arXiv:2603.07840v1 [math.CT] 8 Mar 2026

原始正合范畴与内射巴拿赫模

JACK KELLY

摘要。我们发展了原始正合范畴中覆盖与包络的基础理论。作为应用，我们证明了任意巴拿赫环上的巴拿赫模范畴具有足够的内射对象。

目录

1. 引言 1 2. 原始正合与仿阿贝尔范畴 2 2.1. 定义 2 2.2. 隐晦公理 8 2.3. 余挠与包络理论 11 3. 相干性与可分解性 14 3.1. 可分解性 14 3.2. 弱初等原始正合范畴 16 3.3. 纯单态射 18 3.4. 相干性 20 3.5. 由相干性得出的可分解性 25 4. 半赋范、赋范与巴拿赫模 28 4.1. 范畴性质 30 4.2. 可缩放余挠理论 39 参考文献 40

1. 引言

设 K 为一个球完备巴拿赫域。经典的Hahn-Banach定理表明， K 是 K上巴拿赫空间的拟阿贝尔范畴Ban_K 中的一个内射对象。换言之，任意有界单态射 $K \to E$ （必然是到其像上的同胚）可分裂。事实上，可以利用这一事实证明 Ban_K 具有足够的内射对象，其内射余生成元由有界序列空间 l^∞ 给出。

本文证明，对于任意 Banach 环 R，Ban_R 中由 Banach R-模及其间的有界态射构成的拟阿贝尔范畴具有足够的内射对象。范畴 Ban_R 只有有限极限和余极限，因此不可能利用 Grothendieck阿贝尔范畴或 Grothendieck 型精确范畴 [29] 中的标准技术来证明足够的内射对象存在。不过，如果我们转而考虑范畴 $\mathrm{Ban}_R^{\leq 1}$ ，并将所有映射限制为范数至多为 1 的映射，那么该范畴就是局部可呈范畴。遗憾的是，我们

在这里失去了加法性。不过，该范畴仍与拟阿贝尔范畴十分接近——它是一个仿阿贝尔 基点范畴。特别是，按照 [10]的意义，它具有一个典范的原恰当结构。事实上，这个原恰当结构极其丰富——它满足隐晦公理的一个变体（参见 [8, 命题 2.16]），而点集范畴甚至都不满足这一变体。事实证明，满足某种隐晦公理变体、且某些滤过余极限为正合的原始正合范畴，具有一套稳健的覆盖与包络理论。本文沿着 Eklof-Trlifaj 及其后续发展的思路来构建这套理论：(
[5], [11], [12], [13], [14], [23], [27], [29])。我们以此证明，一大类原始正合范畴中存在足够的内射对象。

最后，我们将说明如何利用 $\mathsf{Ban}_R^{\leqslant 1}$ 中的覆盖／包络理论，推导出 Ban_R 中的一些覆盖／包络理论，从而证明范畴 Ban_R 有足够的内射对象。总之，我们证明如下结果。

定理 1.1 (定理 4.22)。 设 R 为一个 *Banach* 环。那么，*Banach* R-模的拟阿贝尔范畴 Ban_R 有足够的内射对象。

本文结构如下。第 2 节首先回顾原始正合范畴和仿阿贝尔范畴的定义，并确立它们的一些基本性质。我们引入隐晦公理，并考察原始正合范畴中生成元的各种概念。最后，给出原始正合范畴中余挠对、覆盖和包络的定义。第 3 节（另见[26]）将 [27] 和 [29] 中的可分解性概念推广到原始正合范畴，并说明可分解性如何蕴含某些覆盖和包络的存在。在给出原始正合范畴中余极限的各种正合性条件，并考察局部可呈原始正合范畴中的纯单态射之后，便进入本文的技术核心。具体而言，我们将 [25], 中引入的正合范畴相干性概念推广到原始正合范畴。本文在此处的主要应用，是给出局部可呈正合范畴所满足的条件，使得其容许单态射类由一个集合生成，且该集合生成的类为弱饱和类；由此可以推导出可分解性。最后，在第 4 节中，我们证明各种半赋范、赋范和巴拿赫模范畴满足第 3 节各项结论所要求的技术假设，从而推导出足够内射对象的存在性。

2. 原始正合范畴与仿阿贝尔范畴

原始正合范畴由 [10], 引入，是 Quillen 精确范畴的非加性版本。

2.1. 定义。 这里我们回顾原始正合范畴与仿阿贝尔范畴的定义及其基本性质。我们遵循 [22] 中的阐述。

设 C 是一个基点范畴。对于 $f : X \to Y$，我们通过以下推出图定义 C 中态射的余核 $\mathsf{Coker}(f)$，前提是该余核存在：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ 0 & \longrightarrow & \mathsf{Coker}(f), \end{array}$$

以及通过以下拉回图得到的 $\mathsf{Ker}(f)$，前提是它存在，

$$\begin{array}{ccc} \text{核}(f) & \xrightarrow{i} & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ 0 & \longrightarrow & Y. \end{array}$$

若一对 $(f,\ g) = (f : X \to Y,\ g : Y \to Z)$ 满足 f 同构于 $\mathrm{Ker}(g) \to Y$ 且 g 同构于 $Y \to \mathrm{Coker}(f)$，则称其为严格的 。我们将此类对中出现的映射 g 称为严格满态射，将此类对中出现的映射 f 称为严格单态射。我们有以下有用的结果（例如，参见引理 1.2] 之后的 [22, ）。

命题 2.1. 设$\mathcal{C}$ 是具有所有核与余核的基点范畴。设$f : X \to Y$是$\mathcal{C}$中的一个态射。

(1)下列条件等价。*(a)* 态射 f 是严格满态射。*(b)* 态射 f 同构于 $X \to$ 余核(核$(f) \to X$)*(c)* 存在态射 $g : K \to X$，使得 $f \circ g = 0$，且 f 同构于 $X \to$余核(g)。

(2)以下条件等价

(a) 态射 f 是严格单态射。*(b)* 态射 f 同构于核$(Y \to$ 余核$(f)) \to Y$。

(c) 存在一个态射 $g : Y \to Z$，使得 $g \circ f = 0$，且 f 同构于核$(g) \to Y$。

给定基点范畴 C 中严格对的一个类 Q，记 $\mathrm{M}_{\mathcal{Q}} = \{f : (f, g) \in \mathrm{Q}\}$ 为可容许单态射（相对于 Q）的类，记 $\mathrm{E}_{\mathcal{Q}} = \{g : (f, g) \in \mathrm{Q}\}$ 为容许满态射（相对于 Q）的类。若 $(f : X \to Y, g : Y \to Z) \in \mathrm{Q}$，我们也可以等价地说

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

这是相对于 Q 的短正合列。更一般地，我们把基点范畴 C 中的一个序列定义为一个图表

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

使得 $g \bigcirc f = 0$。

定义 2.2 ([9] 定义 2.4.2)。 原正合范畴是一对 (C，Q)，其中

(1) C 是一个基点范畴，且 (2)

Q 是严格对的一个类

使得

(1) 对所有 $X \in \mathrm{C}$，$\mathrm{Id}_X \in \mathrm{M}_{\mathcal{Q}} \cap \mathrm{E}_{\mathcal{Q}}$；(2) $\mathrm{M}_{\mathcal{Q}}$ 和 $\mathrm{E}_{\mathcal{Q}}$ 在复合下闭；(3) $\mathrm{E}_{\mathcal{Q}}$ 在沿 $\mathrm{M}_{\mathcal{Q}}$的拉回下闭；(4) $\mathrm{M}_{\mathcal{Q}}$ 在沿 $\mathrm{E}_{\mathcal{Q}}$的推出下闭。

若一个原正合范畴 (C,Q) 满足 $\mathrm{E}_{\mathcal{Q}}$ 在沿任意态射作拉回后仍然闭，则称其为右全原精确；若 $\mathrm{M}_{\mathcal{Q}}$ 在沿任意态射作推出后仍然闭，则称其为左全原精确；若它既左全原精确又右全原精确，则称其为全原精确。

Quillen正合范畴恰好就是加性全原始正合范畴。

在基点范畴中，我们总是记

$$A \vee B$$

为两个对象的余积，并记

$$A \times B$$

为它们的积。

Pro位置 2.3. (1) 设 $(\mathcal{C}, \mathcal{Q})$ 是一个右全原始正合范畴。那么对于任意两个对象 A 和 B，序列

$$0 \to A \to A \times B \to B \to 0$$

是正合的。

(2) 设$(\mathcal{C}, \mathcal{Q})$ 是一个左全原精确范畴。那么对任意两个对象 A和 B，序列

$$0 \to A \to A \vee B \to B \to 0$$

是正合的。

证明。 考虑正合序列

$$0 \to A \to A \to 0 \to 0.$$

沿映射 $B \to 0$ 对映射 $A \to 0$ 作拉回，即得结论 (1)。结论 (2) 是对偶的。

□

命题 2.4。 设$\mathcal{C}$ 是一个基点范畴，并设 $f : X \to Z$、 $g : Y \to Z$ 是态射，使得核(f)、核(g)以及拉回图

$$\begin{array}{ccc} X \times_Z Y & \xrightarrow{f'} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle g'} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ X & \xrightarrow{f} & Z. \end{array}$$

均存在。则自然映射核$(f\prime) \to$核(f)是一个同构。推出和余核也有显然的对偶结论。

证明。利用米田引理，我们可以假设 C 是带基点集合的范畴。那么 $X \times_Z Y = \{(x, y) : f(x) = g(y)\}$。映射 $f' : X \times_Z Y \to Y$是到 Y的投影。那么 $f'(x, y) = 0_Y$当且仅当 $y = 0_Y$。因此必有 $f(x) = g(y) = g(0_Y) = 0_Z$，所以 $x \in \mathrm{Ker}(f)$。反过来，任何形如 $(x, 0_Y)$ 且满足 $x \in \mathrm{Ker}(f)$ 的元素显然属于 $\mathrm{Ker}(f')$。因此 $\mathrm{Ker}(f') = \{(x, 0_Y) : x \in \mathrm{Ker}(f)\}$。通过投影到 X 因子，这显然与 $\mathrm{Ker}(f)$ 构成双射。□

我们将用到以下结果。

引理 2.5. 设 $(\mathcal{C}, \mathcal{Q})$ 是一个原正合范畴。设 $f : B' \to B$ 是一个容许满态射，$i : A \to B$ 是一个容许单态射。令 $A' =$

核($B' \to$余核(i))。则下图是双笛卡尔的，i' 是一个容许单态射，且 f' 是一个容许满态射：

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{f'} & A \\ \downarrow{\scriptstyle i'} & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ B' & \xrightarrow{f} & B. \end{array}$$

证明。这实际上是对如下事实的重新表述：可容许单态射沿可容许满态射的拉回方块是双笛卡尔的。

注意，A' 存在，因为作为可容许满态射 $B' \to B$和 $B \to$Coker(i) 的复合，$B' \to$Coker(i) 是一个可容许满态射。考虑拉回方块

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f''} & A \\ \downarrow{\scriptstyle i''} & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ B' & \xrightarrow{f} & B. \end{array}$$

那么 i'' 是一个可容许单态射，而 f'' 是一个可容许满态射。此外，由 [22, 注 1.7 (3)], , 该方块是双笛卡尔的。令 $C =$Coker(i'')。由命题 2.4，我们得到一个列正合的交换图：

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f''} & A \\ \downarrow{\scriptstyle i''} & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ B' & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & = & C. \end{array}$$

因此，$C \cong$Coker(i)，并且我们有 $P \cong$ Ker($B' \to C$) $\cong$ Ker($B' \to$ Coker(i))。 □

命题 2.6。设($\mathcal{C}$,$\mathcal{Q}$) 是一个原正合范畴，且 $f : X \to Y$ 和$g : Y \to Z$ 是容许单态射。那么我们有一个正合序列

$$0 \to \mathrm{Coker}(f) \to \mathrm{Coker}(g \circ f) \to \mathrm{Coker}(g) \to 0.$$

证明。考虑下图，其中所有方块以及整个矩形都是推出

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{余核}(f) & \longrightarrow & \text{余核}(g \bigcirc\ f)。 \end{array}$$

特别地，余核(f) $\to$ 余核($g \bigcirc\ f$) 是一个容许单态射，且此映射的余核同构于余核(g)。□

在加性世界中，若所有核-余核对构成的类确定了范畴 $\mathcal{E}$ 上的 Quillen正合结构，则称拟阿贝尔 。非加性世界中的对应概念是仿阿贝尔范畴。

定义 2.7. 具有所有核和余核的基点范畴 C，若所有严格对构成的类确定了一种原型正合结构，则称其为仿阿贝尔 。

当 C 是仿阿贝尔范畴时，除非另有说明，我们均假设它配备典范仿阿贝尔原正合结构。

根据 [22, 定理 1.10]，，带核和余核的基点范畴 C 是仿阿贝尔范畴，当且仅当严格满态射在沿严格单态射作拉回时封闭，且严格单态射在沿严格满态射作推出时封闭。

