个便于使用的 Hellinger 小性充分判据。该论证分离出四种区块占据事件的贡献，并将短时间的 Hellinger 估计化简为易于处理的单区块比较界。

我们先回顾有限测度的 Hellinger 亲和度、相应的 Hellinger 距离，以及全变差距离。

定义 4.22。设 (X,Σ) 是一个可测空间，且 ρ,η是 (X,Σ) 上的有限测度。(i) 设 m 是任意一个有限测度，使得 $\rho\ll m$且 $\eta\ll m$。Hellinger 亲和度定义为

$$H(\rho,\eta):=\int_X\sqrt{\frac{d\rho}{dm}\,\frac{d\eta}{dm}}\,dm\in[0,\infty).$$

该量不依赖于控制测度 m 的选取。Hellinger 距离定义为

$$d^2_{\mathrm{Hell}}(\rho,\eta):=\rho(X)+\eta(X)-2H(\rho,\eta)\in[0,\infty).$$

若 ρ和 η是概率测度，则 $H(\rho,\eta)\in[0,1]$且 $d^2_{\mathrm{Hell}}(\rho,\eta)=2\big(1-H(\rho,\eta)\big)$.此外，若 $\rho\sim\eta$，则 $H(\rho,\eta)>0$。

(ii) ρ与 η之间的全变差距离定义为 $\|\rho-\eta\|_{\mathrm{TV}}:=\sup_{A\in\Sigma}|\rho(A)-\eta(A)|$. 若 ρ 和 η 是概率测度，且 m是任意一个控制测度，则等价地

$$\|\rho-\eta\|_{\mathrm{TV}}=\frac{1}{2}\int_X\left|\frac{d\rho}{dm}-\frac{d\eta}{dm}\right|dm. \tag{30}$$

尤其　　此外，对于概率测度，有初等不等式 $1-H(\rho,\ \eta)\le\|\rho-\eta\|_{\mathrm{TV}}$.

我们记录可数划分下的可加性，以及按权重缩放的显式公式。如果 $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ a 是 X的一个可测划分，则

$$H(\rho,\eta)=\sum_{k\in\mathbb{N}}H(\rho\restriction_{E_k},\eta\restriction_{E_k}),\qquad d^2_{\mathrm{Hell}}(\rho,\eta)=\sum_{k\in\mathbb{N}}d^2_{\mathrm{Hell}}(\rho\restriction_{E_k},\eta\restriction_{E_k}). \tag{31}$$

Also

$$d^2_{\mathrm{Hell}}(p\,\mu,q\,\nu)=(\sqrt{p}-\sqrt{q})^2+2\sqrt{pq}\,\big(1-H(\mu,\nu)\big), \tag{32}$$

对于任意两个概率测度 μ,ν 以及所有 $p,\ q\geq 0$。

下述命题通过按照相对于切分点的四种区块占据模式分解短时分布，给出了一个便于使用的 Hellinger 小性充分判据。

命题 4.23。设 $\boldsymbol{\nu}=\{\nu_t\}_{t>0}$ 是 $[0,1]\times\{*\}$上的可测因子化族。固定$s,t>0$，并令 $u=\lambda(s+t)$，$u_1=\lambda s$，$u_2=\lambda t$。令$\sigma_{u_1,\,u_2}:=(\nu_{u_1}\otimes\nu_{u_2})\circ\oplus^{-1}$在 $\mathscr{C}_u^{\{*\}}$上。考虑这些区块占据事件

$$\begin{aligned}E_{00}&:=\{Z\cap[0,u_1]=\varnothing,\ Z\cap[u_1,u]=\varnothing\}=\{\varnothing\},\\ E_{10}&:=\{Z\cap[0,u_1]\neq\varnothing,\ Z\cap[u_1,u]=\varnothing\},\\ E_{01}&:=\{Z\cap[0,u_1]=\varnothing,\ Z\cap[u_1,u]\neq\varnothing\},\\ E_{11}&:=\{Z\cap[0,u_1]\neq\varnothing,\ Z\cap[u_1,u]\neq\varnothing\}.\end{aligned}$$

假设当 $\lambda\downarrow 0$ 时，下列估计成立：

(i)（线性非空性） $\nu_u(Z\neq\varnothing)=O(u)$ 且 $\nu_{u_i}(Z\neq\varnothing)=O(u_i)$。

(ii)（二次双区块重叠） $\nu_u(E_{11})=O(u^2)$。(iii)（二阶真空权重一致性）

$$\big|\nu_u(\{\varnothing\})-\nu_{u_1}(\{\varnothing\})\,\nu_{u_2}(\{\varnothing\})\big|=O(u^2).$$

(iv)（无条件的单块海灵格控制）令 $\nu_u^{10}:=\nu_u\restriction_{E_{10}}$ 和 $\nu_u^{01}:=\nu_u\restriction_{E_{01}}$。 n

$$d^2_{\mathrm{Hell}}\Big(\nu_u^{10},\ \sigma_{u_1,u_2}\restriction_{E_{10}}\Big)=O(u^2),\qquad d^2_{\mathrm{Hell}}\Big(\nu_u^{01},\ \sigma_{u_1,u_2}\restriction_{E_{01}}\Big)=O(u^2).$$

于是 $1-H^{(\nu)}_{u_1,\,u_2}=O(u^2)$。

证明。简记 $\sigma:=\sigma_{u_1,\,u_2}$。由于 $\boldsymbol{\nu}$ 是可分解的，$\nu_u\sim\sigma$ 且 $H(\nu_u,\sigma)$ 等于 $H^{(\nu)}_{u_1,\,u_2}$。利用划分 $\mathscr{C}_u^{\{*\}}=E_{00}\sqcup E_{10}\sqcup E_{01}\sqcup E_{11}$ 和（31），可得

$$d^2_{\mathrm{Hell}}(\nu_u,\sigma)=\sum_{ij\in\{00,10,01,11\}}d^2_{\mathrm{Hell}}\big(\nu_u\restriction_{E_{ij}},\ \sigma\restriction_{E_{ij}}\big).$$

我们对每一项进行估计。

(a) E_{10} 和 E_{01} 项。根据假设 $O(u^2)$，这些都是（iv）。

(b) 双块项 E_{11}。对于有限测度，始终有 $d^2_{\mathrm{Hell}}(\rho,\ \eta)\leq\rho(X)+\eta(X)$，因此

$$d^2_{\mathrm{Hell}}(\nu_u\restriction_{E_{11}},\sigma\restriction_{E_{11}})\leq\nu_u(E_{11})+\sigma(E_{11}).$$

根据假设（ii），$\nu_u(E_{11})=O(u^2)$。在 σ 下，左、右分量相互独立；此外，根据无确定点假设，切分点事件 $\{u_1\in Z\}$ 是 σ-零的，因此E_{11}与 σ在 $\{Z\cap[0,u_1]\neq\varnothing\}\cap\{Z\cap[u_1,u]\neq\varnothing\}$ 乘积意义下几乎处处一致。因此

$$\sigma(E_{11})=\nu_{u_1}(Z\neq\varnothing)\,\nu_{u_2}(Z\neq\varnothing)=O(u_1u_2)=O(u^2)$$

根据（i）。因此，E_{11} 贡献为 $O(u^2)$。

(c) 真空项 $E_{00}=\{\varnothing\}$。在 $\{\varnothing\}$上，

$$d^2_{\mathrm{Hell}}(\nu_u\restriction_{\{\varnothing\}},\sigma\restriction_{\{\varnothing\}})=\big(\sqrt{\nu_u(\{\varnothing\})}-\sqrt{\sigma(\{\varnothing\})}\big)^2.$$

由于当 $\sigma(\{\varnothing\})=\nu_{u_1}(\{\varnothing\})\nu_{u_2}(\{\varnothing\})$ 且 $\nu_u(Z\neq\varnothing)=O(u)$ 时可推出 $\nu_u(\{\varnothing\})=1-O(u)$，因此当 λ 足够小时，$\sqrt{\cdot}$ 的两个自变量都属于 $[1/2,1]$。所以，$\sqrt{\cdot}$ 在那里是利普希茨的，并且假设 (iii) 得出该项为 $O(u^4)$（特别地，$O(u^2)$）。

将 (a)–(c) 相加，我们得到 $d^2_{\mathrm{Hell}}(\nu_u,\ \sigma)\ =\ O(u^2)$。由于 ν_u 和 σ 都是概率测度，定义 4.22给出

$$1-H(\nu_u,\sigma)=\frac{1}{2}\,d^2_{\mathrm{Hell}}(\nu_u,\sigma)=O(u^2),$$

这正是小种子界。 □

对于定理 4.21 中构造的族 $\boldsymbol{\nu}$，命题 4.23 的 (i) 项成立，因为 $\nu_t(\varnothing)=e^{-\beta t}$。(ii) 项的成立依据如下：在 $\nu_u(\cdot\,|\,Z\neq\varnothing)$ 条件下，锚点服从均匀分布（引理 4.15）；而推论 4.18 给出 $\mathrm{diam}_u(Z)\ \le u^2$ 的概率为 $1-O(u)$。因此，跨越事件 E_{11} 要么迫使 $\mathrm{diam}_u>u^2$（在非空条件下的概率为 $O(u)$），要么使锚点落在切点的 u^2 范围内（在非空条件下的概率为 $O(u)$）。由于 $\nu_u(Z\neq\varnothing)=O(u)$，这便得到 $\nu_u(E_{11})\ =O(u^2)$。(iii) 项也自动满足。真正依赖具体模型的部分是 (iv)；下一条推论给出了一个便于使用的替代条件，并表明在实际应用中，只需验证条件单块比较估计以及相应块权重的二阶匹配即可。

推论 4.24. 在命题 *4.23*的设定和记号下，假设(i)–(ii)–(iii)成立。进一步假设，当 $\lambda\downarrow 0$:

(iv(a)) （二阶单块权重匹配）

$$\big|\nu_u(E_{10})-\sigma(E_{10})\big|=O(u^2),\qquad \big|\nu_u(E_{01})-\sigma(E_{01})\big|=O(u^2).$$

(iv(b)) （条件单块海林格控制）令 $\widehat{\nu}_u^{10}$ 表示在 $\nu_u(\,\cdot\,|\,E_{10})$ 条件下 $R_{0,\,u_1}(Z)$ 的条件分布，并令 $\widehat{\nu}_u^{01}$ 表示在 $\nu_u(\,\cdot\,|\,E_{01})$ 条件下 $R_{u_1,\,u}(Z)$ 的条件分布。那么

$$1-H\Big(\widehat{\nu}_u^{10},\ \nu_{u_1}(\,\cdot\,|\,Z\neq\varnothing)\Big)=O(u),\qquad 1-H\Big(\widehat{\nu}_u^{01},\ \nu_{u_2}(\,\cdot\,|\,Z\neq\varnothing)\Big)=O(u).$$

那么 $1-H^{(\nu)}_{u_1,\,u_2}=O(u^2)$，即 $\boldsymbol{\nu}$ 是 *Hellinger*小。

证明。 我们验证命题 (iv) 中的无条件单块界4.23。考虑 E_{10}并写作

$$\nu_u\restriction_{E_{10}}=p\,\mu,\qquad \sigma\restriction_{E_{10}}=q\,\nu,$$

其中 $p=\nu_u(E_{10})$、$q=\sigma(E_{10})$ 和 $\mu,\ \nu$ 是 E_{10} 上相应的条件概率测度。

在 σ 下，对 E_{10} 进行条件化表示“左块非空，右块为空”。除切割点外（根据无确定性点的性质，该点是 σ- 零测集），左侧限制 $R_{0,u_1}(Z)$ 的分布为 $\nu_{u_1}(\,\cdot\,|\,Z\neq\varnothing)$。根据定义，在 μ 下，同一限制的分布为 $\widehat{\nu}_u^{10}$。

在 E_{10} 上，映射 R_{0,u_1} 是到 $\{W\in\mathscr{C}_{u_1}^{\{*\}}$ 的可测双射：$W\neq\varnothing,\ u_1\notin W\}$；该目标集在 $\nu_{u_1}(\cdot\ |\ Z\neq\varnothing)$ 下具有满测度（同样根据无确定性点的性质）。由于 Hellinger 亲和度在可测同构下以及限制到满测度子集时保持不变，假设 (iv(b)) 蕴含 $1-H(\mu,\nu)\ =O(u)$。

现在应用 (32)

$$d^2_{\mathrm{Hell}}(\nu_u\restriction_{E_{10}},\sigma\restriction_{E_{10}})=(\sqrt{p}-\sqrt{q})^2+2\sqrt{pq}\,\big(1-H(\mu,\nu)\big).$$

由 (iv(a))，$|p-q|=O(u^2)$，且对于 $p,\ q\ge 0$ 有 $(\sqrt{p}-\sqrt{q})^2\le|p-q|$，因此 $(\sqrt{p}-\sqrt{q})^2=O(u^2)$。此外，由 $\sqrt{pq}\le O(u)$，根据 (i) 以及 $1-H(\mu,\ \nu)\ =O(u)$，可知第二项为 $O(u^2)$。因此

$$d^2_{\mathrm{Hell}}\big(\nu_u\restriction_{E_{10}},\sigma\restriction_{E_{10}}\big)=O(u^2).$$

对 E_{01} 作同样的论证，得到 $d^2_{\mathrm{Hell}}(\nu_u\restriction_{E_{01}},\sigma\restriction_{E_{01}})\ =O(u^2)$。因此(iv) 成立，而命题4.23 给出 $1-H^{(\nu)}_{u_1,u_2}=O(u^2)$。□

下面的引理给出一个抽象的全变差估计，表明在满足均匀锚点和直径控制假设时，对单块事件进行条件化，只会使相应的限制律发生 $O(u)$ 的扰动。

引理 4.25. 设 $\boldsymbol{\nu} = \{\nu_t\}_{t>0}$ 是定义在 $[0,1]\times\{*\}$ 上的可测因子化族。固定 $s,t>0$ 并令 $u=\lambda(s+t)$，$u_1=\lambda s$，$u_2=\lambda t$，如命题 *4.23* 中所述。假设对于所有充分小的 u，以下条件均成立：

(A) 在 $\nu_u(\cdot\,|\,Z\neq\varnothing)$ 下，锚点 $\alpha_u(Z)$ 服从 均匀分布 $\mathsf{Unif}(0,u)$；***(D)*** （直径控制） $\nu_u\big(\text{直径}_u(Z)\ge u^2 \;\big|\; Z\neq\varnothing\big)\le u$。

考虑块占据事件 $E_{10}:=\{Z\cap[0,u_1]\neq\varnothing,\ Z\cap(u_1,u]=\varnothing\}$ 以及 $E_{01}:=\{Z\cap[0,u_1]=\varnothing,\ Z\cap[u_1,u]\neq\varnothing\}$，它们来自命题 *4.23*。如推论 *4.24* 中所示，令 $\widehat{\nu}_u^{10}$ 为在 $\nu_u(\cdot\,|\,E_{10})$ 条件下 $R_{0,u_1}(Z)$ 的条件分布，并令 $\widehat{\nu}_u^{01}$ 为在 $\nu_u(\cdot\,|\,E_{01})$ 条件下 $R_{u_1,u}(Z)$ 的条件分布。定义比较分布：

$$\bar{\nu}_u^{(u_1)} := \mathrm{Law}_{\nu_u}\big(R_{0,u_1}(Z)\;\big|\;R_{0,u_1}(Z)\neq\varnothing\big),\qquad \bar{\nu}_u^{(u_2)} := \mathrm{Law}_{\nu_u}\big(R_{u_1,u}(Z)\;\big|\;R_{u_1,u}(Z)\neq\varnothing\big).$$

于是存在 $C_{s,t}<\infty$，使得对于所有充分小的 $\lambda>0$，

$$\big\|\widehat{\nu}_u^{10}-\bar{\nu}_u^{(u_1)}\big\|_{\mathrm{TV}}\le C_{s,t}\,u,\qquad \big\|\widehat{\nu}_u^{01}-\bar{\nu}_u^{(u_2)}\big\|_{\mathrm{TV}}\le C_{s,t}\,u.$$

证明。我们使用初等不等式：若 X 是一个随机变量，且 A,C 是事件，并且 $\mathbb{P}(A\cap C)>0$，则

$$\big\|\mathrm{Law}(X\,|\,A\cap C)-\mathrm{Law}(X\,|\,A)\big\|_{\mathrm{TV}}\le\mathbb{P}(C^c\,|\,A). \tag{33}$$

事实上，对于每个 $F\in\sigma(X)$，$\mathbb{P}(F\,|\,A)=\mathbb{P}(F\,|\,A\cap C)\,\mathbb{P}(C\,|\,A)+\mathbb{P}(F\,|\,A\cap C^c)\,\mathbb{P}(C^c\,|\,A)$，因此

$$\sup_{F\in\sigma(X)}\big|\mathbb{P}(F\,|\,A\cap C)-\mathbb{P}(F\,|\,A)\big|\le\mathbb{P}(C^c\,|\,A).$$

现在令

$$X:=R_{0,\,u_1}(Z)=Z\cap[0,u_1],\qquad A:=\{X\neq\varnothing\}=\{Z\cap[0,u_1]\neq\varnothing\},\qquad C:=\{Z\cap(u_1,u]=\varnothing\}.$$

于是 $E_{10}=A\cap C$，根据定义

$$\widehat{\nu}_u^{10}=\mathrm{Law}_{\nu_u}(X\,|\,A\cap C),\qquad \bar{\nu}_u^{(u_1)}=\mathrm{Law}_{\nu_u}(X\,|\,A).$$

因此，式（33）给出

$$\big\|\widehat{\nu}_u^{10}-\bar{\nu}_u^{(u_1)}\big\|_{\mathrm{TV}}\le\nu_u(C^c\,|\,A)=\nu_u\big(Z\cap(u_1,u]\neq\varnothing\;\big|\;Z\cap[0,u_1]\neq\varnothing\big). \tag{34}$$

现在对 $\nu_u(C^c\,|\,A)$ 进行估计。在事件 A 上，我们有 $Z\neq\varnothing$，且 $\alpha_u(Z)\le u_1$（因为对于非空闭集 Z，$\alpha_u(Z)=\inf Z$）。此外，若 $\mathrm{diam}_u(Z)<u^2$ 且 $\alpha_u(Z)\le u_1-u^2$，则

$$\sup Z\le\alpha_u(Z)+\mathrm{diam}_u(Z)<(u_1-u^2)+u^2=u_1,$$

因此 $Z\cap(u_1,\,u]=\varnothing$，即 C 发生。因此

$$C^c\cap A\subseteq\{\mathrm{diam}_u(Z)\ge u^2\}\cup\{\alpha_u(Z)\in(u_1-u^2,u_1]\},$$

因此

$$\nu_u(C^c\,|\,A)\le\nu_u(\mathrm{diam}_u(Z)\ge u^2\,|\,A)+\nu_u(\alpha_u(Z)\in(u_1-u^2,u_1]\,|\,A). \tag{35}$$

由于 ν_u 是一个因子化族，它满足定义 2.3（ii），因此 $\nu_u(\{u_1\in Z\})=0$。因此，除一个零测集外，

$$A=\{Z\neq\varnothing,\ \alpha_u(Z)<u_1\}.$$

根据假设（A），在 $\nu_u(\cdot\,|\,Z\neq\varnothing)$ 条件下，锚点服从 $\mathsf{Unif}(0,\,u)$。进一步对 A 进行条件化，因此得到 $\alpha_u\sim\mathsf{Unif}(0,\,u_1)$，于是

$$\nu_u(\alpha_u(Z)\in(u_1-u^2,u_1]\,|\,A)=\frac{u^2}{u_1}=\frac{s+t}{s}\,u.$$

对于直径项，由于 $A\subseteq\{Z\neq\varnothing\}$，

$$\nu_u(\mathrm{diam}_u(Z)\ge u^2\,|\,A)\le\frac{\nu_u(\mathrm{diam}_u(Z)\ge u^2\,|\,Z\neq\varnothing)}{\nu_u(A\,|\,Z\neq\varnothing)}.$$

根据 (D)，分子至多为 u；而根据 (A)，

$$\nu_u(A \mid Z \neq \varnothing) = \nu_u(\alpha_u < u_1 \mid Z \neq \varnothing) = \frac{u_1}{u} = \frac{s}{s+t}.$$

因此

$$\nu_u(\operatorname{diam}_u(Z) \geq u^2 \mid A) \leq \frac{s+t}{s}\, u.$$

代入（35）得 $\nu_u(C^c \mid A) \leq 2\frac{s+t}{s}\, u$. 结合（34），由此得到

$$\left\|\widehat{\nu}_u^{10} - \bar{\nu}_u^{(u_1)}\right\|_{\mathrm{TV}} \leq 2\frac{s+t}{s}\, u.$$

右块估计可通过类似论证得到。为此，令

$$Y := R_{u_1,u}(Z), \qquad A' := \{Y \neq \varnothing\} = \{Z \cap [u_1, u] \neq \varnothing\}, \qquad C' := \{Z \cap [0, u_1] = \varnothing\}.$$

于是 $E_{01} = A' \cap C'$，且由定义 $\widehat{\nu}_u^{01} =$分布$\nu_u(Y \mid A' \cap C')$ $\bar{\nu}^{(u_2)}{}_u$ =分布$\nu_u(Y \mid A')$。再次应用（33）得

$$\left\|\widehat{\nu}_u^{01} - \bar{\nu}_u^{(u_2)}\right\|_{\mathrm{TV}} \leq \nu_u((C')^c \mid A'). \tag{36}$$

我们对 $\nu_u((C')^c \mid A')$ 作界估计。若 $(C')^c \cap A'$ 发生，则 Z 在 $[0, u_1]$ 中至少有一点，且在 $[u_1, u]$中至少有一点。因此 $\alpha_u(Z) \leq u_1$。此外，若 $\operatorname{diam}_u(Z) < u^2$，则 $u_1 - \alpha_u(Z) \leq \operatorname{diam}_u(Z) < u^2$，从而必然有 $\alpha_u(Z) \in (u_1 - u^2,\ u_1]$。于是

$$(C')^c \cap A' \subseteq \{\operatorname{diam}_u(Z) \geq u^2\} \cup \{\alpha_u(Z) \in (u_1 - u^2, u_1]\}.$$

因此

$$\nu_u((C')^c \mid A') = \frac{\nu_u((C')^c \cap A' \mid Z \neq \varnothing)}{\nu_u(A' \mid Z \neq \varnothing)} \leq \frac{\nu_u(\operatorname{diam}_u(Z) \geq u^2 \mid Z \neq \varnothing) + \nu_u(\alpha_u(Z) \in (u_1 - u^2, u_1] \mid Z \neq \varnothing)}{\nu_u(A' \mid Z \neq \varnothing)}.$$

根据（D），分子中的第一项至多为 u。根据（A），

$$\nu_u(\alpha_u(Z) \in (u_1 - u^2, u_1] \mid Z \neq \varnothing) = \frac{u^2}{u} = u.$$