定义 2.8. 若仿阿贝尔范畴 C 的仿阿贝尔原正合结构是（左/右）完全的，则称 C 为（左/右）完全仿阿贝尔范畴。

特别地，加性完全仿阿贝尔范畴恰好就是拟阿贝尔范畴。

例 2.9. 令 Set_* 表示带基点集合范畴。单态射就是集合之间保基点的单射。所有单态射都是严格的。严格满态射 $f : X \to Y$ 恰好是这样一种满射：将其限制在 $X \setminus f^{-1}(0_Y)$ 上时为单射。范畴 Set_* 是仿阿贝尔范畴 [22, 第 2 节1]。显然它是左完全仿阿贝尔的，但我们声称它不是完全仿阿贝尔的。令 $f : X \to Y$ 为严格满态射，$g : Z \to Y$ 为任意映射。我们有 $X \times_Y Z$ 是 (X, Z) 的子集，由满足 $f(x) = g(z)$ 的那些有序对 (x, z) 组成。映射 $f' : X \times_Y Z \to Z$ 是投影。假设存在 $z \neq 0$ 使得 $g(z) = 0_Y$。进一步假设存在互不相同的 $x_1 \neq x_2 \in X$，满足 $f(x_1) = f(x_2) = 0_Y$。那么 $(x_1, z) \neq (x_2, z)$，它们都不属于 $f'^{-1}(0_Z)$，但在 f' 下都映到 z。因此 f' 不是严格满态射。举一个具体例子，取 $X = \{0_X, x_1, x_2\}$、$Z = \{0_Z, z\}$，以及 $Y = \{0_Y\}$。f 和 g 唯一可选的映射是将所有元素都映到零。于是实际上 f 和 g 都是严格满态射，但 f' 不是。如果要求 g 是单射，这些问题便会消失。

2.1.1. 一些有用的事实。 这里汇集了一些关于在原正合范畴中判定同构的有用事实。

命题 2.10。 设 $f : X \to Y$ 是原正合范畴 $(\mathcal{C}, \mathcal{Q})$ 中的一个态射，它既是可容许单态射，也是满态射。那么它是一个同构。

证明。 作为一个可容许单态射，f 尤其是一个正则单态射。由于它也是满态射，根据 [15, 命题 16.16]，它是一个同构。□

命题 2.11。 设 $f : X \to Y$ 是原正合范畴 $(\mathcal{C}, \mathcal{Q})$ 中的一个态射。若 f 是一个容许满态射，且 $\text{核}(f) \cong 0$，则 f 是一个同构。

证明。 由于 f 是一个容许满态射，我们有一个正合序列

$$0 \to 0 \to X \to Y \to 0.$$

因此 $Y \cong \text{余核}(0 \to X) \cong X$。

□

2.1.2. 正合函子。 这里给出原正合范畴之间正合函子的一些定义。

定义 2.12。 设 (C,Q) 是一个原正合范畴。一个序列

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

其中 Ker(g)、余核(g) 和 Im(g) 均存在，则称其为

(1) 左半正合（相对于 Q），若 (a) 映射 $g : Y \to Z$ 是有效满态射，(b) 映射 f 是容许单态射，(c) 且 f 同构于典范映射 Ker(g) $\to Y$。

(2) 右半正合（相对于 Q），若 (a) 映射 $f : X \to Y$ 是有效单态射，(b) g 是容许满态射，(c) 且 g 同构于典范映射 $Y \to$ 余核(f)。

注意，一个序列正合，当且仅当它既左半正合又右半正合。

定义 2.13. 设 (C,Q)、(D, R) 为原正合范畴。一个函子

$$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$$

称为

(1) 左半正合（相对于 Q 与 R），如果它将 (C,Q) 中的正合列映为 (D,R) 中的左半正合序列；(2) 右半正合（相对于 Q 与 R），如果它将 (C,Q) 中的正合列映为 (D,R) 中的右半正合序列；(3) 正合（相对于 Q 与 R），如果它将 (C,Q) 中的正合列映为 (D,R) 中的正合列。

注意， F 是正合的，当且仅当它既是左半正合的，又是右半正合的。

2.1.3. 正合子范畴。

定义 2.14. 设 (D,R) 为一个原正合范畴。一个原正合子范畴，即 (D, R) 的原正合子范畴，是配备了一个正合函子的原正合范畴 (C,Q)

$$i : (\mathcal{C}, \mathcal{Q}) \to (\mathcal{D}, \mathcal{R})$$

其中 i是一个子范畴的包含映射。

定义 2.15. A子正合范畴 是一个配备了正合函子的原正合子范畴

$$i : (\mathcal{C}, \mathcal{Q}) \to (\mathcal{D}, \mathcal{R})$$

其中 i 是一个子范畴的包含映射，且 (D， R) 是一个正合范畴。

例 2.16. 即使在全原精确的子正合范畴中，正合范畴理论中的各种有用引理也未必成立。令

$$i : (\mathcal{C}, \mathcal{Q}) \to (\mathcal{D}, \mathcal{R})$$

是子正合的，并设 A, B 是 C 的对象。考虑从余积到积的自然映射 $c_{A,B} : A \vee B \to A \times B$ 。此映射满足性质：$F(c_{A,B})$ 是 $\mathcal{E}$ 中的同构。特别地，它在 C 中既是单态射也是满态射。除非 C 是加性子范畴，否则它在 C 中不是同构。于是我们得到如下正合序列的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A \vee B & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A \times B & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

其中间的态射不是同构。特别地，熟悉的 3×3 引理并不成立。

2.2. **隐晦公理**。 我们将需要隐晦公理的一个版本（[8,命题 2.16]）；对于原正合范畴，该版本通常需要另行施加。它并不能由这些公理推出——例如，它甚至对带基点集合也不成立。

定义 2.17. 一个原正合范畴 (C,Q) 被称为

(1) 满足左模糊公理，如果 每当一个态射 i 有余核，且存在一个态射 j 使得 $j \bigcirc i$ 是容许单态射，则 i 是容许单态射；(2) 满足右模糊公理，如果 每当一个态射 e 有核，且存在一个态射 j 使得 $e \bigcirc j$ 是容许满态射，则 e 是容许满态射；(3)满足隐晦公理，如果 它同时满足左模糊公理和右模糊公理。

定义 2.18. 若原正合范畴 (C,Q) 满足

(1) 强左模糊公理：只要 $j \bigcirc i$ 是容许单态射，则 i 是容许单态射；(2) 强右模糊公理：只要 $e \bigcirc j$ 是容许满态射，则 e 是容许满态射；(3) 强模糊公理：若其同时满足强左模糊公理和强右模糊公理。

注意，若 C 有限余完备（分别地，有限完备），则 (C,Q) 满足强左（分别地，强右）模糊公理，当且仅当其满足左（分别地，右）模糊公理。

双侧隐晦公理似乎很少得到满足，即使在完备且余完备的情形下也是如此。正如我们稍后将看到的，它在我们感兴趣的例子 $\mathsf{Ban}_R^{\leq 1}$ 中成立。我们的印象是，这或许与 $\mathsf{Ban}_R^{\leq 1}$ 非常接近加性这一事实有关。

例 2.19. 考虑带基点集合的仿阿贝尔范畴 Set_*。注意，该范畴是完备且余完备的。由于严格单态射恰好是单射，仿阿贝尔范畴 Set_* 显然满足左模糊公理。另一方面，带基点集合之间的态射 $h : A \to B$ 是严格满态射，当且仅当它是满射，且在 $A \setminus h^{-1}(\{0_B\})$ 之外是单射。设 $f : X \to Y$ 和 $g : Y \to Z$ 为态射，且 $g \bigcirc f$ 是严格满态射。那么 $g \bigcirc f$ 是满射，并且在 $(g \bigcirc f)^{-1}(\{0_Z\})$ 之外是单射。现在，g 是满射，但不一定在 $g^{-1}(\{0_Z\})$ 之外是单射。事实上，考虑一个只有一个非零元素 x 的带基点集合 X（因此总共有两个元素），并设 $X = Z$。设 $X \subset Y$ 满足 Y 严格大于 X。令 f 为包含映射，$g : Y \to X$ 为将所有非零元素映射到 x 的映射。那么 $g \bigcirc f$ 是

恒等映射，但 g 不是严格满态射。因此，$\mathbf{Set}_*$ 不满足右模糊公理。

2.2.1. 分裂态射。 在正合范畴理论中，总存在一个由所有分裂正合序列构成的“初始”正合结构。在非加性情形下，情况会复杂得多。

定义 2.20。 设 C 为一个范畴。若存在态射 $j : Y \to X$ 使得 $j \bigcirc\ i = \mathrm{Id}_X$，则称态射 $i : X \to Y$ 为分裂单态射 。对偶地，态射 j 称为分裂满态射。

备注 2.21。 设 (C,Q) 是一个原正合范畴。与加性情形不同，分裂单态射/分裂满态射并非必然是可容许的。不过请注意，若 (C,Q) 满足强左（分别地，右）隐晦公理，则分裂单态射（分别地，分裂满态射）是可容许的。

例 2.22. 再来考察 $\mathbf{Set}_*$ 这个例子。显然，分裂单态射都是严格单态射。另一方面，任意基点满态射都是分裂的（假设选择公理成立）。然而，基点满态射不一定是严格的。

2.2.2. 满态射生成元与可容许生成元。 在原始正合范畴中，拥有各种生成元概念将十分重要。正如我们将看到的，隐晦公理在这一讨论中会发挥作用。

定义 2.23. 设 C 是一个范畴。若 C 的对象的一个集合 G 满足：对于任意对象 $C \in$ C，都存在 G 的一个子集 $\{G_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subset$ G 以及一个满态射

$$\coprod_{i\in\mathcal{I}} G_i \to C.$$

引理 2.24. 设范畴 $\mathcal{C}$ 有一个满态射生成类 $\mathcal{G}$。那么，若对于所有 $G \in \mathcal{G}$，$\mathrm{Hom}(G, X) \to \mathrm{Hom}(G, Y)$ 都是集合的满射，则映射 $X \to Y$ 是 $\mathcal{C}$ 中的满态射。

证明。 假设对于所有$G \in$ G，Hom$(G, X) \to$Hom(G, Y)都是集合的满射。取一个满态射 $\coprod_{i\in\mathcal{I}} G_i \to Y$，其中所有 $G_i \in$ G。于是它必然经由一个映射 $\coprod G \to X$分解。因此 $X \to Y$ 是满态射。□

命题 2.25。 假设范畴$\mathcal{C}$ 具有一个满态射生成集$\mathcal{G}$。将$\mathcal{G}$ 视为$\mathcal{C}$的全子范畴。那么，该函子

$$F : \mathcal{C} \to \mathrm{Set}^{\mathcal{G}^{op}}$$

$$C \mapsto \mathrm{Hom}(-, C)$$

是忠实的。

证明。设 $f, g : X \to Y$是映射，使得对于所有 $G \in$G，映射Hom(G, f) :Hom$(G, X) \to$ Hom(G, Y)与Hom(G, g) :Hom$(G, X) \to$Hom(G, Y)相同。取一个满态射 $\pi : \coprod_{i\in\mathcal{I}} G_i \to X$。令 π_i 表示 π 在 G_i上的限制。由于Hom(G_i, f) =Hom(G_i, g)，我们得到，对于所有 $i \in$I， $f \bigcirc\ \pi_i = g \bigcirc\ \pi_i$。因此 $f \bigcirc\ \pi = g \bigcirc\ \pi$。但 π 是满态射，所以 $f = g$。□

若满足强右模糊公理，我们就能得到一种合理的可容许生成元概念。

定义 2.26。 设 (C,Q) 为一个原正合范畴。若对象 C 的一个集合 G 满足：对任意对象 $C \in \mathsf{C}$，均存在一个子集 $\{G_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subset \mathsf{G}$ 以及一个可容许满态射

$$\coprod_{i\in\mathcal{I}} G_i \to C.$$

我们称对象 G 为可容许生成元，如果 $\{G\}$ 是一个可容许生成类。

引理 2.27. 设原正合范畴$(\mathcal{C},\mathcal{Q})$ 具有可容许生成类$\mathcal{G}$，并满足强右模糊公理。若对于所有 $G \in \mathcal{G}$，$\mathrm{Hom}(G,X) \to \mathrm{Hom}(G,Y)$都是带基点集合之间的满态射，则 $X \to Y$是一个可容许满态射。

证明。 设对于所有 $G \in \mathsf{G}$，$\mathrm{Hom}(G,X) \to \mathrm{Hom}(G,Y)$ 都是带基点集合之间的满态射。取一个可容许满态射 $\pi : \coprod_{i\in\mathcal{I}} G_i \to Y$。于是映射 π 必定可经由映射 $\coprod_{i\in\mathcal{I}} G_i \to X$分解。根据强右模糊公理，映射 $X \to Y$ 是一个可容许满态射。 □

例 2.28. 同样，Set_* 的例子有助于说明，引理 2.27 中的强右模糊公理确实不可或缺。带基点集合 G 只有一个非零元素，它是一个可容许生成元，因此也是一个满态生成元。对于任意带基点集合 X，我们有 $\mathrm{Hom}(G,X) = X$ 作为带基点集合。特别地，若 $\mathrm{Hom}(G,X) \to \mathrm{Hom}(G,Y)$ 是一个满态射，并不意味着 $X \to Y$是一个严格满态射。

命题 2.29. 设$(\mathcal{C},\mathcal{Q})$ 满足强右模糊公理，具有可容许生成元集$\mathcal{G}$，并且允许取$\mathcal{G}$中对象的任意余积。对于$\mathcal{C}$中的任意对象 S，求值映射

$$e : \coprod_{G\in\mathcal{G}} \coprod_{\mathrm{Hom}(G,S)} G \to S$$

是一个容许满态射。

证明。 存在一个集合 I 和一个容许满态射 $\phi : \coprod_{i\in\mathcal{I}} G_i \to S$，其中每个 $G_i \in$ 都属于 G。令 $\eta_i : G_i \to \coprod_{i\in\mathcal{I}} G_i$ 表示包含映射。那么 $\phi \bigcirc \eta_i \in \mathrm{Hom}(G_i,S)$。我们得到一个态射

$$\eta_{\phi_i} : G_i \to \coprod_{\mathrm{Hom}(G_i,S)} G_i$$

将左边的 G_i 与右边由 $\phi\bigcirc\ \eta_i$ 索引的 G_i 的副本对应起来。对所有 I 取余积，得到一个态射$\eta_\phi : \coprod_{i\in\mathcal{I}} G_i \to \coprod_{i\in\mathcal{I}} \coprod_{\mathrm{Hom}(G_i,S)} G_i$。通过包含映射，我们得到一个复合态射$\eta_\phi : \coprod_{i\in\mathcal{I}} G_i \to \coprod_{G\in\mathcal{G}} \coprod_{\mathrm{Hom}(G,S)} G$。我们有 $e \bigcirc \eta_\phi = \phi$ 是一个容许满态射。因此 e 是一个容许满态射。□