最后，事件 $\{\alpha_u(Z) \geq u_1\}$ 包含于 A' 中，因此

$$\nu_u(A' \mid Z \neq \varnothing) \geq \nu_u(\alpha_u(Z) \geq u_1 \mid Z \neq \varnothing) = \frac{u_2}{u} = \frac{t}{s+t}.$$

因此 $\nu_u((C')^c \mid A') \leq \frac{u+u}{u_2/u} = 2\frac{s+t}{t}u$. 将其与（36）结合，得到

$$\left\|\widehat{\nu}_u^{01} - \bar{\nu}_u^{(u_2)}\right\|_{\mathrm{TV}} \leq 2\frac{s+t}{t}\, u.$$

选择 $C_{s,\ t} := 2(s+t)\left(\frac{1}{s} \vee \frac{1}{t}\right)$ 即可同时得到两个估计。 □

4.4. 布朗运动零点集种子与 III 型构造。 在本小节中，我们将上述建立的一般框架应用于从原点以外的位置出发的布朗运动的零点集。我们首先验证布朗零点集分布构成一个可测的 Palm 可均匀化种子，然后构造相应的归一化代表元，检验 Hellinger 小性所需的单块估计，最后通过无限乘积构造推出一个 III 型随机集乘积系统。

固定 $a > 0$，令 $\{B_t\}_{t \geq 0}$ 为在滤子概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F}, (\mathcal{F}_u)_{u \geq 0}, \mathbb{P}_a)$ 上从 $B_0 = a$ 出发的一维布朗运动。对于 $t > 0$，定义 $[0, t]$ 中的随机闭零集为

$$Z_t^{\mathrm{BM},a} := \{u \in [0, t] : B_u = 0\} \in \mathscr{C}_t^{\{*\}}, \qquad \mu_t^{\mathrm{BM},a} := \mathrm{Law}_{\mathbb{P}_a}(Z_t^{\mathrm{BM},a}).$$

必要时，我们可以在典范路径空间上实现布朗运动；零点集的分布仅取决于路径的分布。设

$$\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{BM},a} := \{\mu_t^{\mathrm{BM},a}\}_{t>0}.$$

我们先汇集若干关于布朗运动命中时刻、最后零点和布朗漫步的经典事实，这些事实将在分析布朗种子时反复用到。我们的主要参考文献是 [8]和 [3]。

引理 4.26。 在 $\mathbb{P}_a$ 下，$T_0 = 0\{u > 0$ 的首次击中时间为 $B_u = 0\}$，其密度为

$$f_a(x) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\, x^{-3/2} \exp\Big(-\frac{a^2}{2x}\Big), \qquad x > 0.$$

此外，$\mu^{\mathrm{BM}}{}_{,\ t}{}^{a}(\varnothing) = \mathbb{P}_a(T_0 > t) > 0$。

(ii) 令 W 为从 0 出发的标准布朗运动，并对 $T > 0$ 令

$$g_T := \sup\{s \in [0, T] : W_s = 0\}.$$

那么 g_T 具有反正弦密度

$$\mathbb{P}(g_T \in ds) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{s(T-s)}} \mathbf{1}_{(0,T)}(s)\, ds. \tag{37}$$

因此，对每个 $c \geq 0$,

$$\Phi_c(T) := \mathbb{E}\big[e^{-cg_T}\big] = \int_0^T e^{-cs} \frac{ds}{\pi\sqrt{s(T-s)}} = e^{-cT/2}\, I_0\Big(\frac{cT}{2}\Big), \tag{38}$$

其中 I_0 是第一类修正贝塞尔函数。

(iii) 设 $W^{(\varepsilon)}$ 为从 $\varepsilon > 0$ 出发的布朗运动，$\mathbb{P}_\varepsilon$ 为其分布。那么，给定 $\{T_0 > A\}$ 时，$W_A^{(\varepsilon)}$ 的条件分布在 $(0, \infty)$ 上有密度

$$y \longmapsto \frac{p_A(\varepsilon, y) - p_A(\varepsilon, -y)}{\mathbb{P}_\varepsilon(T_0 > A)}, \qquad y > 0,$$

其中 $p_A(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi A}} e^{-(y-x)^2/(2A)}$ 是高斯核。此外，当 $\varepsilon \downarrow 0$时，这些条件分布弱收敛到 $(0, \infty)$ 上的一个分布，其密度为

$$y \longmapsto \frac{y}{A} \exp\Big(-\frac{y^2}{2A}\Big), \qquad y > 0, \tag{39}$$

即参数为 $\sqrt{A}$的瑞利分布。

证明。 (i) 是标准结论，可由反射原理推出。

(ii) 反正弦密度（37）是经典结果。对于（38），令 $s = \frac{T}{2}(1+\cos\theta)$，使得 $ds = -\frac{T}{2}\sin\theta\, d\theta$且 $\sqrt{s(T-s)} = \frac{T}{2}\sin\theta$。于是

$$\Phi_c(T) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \exp\Big(-\frac{cT}{2}(1+\cos\theta)\Big)\, d\theta = e^{-cT/2}\,\frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{-(cT/2)\cos\theta}\, d\theta = e^{-cT/2} I_0\Big(\frac{cT}{2}\Big).$$

(iii) 固定 $\varepsilon > 0$。根据反射原理，在触及 0 时被杀死的布朗运动在 $(0, \infty)$ 上的转移密度由狄利克雷热核给出

$$p_A^{(0,\infty)}(\varepsilon, y) = p_A(\varepsilon, y) - p_A(\varepsilon, -y), \qquad y > 0.$$

因此，对于 $y > 0$,

$$\mathbb{P}_\varepsilon\big(W_A \in dy,\ T_0 > A\big) = p_A^{(0,\infty)}(\varepsilon, y)\, dy, \qquad \mathbb{P}_\varepsilon(T_0 > A) = \int_0^\infty p_A^{(0,\infty)}(\varepsilon, y)\, dy.$$

因此，给定 $\{T_0 > A\}$ 时 W_A 的条件密度恰为 $y \mapsto p_A^{(0,\infty)}(\varepsilon,\ y)/\mathbb{P}_\varepsilon(T_0 > A)$。现在令 $\varepsilon \downarrow 0$。首先，存活概率有显式表达式（同样由反射原理得到）：

$$\mathbb{P}_\varepsilon(T_0 > A) = \mathbb{P}\Big(\sup_{0\leq s\leq A} W_s < \varepsilon\Big) = 2\Phi\Big(\frac{\varepsilon}{\sqrt{A}}\Big) - 1 \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\varepsilon}{\sqrt{A}}, \qquad \varepsilon \downarrow 0,$$

其中 Φ 是标准正态累积分布函数。

其次，对于每个固定的 $y>0$，对 ε 进行泰勒展开可得

$$p_A(\varepsilon,y)-p_A(\varepsilon,-y)=p_A(y-\varepsilon)-p_A(y+\varepsilon)=-2\varepsilon\,\partial_y p_A(y)+o(\varepsilon)=2\varepsilon\,\frac{y}{A}\,p_A(0,y)+o(\varepsilon),$$

并且 $p_A(0,\ y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi A}}e^{-y^2/(2A)}$。结合分子和分母的渐近式可得

$$\frac{p_A(\varepsilon,y)-p_A(\varepsilon,-y)}{\mathbb{P}_\varepsilon(T_0>A)}\ \longrightarrow\ \frac{y}{A}\exp\Big(-\frac{y^2}{2A}\Big),\qquad y>0,$$

这正是（39）。 □

下一个引理表明，改变布朗运动的非零起点，除测度等价外，并不会影响零点集分布。

引理 4.27。（参见 [12, 引理 1。1]）对于每个 $t>0$ 以及所有 x、$y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$，都有 $\mu^{\mathrm{BM},\ x}_{t}\sim\mu^{\mathrm{BM},\ y}_{t}$。

证明。固定 $t>0$ 和 $x\neq 0$，令 $T_0:=\inf\{u>0:\ B_u=0\}$ 为首次击中 0 的时间。于是 $\{Z_t=\varnothing\}=\{T_0>t\}$. 在事件 $\{T_0=r\le t\}$ 上，该路径在 $[0,r)$ 和 $B_r=0$ 中没有零点，因此

$$Z_t^{\mathrm{BM},a}=\{T_0\}\cup\big(T_0+Z_{t-T_0}^{\mathrm{BM},0}\big)\quad\text{a.s}\tag{40}$$

其中 $Z^{\mathrm{BM},\ \cdot\ }$表示从 0 出发的布朗运动（与过去独立）的布朗零点集，并且我们将 $T_0+Z^{\mathrm{BM},\ 0}_{t-T_0}:=\{T_0+u:\ u\in Z^{\mathrm{BM},\ 0}_{t-T_0}\}\subset[0,t]$。恒等式（40）由停时 T_0处的强马尔可夫性质推出：在时刻 T_0 之后，过程从 0 重新开始，且与 T_0 之前的历史独立；而在 T_0 之前，过程始终远离 0。

令 $Q_{t,\ r}$ 为随机集 $\{r\}\cup(r+Z^{\mathrm{BM},\ 0}_{t-r})$ 在 $\mathscr{C}_t^{\{*\}}$ 上的（概率）分布。然后，对 T_0进行测度分解，

$$\mu_t^{\mathrm{BM},x}(A)=\mathbb{P}_x(T_0>t)\,\mathbb{1}_A(\varnothing)+\int_0^t Q_{t,r}(A)\,\mathbb{P}_x(T_0\in dr),\qquad A\in\Sigma_t^{\{*\}}.\tag{41}$$

由引理 4.26(i)，

$$\mathbb{P}_x(T_0\in dr)=\frac{|x|}{\sqrt{2\pi}\,r^{3/2}}\exp\Big(-\frac{x^2}{2r}\Big)\,dr,\qquad (r>0),\tag{42}$$

因此

$$\mathbb{P}_x(T_0\in dr)\sim\mathrm{Leb}\restriction_{(0,t]}\tag{43}$$

对每个 $x\neq 0$，在 $(0,\ t]$ 上。

现在令 $x,y\neq 0$，并令 $A\in\Sigma_t^{\{*\}}$ 满足 $\mu^{\mathrm{BM},\ y}_{,t}(A)=0$。将 (41) 应用于 y，由项$\mathbb{P}_y(T_0>t)\,\mathbb{1}_A(\varnothing)$可得 $\varnothing\notin A$（因为 $\mathbb{P}_y(T_0>t)>0$）；接着，积分项给出：对勒贝格几乎处处的 $r\in$，$Q_{t,r}(A)=0$，其中取值范围为 $(0,t]$，这是因为密度 (42) 严格为正。将此代入关于 x 的 (41)，得到 $\mu^{\mathrm{BM},\ x}_{,t}(A)=0$。因此 $\mu^{\mathrm{BM},\ x}_{,t}\ll\mu^{\mathrm{BM},\ y}_{,t}$。由对称性，$\mu^{\mathrm{BM},\ y}_{,t}\ll\mu^{\mathrm{BM},\ x}_{,t}$，从而证明 $\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{BM},x}\sim\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{BM},y}$。 □

下面的命题验证了布朗零点集通过构成一个可测因子化族，符合此前建立的抽象框架。

命题4.28。 族 $\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{BM},\ a}_{,}=\{\mu_t^{\mathrm{BM},a}\}_{t>0}$ 是$[0,1]\times\{*\}$上的可测因子化族。