类似地，我们有以下（标准）结果。

命题 2.30。 设$\mathcal{C}$ 是一个具有满态射生成集$\mathcal{G}$的范畴，并且存在$\mathcal{G}$中对象的任意余积。对于 E 中的任意对象 S，求值映射

$$e : \coprod_{G\in\mathcal{G}} \coprod_{\mathrm{Hom}(G,S)} G \to S$$

是一个满态射。

尽管对于原正合范畴而言，可容许生成元的概念似乎更自然，但正如我们将看到的，在许多情况下，满射生成元就足够了。在我们的一个主要应用中，我们希望判断原正合范畴 (C，Q) 中的态射 $f : X \to Y$ 是否为同构。出于其他原因，我们已知它是一个容许单态射，并且对于某个满射生成元 G，Hom(G，X) → Hom(G，Y) 是一个满态射。特别地，f 也是一个满态射。于是，根据命题 2.10，我们可以得出 f 是一个同构。

然而，拥有一个可容许生成元对于建立局部可表现性将是有用的。回想一下，子范畴 G ⊂C 是强生成元（[24, 截面 3]），当且仅当函子

$$F : \mathcal{C} \to \mathrm{Set}^{\mathcal{G}^{op}}, C \mapsto \mathrm{Hom}(-, C)$$

是忠实且保守的。

命题 2.31。设（$\mathcal{C}$，$\mathcal{Q}$）为满足强右模糊公理且具有可容许生成元集$\mathcal{G}$的原正合范畴。于是，将其视为全子范畴时，$\mathcal{G}$ ⊂$\mathcal{C}$ 是强生成元。

证明。由命题 2.25，函子 F 是忠实的。设 $f : X \to Y$ 使得对所有 $G \in$G，Hom(G, f) :Hom(G, X) →Hom(G, Y) 为同构。由引理 2.27，f 是容许满态射。现在考虑核(f)。对所有 $G \in$G，我们有 Hom(G,核(f)) ≅核(Hom(G, f)) ≅ 0。由忠实性，这意味着复合核(f) → 0 →核(f)是恒等映射。复合 0 →核(f) → 0 总是恒等映射。因此核(f) ≅ 0。从而由命题 2.11，f 是同构。□

由 [1, 定理 1.20],我们立即得到如下结论。

定理 2.32。设 ($\mathcal{C}$,$\mathcal{Q}$) 是一个满足强右模糊公理且余完备的原正合范畴。假设它具有一个可容许生成元集 $\mathcal{G}$，并且存在一个基数 λ，使得对于每个 $G \in \mathcal{G}$，G 是 λ-可表示的。那么$\mathcal{C}$ 作为一个范畴是局部 λ-可表示的。

2.2.3. 单子代数上的原正合结构。这里我们说明何时可以将原正合结构提升到单子上的代数范畴。

命题 2.33。设 ($\mathcal{C}$,$\mathcal{Q}$) 是一个原正合范畴，且 $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 是一个保持推出的单子。那么在 Alg$_T$($\mathcal{C}$)上存在一个原正合结构 $\mathcal{Q}_T$，使得一个序列

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$

当且仅当为短正合时

$$0 \to |X| \to |Y| \to |Z| \to 0$$

在($\mathcal{C}$,$\mathcal{Q}$)中为短正合，其中 $|-| : \mathrm{Alg}_T(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ 表示遗忘函子。

证明。这与 [21, 命题 2.73]中的论证相同。该断言由以下一般事实推出：如果 T 是任意范畴 C 上保持推出的单子，那么遗忘函子 Alg$_T$(C) → C 创建极限和推出，并反映同构。关于此事实的证明，请参见 [6] 命题 4.3.1 和命题 4.3.2。□

2.3. **余挠与包络理论**。本小节将定义原始正合范畴中的余挠对，更重要的是，我们将引入余挠与包络理论。

2.3.1. 投射对象与内射对象。 我们先考虑余挠对这一最简单的情形；这一概念将在后文完整定义。

定义 2.34. 原正合范畴 (C,Q) 的对象 P 称为投射 的，若任意交换图

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ P & \longrightarrow & Y \end{array}$$

其中 $f \in \mathbf{E}\mathcal{Q}$ 存在提升，也就是说，存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow{\scriptstyle f} \\ P & \longrightarrow & Y \end{array}$$

我们用 Proj(C,Q) 表示投射对象的类。以下内容基本上就是投射对象的定义。

推论 2.35. 对象 P 是投射的，当且仅当函子

$$\mathrm{Hom}(P, -) : \mathcal{C} \to \mathrm{Set}_*$$

是左半正合的。

证明。 这直接源于 Set 中所有满态射都是有效的这一事实，因此 $\mathbf{Set}_*$ 中的满态射也都是有效的。□

推论 2.36。 假设 $(\mathcal{C},\mathcal{Q})$ 有一个可容许生成元 P，它是投射的，并且满足强右模糊公理。那么，态射 $X \to Y$ 是容许满态射，当且仅当该映射

$$\mathrm{Hom}(P, X) \to \mathrm{Hom}(P, Y)$$

是带基点集合之间的满态射。

当然，我们还有内射对象的对偶概念。

定义 2.37。 若对象 I 属于 (C,Q)，则称其为内射 ，如果任意交换图

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & I \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

其中 $g \in \mathbf{M}\mathcal{Q}$，都存在一个提升。

定义 2.38. (1) 若对 C 中的每个对象 C，都存在一个投射对象 P 以及 E 中的一个态射$P \to C \in \mathcal{Q}$，则称原正合范畴 (C,Q) 有足够的投射对象。 (2) 若对 C 中的每个对象 C，都存在一个内射对象 I 以及 M 中的一个态射 $C \to I \in \mathcal{Q}$，则称原正合范畴 (C,Q) 有足够的内射对象。

2.3.2. 一般余挠理论。 设 (C,Q) 为一个原正合范畴。记$\mathbf{AdMon}_{\mathcal{F}}$ 为余核属于 F 的可容许单态射类，记$\mathbf{AdEpi}_{\mathcal{F}}$ 为核属于 F 的可容许满态射类。我们用 $\mathrm{F}^{\perp}$ 表示满足以下形式的任意图表的对象类 K

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & K \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

具有 $g \in \mathbf{AdMon}_{\mathcal{F}}$ 的态射可提升，并且由 ${}^{\perp}\mathrm{F}$，满足任意图表均

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ K & \longrightarrow & Y \end{array}$$

具有 $f \in \mathbf{AdEpi}_{\mathcal{F}}$ 的态射可提升。对于态射类 S，我们用 $\mathrm{S}^{\boxslash}$ 表示具有相对于 S 的右提升性质的态射类。

定义 2.39. 设 (C,Q) 是一个原正合范畴。C 上的一个余挠对 是对象类的一个对 $(\mathfrak{L},\mathfrak{R})$，满足

(1) $\mathfrak{L} = {}^{\perp}\mathfrak{R}$、

(2) 和 $\mathfrak{R} = \mathfrak{L}^{\perp}$。

以下结论由定义立即得出。

命题 2.40. 这两对 $(\mathrm{Proj}(\mathcal{C},\mathcal{Q}),\mathrm{Ob}(\mathcal{C}))$ 和 $(\mathrm{Ob}(\mathcal{C}),\mathrm{Inj}(\mathcal{C},\mathcal{Q}))$ 是余扭转对。

在非加性原精确范畴中，除了投射和内射对象构成的这类对之外，这样的对似乎相当罕见。不过，我们确有如下结论。

引理 2.41. 设$\mathcal{F}$ 是一个满足强右模糊公理的原精确范畴中的对象类。若$\mathcal{F}$ 包含一个可容许生成类，则$\mathbf{AdMon}^{\boxslash}{}_{\mathcal{F}} \subset \mathbf{AdEpi}_{\mathcal{F}^{\perp}}$。

证明。 假设 $g : X \to Y$ 对$\mathbf{AdMon}_{\mathcal{F}}$中的所有映射都具有右提升性质。由于 F 包含一个可容许生成类，根据引理 2.27， g 是一个容许满态射。事实上，对映射 $0 \to G$在 $G \in \mathrm{G}$ 上具有提升性质，恰恰意味着 $\mathrm{Hom}(G, f)$ 是一个满态射。现在令 $K = \mathrm{Ker}(g)$。

类 $\mathbf{AdMon}^{\boxslash}{}_{\mathcal{F}}$在拉回下封闭，因此 $K \to 0$属于 $\mathbf{AdMon}^{\boxslash}{}_{\mathcal{F}}$，正如所需。□

同样，由于范畴 Set_* 中的有效满同态恰好就是满射，以下结论显然。

命题 2.42. 设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{C}$中的一个对象类。设 T 是 $\mathcal{C}$中的一个对象。以下条件等价。

(1)对象 T 属于 $\mathcal{F}^{\perp}$。

(2) 对于任意正合序列

$$0 \to X \to Y \to F \to 0$$

对于 $F \in \mathcal{F}$，序列

$$0 \to \mathrm{Hom}(F,T) \to \mathrm{Hom}(Y,T) \to \mathrm{Hom}(X,T) \to 0$$

是右半正合的。

推论 2.43。设

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$

是正合序列，其中 $Z \in \mathcal{F}$ 且 $X \in \mathcal{F}^{\perp}$。则映射 $X \to Y$ 是分裂的。

定义 2.44。 设 A 是基点范畴 C 中的对象类。

(1) 对象 E 的 A-预覆盖 是一个映射 $A \to E$，满足 $A \in$A，且对任意 $A' \in$A，Hom(A'，A) →Hom(A'，E) 是满态射。(2) 对象 E 的 A-预包络 是一个映射 $E \to A$，满足 $A \in$A，且对所有 $A' \in$A，Hom(A，A') →Hom(E，A') 是满态射。

现在设 (C，Q) 是一个原正合范畴。

(1) A-特殊预覆盖是一个容许满态射 $\pi : A \to E$，满足 $A \in$ A，且 Ker(π) ∈A$^{\perp}$。
(2) A-特殊预包络是一个容许单态射 $i : E \to A$，满足 $A \in$ A，且 Coker(i) $\in {}^{\perp}$ A。

.

我们将在下一节讨论覆盖和包络的存在性。

3. 相干性与可分解性

本节将介绍建立覆盖和包络存在性所需的工具。

3.1. **可分解性**。 本小节将推广 [27] 和 [29]率先提出的正合范畴可分解性概念。可分解性本质上是一项最低限度的条件，使我们能够运用小对象论证。

3.1.1. 定义。 对于余挠理论，我们需要对范畴中的对象有一定的掌控。更确切地说，我们需要所有对象都能表示为某个对象集的“并”。

定义 3.1。 设 C 为一个范畴，T 为 C 中在超限复合和推出下闭的态射类。

(1) 若存在由态射构成的一个集合˜T ⊂T，使得 T 中的任意态射都能写成由 T 中映射的推出所构成的超限复合，则称 C 中的态射类 T 自身可分解˜。˜(2) 若可选择自身可呈示可分解的态射类 T˜，使得 T 中每个映射的定义域对象都相对于 T 是小的，则称 T 自身可呈示可分解。

注意，如果 C 是一个可及范畴，那么所有自身可分解的对象类都是自身可呈示可分解的。

定义 3.2. [参见 [29] 定义 3.9] 设 (C,Q) 是一个原正合范畴。若对象类 A 属于 C，且映射类 $\mathbf{AdMon}_{\mathcal{A}}$ 自身可分解／可呈示可分解，则称 A自身（可呈示）可分解。如果 ˜ ˜集合 T 可以选取为使得 T 中映射的定义域和余定义域都属于 A，则称对象类 A 自身遗传（可呈示）可分解。

事实证明，遗传性质对于证明幺半正合范畴在平坦模型结构下的交换代数模型范畴的左适当性是有用的。相关内容将在 [20]中讨论。

3.1.2. 正合范畴中的可分解性。我们在此准确阐明正合范畴背景下上述可分解性的定义与 [29, 定义 3.9]之间的关系。

命题 3.3。设$(E, \mathcal{Q})$是一个正合范畴，且$\mathcal{A}$ 是 E 中的一个对象类。如果$\mathcal{A}$ 按照定义 *3.2* 的含义自身是可分解的，那么按照 [29,定义 3。9]的含义，它自身也是可分解的。

证明。对于 [29, 定义 3.9], 所要求的对象集，取由定义 3.2 提供的集合 T 中出现的映射的余核集合˜。□

现在来证明一个部分逆命题。

定义 3.4 ([27, 定义 2.3]). 设 ($\mathcal{E}$,Q) 是一个正合范畴，I 是一类可容许单态射。我们称 I 为

(1) 同调的，如果对于任意对象 $T \in \mathcal{E}$，以下条件等价：(a) 对所有 $S \in$ Coker(I)，$\mathrm{Ext}^1(S,T) = 0$。(b) 映射 $T \to 0$ 对 I 中的映射具有右提升性质。

(2) 强同调的，如果对于任意 $j : A \to B \in \mathbf{AdMon}^{\mathrm{Coker}(\mathcal{I})}$，都存在一个态射 $i : A' \to B'$ 属于 I，使得产生一个交换图，其行均为正合序列

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & S & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}_S} & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & S & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

注 3.5. 注意，在上述定义的条件 (2) 中，左侧的方块是一个推出图表。

一般而言，我们有如下结论。

命题 3.6 ([27, 命题 2.7]). 设$(E,\mathcal{Q})$ 是一个正合范畴，并且满足以下条件之一

(1) E 有足够的投射对象，或者(2) E 有一组生成元，其任意余积存在，并且 E 中的每个截面都有余核。

于是，对每个对象集 $\mathcal{A}$，存在一个由容许单态射构成的强同调集 $\mathcal{I}$，使得 余核$(\mathcal{I})$ 是与 $\mathcal{A}$ 中对象同构的对象类。此外，若 $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$，其中 $\mathcal{B}$ 是一个更大的类，它对 $\mathcal{B}$ 中对象之间的容许满态射的核是闭的，并且

(1) 在上述情形（*1*）中，投射对象包含于$\mathcal{B}$中，或者

(2) 在上述情形（2）中，$\mathcal{B}$ 包含一个生成元$\mathcal{G}$ 集，并且$\mathcal{G}$ 中对象的任意余积存在于$\mathcal{B}$中，

于是可以选择$\mathcal{I}$，使得$\mathcal{I}$ 中映射的定义域和余定义域都属于$\mathcal{B}$。最后，任何余核属于$\mathcal{A}$ 的容许单态射，都是$\mathcal{I}$中某个映射的推出。

备注 3.7。 上述命题关于定义域和余定义域属于$\mathcal{B}$ 的断言，在 [27, 命题 2.7], 中并未明确陈述，但可立即由构造性证明推出。通常，$\mathcal{B}$ 将是 A-滤过对象的类 Filt(A)，详见上述文献。

推论 3.8。 设$(E, \mathcal{Q})$ 是一个正合范畴，并且满足以下条件之一：

(1) $(E, \mathcal{Q})$ 有足够的投射对象；或者(2) $(E, \mathcal{Q})$ 有一个生成元集，其任意余积均存在，并且 E 中每个截面都有余核。

如果$\mathcal{A}$ 按照 [29,定义 3。9], 的意义在自身中是可分解的，那么它按照定义 *3.2* 的意义在自身中也是可分解的。

证明。 对于定义 3.2 所要求的态射类，取命题3.6所给出的态射类。□

3.1.3. 可分解性、覆盖与包络。我们有如下的一般结果。

命题 3.9。 设$(\mathcal{C}, \mathcal{Q})$ 是一个原正合范畴。设$\mathcal{A}$ 是$\mathcal{C}$ 中对象的一个类，并且 $\mathbf{AdMon}_{\mathcal{A}}$ 在自身中是可呈示可分解的。则以下结论成立。

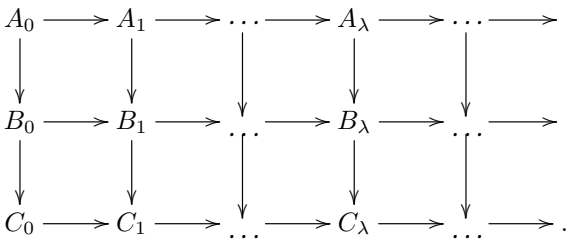
(1) 任意对象 X 都具有一个容许单态射 $i : X \to B$，其中 $B \in \mathsf{A}^{\perp}$。此外， i 可以选为一个 $\mathsf{A}^{\perp}$-特殊预包络。(2) 若 (C, Q) 满足强右模糊公理，则任意对象 X 都具有一个 A-覆盖 $\pi : A \to X$。若 A 包含一个生成元，则映射 π 可以选为一个容许满态射。若进一步地，(C, Q) 是一个正合范畴，则 π 可以选为一个 A-特殊预覆盖。

证明。(1) 根据小对象论证，我们可以将任意映射 $X \to 0$ 分解为$X \to B \to 0$，其中 $X \to B \in \mathsf{AdMon}_{\mathcal{A}}$，而 $B \to 0$ 对于 $\mathsf{AdMon}_{\mathcal{A}}$中的所有映射都具有右提升性质。特别地， $B \in \mathsf{A}^{\perp}$。(2) 根据小对象论证，我们可以将任意映射 $0 \to X$ 分解为 $0 \to A \to X$，其中 $0 \to A \in \mathsf{AdMon}_{\mathcal{A}}$，并且 $A \to X$ 相对于 $\mathsf{AdMon}_{\mathcal{A}}$中的所有映射都具有右提升性质。特别地， $A \in \mathsf{A}$，并且 $A \to X$ 对于所有形如 $0 \to A'$且 $A' \in \mathsf{A}$ 的映射都具有右提升性质。换言之， $A \to X$ 是一个 A-预覆盖。若 A 包含一个生成集且 (C, Q) 满足强右模糊公理，则根据引理 2.27，A-预覆盖是一个容许满态射。关于正合范畴情形的最后一个断言，其证明与 [27] 定理 2.13完全相同。

□

3.2. **弱初等原精确范畴**。 我们需要某些余极限是正合的。

定义 3.10。 设 (C,Q) 为一个原正合范畴，A 为 C 中的一个对象类。我们称 (C,Q) 是弱 A-初等的，如果满足以下条件:



是一个以某个 Λ 为指标的超限序列，其中每一行都是正合的，并且每个$C_\lambda \in$A，那么

$$0 \to \operatorname{colim}_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \to \operatorname{colim}_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda \to \operatorname{colim}_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda \to 0$$

是短正合的，并且 $\operatorname{colim}_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda \in$A。

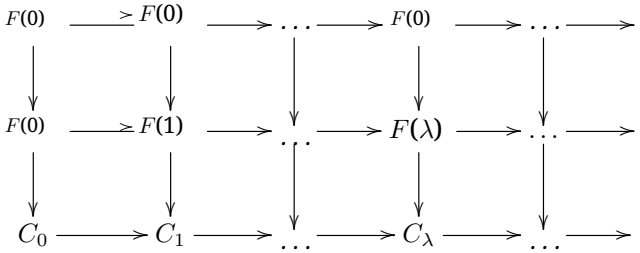
定义 3.11. 设 (C,Q) 是一个原正合范畴，A 是 C 中的一个对象类。我们称 A对扩张封闭，如果每当

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$

是一个正合序列，其中 X 和 Z 属于 A，那么 $Y \in$A。

命题 3.12. 设$(\mathcal{C},\mathcal{Q})$ 是一个原正合范畴，且$\mathcal{A}$ 是$\mathcal{C}$ 中的一个对象类，使得$(\mathcal{C},\mathcal{Q})$ 是弱$\mathcal{A}$-初等的，并且$\mathcal{A}$ 对扩张封闭。设 Λ是一个序数，且 $F:\Lambda\to\mathcal{C}$ 是一个余连续函子，其中 $F(\lambda)\to F(\lambda+1)$ 对每个 $\lambda\in\Lambda$ 都属于$\mathbf{AdMon}_{\mathcal{A}}$。那么，映射 $F(0)\to\operatorname{colim}_{\lambda\in\Lambda}F(\lambda)$ 属于$\mathbf{AdMon}_{\mathcal{A}}$。

证明。 考虑图表



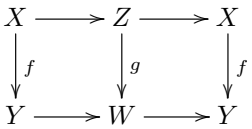
通过超限归纳，每一列都属于 $\mathbf{AdMon}_{\mathcal{A}}$。事实上，后继序数的情形是命题 2.6 的推论，而极限序数的情形是弱 A-初等性的推论。因此，映射 $F(0)\to\operatorname{colim}_{\lambda\in\Lambda}F(\lambda)$ 属于 $\mathbf{AdMon}_{\mathcal{A}}$。
□

特别地，在上述命题的情形下，A 在超限扩张下是闭的。

命题 3.13。 (1) 设 $(\mathcal{C},\mathcal{Q})$ 是左全原精确的。则类 $\mathbf{AdMon}_{\mathcal{A}}$ 在推出下是闭的。(2) 设 $(\mathcal{C},\mathcal{Q})$ 满足左模糊公理且有限余完备。若类 $\mathcal{A}$在收缩下是闭的，则类 $\mathbf{AdMon}_{\mathcal{A}}$ 在收缩下是闭的。

证明。 (1) 这由命题 2.4 得出。

(2) 对于收缩，考虑一个交换图

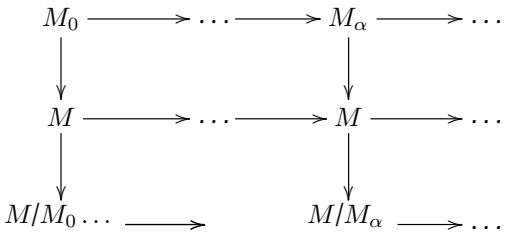


其中顶行和底行复合为恒等映射，并且 g 是一个余核属于 A 的容许单态射。隐晦公理蕴含 $X \to Z$ 是一个容许单态射。因此，复合 $X \to Z \to W$ 是一个容许单态射。再次由隐晦公理，$X \to Y$ 是一个容许单态射。于是，f 的余核显然是 g的余核的一个收缩，因而属于 A。

□

我们还有如下关于余极限的正合性的一个重要但较弱的条件。

定义 3.14。 设 (C,Q) 是一个原正合范畴，B 是 C 中的一个对象类。若 C 中的对象类 A 对于任意序数 Λ 以及任意Λ -索引的超限序列



其中 $M \in$ B，对于所有 $\alpha \in \Lambda$，每个 $M/M_\alpha \in$ A，且每个 $M_\alpha \to M_{\alpha+1}$ 都是余核属于 A 的容许单态射，并且每一行都是正合的，那么序列

$$0 \to \operatorname{colim}_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha \to M \to \operatorname{colim}_{\alpha\in\Lambda} M/M_\alpha \to 0$$

是一个正合序列，且 $\operatorname{colim}_{\alpha\in\Lambda} M/M_\alpha \in$ A。

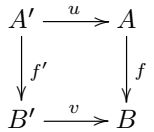
特别地，若 A 是 Ob(C)-可并合的，则称 A 是可并合 的，其中 Ob(C) 是 C 的所有对象构成的类。

我们将可并性理解为能够取容许子对象的并。

3.3. **纯单态射**。 我们还将需要纯性理论中的一些工具。

定义 3.15 ([1] 定义 2.27（关于第（1）部分））。 设 C 为任意范畴。

（1）态射 $f : A \to B$ 称为 λ-纯 的，如果对每个交换正方形



对于 A' 和 B' λ-可呈现对象，存在一个态射 $u : B' \to A$ 使得$u = u \bigcirc f'$。

（2）如果对于所有 λ-可呈现对象 E，$\mathrm{Hom}(E,f):\mathrm{Hom}(E,X)\to\mathrm{Hom}(E,Y)$ 都是集合的满射，则 C 中的态射 $f:X\to Y$ 称为 λ-纯满态射 。

根据 [1, 命题 2.29], ，在一个 λ-可达范畴中， λ-纯态射是单态射。在一个 λ-可表示范畴中，我们还可得到以下结论。

命题 3.16 ([1] 命题 2.30 (2))。 设$\mathcal{C}$ 是一个局部 λ-可表示范畴。$\mathcal{C}$ 中的态射 $f:X\to Y$ 是一个 λ-纯单态射，当且仅当它是$\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ 中分裂单态射的 λ-有向余极限。

所有 λ-纯单态射构成的类记为**纯单态射类**$_\lambda$。

命题 3.17。 局部 λ-可表示范畴中的 λ-纯单态射类是

(1) 对复合封闭；(2) 对沿任意态射作的推出封闭。

证明。 第一个断言见 [1, 例 2.28 后的注记 **(1)**]。第二个断言是

对于第二个断言，设 $f:X\to Y$是一个 λ-纯单态射， $g:X\to Z$是任意一个态射。显然，只需证明分裂单态射的推出仍是分裂单态射。这见 [26,例 6.2 **(3)**]。□

定理 3.18 ([1]定理 2.33)。 设 $\mathcal{K}$ 是一个 λ-可达范畴。存在任意大的正则基数 $\gamma\geq\lambda$，使得 $\mathcal{K}$ 中的每个映射 $A\to B$ （其中 A γ-可表示）都可经由一个 λ-纯单态射 $\underline{f}:A\to B$ 分解，且该单态射是 A γ-可表示的。

推论 3.19。 设 $\mathcal{C}$ 是一个局部 λ-可表示范畴。存在任意大的正则基数 $\gamma\geq\lambda$，使得 $\mathcal{C}$ 中的任意对象 E 都可写成一个 γ-滤过余极限 $E\cong$ 余极限$_{\mathcal{J}}E_j$，其中

(1) 每个 E_j 都是 γ-可呈现的；(2) 每个映射 $E_j\to E$ 都是 λ-纯单态射。

证明。由定理 3.18 可知，存在任意大的正则基数 γ，使得只要 $D\to E$ 是一个映射且具有 D γ-可呈现性，那么 $D\to E$ 就可分解为 $D\to D\to E$，其中 D 是 γ-可呈现的，而 $D\to E$ 是 λ-纯的。现在，C 也是局部 γ-可呈现的。令 J 表示 E 的 λ-纯、 γ-可呈现子对象所构成的偏序集。对于每个 $j\in$J，选取相应子对象等价类的一个代表元 E_j。我们断言 $E\cong\mathrm{colim}_{E_j\in\mathrm{J}}E_j$。范畴 J 是 γ-滤向的。设 $\{E_i\to E\}_{i\in\mathcal{I}}$ 是一个由 λ-纯、 γ-可呈现子对象组成的 γ-小集合。考虑余积$\coprod_{i\in\mathcal{I}}E_i$。它是 γ-可呈现的。诱导态射 $\coprod_{i\in\mathcal{I}}E_i\to E$ 可经由一个 γ-可呈现、 λ-纯子对象 $E_{\mathcal{I}}\to E$ 分解。于是，所有映射 $E_i\to E$ 都可分解为 $E_i\to E_{\mathcal{I}}\to E$。因此，$\mathrm{colim}_{E_j\in\mathrm{J}}E_j\to E$ 是 γ-纯单态射，故由命题 2.31]可知它是正则单态射。令 G 为一个 γ-可呈现对象。则 $\mathrm{Hom}(G,\mathrm{colim}_{E_j\in\mathrm{J}}E_j)\to\mathrm{Hom}(G,E)$ 是一个满态射。事实上，任意映射$G\to E$ 都可经由一个 λ-纯、 γ-可呈现子对象 $G\to E$分解。由于 C 也是γ-可呈现的， γ-可呈现对象构成一个生成元集，这意味着 $\mathrm{colim}_{E_j\in\mathrm{J}}E_j\to E$ 是满态射，因而是同构。□