证明。我们首先按照定义 2.3(i) 的含义证明因子化。固定 $s,t>0$ 并令$u=s+t$。设 $L:\mathscr{C}_u^{\{*\}}\to\mathscr{C}_s^{\{*\}}$和 $R:\mathscr{C}_u^{\{*\}}\to\mathscr{C}_t^{\{*\}}$为限制映射

$$L(Z):=Z\cap[0,s],\qquad R(Z):=(Z\cap[s,u])-s.$$

这些映射是博雷尔的。设$J_{s,t}$ 为$(L(Z^{\mathrm{BM},\ a}_{,u})\ R(Z^{\mathrm{BM},\ a}_{,u}))$在 $\mathbb{P}_a$下的联合分布：

$$J_{s,t}:=\mathrm{Law}_{\mathbb{P}_a}\big(L(Z_u^{\mathrm{BM},a}),R(Z_u^{\mathrm{BM},a})\big)\quad\text{on }\mathscr{C}_s^{\{*\}}\times\mathscr{C}_t^{\{*\}}.$$

则 $L(Z^{\mathrm{BM},a}_u)$具有分布 $\mu^{\mathrm{BM},a}_s$，且 $R(Z^{\mathrm{BM},a}_u)$在 $\mathscr{C}_t^{\{*\}}$ 上具有某个分布。此外，重构恒等式

$$Z^{\mathrm{BM},a}_u = L(Z^{\mathrm{BM},a}_u) \oplus_{s,t} R(Z^{\mathrm{BM},a}_u)$$

几乎必然成立，因此

$$\mu^{\mathrm{BM},a}_u = J_{s,t} \circ \oplus^{-1}_{s,t}. \tag{44}$$

我们证明$J_{s,t} \sim \mu^{\mathrm{BM},a}_s \otimes \mu^{\mathrm{BM},a}_t$ 在乘积空间上成立。由于$J_{s,t}$的左边缘测度为 $\mu^{\mathrm{BM},a}_s$，只需证明：对 $\mu^{\mathrm{BM},a}_s$-几乎处处的 z，在给定$L(Z^{\mathrm{BM},a}_u) = z$ 的条件下，$R(Z^{\mathrm{BM},a}_u)$的条件分布与 $\mu^{\mathrm{BM},a}_t$ 等价。设$\{K_z\}_{z\in\mathscr{C}_s^{\{*\}}}$为在$J_{s,t}$下、给定 $L(Z^{\mathrm{BM},a}_u) = z$ 时 $R(Z^{\mathrm{BM},a}_u)$的正则条件分布。由确定性时刻 s处的（强）马尔可夫性，在以 $\mathcal{F}_s$ 为条件时，未来过程 $\{B_{s+r}\}_{0\le r\le t}$ 是从B_s 出发的布朗运动，并且与过去独立。因此，对每一个 $A \in \Sigma_t^{\{*\}}$，

$$\mathbb{P}_a\big(R(Z^{\mathrm{BM},a}_u) \in A \,\big|\, \mathcal{F}_s\big) = \mu_t^{\mathrm{BM},B_s}(A) \qquad \text{a.s.} \tag{45}$$

对（45）关于 $\sigma(L(Z^{\mathrm{BM},a}_u))$取条件期望，得到

$$K_{L(Z^{\mathrm{BM},a}_u)}(A) = \mathbb{P}_a\big(R(Z^{\mathrm{BM},a}_u) \in A \,\big|\, L(Z^{\mathrm{BM},a}_u)\big) = \mathbb{E}_a\big[\mu_t^{\mathrm{BM},B_s}(A) \,\big|\, L(Z^{\mathrm{BM},a}_u)\big] \qquad \text{a.s.} \tag{46}$$

因此，K_z 是测度 $\mu^{\mathrm{BM},x}_t$ 的混合，其混合分布由在给定 $L(Z^{\mathrm{BM},a}_u) = z$条件下 B_s 的条件分布给出。由于 $\mathbb{P}_a(B_s = 0) = 0$，我们有 $\mu^{\mathrm{BM},a}_s$-几乎处处，该条件分布赋予 $\{0\}$的质量为 0。

由引理 4.27，对每个 $x \neq 0$ 都有 $\mu^{\mathrm{BM},x}_t \sim \mu^{\mathrm{BM},a}_t$，因此所有 $\mu^{\mathrm{BM},x}_t$ $(x \neq 0)$与 $\mu^{\mathrm{BM},a}_t$ 具有相同的零测集。由（46）立即可得，对于 $\mu^{\mathrm{BM},a}_s$-几乎每个 z，有 $K_z \sim \mu^{\mathrm{BM},a}_t$：事实上，若 $\mu^{\mathrm{BM},a}_t(A) = 0$，则对所有 $x \neq 0$都有 $\mu^{\mathrm{BM},x}_t(A) = 0$，故 $K_z(A) = 0$；反过来，若 $K_z(A) = 0$，则对混合分布几乎每个 x，都有 $\mu^{\mathrm{BM},x}_t(A) = 0$，因此（由于零测集相同）$\mu^{\mathrm{BM},a}_t(A) = 0$。于是$J_{s,t} \sim \mu^{\mathrm{BM},a}_s \otimes \mu^{\mathrm{BM},a}_t$，再通过$\oplus_{s,t}$ 推前得到

$$(\mu^{\mathrm{BM},a}_s \otimes \mu^{\mathrm{BM},a}_t) \circ \oplus^{-1}_{s,t} \sim J_{s,t} \circ \oplus^{-1}_{s,t} = \mu^{\mathrm{BM},a}_{s+t}$$

利用（44）。这正是定义2.3(i)。

确定性时间切片条件的缺失（定义2.3(ii)）是显然的：对任意固定的 $r \in (0,t]$, $\mu^{\mathrm{BM},a}_t(\{Z : r \in Z\}) = \mathbb{P}_a(B_r = 0) = 0$, 因为 B_r 具有连续密度。因此该族无确定性点。

我们验证定义2.3(iii)中的非退化条件。反设 $\mu^{\mathrm{BM},a}_t$ 支撑在有限多个原子上，即 $\mu^{\mathrm{BM},a}_t = \sum_{i=1}^N p_i\,\delta_{C_i}$，其中 $p_i > 0$ 且$C_i \in \mathscr{C}_t^{\{*\}}$ 互异。定义博雷尔泛函

$$\beta_t : \mathscr{C}_t^{\{*\}} \to [0,t] \cup \{t+1\}, \qquad \beta_t(C) := \begin{cases} \inf C, & C \neq \varnothing, \\ t+1, & C = \varnothing. \end{cases}$$

设 $T_0 = \inf\{u \ge 0 : B_u = 0\}$ 为0的首次击中时间。则 $\beta_t(Z^{\mathrm{BM},a}_t) = T_0$ 在 $\{T_0 \le t\}$上，且 $\beta_t(Z^{\mathrm{BM},a}_t) = t+1$在 $\{T_0 > t\}$上。再次利用引理 4.26(i)，对每个$r \in (0,t]$，我们有 $\mathbb{P}_a(\tau_0 = r) = 0$。因此对所有 $r \in (0,t]$，有 $\mu^{\mathrm{BM},a}_t(\beta_t = r) = 0$。另一方面，在有限原子表示下，$(\beta_t)_{\#}\mu^{\mathrm{BM},a}_t = \sum_{i=1}^N p_i\,\delta_{\beta_t(C_i)}$是纯原子的，并且由于 $\mathbb{P}_a(T_0 \le t) > 0$，存在至少一个 i 使得 $\beta_t(C_i) \in (0,t]$，从而推出 $\mu^{\mathrm{BM},a}_t(\beta_t = \beta_t(C_i)) \ge p_i > 0$，矛盾。因此 $\mu^{\mathrm{BM},a}_t$ 并不支撑在有限多个原子上。

接下来我们验证可测性条件定义2.3(iva)。为简便起见，记 $\mathscr{C} := \mathscr{C}_1^{\{*\}}$，$\Sigma := \Sigma_1^{\{*\}}$，并令 $\sigma_t : \mathscr{C}_t^{\{*\}} \to \mathscr{C}$为时间缩放同胚。设 $\widetilde{\mu}_t := (\sigma_t)_*\mu^{\mathrm{BM},a}_t$. 令 $\mathcal{R}$ 为由未命中集 $M(K) := \{W \in \mathscr{C} : W \cap K = \varnothing\}$, 生成的可数环，其中 K 取遍$[0,1]$, 中具有有理端点的闭区间的有限并，以及命中集 $H(U) := \{W \in \mathscr{C} : W \cap U \neq \varnothing\}$, 其中 U取遍 $[0,1]$中具有有理端点的开区间的有限并。由于这样的闭有理区间与开有理区间

构成 $[0,1]$, 的紧子集与开子集的可数基，环 $\mathcal{R}$ 是可数的并生成 Σ。

在带有博雷尔σ域的典范 Wiener 空间 $\Omega := C([0,\infty)\ \mathbb{R})$ 上定义布朗运动，并设 $\mathbb{P}_a$ 为从 a出发的 Wiener 测度。考虑映射 $\Psi : (0,\infty)\ \times\Omega\ \to\mathscr{C}$,

$$\Psi(t,\omega) := \sigma_t(Z_t^{\mathrm{BM},a}(\omega)) = \{u\in[0,1] : \omega(tu) = 0\}.$$

于是，根据定义， $\widetilde{\mu}_t = \mathrm{Law}^{\mathbb{P}_a}(\Psi(t,\cdot))$。

我们断言 Ψ是博雷尔可测的。只需验证 $\mathcal{R}$的生成元的原像。

设 $K\subset[0,1]$ 为紧集。那么

$$\{\Psi(t,\omega)\in M(K)\} = \{\Psi(t,\omega)\cap K = \varnothing\} = \Big\{\inf_{u\in K}|\omega(tu)| > 0\Big\}.$$

映射 $(t,\omega,u)\ \mapsto|\omega(tu)|$ 在 $(0,\infty)\ \times\Omega\ \times[0,1]$上连续，因此 $(t,\omega)\ \mapsto\inf_{u\in K}|\omega(tu)|$作为紧集上的下确界是连续的。因此 $\{(t,\omega):\ \Psi(t,\omega)\ \in\ M(K)\}$ 是开集，特别地是博雷尔集。

设 $U\subset[0,1]$ 为开集。选取紧集 $K_n\subset U$，使得 $K_n\uparrow U$ （例如，可以取 $K_n:=\{u\in U:$ $\mathrm{dist}(u,\ U^c)\ \geq 1/n\}$）。那么每个 K_n 都是紧集，且包含于 U 中，并且 $U=\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n$. 因此

$$\{\Psi(t,\omega)\in H(U)\} = \{\Psi(t,\omega)\cap U\neq\varnothing\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{\Psi(t,\omega)\cap K_n\neq\varnothing\}.$$

对于每个 n, $\{\Psi\ (t,\ \omega)\ \cap K_n\ \neq\ \varnothing\}\ =\ \{\inf_{u\in K_n}|\omega(tu)|\ =\ 0\}$，且右侧是博雷尔函数，因为 $(t,\ \omega)$ $\mapsto\inf_{u\in K_n}|\omega(tu)|$ 连续。因此， $\{(t,\ \omega):\ \Psi(t,\ \omega)\ \in H(U)\}$ 是博雷尔函数。

因此， Ψ 对 $\mathcal{R}$ 的每个生成元的原像都是博雷尔集，故对于每个 $A\in\mathcal{R}$，映射 $(t,\ \omega)\ \mapsto\ \mathbb{1}_A(\Psi(t,\ \omega))$ 在 $(0,\ \infty)\ \times\Omega$ 上是博雷尔可测的。最后，由于 $0\ \leq\ \mathbb{1}_A(\Psi(t,\ \omega))\ \leq\ 1$，参数依赖积分的标准可测性结论给出

$$t\longmapsto\widetilde{\mu}_t(A) = \mathbb{E}_a\big[\mathbb{1}_A(\Psi(t,\cdot))\big]$$