定义 3.20. 设 λ 为一个正则基数，且 (C,Q) 是一个原正合范畴，其中 C 是 λ-可达的（分别地，局部 λ-可表示）。若 λ-纯单态射是容许单态射，则称范畴 (C,Q) 为纯λ-局部可达（分别地，纯局部 λ-可表示）。

注记 3.21. 若 (C,Q) 是一个原正合范畴，且 C 是 λ-可表示的，分裂单态射是容许的，并且 λ-滤向余极限正合——也就是说，任意逐项为短正合列的图表的余极限都是短正合列——那么根据命题 3.16，(C,Q) 是纯局部 λ-可表示的。

3.4. 相干性。 本小节中的各种相干性概念，是对 [25]（在正合情形下）和 [26], 中引入的类似概念的推广，并适用于原正合情形。

对于可达范畴 C，我们用 C_λ 表示可呈现对象的子范畴。

定义 3.22。 (1) 设 (C,Q) 是一个原正合范畴，且 C λ-可达。设 $\gamma \geq \lambda$ 为一个基数。若任意图表

$$\begin{array}{ccc} & & S \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ D & \xrightarrow{i} & E \end{array}$$

其中 f 是一个容许满态射，i 是一个容许单态射（分别地，i是一个任意态射），且 $D \in \mathsf{C}_\lambda$ 可扩展为一个图表

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j} & S \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ D & \xrightarrow{i} & E \end{array}$$

其中 g 是一个容许满态射，j 是一个容许单态射（分别地，是一个任意态射），且 $X \in \mathsf{C}_\gamma$。

(2) 如果存在任意大的 $\mu \geq \gamma, \kappa \geq \lambda$，使得 (C, Q) 局部 (μ,κ)-预相干（分别地，局部 (μ,κ)-子对象预相干），则称 (C, Q) 向上局部 (γ,λ)-子对象预相干（分别地，向上局部 (γ,λ)-预相干）。(3) 如果 (C, Q) 是 (λ,λ)-预相干（分别地，(λ,λ)-子对象预相干），则称其局部 λ-预相干（分别地，局部 λ-子对象预相干）。(4) 如果存在任意大的 $\kappa \geq \lambda$，使得 (C, Q) 局部 κ-子对象预相干（分别地，局部 κ-预相干），则称 (C, Q) 向上局部 λ-子对象预相干（分别地，向上局部 λ-预相干）。

注记 3.23. 注意，若 (C,Q) 向上局部 λ-预相干，则存在任意大的 $\kappa \geq \lambda$，使得 (C,Q) 局部 (κ,κ)-预相干。特别地，(C,Q) 向上局部 (λ,λ)-预相干。子对象变体也同样成立。

例 3.24. 设 (C,Q) 是一个原正合范畴，且 C λ-可达，其中每个对象都是投射的。则 (C,Q) 局部 (λ,λ)-预相干。此外，若 (C,Q) 满足强左模糊公理，则对任意 λ，(C, Q) 局部 (λ,λ)-子对象预相干。例如，对于任意 λ，Set_* 局部 λ-预相干，且局部λ-子对象预相干。

命题 3.25. 设$(E,\mathcal{Q})$ 是按 [25] 意义定义的局部 λ-相干正合范畴。那么$(E,\mathcal{Q})$ 是向上局部 λ-预相干的。

证明. 这直接由 [25,引理 1.5 和引理 1.9] 得出。 □

稍后我们将给出一个部分逆命题。

读者或许会疑惑，我们为何要求额外的灵活性，即 $(\gamma,\ \lambda)$-预相干性及其向上变体。希望下面的结果能让这一点变得清楚。

命题 3.26。 设$(\mathcal{C},\ \mathcal{Q})$ 是一个满足强右模糊公理的纯 λ-可达正合范畴。若$(\mathcal{C},\ \mathcal{Q})$ 是（向上）$(\gamma,\ \lambda)$-预相干的，则存在$\mu \geq \gamma$ 使其成为（向上）$(\mu,\ \lambda)$-子对象预相干的。

证明。 由于对于任意 $\kappa \geq \lambda$，(C，Q) 也是一个满足右模糊公理的纯 κ-可达正合范畴，向上的情形可由非向上的情形推出。设 $\mu \geq \gamma$ 使得任意满足 A 为 μ-可表示的态射 $A \to B$，都可分解为一个 λ-纯单态射 $A \to B$，其中 A 为 μ-可表示。考虑如下图表

$$\begin{array}{ccc} & & S \\ & & \downarrow f \\ D & \xrightarrow{i} & E \end{array}$$

其中 f 是一个容许满态射， i 是一个容许单态射，且 D 是λ-可表示的。根据（$\gamma,\ \lambda$）-预相干性，将其扩展为一个图表

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j} & S \\ \downarrow g & & \downarrow f \\ D & \xrightarrow{i} & E \end{array}$$

其中 g 是一个容许满态射，且 X γ-可表示。

考虑纤维积 $D \times_E S$。映射 $i' : D \times_E S \to S$ 是一个容许单态射。根据拉回的泛性质，映射 $X \to D$ 和$X \to S$可经由 $X \to D \times_E S$分解。反过来，映射 $X \to D \times_E S$可经由$X \twoheadrightarrow X \to D \times_E S$ 分解，其中 X 是 μ-可表示的，而 $X \to D \times_E S$ 是一个 λ-纯单态射，因而也是容许单态射。因此我们得到一个交换图表

$$\begin{array}{ccc} \overline{X} & \xrightarrow{j'} & S \\ \downarrow g' & & \downarrow f \\ D & \xrightarrow{i} & E \end{array}$$

此时 j' 是一个容许单态射，而根据强隐晦公理， g' 是一个容许满态射。□

命题 3.27。 设 $(\mathcal{C},\mathcal{Q})$ 是向上的(γ,λ)-预相干的。设$\mathrm{T} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 是一个与余核交换且具有 λ-可达性的单子。那么，存在任意大的正则基数 $\mu \geq \gamma,\ \kappa \geq \lambda$，使得 T 的代数范畴 $\mathrm{Alg_T}$ 是(μ,κ)-预相干的。换言之，$\mathrm{Alg_T}$ 是向上的(γ,λ)-预相干的。

证明。 </style}范畴 $\mathrm{Alg_T}$(C) 也是 γ-可达的，其中某个 γ 由 [1, 定理 2.78]得出。因此， γ-小对象的集合 $\mathrm{Alg_T}$(C)γ 构成一个集合。因此存在一个 $\kappa \geq \gamma$，使得对于 $\mathrm{Alg_T}$(C)γ中的任意对象 A，其底层对象 $|A|$ 都是 κ-可表示的。

Let

$$\begin{array}{ccc} & & S \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ D & \xrightarrow{i} & E \end{array}$$

设其为 $\mathrm{Alg}_{\mathrm{T}}$ 中一个由 D γ-可表示对象构成的交换图。转到底层范畴中的图表

$$\begin{array}{ccc} & & |S| \\ & & \downarrow{\scriptstyle |f|} \\ |D| & \xrightarrow{|i|} & |E|. \end{array}$$

存在 $\mu \geq \kappa$，使得我们可以找到一个提升

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & |S| \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle |f|} \\ |D| & \xrightarrow{|i|} & |E|. \end{array}$$

具有 X μ-可表示性。于是我们得到一个交换图表

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Free}_{\mathrm{T}}(X) & \longrightarrow & S \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle |f|} \\ D & \xrightarrow{|i|} & E \end{array}$$

在 $\mathrm{Alg}_{\mathrm{T}}$(C) 中，其中 $\mathrm{Free}_{\mathrm{T}}(X)$ 具有 μ-可表示性。 □

注3.28。 当 (C,Q) 满足强右模糊公理时，得益于命题 3.26，将预相干性替换为子对象前相干性后，命题 3.27 仍然成立。然而，若缺少右模糊公理，一般而言，将预相干性替换为子对象前相干性后，命题 3.27 的陈述不可能仍然成立。事实上，若果真如此，我们便可以结合例 3.24 和推论 3.42，证明 $\mathbb{N}_0$ 的模范畴（即交换幺半群的范畴）具有足够的内射对象。但根据 [18]，这并不成立。

下一个结果的思路源自 [14, 引理 4.9] 所用的技巧。

引理 3.29。 设$(\mathcal{C},\mathcal{Q})$ 是一个纯 λ-可达的原正合范畴，并满足强模糊公理。则存在 $\gamma \geq \lambda$，使得$(\mathcal{C},\mathcal{Q})$ 是向上的 γ-子对象预相干。

证明。 通过取一个（任意）更大的基数，我们可以假设，任意一个 $A \to B$ 且其 A γ-可表示因子化的态射都可以经由一个 λ-纯单态射$A \to B$，而该单态射是 A γ-可表示的。考虑图表

$$\begin{array}{ccc} & & S \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ D & \xrightarrow{i} & E \end{array}$$

其中 D γ 可表示、 i 是一个容许单态射，而 f 是一个容许满态射。由于 i 是一个容许单态射，我们可以沿着 f 拉回 i。

i、 $i' : D \times_E S \to S$ 的拉回仍是一个容许单态射。特别地，我们可以从一开始就假设 $D = E$ 和 i 是恒等映射。

设 K = 核(f)。利用推论 3.19，将 $K \cong$ 余极限$_{i\in\mathcal{I}} K_i$ 写成一个 γ-滤向余极限，其中每个 K_i 都是 γ-可表示的，且每个 $K_i \to K$ 都是一个 λ-纯单态射。

同样，将 $S \cong$ 余极限$_{j\in\mathcal{J}} S_j$ 写成一个 γ-滤向余极限，其中每个 S_j 都是 γ-可表示的，且每个 $S_j \to S$ 都是一个 λ-纯单态射。通过转至一个共尾图表，我们可以假设 I = J，且 $K \to S$ 是映射 $K_i \to S_i$的余极限。根据左模糊公理，每个 $K_i \to S_i$ 都是一个容许单态射。令E_i = 余核($K_i \to S_i$)。那么 $S_i \to E_i$ 是一个容许满态射，且 E_i 是γ-可表示的。于是我们有 $E \cong$余极限$_{i\in\mathcal{I}} E_i$ ，其中每个 E_i 都是 γ-可表示的。由于 E 是 λ-可表示的，它特别也是 γ-可表示的。因此，映射 Id : $E \to E$ 必定经由某个 E_i分解。特别地，根据右模糊公理， $E_i \to E$ 是一个容许满态射。因此， $S_i \to E_i \to E$ 是一个容许满态射。

□

3.4.1. 预相干性与相干性。 这里我们证明一些结果，用以比较我们的预相干性概念与 Positselski 的相干性概念 [26] （在正合情形下，还包括 [25]）。

在继续之前，我们还需要一个定义。

定义 3.30 ([26, 引理 6.1]之后)。 设 M 是范畴 C 中的一个态射类。若满足以下条件，我们称 M 为一个*QE*-单态射类：

(1) M 中态射的所有推出都存在于 C 中，且这些推出属于 M；(2) M 中的每个态射都是其余核对的等化子（该余核对由 (i) 保证存在）；(3) 态射类 M 包含所有恒等态射，并且在复合下封闭。

注意，QE-单态射类必然由正则单态射组成。

例 3.31。 若 (C,Q) 是左全原始正合范畴，则可容许单态射类**AdMon** 是一个 QE-单态射类。条件 (i) 由左全原始正合范畴的性质保证，条件 (iii) 则由原正合范畴的公理保证。条件 (ii) 成立是因为任意可容许单态射都有余核对；而作为等化子，任意可容许单态射也都是正则的。

定义 3.32 ([26, 引理 6.4]之前)。 设 C 是一个 κ-可达正合范畴，M 是 C 上的 QE-单态射类。若任意映射$f \in$M 都是由可容许单态射 $f_i : C_i \to D_i$构成的图表的一个 κ-有向余极限，其中 $C_i, D_i,$ 且余核(f_i) 是 κ-可表示的，则称 M 为局部 κ-相干的 。

定义 3.33. 若一个原正合范畴 (C,Q) 满足 C κ-可达，则称其为局部 κ-相干的，当且仅当**AdMon** 是一个局部 κ-相干的 QE-单态射类。

特别地，若一个正合范畴 ($\mathcal{E}$,Q) 满足 $\mathcal{E}$ κ-可达，那么按 [25], 的意义，它是局部 κ-相干的，当且仅当它按上述意义作为原正合范畴是局部 κ-可达的。

命题 3.34. 设 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是局部可呈范畴之间的可达函子。则存在一个正则基数 $\kappa \geq \lambda$，使得对于任意满足 $\kappa \lhd \mu$ 的正则基数μ， F保留 μ-可呈现对象。

证明. 这个论证归功于 [28]。由于我们找不到更适合引用的出处，因此在此给出证明。必要时将基数增大后，我们可以假设 F 是 λ-可达的，且 C 和 D 都是 λ-可呈范畴。现在，形如 $F(X)$ 的对象的同构类构成一个集合，其中 X是 X λ-可呈现对象。于是存在$\kappa \geq \lambda$，使得所有形如 $F(X)$ 的对象都是 κ-可呈现的。再次利用 [1, 推论 2.14], 将基数增大后，我们可以假设 $\lambda \lhd \kappa$。现在，根据[1, 注 2.15], ，任意 μ-可呈现对象 X 都是由 λ-可呈现对象构成的 μ-小λ-有向余极限的一个收缩。于是，$F(X)$ 是由 κ-可呈现对象构成的 μ-小λ-有向余极限的一个收缩，因此也是 μ-可呈现对象。故 $F(X)$ 本身就是 μ-可呈现对象，这再次由 [1, 注 2.15]得出。□

引理 3.35。 设$\mathcal{C}$ 是一个局部 λ-可表示范畴。则存在一个基数$\kappa \geq \lambda$，使得对于所有满足 $\kappa \lhd \mu$ 的基数 μ，类 $\mathcal{C}^{\mu}$ 中的 μ-可呈现对象在有限极限下闭。

证明。 同样，这是众所周知的事实。例如，参见 [19] 和 [17]。局部有限可表示情形是 [2, 命题 4.3] 的推论。再次说明，我们给出一般情形的证明，这是因为我们无法找到可引用的参考文献。首先，不妨假设终对象是 λ-可呈现的。因此，我们只需考虑拉回。令 $\mathsf{C}^{(\to\leftarrow)}$ 为 C 中余跨度的范畴。该范畴是局部 λ-可表示的，而 λ-可呈现对象正是逐点 λ-可呈现的图表。

拉回函子

$$P : \mathcal{C}^{(\to\leftarrow)} \to \mathcal{C}$$

是一个右伴随，因此是可达的。根据命题 3.34，存在一个 $\kappa \geq \lambda$，使得当 $\kappa \lhd \mu$ 时， P保持 μ-可呈现对象。这就完成了证明。□

命题 3.36. 设$(\mathcal{C}, \mathcal{Q})$ 是一个右全原始正合范畴，具有 λ-可达性，局部 λ-预相干，并满足强右模糊公理。进一步假设范畴$\mathcal{C}_{\lambda}$ 在$\mathcal{C}$中对有限极限封闭。那么，正合序列类包含于由 λ-可呈现对象之间的正合序列所成的 λ-滤过余极限类中。特别地，若 λ- 滤过余极限是正合的，那么正合序列类与由 λ- 可呈现对象之间的正合序列所成的 λ-滤过余极限类相等。

证明。 设 $g : Y \to Z$ 是一个容许满态射。我们可以假设

$$(g : Y \to Z) \cong \operatorname{colim}_{\mathcal{I}} (g_i : Y_i \to Z_i)$$

其中 I 是 λ-滤向的，且所有 Y_i, Z_i 都是 λ-可呈现的。考虑从一个有向集到 I 的共尾函子后，我们可以假设 I 是一个有向集。现在，固定某个 i。那么，根据 λ-可呈现性，我们有 $Z_i \times_Z Y \cong \operatorname{colim}_{j \geq i} Z_i \times_{Z_j} Y_j$。此外， $Z_i \times_Z Y \to Z_i$ 是一个容许满态射。根据 λ-预相干性，存在一个交换图表

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Z_i \times_Z Y \\ & \searrow & \downarrow \\ & & Z_i \end{array}$$

其中 X 是局部 λ-可表示的，且映射 $X \to Z_i$ 是一个容许满态射。由 X的 λ-可表示性，映射 $X \to Z_i$ 可经由某个

$Z_i \times_{Z_j} Y_j \to Z_i$，根据强右模糊公理，它也是一个容许满态射。考虑由满足以下条件的配对 $(i,j) \in \mathsf{I} \times \mathsf{I}$ 构成的范畴 U：$j \geq i$ 使得 $Z_i \times_{Z_j} Y_j \to Z_i$ 是容许满态射。该范畴是 λ-滤向的。事实上，设 $(i_\alpha, j_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ 是 U 中的一组对象。选取一个对所有 α均适用的 $i_\lambda \geq i_\alpha$，以及一个对所有 α均适用的 $j_\lambda \geq j_\alpha$。根据上文所证，存在 $j \geq \max\{i_\lambda, j_\lambda\}$，使得映射$Z_{i_\lambda} \times_{Z_j} Y_j \to Z_{i_\lambda}$ 是一个容许满态射。于是，(i_λ, j) 为所有 (i_α, j_α) 提供了一个上˜界。考虑函子 $Y : \mathsf{U} \to \mathsf{C}$，$(i,j) \mapsto Z_i \times_{Z_j} Y_j$˜，以及 $Z : \mathsf{U} \to \mathsf{C}$，$(i,j) \mapsto Z_i \times_{Z_j} Z_j \cong Z_j$。显然存在一个自然变换$\tilde{\eta} : \tilde{Y} \to \tilde{Z}$。令 $\mathsf{U}' \subset \mathsf{I}^2$ 由满足 $j \geq i$ 的配对 (i,j) 构成。注意，上文已˜证明 $\mathsf{U} \subset \mathsf{U}'$ 是共尾的。考虑函子 $Y' : \mathsf{U}' \to \mathsf{C}$，$(i,j) \mapsto Z_i \times_{Z_j} Y_j$˜，以及 $Z' : \mathsf{U}' \to \mathsf{C}$，$(i,j) \mapsto Z_i \times_{Z_j} Z_j \cong Z_j$。同样，显然存在一个自然变换 $\tilde{g}' : Y' \to Z'$，它由投影给出，并且满足 $\mathrm{colim}_{\mathcal{U}'} \tilde{g}' \cong g$。事实上，由于 λ-可表示性，对于固定的 i,

$$\mathrm{colim}_j Z_i \times_{Z_j} Y_j \cong Z_i \times_Z Y.$$

那么，取 i 的余极限，得到

$$\mathrm{colim}_i Z_i \times_Z Y \cong Y.$$

显然,

$$\mathrm{colim}_{\mathcal{U}' i} \tilde{Z}' \cong Z,$$

并且很容易看出，诱导出的余极限上的映射为 g。

由共尾性可知，我们有 $\mathrm{colim}_{\mathcal{U}} \tilde{\eta} \cong g$，且 $\tilde{\eta}$ 是 λ-可呈现对象之间逐分量的容许满态射，其核是 λ-可呈现对象。□

现在，利用引理 3.35，我们得到如下结论。

推论 3.37。设右全原精确范畴 $(\mathcal{C}, \mathcal{Q})$满足：$\mathcal{C}$是局部 λ-可表示的，向上局部 λ-预相干，且满足右模糊公理。那么存在 κ，使得 $\lambda \lhd \kappa$；对于任意满足$\kappa \lhd \mu$的正则基数 μ，正合序列类包含于对象 μ可呈现之间正合序列的 μ-滤过余极限类中。特别地，若 κ-滤过余极限是正合的，那么对于所有 $\kappa \lhd \mu$，正合序列类与对象 μ可呈现之间正合序列的μ-滤过余极限类相同。

特别地，若 (C,Q) 是一个全原精确范畴，且 C 局部 λ-可表示并向上局部 λ-预相干，那么存在任意大的 $\kappa \geq \lambda$，使得该范畴局部 κ-相干。

3.5. **由相干性得到可分解性**。现在我们运用相干性技术，证明某些可容许单态射类具有可分解性。设 (C,Q) 是一个纯局部 λ-可表示原正合范畴，且 A 是 C 中的一个对象类。

定义 3.38. (1) 设 S 是 (C,Q) 中容许单态射的一个类。若对于任意 $M \to N$S 中的映射，满足 $N \in$ A，则 M和 N/M 均属于 A，我们就称 C 中的对象类 A 是 S-子对象稳定的 。(2) 设 (C,Q) 是一个纯 λ-可访问的原正合范畴。若 C 中的对象类 A 是 λ-纯子对象稳定的 ，则称它为$\mathbf{PureMon}_\lambda$-子对象稳定的。

以下结果可视为 [13]命题 4.9 的推广。可与阿贝尔情形中的类似结果 [23] 引理 4.14 作比较（证明运用了一些相似的思路，但并不相同）。

引理 3.39. 设$(\mathcal{C},\mathcal{Q})$是一个纯 λ-可达原正合范畴。设$\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$是$\mathcal{C}$ 中的对象类，使得

(1) $\mathcal{A}$ 是 λ-纯子对象稳定的，且(2)
$\mathcal{A}$是$\mathcal{B}$-可并合的。
设 G 是一个 κ-可表示的满射生成元，并设 $\gamma \geq \max\{\lambda,\kappa\}$满足：任意具有 X γ-可表示对象的态射 $X \to Y$ 都可经由一个 λ-纯单态射 $X \to Y$分解，其中 X γ 是可表示的。设 $N \to M \in \mathbf{AdMon}_{\mathcal{A}}$，且 $M \in \mathcal{B}$。那么存在一个超限序列

$$M_{\alpha\in A} \to M$$

位于上范畴$\mathcal{C}/_M$ 中，使得：

(1) $M_0 = N$，(2) 对于每个序数 α，$M_\alpha \to M$ 都是余核属于$\mathcal{A}$的容许单态射，(3) 对于任意 $\beta \in A$，$M_\beta \to M_{\beta+1}$ 都是余核为 γ-可表示且属于$\mathcal{A}$的容许单态射，(4) 并且 $\operatorname{colim}_{\alpha\in A} M_\alpha \to M$ 是一个同构。

证明。考虑集合 Hom(G, M)。在 Hom(G, M) 上固定一个良序。对于$\alpha \in A$，写作 $X_\alpha = \bigcup_{\beta\leq\alpha}\{f_\beta\}$，使得 $X_{\alpha+1} \setminus X_\alpha = \{f_{\alpha+1}\}$ 是单元素集。于是 Hom(G, M) $= \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$。我们通过对 A 作超限归纳来逐一构造 M_α。定义 $M_0 = N$。令 $\alpha \in A$，并假设对所有 $\beta < \alpha$，$M_\beta \to M$ 均已构造。

假设 $\alpha = \beta + 1$ 是一个后继序数。考虑 M/M_β，并写作 $\{f_\alpha\}$ $=X_\alpha \setminus X_\beta\}$。将 $f_\alpha : G \to M$ 与商映射复合所得到的映射 $\overline{f_\alpha} : G \to M \to M/M_\beta$ 可分解为经由某个 $M_\alpha \to M/M_\beta$，其中 $M_\alpha \to M/M_\beta$ 是一个 λ-纯单态射，且 M_α 是 γ-可表示的。现在 M/M_β 属于 A，并且由于 $M_\alpha \to M/M_\beta$ 是 λ-纯的，M_α 和 $(M/M_\beta)/M_\alpha$ 都属于 A。考虑图表

$$\begin{array}{ccccc} M_\beta & \longrightarrow & M_\alpha & \longrightarrow & \overline{M_\alpha} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ M_\beta & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M/M_\beta, \end{array}$$

其中 M_α 的定义使得右侧方块是一个拉回，并且我们默认利用命题 2.4 将顶右映射的核与 M_β 视为相同。特别地，两行都是正合的。于是，$M_\beta \to M_\alpha$ 是一个余核为 $M_\alpha \in$ A 的可容许单态射。此外，$M_\alpha \to M$ 也是一个可容许单态射，因为它是沿一个可容许满态射拉回一个可容许单态射所得。最后，根据引理 2.5，右侧方块也是一个推出，因此由命题 2.4 可得 $(M/M_\alpha) \cong (M/M_\beta)/M_\alpha$。因此，$(M/M_\alpha)$ 属于 A。后继情形证毕。

接下来，假设 α 是一个极限序数。定义 M_α =colim$_{\beta<\alpha} M_\beta$。由 A 的 B-可并性以及超限归纳可知，$M_\alpha \to M$ 属于 $\mathbf{AdMon}_{\mathcal{A}}$。

同理，映射 $\mathrm{colim}_{\alpha\in A}M_\alpha \to M$ 是一个余核属于 A 的容许单态射。最后，

$$\mathrm{Hom}(G, \mathrm{colim}_{\alpha\in A}M_\alpha) \to \mathrm{Hom}(G, M)$$

是一个满态射。事实上，设 $f \in \mathrm{Hom}(G, M)$。那么 $f = f_\beta$ 对某个 β 成立。根据构造，下面的图表交换

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \overline{M}_\alpha \\ \downarrow{\scriptstyle f_\beta} & & \downarrow \\ M & \longrightarrow & M\big/M_\beta \end{array}$$

交换，因此 $f_\beta : G \to M$ 可经由 $M_\alpha \cong M_\alpha \times_{M/M_\beta} M$ 分解。因此，$\mathrm{colim}_{\alpha\in A}M_\alpha \to M$ 是一个满态射，故它是一个同构。

□

对于一对基数 (κ, γ)，以及原正合范畴 (C, Q) 中的一个对象类 A，令 $\mathbf{I}^{\kappa,\gamma}{}_{\mathcal{A}}$ 表示容许单态射 $i : X \to Y$，其中 $Y \in \mathsf{C}_\kappa$，且 $\mathrm{Coker}(i) \in \mathsf{A} \cap \mathsf{C}_\gamma$。注意，除同构外，这类态射构成一个集合。

命题 3.40. 设 $(\mathcal{C}, \mathcal{Q})$ 是一个纯 λ-可达正合范畴，且向上(λ, λ)-子对象预相干。设 $\mathcal{A}$ 是一个 λ-纯子对象稳定类，在超限扩张下闭且可并合。那么存在任意大的基数 $\gamma \geq \lambda$ 和 $\kappa \geq \gamma \geq \lambda$，使得$\mathbf{AdMon}_{\mathcal{A}}$ 中的任意映射都可写成由$\mathbf{I}^{\kappa,\gamma}{}_{\mathcal{A}}$ 中的映射的推出构成的超限复合。事实上，在我们构造(κ, γ)时，有$\mathbf{AdMon}_{\mathcal{A}} = \mathbf{I}^{\kappa,\gamma}{}_{\mathcal{A}}\text{-}cof$，其中采用了 [16, 第 2.1 节。2]中的记法。