对每个 $A\in\mathcal{R}$ 都是博雷尔的。这证明了定义 2.3(iva)。

最后，我们验证拉东–尼科迪姆导数的可测性（定义 2.3(ivb)）。对于$s,\ t>0$，令

$$\widetilde{\mu}_{s,t} := (\sigma_{s+t})_*\Big((\mu_s^{\mathrm{BM},a}\otimes\mu_t^{\mathrm{BM},a})\circ\oplus_{s,t}^{-1}\Big)\quad\text{on }(\mathscr{C},\Sigma).$$

由因子化，$\widetilde{\mu}_{s,\ t}\sim\widetilde{\mu}_{s+t}$ 对所有 $s,\ t>0$均成立。

现在我们来检查应用引理 3.1 所需的可测性。令 $u=\frac{s}{s+t}\in(0,\ 1)$，并定义博雷尔粘合映射 $G_u:$ $\mathscr{C}\times\mathscr{C}\to\mathscr{C}$如下

$$G_u(W_1,W_2) := \sigma_u^{-1}(W_1)\ \cup\ \big(u+\sigma_{1-u}^{-1}(W_2)\big),$$

使得 $\widetilde{\mu}_{s,t}\ =(\widetilde{\mu}_s\otimes\widetilde{\mu}_t)\circ G_{s/}^{-1}\ (s+t)$。由于 $u\mapsto G_u$ 在如下意义下是博雷尔的：$(u,W_1,W_2)\ \mapsto G_u(W_1,W_2)$ 是博雷尔的；并且由于 $t\mapsto\widetilde{\mu}_t(A)$ 在上文引入的环 $\mathcal{R}$ 上是博雷尔的，引理 2.12 蕴含对于每个 $A\in\mathcal{R}$, $(s,t)\mapsto\widetilde{\mu}_{s,t}(A)$ 都是博雷尔的。因此，引理 3.1（参数空间为 $(0,\infty)^2$、基空间为 $\mathscr{C}$）给出一个联合博雷尔函数

$$\Delta : (0,\infty)^2\times\mathscr{C}\to(0,\infty)\quad\text{such that}\quad\Delta(s,t,\cdot) = \frac{d\widetilde{\mu}_{s,t}}{d\widetilde{\mu}_{s+t}}\ \ \widetilde{\mu}_{s+t}\text{-a.e.}$$

这正是定义 2.3(ivb)。 □

命题 4.29. 可测因子化族 $\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{BM},a} = \{\mu_t^{\mathrm{BM},a}\}_{t>0}$ 是一个 *Palm* 可均匀化种子。

证明. 根据(43)，对每个 $t>0$，锚点边缘分布κ_t^{μ} （与 $\mu^{\mathrm{BM}}{}_{,t}\quad{}^{a}$ 相关联）等价于勒贝格测度 $\restriction_{(0,t]}$。因此 $\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{BM},a}$ 是Palm可一致化的。

此外，根据 Tsirelson [12, 节 2], 的一项基本结果，相关的随机集系统属于 II 型$_0$。 □

现在我们将定理 4.21 应用于族 $\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{BM},a}$，其中 $L(t) = |\ln t|$（对于 $t \in (0,\ 1)$）。由此得到一个等价代表

$$\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{BM},a} = \{\nu_t^{\mathrm{BM},a}\}_{t>0}$$

满足 $\nu^{\mathrm{BM},a}_t(\varnothing) = e^{-\beta t}$ 并且满足：给定 $\{Z \neq \varnothing\}$时，锚点 $\alpha_t(Z)$ 恰好服从均匀分布$(0,t)$。回顾一下，$\nu^{\mathrm{BM},a}_t$ 由 $\mu^{\mathrm{BM},a}_t$ 经锚点适配局部化（定义 4.17，其中 $L(r) = |\ln r|$），再经 Palm 均匀化（引理 4.15），最后经真空归一化（定理 4.21）得到。

根据定理 4.21以及命题 4.23之后的讨论，对于 $\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{BM},a}$ 命题 4.23 的假设 (i)、(ii) 和 (iii) 对每个固定的 $(s,\ t)$ 均成立。还需验证推论 4.24的 (iv(a)) 和 (iv(b))。

下面的命题明确计算了经锚点适配局部化、Palm 均匀化和真空归一化后得到的布朗代表的 Radon–Nikodym 密度。虽然下文的论证不会用到这个显式表达式，但为求完整并便于日后查阅，我们仍将其列出。

命题 4.30。 对于任意 $t \in (0,1]$ 拉东–尼科迪姆导数 $f_t := d\nu^{\mathrm{BM},a}_t / d\mu^{\mathrm{BM},a}_t$ 为

$$f_t(Z) = \frac{e^{-\beta t}}{\mu_t^{\mathrm{BM},a}(\varnothing)}\,\mathbb{1}_{\{Z=\varnothing\}} + \frac{1-e^{-\beta t}}{t}\,\frac{\exp\big(-c(\alpha_t(Z))\,\mathrm{diam}_t(Z)\big)}{f_a(\alpha_t(Z))\,\Phi_{c(\alpha_t(Z))}(t-\alpha_t(Z))}\,\mathbb{1}_{\{Z\neq\varnothing\}},$$

其中 f_a 是击中时间密度，Φ_c 是引理*4.26*（*ii*）中的反正弦拉普拉斯变换，而 $c(x) := |\ln x|/x^2$ 当 $x \in (0,\ 1)$。

证明。固定 $t \in (0,1]$ 并记 $\mu_t := \mu^{\mathrm{BM},a}_t$ 为简洁起见。考虑局部化权重

$$w_t(Z) := \mathbb{1}_{\{Z=\varnothing\}}(Z) + \mathbb{1}_{\{Z\neq\varnothing\}}(Z)\exp\big(-c(\alpha_t(Z))\,\mathrm{diam}_t(Z)\big), \qquad Z \in \mathscr{C}_t^{\{*\}}.$$

令 $Z^{\mathrm{loc},\alpha}_t := \mathbb{E}_{\mu_t}[w_t(Z)] \in (0,\ \infty)$，并令 $\mu^{\mathrm{loc},\alpha}_t$ 为定义 4.17 中的锚点适配局部化倾斜，即

$$\frac{d\mu_t^{\mathrm{loc},\alpha}}{d\mu_t}(Z) = \frac{w_t(Z)}{Z_t^{\mathrm{loc},\alpha}}.$$

在 $\{Z \neq \varnothing\}$ 下，这表示为

$$\frac{d\mu_t^{\mathrm{loc},\alpha}}{d\mu_t}(Z) = \frac{1}{Z_t^{\mathrm{loc},\alpha}}\exp\big(-c(\alpha_t(Z))\,\mathrm{diam}_t(Z)\big).$$

在 $\mathbb{P}_a$下，令 $T_0 := \inf\{u > 0 :\ B_u = 0\}$ 为 0 的首次击中时间。那么在 $\{Z \neq \varnothing\} = \{T_0 \leq t\}$ 上，我们有 $\alpha_t(Z) = T_0$，并且根据时刻 T_0的强马尔可夫性质，T_0 之后的过程是从 0 出发的布朗运动，且与过去独立。令 $g_T := \sup\{s \in [0,T] :\ W_s = 0\}$ 对于从 0 出发的标准布朗运动 W。那么，条件于 $\{T_0 = x \leq t\}$，$[0,t]$ 中的最后一次过零时间等于 $x + g_{t-x}$，因此

$$\mathrm{diam}_t(Z) = \sup Z - \inf Z = (x + g_{t-x}) - x = g_{t-\alpha_t(Z)}.$$

因此，在给定 $\{\alpha_t = x\}$ 的条件下，局部化因子的条件期望为

$$\mathbb{E}_{\mu_t}\Big[\exp\big(-c(\alpha_t(Z))\mathrm{diam}_t(Z)\big)\,\Big|\,\alpha_t = x\Big] = \mathbb{E}\big[e^{-c(x)g_{t-x}}\big] = \Phi_{c(x)}(t-x).$$

令 $\kappa^{\mathrm{loc},\alpha}_t := (\alpha_t)_*\big(\mu^{\mathrm{loc},\alpha}_t(\cdot \cap \{Z \neq \varnothing\})\big)$ 为 $(0,\ t]$ 上的锚点推前。利用 $\alpha_t = T_0$ 在 $(0,\ \infty)$ 上具有密度 f_a（引理 4.26(i)），可得对于 $x \in (0,\ t]$，

$$\begin{aligned}
\kappa_t^{\mathrm{loc},\alpha}(dx) &= \mu_t^{\mathrm{loc},\alpha}(\alpha_t \in dx,\ Z \neq \varnothing) \\
&= \frac{1}{Z_t^{\mathrm{loc},\alpha}}\mathbb{E}_{\mu_t}\Big[\mathbb{1}_{\{\alpha_t\in dx\}}\exp\big(-c(\alpha_t)\mathrm{diam}_t\big)\Big] \\
&= \frac{1}{Z_t^{\mathrm{loc},\alpha}}\,f_a(x)\,\Phi_{c(x)}(t-x)\,dx.
\end{aligned}$$

因此，勒贝格测度 $\lambda\restriction_{(0,t]}$ 关于 $\kappa^{\mathrm{loc},\alpha}_t$ 的一个（博雷尔）拉东–尼科迪姆导数为 by

$$h_t(x) := \frac{d(\mathrm{Leb}\restriction_{(0,t]})}{d\kappa^{\mathrm{loc},\alpha}_t}(x) = \frac{Z^{\mathrm{loc},\alpha}_t}{f_a(x)\,\Phi_{c(x)}(t-x)}, \qquad x \in (0,t],$$

几乎处处定义 $\kappa^{\mathrm{loc},\alpha}_t$。

令 $\mu^{\mathrm{unif},\alpha}_t := (\mu^{\mathrm{loc},\alpha}_t)^{\mathrm{unif}}$ 为 $\mu^{\mathrm{loc},\alpha}_t$ 的 Palm 均匀化，如引理 4.15 所述。根据该引理，在对 $\{Z \neq \varnothing\}$ 进行条件化后，所得分布由 $\mu^{\mathrm{loc},\alpha}_t$ 乘以 $h_t(\alpha_t(Z))$，再经过归一化，使 α_t 在 $(0,\,t)$ 上均匀分布。等价地，在 $\{Z \neq \varnothing\}$ 上有

$$\frac{d\,\mu^{\mathrm{unif},\alpha}_t(\,\cdot \mid Z \neq \varnothing)}{d\mu^{\mathrm{loc},\alpha}_t}(Z) = \frac{1}{t}\,h_t(\alpha_t(Z)).$$

将此与 $\frac{d\mu^{\mathrm{loc},\alpha}_t}{d\mu_t} = \frac{w_t}{Z^{\mathrm{loc},\alpha}_t}$ 结合，可得在 $\{Z \neq \varnothing\}$ 上，

$$\begin{aligned}
\frac{d\,\mu^{\mathrm{unif},\alpha}_t(\,\cdot \mid Z \neq \varnothing)}{d\mu_t}(Z) &= \frac{1}{t}\,h_t(\alpha_t(Z))\,\frac{w_t(Z)}{Z^{\mathrm{loc},\alpha}_t} \\
&= \frac{1}{t}\,\frac{Z^{\mathrm{loc},\alpha}_t}{f_a(\alpha_t(Z))\,\Phi_{c(\alpha_t(Z))}(t-\alpha_t(Z))}\cdot\frac{\exp\!\big(-c(\alpha_t(Z))\,\mathrm{diam}_t(Z)\big)}{Z^{\mathrm{loc},\alpha}_t} \\
&= \frac{1}{t}\,\frac{\exp\!\big(-c(\alpha_t(Z))\,\mathrm{diam}_t(Z)\big)}{f_a(\alpha_t(Z))\,\Phi_{c(\alpha_t(Z))}(t-\alpha_t(Z))}.
\end{aligned}$$