证明。令 $A \to B$ 为 $\mathbf{AdMon}_{\mathcal{A}}$ 中的任意态射。由引理 3.39，存在任意大的 $\gamma \geq \lambda$，使得我们可以将 $B \cong$ 写为 $_{\alpha<\Gamma}B_\alpha$ colim $B_0 = A$，其中 $B_\alpha \to B_{\alpha+1} \in \mathbf{AdMon}_{\mathcal{A}}$，且每个 $B_{\alpha+1}/B_\alpha$ 都是 γ-可表示的，并属于 A。

令 $C \to D$ 为一个容许单态射，且 D/C 属于 A，并且 $D/C \in \mathsf{C}_\gamma$。由向上的 (λ, λ)-子对象预相干性，存在任意大的 $\kappa \geq \gamma$，使得存在 $D' \to D$，满足 $D' \in \mathsf{C}_\kappa$，且 $D' \to D \to D/C$ 是一个容许满态射。令 $C' = \mathrm{Ker}(D' \to D/C)$。则 $C' \to D'$ 属于 $\mathbf{I}^{\kappa,\gamma}{}_{\mathcal{A}}$。注意

$$\begin{array}{ccc} C' & \longrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ D' & \longrightarrow & D \end{array}$$

根据引理 2.5，这是一个推出图。由于 $\mathbf{I}^{\kappa,\gamma}{}_{\mathcal{A}}$ -cof 对推出稳定且包含 $\mathbf{I}^{\kappa,\gamma}$，因此我们得到 $C \to D$ 属于 $\mathbf{I}^{\kappa,\gamma}$-cof。

因此，$A \to B$ 是 $\mathrm{I}^{\gamma,\lambda}$ A -cof 中映射的超限扩张，因而属于 $\mathrm{I}^{\gamma,\lambda}$ A -cof。由于 (C, Q) 是弱 $\mathrm{AdMon}_{\mathcal{A}}$-初等的，且 A 对超限扩张封闭，我们显然有 $\mathrm{I}^{\gamma,\lambda}$ A，因此 $\mathrm{I}^{\gamma,\lambda}$ A -cell 包含于 $\mathrm{AdMon}_{\mathcal{A}}$。现在设 $f \in \mathrm{I}^{\gamma,\lambda}$ A -cof。根据 [16] 推论 2.1.15，f 是 $\mathrm{I}^{\gamma,\lambda}$ A -cell 中某个映射的收缩，因而属于 $\mathrm{AdMon}_{\mathcal{A}}$。□

推论 3.41. 设 $(\mathcal{C}, \mathcal{Q})$ 是一个纯局部 λ-可表示的全原精确范畴，并且满足隐晦公理。设 $\mathcal{A}$ 是一个 λ-纯子对象稳定类，它是闭的

于超限扩张之下且可并合。那么，$\mathcal{A}$ 自身是可呈示可分解的。

特别地，对于 $\mathcal{C}$ 中的任意对象 X，存在
（1）一个 $\mathcal{A}^{\perp}$-特殊预包络 $X \to B$，它是一个容许单态射；以及（2）一个 $\mathcal{A}$-覆盖 $A \to X$，当 $\mathcal{A}$ 包含一族生成元时，它是一个容许满态射。

证明。A 的可分解性由引理 3.29、引理 3.39 和命题 3.40 得出。关于覆盖和包络的断言由命题 3.9 得出。□

将前述结果应用于由 C 的所有对象组成的类 Ob(C)，我们得到如下结论。

推论 3.42。设 $(\mathcal{C}, \mathcal{Q})$ 是一个纯局部 λ-可表示、满足隐晦公理且为弱初等的全原正合范畴。则 $\mathcal{C}$ 具有足够的内射对象。

在加性情形下，我们得到以下结果。

推论 3.43。设 $(E,\mathcal{Q})$ 是一个纯局部 λ-可表示正合范畴，且所有对象组成的类是可并合的。此外，假设正合范畴 $(E,\mathcal{Q})$ 具有正合可数积。那么 $\mathrm{Ch}(E)$ 可以赋予内射模型结构。

证明。 这是推论 3.42 和 [21,定理4.59] 的对偶的直接推论。□

4. 半赋范模、赋范模与巴拿赫模

我们给出主要示例，即半赋范模、赋范模和巴拿赫模的范畴。关于半赋范环的更多内容，可参阅 [3], 。

定义 4.1。 半赋范环 是一个含幺交换环 R，配备了一个范数 $|-|: R \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，使得对所有 $r, s \in R$

(1) $|rs| \leq |r||s|$,

(2) $|r+s| \leq |r| + |s|$.

我们称 R 为赋范的，如果 $|r| = 0 \Leftrightarrow r = 0$；称其为巴拿赫的，如果它关于由范数诱导的度量是完备的。最后，如果$|r+s| \leq \max\{|r|, |s|\}$，我们称 R 为非阿基米德的。令 R 为一个半赋范环。

定义 4.2. (1) 半赋范 R-模是配备函数 $\rho_M : M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 的 R-模 M，且存在一个 $C > 0$，使得对所有 $r \in R$和 m， $n \in M$，(a) $\rho_M(rm) \leq C|r|\rho_M(m)$，(b) $\rho_M(m+n) \leq \rho_M(m) + \rho_M(n)$。若半赋范 R-模 M 满足 $\rho_M(m) = 0 \Leftrightarrow m = 0$，则称其为赋范模；若其关于由 ρ_M诱导的度量完备，则称其为巴拿赫模。若对所有 m，$n \in M$，都有 $\rho_M(m+n) \leq \max\{\rho_M(m)\ \rho_M(n)\}$，则称 M为非阿基米德的。

(2) 所谓半赋范 R-模之间的有界态射，是指 R-模 $f : M \to N$的态射，且存在 $C_f > 0$使得对所有 $m \in M$， $\rho_N(f(m)) \le C_f \rho_M(m)$。若 C_f 可取为 1，则称该态射为非扩张。

我们用 $\mathbf{SNrm}_R$ 表示半赋范 R-模及其有界态射所构成的范畴，用 $\mathbf{SNrm}_R^{\le 1}$ 表示半赋范 R-模及其不扩张态射所构成的范畴。我们用 $\mathbf{Nrm}_R$ （分别为 $\mathbf{Nrm}_R^{\le 1}$ ）和 $\mathbf{Ban}_R$ （分别为 $\mathbf{Ban}_R^{\le 1}$ ）表示由赋范模和巴拿赫 R-模组成的满子范畴。

注 4.3。 如果 R 是一个非零的非阿基米德半赋范／赋范／巴拿赫环，那么其上的相应非阿基米德模范畴也非零。如果 $R = \mathbb{Z}$ 是配备欧几里得范数限制的整数巴拿赫环，那么其上的非阿基米德半赋范模恰好就是非阿基米德半赋范阿贝尔群。这包括任何配备平凡范数的阿贝尔群，其中任意非零元素的范数均为 1。另一方面，假设 $R = \mathbb{R}$。如果 V是一个非阿基米德半赋范 R-模，那么对于任意 $v \in V$和任意整数 n，我们有

$$\frac{|n|}{C}\rho_V(v) \le \rho_V(nv) \le \rho_V(v).$$

这只有在所有 n 满足 $\rho_V(v) = 0$时才成立。因此，唯一的非阿基米德$\mathbb{R}$-模是所有元素的半范数均为 0 的那些模。

自然包含映射 $\mathbf{Nrm}_R \to \mathbf{SNrm}_R$ 有一个左伴随 Sep，它将 M映射为 $M/\{m : \rho_M(m) = 0\}$。包含映射 $\mathbf{Ban}_R \to \mathbf{Nrm}_R$也有一个左伴随 Cpl，由完备化给出。我们记作

$$\overline{\mathrm{Cpl}} := \mathrm{Cpl} \circ \mathrm{Sep} : \mathrm{SNrm}_R \to \mathrm{Ban}_R.$$

此外，我们还有以下满子范畴

$$\mathrm{SNrm}_R^{nA}, \mathrm{Nrm}_R^{nA}, \mathrm{Ban}_R^{nA}$$

属于 $\mathbf{SNrm}_R$，以及以下满子范畴

$$\mathrm{SNrm}_R^{nA,\le 1}, \mathrm{Nrm}_R^{nA,\le 1}, \mathrm{Ban}_R^{nA,\le 1}$$

属于 $\mathbf{SNrm}_R^{\le 1}$ ，由非阿基米德模组成。

函子 Sep、Cpl 和 Cpl 在不扩张范畴以及所有非阿基米德变体中都限制为左伴随。

当我们的讨论同时适用于半赋范、赋范和巴拿赫范畴，且不想重复表述时，我们将写作 $\mathbf{xNrm}_R$, $\mathbf{xNrm}_R^{\le 1}$ 、$\mathbf{xNrm}_R^{nA}$ 、$\mathbf{xNrm}_R^{nA\le 1}$ 。。

回顾一下，若 M 是一个半赋范模， N是其子空间，则 M/N上的商半范数为 $\rho_{M/N}([m]) = \inf_{n\in N}\rho_M(m+n)$。

注 4.4。 注意，范畴 $\mathbf{xNrm}_R$ 和 $\mathbf{xNrm}_R^{nA}$ 是加性的。另一方面，$\mathbf{xNrm}_R^{\le 1}$ 则不是，因为两个范数为 ≤ 1的映射之和，其范数未必为 ≤ 1。不过，范畴 $\mathbf{xNrm}_R^{nA\le 1}$ ，是加性的。事实上，正如下文将要看到的，它们是拟阿贝尔的。

重新缩放函子很有用。对于 M $\mathbf{xNrm}_R$ 的一个对象以及 $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ 一个正实数，我们将具有相同底层模的对象记为 M_δ

如 M，但具有 $\rho_{M_\delta}(m) = \delta\rho_M(m)$。注意，对于 ϵ， $\delta > 0$ 底层模上的恒等映射

$$M_\epsilon \to M_\delta$$

是范数为 $\frac{\delta}{\epsilon}$ 的映射。在 $\mathbf{xNrm}_R$ 中它是一个同构。然而，仅当 $\epsilon \geq \delta$ 时，它才在 $\mathbf{xNrm}_R^{\leq 1}$ 中有定义。此外，仅当 $\mathbf{xNrm}_R^{\leq 1}$ 中满足 either $\epsilon = \delta$，或 M 的每个元素的半范数都等于 0 时，它才是一个同构。

注 4.5。构造 $M \mapsto M_\delta$ 对 $\mathbf{xNrm}_R^{\leq 1}$ 和 $\mathbf{xNrm}$ 都具有函子性，其逆为 $N \mapsto N_1$。注意，此时我们有

$$\mathrm{Hom}(M_\delta, N) \cong \mathrm{Hom}(M, N_{\frac{1}{\delta}}).$$

事实上，$\mathbf{Hom}(M_\delta, N)$ 是半范数至多为 δ 的有界映射 $M \to N$ 的 $\mathbf{Set}$。特别地

$$\mathrm{Hom}(R_\delta, M) = \overline{B}_M(0, \delta)$$

是 M 中半径为 δ 的闭球。

4.1. 范畴性质。 让我们建立一些关于所引入范畴的性质。

以下内容在 $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ 以及非阿基米德非平凡赋值域上是标准的。通常的证明可推广到任意巴拿赫环，我们在此将其记录下来，同样是为了避免疑义。

命题 4.6. 若 M 为赋范（相应地，巴拿赫）且 $N \subset M$ 为子模，则有 $\overline{\mathrm{Sep}}(M/N) \cong M/\overline{N}$（相应地，$\mathrm{Cpl}(M/N) \cong M/\overline{N}$），其中 $\overline{N}$ 表示闭包。

证明. 首先，设 M 为赋范 R-模， $N \subset M$ 为闭子模。设 $[m] \in M/N$ 满足 $\rho_{M/N}([m]) = \inf_{n\in N} \rho_M(m - n) = 0$。则存在 N 中的序列 $(n_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$，使得 $\lim_{k\to\infty} \rho_M(m - n_k) = 0$。换言之， n_k 收敛于 m，且 $\{[m] : \rho_{M/N}([m]) = 0\} = \{[m] : m \in \overline{N}\}$。因此 $\mathbf{Sep}(M/N) \cong M/\overline{N}$.