根据定理 4.21，最终的代表元为

$$\nu^{\mathrm{BM},a}_t = e^{-\beta t}\,\delta_{\varnothing} + (1-e^{-\beta t})\,\mu^{\mathrm{unif},\alpha}_t(\,\cdot \mid Z \neq \varnothing).$$

由于 $\mu_t(\{\varnothing\}) = \mathbb{P}_a(T_0 > t) > 0$，拉东–尼科迪姆导数 $f_t = d\nu^{\mathrm{BM},a}_t/d\mu_t$ 为

$$f_t(\varnothing) = \frac{\nu^{\mathrm{BM},a}_t(\{\varnothing\})}{\mu_t(\{\varnothing\})} = \frac{e^{-\beta t}}{\mu^{\mathrm{BM},a}_t(\varnothing)}$$

关于 $\{Z=\varnothing\}$，以及

$$f_t(Z) = (1-e^{-\beta t})\,\frac{d\,\mu^{\mathrm{unif},\alpha}_t(\,\cdot \mid Z \neq \varnothing)}{d\mu_t}(Z) = \frac{1-e^{-\beta t}}{t}\,\frac{\exp\!\big(-c(\alpha_t(Z))\,\mathrm{diam}_t(Z)\big)}{f_a(\alpha_t(Z))\,\Phi_{c(\alpha_t(Z))}(t-\alpha_t(Z))}$$

关于 $\{Z \neq \varnothing\}$。这正是所声称的公式。 □

下一个命题验证布朗种子的条件单块海林格控制 (iv(b))。

命题 4.31。 种子 $\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{BM},a}$ 满足推论 (iv(a)) 中的条件 *4.24*。

证明。 固定 $s,\ t>0$ 并按照推论 4.24设 $u=\lambda(s+t)$、$u_1=\lambda s$、$u_2=\lambda t$。为简便起见，记 $\nu_r := \nu^{\mathrm{BM},a}_r$ 以及 $\sigma := (\nu_{u_1}\otimes\nu_{u_2})\circ\oplus^{-1}$。

我们计算 σ-权重。在 σ 下，左右块相互独立，因此

$$\sigma(E_{10}) = \nu_{u_1}(Z\neq\varnothing)\,\nu_{u_2}(Z=\varnothing), \qquad \sigma(E_{01}) = \nu_{u_1}(Z=\varnothing)\,\nu_{u_2}(Z\neq\varnothing).$$

根据真空归一化，对于所有 $r>0$，$\nu_r(Z=\varnothing) = e^{-\beta r}$ 且 $\nu_r(Z\neq\varnothing) = 1-e^{-\beta r}$。因此

$$\sigma(E_{10}) = (1-e^{-\beta u_1})\,e^{-\beta u_2}, \qquad \sigma(E_{01}) = e^{-\beta u_1}\,(1-e^{-\beta u_2}),$$

并利用 $1-e^{-x} = x + O(x^2)$ 作为 $x\downarrow 0$，我们得到

$$\sigma(E_{10}) = \beta u_1 + O(u^2), \qquad \sigma(E_{01}) = \beta u_2 + O(u^2). \tag{47}$$

根据 Palm 均匀化（引理 4.15 应用于定理 4.21），在 $\nu_u(\cdot\mid Z\neq\varnothing$ 下，锚点 $\alpha_u(Z)$ 服从均匀分布 Unif(0，u)。根据引理 4.19 (其中 $t=u$ 且 $L(u) = |\ln u|$)，

$$\nu_u\big(\mathrm{diam}_u(Z) \geq u^2 \,\big|\, Z\neq\varnothing\big) \leq e^{-|\ln u|} = u,$$

对于所有充分小的 $u\in(0,\,1)$。令 $G_u := \{\mathrm{diam}_u(Z) < u^2\}$。

在 G_u 上，如果 $\alpha_u(Z) \le u_1 - u^2$ 那么必然有 $Z \subset [0, u_1]$，因此会出现 E_{10}。于是

$$\nu_u(E_{10} \,|\, Z \neq \varnothing) \ge \nu_u(\alpha_u \le u_1 - u^2 \,|\, Z \neq \varnothing) - \nu_u(G_u^c \,|\, Z \neq \varnothing) = \frac{u_1 - u^2}{u} - O(u) = \frac{u_1}{u} + O(u).$$

同理，$E_{10} \subset \{\alpha_u \le u_1\}$且在 $\{\alpha_u \le u_1\}$ 上，E_{10} 失败的唯一可能性是 G_u^c 或$\alpha_u \in (u_1 - u^2, u_1]$。因此

$$\nu_u(E_{10}^c \,|\, Z \neq \varnothing,\, \alpha_u \le u_1) \le \nu_u(G_u^c \,|\, Z \neq \varnothing) + \nu_u(\alpha_u \in (u_1 - u^2, u_1] \,|\, Z \neq \varnothing, \alpha_u \le u_1) \le u + \frac{u^2}{u_1} = O(u).$$

因此

$$\nu_u(E_{10} \,|\, Z \neq \varnothing) = \nu_u(\alpha_u \le u_1 \,|\, Z \neq \varnothing)\,(1 - O(u)) = \frac{u_1}{u} + O(u).$$

两边乘以 $\nu_u(Z \neq \varnothing) = 1 - e^{-\beta u} = \beta u + O(u^2)$，得到

$$\nu_u(E_{10}) = \beta u_1 + O(u^2). \tag{48}$$

完全对称的论证可得

$$\nu_u(E_{01}) = \beta u_2 + O(u^2). \tag{49}$$

将（47）与（48）–（49）结合，得到

$$|\nu_u(E_{10}) - \sigma(E_{10})| = O(u^2), \qquad |\nu_u(E_{01}) - \sigma(E_{01})| = O(u^2),$$

这恰好就是 (iv(a))。 □

下面的引理给出了短时限制律与较小尺度下参考律之间的关键桥梁。通过对锚点进行条件化，并分析指数倾斜的末次归零分布，它表明这两个分布之间的差异为 $O(u)$ 量级。

引理 4.32。固定 $s, t > 0$ 并设 $u = \lambda(s+t)$，$u_1 = \lambda s$，$u_2 = \lambda t$，如推论 *4.24* 中所述。记作$\nu_r := \nu^{\mathrm{BM}}{}_{,r}{}^{a}$，且 $c(x) := \frac{|\ln x|}{x^2}$，其中 $x \in (0, 1)$。定义依赖于 u 的左块比较分布

$$\bar\nu_u^{(u_1)} := \mathrm{Law}_{\nu_u}\big(R_{0,u_1}(Z) \,\big|\, R_{0,u_1}(Z) \neq \varnothing\big), \qquad \bar\nu_{u_1} := \nu_{u_1}(\,\cdot \,|\, Z \neq \varnothing).$$

于是，对所有充分小的 $\lambda > 0$，有

$$\big\|\bar\nu_u^{(u_1)} - \bar\nu_{u_1}\big\|_{\mathrm{TV}} \;\le\; \frac{C}{u_1}\int_0^{u_1}\Big(\frac{1}{c(x)\,u} + \frac{1}{1 + c(x)(u_1 - x)}\Big)\,dx, \tag{50}$$

其中某个常数 $C > 0$ 仅依赖于固定对 (s, t)，而与 λ 无关。特别地，当 $\lambda \downarrow 0$ 时，右端为 $O(u)$，因此 $1 - H\big(\bar\nu_u^{(u_1)}, \bar\nu_{u_1}\big) = O(u)$。

证明。在整个证明过程中，我们引入数值常数 C_1，C_2..... 并固定下来，然后令

$$C \;:=\; \max\{C_1, C_2, \ldots, C_{11}\}. \tag{51}$$

按照这一约定，使用常数 C_i 证明的任何估计也自动对 C 成立。

在 $\{Z \neq \varnothing\}$、$R_{0,\,u_1}(Z) \neq \varnothing$ 与 $\alpha_u(Z) \le u_1$等价。由于在 $\nu_u(\cdot\,|Z \neq \varnothing)$ 条件下，$\alpha_u \sim$ 服从 Unif(0，u) 分布，对 $\{\alpha_u \le u_1\}$ 进行条件化后，在 $\bar\nu^{(u_1)}{}_u = \mathrm{Law}_{\nu_u}(R_{0,\,u_1}(Z)\ |R_{0,\,u_1}(Z) \neq \varnothing)$ 条件下，$\alpha_u \sim$ 服从 Unif(0，u_1) 分布。同样，在 $\bar\nu_{u_1} = \nu_{u_1}(\cdot \,|\, Z \neq \varnothing)$ 条件下，$\alpha_{u_1} \sim$ 服从 Unif(0，u_1) 分布。

由于 $\mathscr{C}_{u_1}^{\{*\}}$是标准博雷尔空间，且 α 是博雷尔可测的（引理4.12），存在正则条件分布（核）

$$\Pi_x^{(u)} := \mathrm{Law}_{\nu_u}(R_{0,u_1}(Z) \,|\, \alpha_u = x,\, Z \neq \varnothing), \qquad \Pi_x^{(u_1)} := \mathrm{Law}_{\nu_{u_1}}(Z \,|\, \alpha_{u_1} = x,\, Z \neq \varnothing),$$

对几乎处处的 $x \in (0,\ u_1]$定义，使得

$$\bar\nu_u^{(u_1)} = \frac{1}{u_1}\int_0^{u_1} \Pi_x^{(u)}\,dx, \qquad \bar\nu_{u_1} = \frac{1}{u_1}\int_0^{u_1} \Pi_x^{(u_1)}\,dx.$$

由全变差在具有相同混合测度的混合下的凸性,

$$\left\|\bar{\nu}_u^{(u_1)} - \bar{\nu}_{u_1}\right\|_{\mathrm{TV}} \;\le\; \frac{C_1}{u_1}\int_0^{u_1} \left\|\Pi_x^{(u)} - \Pi_x^{(u_1)}\right\|_{\mathrm{TV}}\, dx, \tag{52}$$

其中 $C_1 := 1$.

固定 $x \in (0,\ u_1]$ 并简记

$$T := u - x, \qquad r := u_1 - x \in [0, T), \qquad c := c(x) = \frac{|\ln x|}{x^2}.$$

(当 λ 足够小时，我们有 $u_1 < 1$，因此 $x \in (0,\ 1)$，且 $c(x)$ 定义良好。)

在原始的布朗运动零点集分布 μ^{BM}, $_u$ ^{a}下，条件化于 $\{\alpha_u = x\}$ 意味着布朗运动首次在时间 x到达 0；根据强马尔可夫性质，锚点之后的过程是从 0 出发的标准布朗运动 W ，并且与过去独立。因此，平移后的锚点后零点集为

$$\mathcal{Z}_T := \{s \in [0, T] : W_s = 0\} \in \mathscr{C}_T^{\{*\}}.$$

此外，在纤维 $\{\alpha_u = x\}$ 上，扩展量满足

$$\mathrm{diam}_u(Z) = \sup Z - \inf Z = \sup(x + \mathcal{Z}_T) - x = \sup(\mathcal{Z}_T) =: G_T,$$

其中 G_T:= sup$\{s \le T\colon\ W_s = 0\}$ 是 T之前的最后一次过零时间。

根据锚点适配局部化（27），在纤维 $\{\alpha = x\}$ 上，Radon–Nikodym 权重为 exp$(-c$ diam$_u)$ $= \exp(-c\, G_T)$。Palm 均匀化仅乘以 α 的函数，因此不会改变给定 $\alpha = x$时的条件分布。因此，在 $\Pi_x^{(u)}$下， G_T 的分布是经典反正弦分布的指数倾斜:

$$\mu_{T,c}(dg) := \mathrm{Law}_{\Pi_x^{(u)}}(G_T \in dg) = \frac{e^{-cg}}{Z_T(c)}\,\frac{1}{\pi\sqrt{g(T-g)}}\,\mathbf{1}_{(0,T)}(g)\,dg, \qquad Z_T(c) := \int_0^T e^{-cg}\frac{dg}{\pi\sqrt{g(T-g)}}. \tag{53}$$

这里我们使用了布朗运动下 G_T 的经典反正弦密度（L´evy 的反正弦分布），例如参见 [8]。类似地，在 $\Pi^{(u_1)_x}$ 下，锚点后的时间跨度等于 r，相应的最后一次过零时间服从分布 $\mu_{r,\ c}$ 由式（53）给出，其中 T 替换为 r。

接下来，考虑锚点后零点集在 $[0, r]$ 上的限制:

$$\mathcal{Z}_T^{(r)} := \mathcal{Z}_T \cap [0, r] \in \mathscr{C}_r^{\{*\}}.$$

在未倾斜的布朗分布下，给定 $G_T = g$时，线段 $(W_s)_{0\le s\le g}$ 是一个从 0 到 0、长度为 g 的布朗桥，而线段 $(|W_{g+s}|)_{0\le s\le T-g}$ 是一个长度为 $T - g$ 的布朗漫步，因此在 $(0, T - g]$ 上没有零点（Denisov／最后离开分解；例如参见[8, 第 XII 章]）。特别地，在 $\{G_T = g \le r\}$ 上，受限零点集 $\mathcal{Z}_T^{(r)}$ 仅在 $[0, g]$中含有零点，在 $(g, r]$ 上为空；此外，其条件分布仅通过长度为 g的布朗桥依赖于 g ，而不依赖于 T。因此，对 $g \in (0, r]$ ，令 K_g表示 $\mathscr{C}_r^{\{*\}}$ 上长度为 g 的布朗桥在 $[0, g]$上的零点集的分布；将其视为 $[0, r]$ 的闭子集，并且不在 $(g, r]$ 中添加任何点。于是，对每个 $T \ge r$，映射 $g \mapsto K_g$ 是给定 $G_T = g$时 $\mathcal{Z}_T^{(r)}$ 的正则条件分布的一个版本，即

$$\mathrm{Law}(\mathcal{Z}_T^{(r)} \,|\, G_T = g) = K_g \qquad \text{for a.e. } g \in (0, r]. \tag{54}$$

由于定义$\mu_{T,c}$ 的指数倾斜仅依赖于 G_T，同一条件分布 K_g也可作为在倾斜后的测度下给定 $G_T = g$ 时 $\mathcal{Z}_T^{(r)}$ 的条件分布的一个版本。因此，在倾斜后的测度下，限制集上的分布具有混合表示

$$\Pi_x^{(u)} = \int_{(0,r]} K_g\, \mu_{T,c}(dg) + \mathrm{Err}_x, \qquad \Pi_x^{(u_1)} = \int_{(0,r]} K_g\, \mu_{r,c}(dg),$$

其中 Err$_x$ 是全质量为 Err 的次概率测度$_x(\mathscr{C}_r)$= $\mu_{T,\ c}(G_T > r)$ （来自事件 $\{G_T > r\}$，在其上（54）不适用）。

由于 K_g 在两种混合中相同，且马尔可夫核收缩全变差，我们有 e

$$\big\|\Pi_x^{(u)} - \Pi_x^{(u_1)}\big\|_{\mathrm{TV}} \;\le\; C_2\Big(\mu_{T,c}(G_T > r) \;+\; \big\|\mu_{T,c}\restriction_{(0,r]} - \mu_{r,c}\big\|_{\mathrm{TV}}\Big), \tag{55}$$

其中我们再次固定 $C_2 := 1$.

接下来，我们引入 Gamma($\frac{1}{2}$,率-c) 密度

$$w_c(g) := \sqrt{\frac{c}{\pi}}\, g^{-1/2} e^{-cg}, \qquad g > 0,$$

并记为，对于 $S > 0$,

$$b_S(g) := \Big(1 - \frac{g}{S}\Big)^{-1/2}, \qquad g \in (0, S).$$

使用 $\frac{1}{\sqrt{S-g}} = \frac{1}{\sqrt{S}} b_S(g)$, (53) 可改写为

$$\mu_{S,c}(dg) = \frac{b_S(g)\,\mathbf{1}_{(0,S)}(g)}{\mathbb{E}_{w_c}\big[b_S(G)\,\mathbf{1}_{\{G<S\}}\big]}\, w_c(g)\, dg. \tag{56}$$

我们为 $\|\mu_{S,\ c} - w_c\|_{\mathrm{TV}}$ 建立一个定量界。为此，固定 $C_3 := 2,\ \ C_4 := 6,\ \ C_5 := 7$.我们声称，对所有 $S,\ \ c > 0$,

$$\big\|\mu_{S,c} - w_c\big\|_{\mathrm{TV}} \;\le\; \min\Big\{1,\ \frac{C_4}{cS}\Big\} \;\le\; \frac{C_5}{1 + cS}. \tag{57}$$

事实上，若 $cS < 2$ 则 $\|\mu_{S,\ c} - w_c\|_{\mathrm{TV}} \le 1 \le \frac{C_5}{1+cS}$ 因为 $C_5 \ge 3$。现在假设 $cS \ge 2$。利用（56）和标准恒等式（30），得到

$$\|\mu_{S,c} - w_c\|_{\mathrm{TV}} \le \frac{1}{\mathbb{E}_{w_c}[b_S(G)\mathbf{1}_{\{G<S\}}]}\, \mathbb{E}_{w_c}\Big[\big|b_S(G)\mathbf{1}_{\{G<S\}} - 1\big|\Big]. \tag{58}$$

由于 $b_S \ge 1$，分母至少为 $\mathbb{P}_{w_c}(G < S)$。但 $\mathbb{E}_{w_c}[G] = \frac{1}{2c}$，因此由马尔可夫不等式可得 $\mathbb{P}_{w_c}(G \ge S) \le \frac{\mathbb{E}[G]}{S} = \frac{1}{2cS} \le \frac{1}{4}$，于是

$$\mathbb{E}_{w_c}[b_S(G)\mathbf{1}_{\{G<S\}}] \;\ge\; \mathbb{P}_{w_c}(G < S) \;\ge\; \frac{3}{4}. \tag{59}$$

对于分子，按 $\{G \le S/2\}$ 和 $\{G > S/2\}$ 分类。在 $[0, S/2]$ 上，由中值定理以及 $b_S'(g) = \frac{1}{2S}(1 - g/S)^{-3/2} \le \frac{\sqrt{2}}{S} \le \frac{C_3}{S}$,

$$|b_S(g) - 1| \le \frac{C_3}{S}\, g \qquad (0 \le g \le S/2).$$

Thus

$$\mathbb{E}_{w_c}\Big[|b_S(G) - 1|\,\mathbf{1}_{\{G\le S/2\}}\Big] \le \frac{C_3}{S}\mathbb{E}_{w_c}[G] = \frac{C_3}{2cS}.$$

对于 $\{G > S/2\}$，我们使用基本估计 $|b_S(G)\mathbf{1}_{\{G<S\}} - 1| \le b_S(G)\mathbf{1}_{\{G<S\}} + \mathbf{1}_{\{G\ge S\}}$.。因此，剩下的就是控制 $\mathbb{E}_{w_c}\big[b_S(G)\mathbf{1}_{\{S/2<G<S\}}\big]$.。根据 w_c 和 b_S的定义，

$$\mathbb{E}_{w_c}\big[b_S(G)\mathbf{1}_{\{S/2<G<S\}}\big] = \sqrt{\frac{c}{\pi}} \int_{S/2}^{S} g^{-1/2} e^{-cg} \Big(1 - \frac{g}{S}\Big)^{-1/2} dg.$$

对于 $g \in [S/2, S]$，我们有 $g^{-1/2} \le (S/2)^{-1/2}$，且 $e^{-cg} \le e^{-cS/2}$，因此

$$\mathbb{E}_{w_c}\big[b_S(G)\mathbf{1}_{\{S/2<G<S\}}\big] \le \sqrt{\frac{c}{\pi}}\,(S/2)^{-1/2} e^{-cS/2} \int_{S/2}^{S} \Big(1 - \frac{g}{S}\Big)^{-1/2} dg \quad = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{cS}\, e^{-cS/2}.$$

现在令 $y := cS$。由于 $y \ge 2$，函数 $\phi(y) := y^{3/2} e^{-y/2}$ 在 $[2, \infty)$ 上于 $y = 3$处取得最大值，其中 $\phi(3) = 3^{3/2} e^{-3/2} < 2$. 因此，对所有 $y \ge 2$, $\sqrt{y}\, e^{-y/2} \le \frac{2}{y}$. 将此应用于$y = cS$ 可得

$$\mathbb{E}_{w_c}\big[b_S(G)\mathbf{1}_{\{S/2<G<S\}}\big] \le \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{2}{cS} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{cS}.$$

此外，$\mathbb{P}_{w_c}(G \ge S) \le \frac{1}{2cS}$，如上所述。结合起来，得到

$$\mathbb{E}_{w_c}\Big[\big|b_S(G)\mathbf{1}_{\{G<S\}} - 1\big|\Big] \le \Big(\frac{C_3}{2} + \frac{4}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2}\Big)\frac{1}{cS} \le \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{cS}. \tag{60}$$

将（59）和（60）代入（58），得到 $\|\mu_{S,\,c} - w_c\|_{\mathrm{TV}} \le \frac{4}{3}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{cS} \le \frac{C_4}{cS}$，从而（57）成立（第二个不等式是初等验证）。

由三角不等式和（57），

$$\big\|\mu_{T,c} - \mu_{r,c}\big\|_{\mathrm{TV}} \le \big\|\mu_{T,c} - w_c\big\|_{\mathrm{TV}} + \big\|\mu_{r,c} - w_c\big\|_{\mathrm{TV}} \le \frac{C_5}{cT} + \frac{C_5}{1+cr}. \tag{61}$$

此外，由于 $G_T \le T$ 恒成立，

$$\mathbb{E}_{\mu_{T,c}}[G_T] \le \mathbb{E}_{w_c}[G] + T\,\|\mu_{T,c} - w_c\|_{\mathrm{TV}} \le \frac{1}{2c} + \frac{C_5}{c} \le \frac{C_6}{c}, \qquad C_6 := 8.$$

因此，由马尔可夫不等式及初等界 $\min\{1, a/y\} \le (1+a)/(1+y)$，

$$\mu_{T,c}(G_T > r) \;\le\; \min\Big\{1, \frac{C_6}{cr}\Big\} \;\le\; \frac{C_7}{1+cr}, \qquad C_7 := 1 + C_6 = 9. \tag{62}$$

为完成证明，我们首先注意到

$$\big\|\mu_{T,c}\restriction_{(0,r]} - \mu_{r,c}\big\|_{\mathrm{TV}} \le \big\|\mu_{T,c} - \mu_{r,c}\big\|_{\mathrm{TV}} + \mu_{T,c}(G_T > r), \tag{63}$$

因为从 μ_T 中移除尾部 $(r,\ T)_c$ 恰好会使全变差改变其质量。结合（55）、（61）、（62）和（63）可得

$$\big\|\Pi_x^{(u)} - \Pi_x^{(u_1)}\big\|_{\mathrm{TV}} \le \frac{C_9}{cT} + \frac{C_9}{1+cr}, \qquad C_9 := 25. \tag{64}$$

将（64）代入（52），并使用 $C_1 = 1$，得到

$$\big\|\bar\nu_u^{(u_1)} - \bar\nu_{u_1}\big\|_{\mathrm{TV}} \le \frac{C_1 C_9}{u_1}\int_0^{u_1}\Big(\frac{1}{c(x)\,(u-x)} + \frac{1}{1 + c(x)(u_1 - x)}\Big)\,dx. \tag{65}$$

由于 $x \in (0,\ u_1]$ 蕴含 $u - x \ge u - u_1 = u_2$，因此

$$\frac{1}{u-x} \le \frac{1}{u_2} = \frac{s+t}{t}\cdot\frac{1}{u}. \tag{66}$$

定义 $C_{10} := \frac{s+t}{t}$，$C_{11} := C_1 C_9 C_{10}$. 那么（65）和（66）推出所述界（50），其中常数为 C，它来自（51）（注意，$C \ge C_{11}$ 由定义可知）。

剩下的工作是建立海灵格界和 $O(u)$ 估计。对于概率测度ρ，η有标准不等式 $1 - H(\rho,\ \eta) \le \|\rho - \eta\|_{\mathrm{TV}}$。因此，海灵格结论可由（50）推出。

最后，要说明（50）右侧对于 $O(u)$ 是 $c(x) = |\ln x|/x^2$，注意到 $|\ln x| \ge |\ln u_1|$，对于 $x \in (0,\ u_1]$，因此

$$\frac{1}{u_1}\int_0^{u_1}\frac{1}{c(x)\,u}\,dx = \frac{1}{u_1 u}\int_0^{u_1}\frac{x^2}{|\ln x|}\,dx \le \frac{1}{u_1 u}\cdot\frac{1}{|\ln u_1|}\int_0^{u_1} x^2\,dx = \frac{u_1^2}{3u|\ln u_1|} = O\Big(\frac{u}{|\ln u|}\Big),$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{u_1}\int_0^{u_1}\frac{1}{1+c(x)(u_1-x)}\,dx &\le \frac{1}{u_1}\int_0^{u_1}\frac{1}{1+c(u_1)(u_1-x)}\,dx = \frac{1}{u_1 c(u_1)}\ln\big(1 + c(u_1)u_1\big)\\ &= \frac{u_1}{|\ln u_1|}\ln\Big(1 + \frac{|\ln u_1|}{u_1}\Big) = O(u_1) = O(u),\end{aligned}$$

即 $\lambda \downarrow 0$（对固定的 s,t）。至此证明完成。 □

引理 4.32 的重要性在于，它将推论 4.24 中条件 (iv(b)) 的验证归结为对单块限制律的稳定性估计。这一步本质上依赖于模型，因为它依赖于布朗零点集的特定结构性质，尤其是最后一个零点处的布朗桥与游荡分解。结合引理4.25，即可对条件单块差异给出所需的 $O(u)$ 界。

Propo **命题 4.33**。布朗种子 $\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{BM},\ a}$ 满足推论 (iv(b)) 中的条件 *4.24* .

证明。固定 $s,\ t>0$。令 $u=\lambda(s+t)$ $u_1=\lambda s,\quad u_2=\lambda t$，并像之前那样记 $\nu_r:=\nu^{\mathrm{BM},\,a}_{\cdot,\,r}$。设$\widehat{\nu}^{10}_u$(分别为 $\widehat{\nu}^{01}_u$) 推论 4.24中的条件限制律，并记

$$\bar{\nu}_{u_1}:=\nu_{u_1}(\,\cdot\,|\,Z\neq\varnothing),\qquad \bar{\nu}_{u_2}:=\nu_{u_2}(\,\cdot\,|\,Z\neq\varnothing).$$

我们证明，当 $\lambda\downarrow 0$ 时，

$$1-H\big(\widehat{\nu}^{10}_u,\bar{\nu}_{u_1}\big)=O(u),\qquad 1-H\big(\widehat{\nu}^{01}_u,\bar{\nu}_{u_2}\big)=O(u),$$

也就是说，推论 4.24 的条件 (iv(b)) 对 $\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{BM},\,a}_{\cdot,\,\cdot}$ 成立。由于对于任意两个概率测度 $\rho,\ \eta$，$1-H(\rho,\ \eta)\ \le\ \|\rho-\eta\|_{\mathrm{TV}}$，，因此只需证明 $\|\widehat{\nu}^{10}_u-\bar{\nu}_{u_1}\|_{\mathrm{TV}}=O(u)$，右侧同理。

为此，考虑引理 4.32 中引入的比较分布（依赖于 u）：

$$\bar{\nu}^{(u_1)}_u:=\mathrm{Law}_{\nu_u}\big(R_{0,u_1}(Z)\ \big|\ R_{0,u_1}(Z)\neq\varnothing\big),\qquad \bar{\nu}^{(u_2)}_u:=\mathrm{Law}_{\nu_u}\big(R_{u_1,u}(Z)\ \big|\ R_{u_1,u}(Z)\neq\varnothing\big).$$

由引理 4.25，利用锚点均匀性以及 u^2 对 ν_u 的直径尾界，存在 $C^{\mathrm{stab}}_{s,\,t}<\infty$，使得对所有充分小的 λ,

$$\big\|\widehat{\nu}^{10}_u-\bar{\nu}^{(u_1)}_u\big\|_{\mathrm{TV}}\le C^{\mathrm{stab}}_{s,t}\,u,\qquad \big\|\widehat{\nu}^{01}_u-\bar{\nu}^{(u_2)}_u\big\|_{\mathrm{TV}}\le C^{\mathrm{stab}}_{s,t}\,u. \tag{67}$$

由引理 4.32,

$$\big\|\bar{\nu}^{(u_1)}_u-\bar{\nu}_{u_1}\big\|_{\mathrm{TV}}=O(u)\quad\text{and}\quad\big\|\bar{\nu}^{(u_2)}_u-\bar{\nu}_{u_2}\big\|_{\mathrm{TV}}=O(u). \tag{68}$$

由三角不等式，将 (67) 与 (68) 结合，

$$\big\|\widehat{\nu}^{10}_u-\bar{\nu}_{u_1}\big\|_{\mathrm{TV}}\ \le\ \big\|\widehat{\nu}^{10}_u-\bar{\nu}^{(u_1)}_u\big\|_{\mathrm{TV}}+\big\|\bar{\nu}^{(u_1)}_u-\bar{\nu}_{u_1}\big\|_{\mathrm{TV}}=O(u),$$

类似地，$\|\widehat{\nu}^{01}_u-\bar{\nu}_{u_2}\|_{\mathrm{TV}}=O(u)$。证明至此完成。 □

将前面的估计与抽象小种子判据以及无穷乘积构造结合起来，我们得到布朗运动示例中的主要结果：一个 III 型随机集乘积系统。

定理 4.34。固定 $a>0$。若 $\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{BM},\,a}_{\cdot,\,\infty}$是由种子 $\boldsymbol{\nu}^{\mathrm{BM},\,a}_{\cdot,\,\cdot}$ 按命题 *4.5* （取 $a_n=1/n$）构造的、定义在 $[0,1]\times\mathbb{N}$ 上的可测因子化族，则随机集系统 $\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{BM},\,a}_{\cdot,\,\infty}}$是 *III* 型。

注记 4.35。若从滤过空间 $(\Omega,\ \mathcal{F},\ (\mathcal{F}_t)\ \mathbb{P}_a)$ 上、以 $R_0=a$ 为初值的 Bessel $\mathrm{BES}^{(\delta)}$ 过程 $\{R_t\}_{t\ge0}$（其中 $\delta\in(0,\ 2)$）出发，同样的构造也适用；此时考虑随机闭集

$$Z^{\mathrm{Bes}}_t:=\{u\in[0,t]:R_u=0\}\in\mathscr{C}^{\{*\}}_t,\qquad \mu^{\mathrm{Bes}}_t:=\mathrm{Law}(Z^{\mathrm{Bes}}_t).$$

于是，种子 $\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{Bes}(\delta)}=\{\mu^{\mathrm{Bes}}_t\}_{t>0}$ 如上所述导出一个定义在 $[0,1]\times\mathbb{N}$上的可测因子化族，记作 $\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{Bes}(\delta)}_\infty$，其关联的随机集系统 $\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{Bes}(\delta)}_\infty}$为 III 型。

映射 $\delta\mapsto\mathbb{E}^{\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{Bes}(\delta)}_\infty}$是否在同构意义下为单射，是一个需要进一步分析的微妙问题。我们将这一问题留待今后研究。

References

[1] William Arveson, *Continuous analogues of Fock space*, 《美国数学会回忆录》80 (1989)，第 409 号，iv +66 pp. [2], *Noncommutative dynamics and E-semigroups*，施普林格数学专著，施普林格出版社，纽约，2003。[3] Andrei N. Borodin 和 Paavo Salminen, *Handbook of Brownian motion—facts and formulae*，第 2 版，《概率及其应用》，Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，2002。[4] Jacques Dixmier, *von Neumann algebras*，北荷兰数学文库，第 27 卷，北荷兰出版公司，阿姆斯特丹—纽约，1981。附有 E. C. Lance 的序言；由 F. J ellett 从法文第二版译出。[5] 角谷静夫, *On equivalence of infinite product measures*，《数学年刊》（第 2 辑）49 (1948)，214–224。[6] Volkmar Liebscher, *Random Sets and Invariants for (Type II) Continuous Tensor Product Systems of Hilbert Spaces* 2003 0306365 *Mem. Amer. Math. Soc.* **199** ( ),

可见 arXiv:math/ 。预印本。（出版版本：(2009)，第 930 号。）[7] Robert T. Powers, *An index theory for semigroups of *-endomorphisms of $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ and type II_1 factors*，《加拿大数学杂志》40 (1988)，第 1 期，86–114。

[8] Daniel Revuz 和 Marc Yor, *Continuous martingales and Brownian motion*, 第 3 版, 《数学科学基础原理》 [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 第 293 卷, 施普林格出版社, 柏林, 1999。[9] Boris Tsirelson 和 Anatoly Vershik, *Examples of nonlinear continuous tensor products of measure spaces and non-Fock factorizations* **10** 1998 1, 81 145 , 《数学物理评论》 (), 第 – 号。[10] Boris Tsirelson, *From slightly coloured noises to unitless product systems* (2000), 可见 arXiv:math/ 0006165。[11] , *Spectral densities describing off-white noises*, 《亨利·庞加莱研究所概率与统计年刊》 38 (2002), 第 6 期, 1059–1069（英文, 附英文和法文摘要）。谨以此文纪念 J. Bretagnolle、D. Dacunha-Castelle、I. Ibragimov。[12] , *From random sets to continuous tensor products: answers to three questions of W. Arveson* (2000), 可见 arXiv:math/0001070。[13] , *Non-isomorphic product systems*, 《量子动力学进展》（南哈德利, 马萨诸塞州, 2002）, 《当代数学》, 第 335 卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2003, 第 273–328 页。[14] , *Non~~classical~~ stochastic flows and continuous products*, 《概率调查》 1 (2004), 173–298。

University of Regina, Department of Mathematics and Statistics, Regina, SK, Canada
Email address: Remus.Floricel@uregina.ca