设 M 是一个巴拿赫 R-模，且 $N \subset M$ 是一个闭子空间。与 [7] 命题 11.8 相同的证明表明， M/N 已经是巴拿赫空间。回到任意子模 N 的情形，我们看到 $\mathbf{Sep}(M/N) \cong M/\overline{N}$ 已经完备，因此是 $M/\overline{N}$ 的完备化。

□

对于巴拿赫域的情形，下面引理中的大多数论述已在 [4, 附录 A]，中给出，证明也相同。

引理 *4.7. (1)* 设 $f, g : X \to Y$ 是以下范畴中的态射：$\mathbf{SNrm}_R$、$\mathbf{SNrm}_R^{\leq 1}$、$\mathbf{SNrm}_R^{nA}$ 或 $\mathbf{SNrm}_R^{nA\leq 1}$。则 ***(a) Eq(f, g)*** 是 X 的子空间，由满足 $f(x) = g(x)$ 的那些 $x \in X$ 组成，并赋予子空间半范数；***(b) Coeq(f, g)*** 是 $Y/\{f(x) - g(x)\}$，并赋予商半范数。*(2)* 设 $f, g : X \to Y$ 是以下任一范畴中的态射：$\mathbf{Nrm}_R$、$\mathbf{Nrm}_R^{\leq 1}$、$\mathbf{Nrm}_R^{nA}$、$\mathbf{Ban}_R$、$\mathbf{Ban}_R^{\leq 1}$、$\mathbf{Ban}_R^{nA}$ 或 $\mathbf{Ban}_R^{nA\leq 1}$。则 ***(a) Eq(f, g)*** 是 X 的子空间，由满足 $f(x) = g(x)$ 的那些 $x \in X$ 组成，并赋予子空间半范数；

(b) $\mathrm{Coeq}(f)$ 是 $Y/\overline{\{f(x)-g(x)\}}$ 并赋予商范数，其中 $\{f(x)-g(x)\}$ 表示闭包。

(3) 若 $\{(X_i,\rho_i)\}_{i\in\mathcal{I}}$ 是 $\mathrm{SNrm}_R^{\leq 1}$、$\mathrm{Nrm}_R^{\leq 1}$、$\mathrm{Ban}_R^{\leq 1}$、$\mathrm{SNrm}_R^{nA\leq 1}$，$\mathrm{Nrm}_R^{nA\leq 1}$，或 $\mathrm{Ban}_R^{nA\leq 1}$，中的对象族，则其积为，

$$\prod_{i\in\mathcal{I}}^{\leq 1}(X_i,\rho_i),$$

其为半赋范／赋范／巴拿赫模，底层模是代数直积中由满足 $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ 且 $\sup_{i\in\mathcal{I}}\rho_i(x_i)<\infty$ 的那些元组构成的子模，范数定义为

$$\rho_{\prod}((x_i)_{i\in\mathcal{I}})=\sup_{i\in\mathcal{I}}\rho_i(x_i).$$

若族 $\mathcal{I}$ 是有限的，则这也是 SNrm_R、Nrm_R、Ban_R、SNrm_R^{nA}、Nrm_R^{nA} 或 Ban_R^{nA} 中的积。

(4) 若 $\{(X_i,\rho_i)\}$ 是 $\mathrm{SNrm}_R^{\leq 1}$ 或 $\mathrm{Nrm}_R^{\leq 1}$ 中的对象族，则 $\coprod_{i\in\mathcal{I}}^{\leq 1}(X_i,\rho_i)$ 是一个模，其底层模为代数余积，范数定义为

$$\rho_{\coprod}((x_i)_{i\in\mathcal{I}})=\sum_{i\in\mathcal{I}}\rho_i(x_i).$$

如果集合 $\mathcal{I}$ 是有限的，那么这也是 SNrm_R、Nrm_R 或 Ban_R 中的余积。

(5) 若 $\{(X_i,\rho_i)\}$ 是 $\mathrm{SNrm}_R^{nA\leq 1}$，或 $\mathrm{Nrm}_R^{nA\leq 1}$，中的对象集合，那么 $\coprod^{nA,i\in}{}^{\leq 1}{}_{\mathcal{I}}$ X_i 是一个模，其底层模是代数余积，范数定义为

$$\rho_{\coprod}((x_i)_{i\in\mathcal{I}})=\max_{i\in\mathcal{I}}\rho_i(x_i).$$

如果集合 $\mathcal{I}$ 是有限的，那么这也是 SNrm_R^{nA}、Nrm_R^{nA} 或 Ban_R^{nA} 中的余积。

(6) 若 $\{(X_i,\rho_i)\}$ 是 $\mathrm{Ban}_R^{\leq 1}$ 或 $\mathrm{Ban}_R^{nA\leq 1}$，中的对象集合，那么余积由赋范模余积的完备化给出。

证明。 (1) (a) 记 $\mathrm{Eq}(f,g)$ 为由满足 $f(x)=g(x)$ 的那些 $x\in X$ 构成的 X 的子空间，并赋予子空间半范数。令 $h:Z\to X$ 为一个映射，使得 $f\bigcirc h=g\bigcirc h$。那么显然，i 经由包含映射 $\mathrm{Eq}(f,g)\to X$ 分解。由于后一个映射是单态射，该分解必然唯一。

(b) 用 $\widetilde{\mathrm{Coeq}}(f,g)$ 表示配备商半范数的空间 $Y/\{f(x)-g(x)\}$。设 $h:Y\to Z$ 是一个态射，使得 $h\bigcirc f=h\bigcirc z$。$\tilde{}$ $\widetilde{\quad}$ $\tilde{}$

我们得到 R-模的唯一映射 $h:\mathrm{Coeq}(f,g)\to Z$，使得 $h\bigcirc q=h$，$\widetilde{\quad}$ 其中 $q:Y\to\mathrm{Coeq}(f,g)$ 是商映射。容易看出该映射是有界的。

(2) Nrm_R 与 Ban_R （及其变体）都是 SNrm_R 的反射子范畴。因此，它们对极限是闭的，由此得到关于等化子的结论。对于 Nrm_R 中的余等化子，我们有

$$\mathrm{Coeq}(f,g)\cong\mathrm{Sep}(\mathrm{Coeq}_{\mathrm{SNrm}}(f,g)),$$

其中 $\mathrm{Coeq}_{\mathrm{SNrm}}(f,g)$ 表示半范数范畴中的余等化子。在巴拿赫范畴中，我们有

$$\mathrm{Coeq}(f,g)\cong\overline{\mathrm{Cpl}}(\mathrm{Coeq}_{\mathrm{SNrm}}(f,g)).$$

该断言现在由命题 4.6 得出。

(3) 设 $\{f_i : (Y,\ \rho) \to (X_i,\ \rho_i)\}_{i\in\mathcal{I}}$ 为一组 R-模之间的非扩张态射。存在唯一的模映射到积

$$f : Y \to \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i,\ y \mapsto (f_i(y))_{i\in\mathcal{I}}.$$

显然，对于上确界半范数，该映射是非扩张的。

(4) 设 $\{f_i : (X_i,\ \rho_i) \to (Y,\ \rho)\}$ 为一组 R-模之间的非扩张态射。我们得到唯一的 R-模映射

$$f : \coprod_{i\in\mathcal{I}} X_i \to Y,\ (x_i)_{i\in\mathcal{I}} \mapsto \sum_{i\in\mathcal{I}} f_i(x_i).$$

显然，对于和范数，该映射是非扩张的。

(5) 设 $\{f_i : (X_i,\ \rho_i) \to (Y,\ \rho)\}$ 为一组 R-模之间的非扩张态射。我们得到唯一的 R-模映射

$$f : \coprod_{i\in\mathcal{I}} X_i \to Y,\ (x_i)_{i\in\mathcal{I}} \mapsto \sum_{i\in\mathcal{I}} f_i(x_i).$$

由于 Y 是非阿基米德的，对于上确界范数，这显然是不扩张的。

(6) 这再次是因为巴拿赫空间的不扩张范畴是相应赋范范畴的反射子范畴。

□

推论 4.8。 在下列范畴中：

$$\mathrm{SNrm}_R, \mathrm{Nrm}_R, \mathrm{Ban}_R, \mathrm{SNrm}_R^{nA}, \mathrm{Nrm}_R^{nA}, \mathrm{Ban}_R^{nA}, \mathrm{SNrm}_R^{nA,\leq 1}, \mathrm{Nrm}_R^{nA,\leq 1}, \mathrm{Ban}_R^{nA,\leq 1},$$

自然映射

$$X \coprod Y \to X \prod Y$$

对于任意一对对象 X 和 Y，都是同构。特别地，这些都是加性范畴。

证明。 在非阿基米德情形下，这显然成立，因为等式两边的范数相等。在阿基米德情形下，这是因为对于 $a,\ b \geq 0$

$$\frac{1}{2}(a+b) \leq \max\{a,b\} \leq a+b.$$

□

即使是在加性范畴中，$\mathbf{xNrm}_R$, $X \oplus Y$ 也始终表示赋予和范数的积，而在 $\mathbf{XNrm}_R^{nA}$ 中，它表示赋予最大范数的积。在这两种情况下，$X \prod Y$ 都表示赋予最大范数的积。

4.1.1. 拟阿贝尔与仿阿贝尔性质。 以下结论可由命题 2.1 和引理 4.7 直接推出。

命题 4.9。(1) 一个态射 $f : X \to Y$ 属于

$$\mathrm{SNrm}_R^{\leq 1}, \mathrm{Nrm}_R^{\leq 1}, \mathrm{Ban}_R^{\leq 1}, \mathrm{SNrm}_R^{nA,\leq 1}, \mathrm{Nrm}_R^{nA,\leq 1}, \mathrm{Ban}_R^{nA,\leq 1}$$

是严格满态射，当且仅当它是满射，并且 $\rho_Y(y) = \inf_{x\in f^{-1}(y)} \rho_X(x)$ 对所有 $y \in Y$ 都成立。(2) 在 $\mathrm{SNrm}_R^{\leq 1}$ 或 $\mathrm{SNrm}_R^{nA\leq 1}$，中的态射 $f : X \to Y$ 是严格单态射，当且仅当它是等距映射。

(3) 在 $Nrm_R^{\leq 1}$、$Ban_R^{\leq 1}$、$Nrm_R^{nA\leq 1}$、或 $Ban_R^{nA\leq 1}$ 中的态射 $f:X\to Y$ 是严格单态射，当且仅当它是具有闭像的等距映射。*(4)* 在 $SNrm_R$、Nrm_R、Ban_R、$SNrm_R^{nA}$、Nrm_R^{nA} 或 Ban_R^{nA} 中的态射 $f:X\to Y$ 是严格满态射，当且仅当它是满射，并且 ρ_Y 对所有 $y\in Y$ 等价于半范数 $y\mapsto inf_{x\in f^{-1}(y)}\rho_X(x)$。*(5)* 在 $SNrm_R$ 或 $SNrm_R$ 中的态射 $f:X\to Y$ 是严格单态射，当且仅当诱导映射 $f:X\to Im(f)$ 是同构，其中 $Im(f)\subset Y$ 是 f 的集合论像，并赋有子模半范数。

(6) 态射 $f:X\to Y$ 在 Nrm_R,Ban_R,Nrm_R^{nA} 或 Ban_R^{nA} 中是严格单态射，当且仅当集合论像 $\mathrm{Im}(f)$ 在 Y中是闭的，且诱导映射 $f:X\to\mathrm{Im}(f)$ 是同构，其中 $\mathrm{Im}(f)\subset Y$是 f的集合论像，并赋予子模范数。

命题 4.10。设

$$0\longrightarrow X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z\longrightarrow 0$$

是任意一个范畴中的核余核对

$$\mathrm{SNrm}_R,\mathrm{Nrm}_R,\mathrm{Ban}_R,\mathrm{SNrm}_R^{nA},\mathrm{Nrm}_R^{nA},\mathrm{Ban}_R^{nA}.$$

那么存在一个正合序列的同构

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow & & \| & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Im}(f) & \xrightarrow{i_f} & Y & \xrightarrow{q_f} & X/\mathrm{Im}(f) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

其中底行是在

$$\mathrm{SNrm}_R^{\leq 1},\mathrm{Nrm}_R^{\leq 1},\mathrm{Ban}_R^{\leq 1},\mathrm{SNrm}_R^{nA,\leq 1},\mathrm{Nrm}_R^{nA,\leq 1},\mathrm{Ban}_R^{nA,\leq 1}.$$

证明。由于 f是严格单态射，因此 $X\to\mathrm{Im}(f)$ 是等距映射（在赋范和巴拿赫情形下像是闭的），且 $Z\cong\mathrm{Coker}(f)\cong X/\mathrm{Im}(f)$。映射 $\mathrm{Im}(f)\to X$ 是等距映射（在赋范和巴拿赫情形下像是闭的），且 $X/\mathrm{Im}(f)$ 带有商范数。□

定理 4.11。　　(1) 设

$$\begin{array}{ccc}
F & \xrightarrow{g'} & M\\
\downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f}\\
L & \xrightarrow{g} & N
\end{array}$$

是 $\mathrm{SNrm}_R^{\leq 1}$、$\mathrm{Nrm}_R^{\leq 1}$、$\mathrm{Ban}_R^{\leq 1}$、$\mathrm{SNrm}_R^{nA\leq 1}$、、$\mathrm{Nrm}_R^{nA\leq 1}$、或 $\mathrm{Ban}_R^{nA\leq 1}$。中的纤维积图。若 f 是严格满态射，则 f'也是严格满态射。

(2) 设

$$\begin{array}{ccc}
K & \xrightarrow{i} & M\\
\downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle g'}\\
L & \xrightarrow{i'} & P
\end{array}$$

是 $\mathit{SNrm}_R^{\leq 1}$、$\mathit{Nrm}_R^{\leq 1}$、$\mathit{Ban}_R^{\leq 1}$、$\mathit{SNrm}_R^{nA\leq 1}$、$\mathit{Nrm}_R^{nA\leq 1}$ 或 $\mathit{Ban}_R^{nA\leq 1}$ 中的一个推出图。若 i 是严格单态射，则 i' 也是如此。*(3)* 设 g 和 f 是 $\mathit{SNrm}_R^{\leq 1}$、$\mathit{Nrm}_R^{\leq 1}$、$\mathit{Ban}_R^{\leq 1}$、$\mathit{SNrm}_R^{nA\leq 1}$、$\mathit{Nrm}_R^{nA\leq 1}$ 或 $\mathit{Ban}_R^{nA\leq 1}$ 中的严格满态射。则 $g\bigcirc f$ 是严格满态射。*(4)* 设 g 和 f 是 $\mathit{SNrm}_R^{\leq 1}$、$\mathit{Nrm}_R^{\leq 1}$、$\mathit{Ban}_R^{\leq 1}$、$\mathit{SNrm}_R^{nA\leq 1}$、$\mathit{Nrm}_R^{nA\leq 1}$ 或 $\mathit{Ban}_R^{nA\leq 1}$ 中的严格单态射。则 $g\bigcirc f$ 是严格单态射。*(5)* 设 g 和 f 是 $\mathit{SNrm}_R^{\leq 1}$、$\mathit{Nrm}_R^{\leq 1}$、$\mathit{Ban}_R^{\leq 1}$、$\mathit{SNrm}_R^{nA\leq 1}$、$\mathit{Nrm}_R^{nA\leq 1}$ 或 $\mathit{Ban}_R^{nA\leq 1}$ 中的态射。若 $g\bigcirc f$ 是严格满态射，则 g 是严格满态射。*(6)* 设 g 和 f 是 $\mathit{SNrm}_R^{\leq 1}$、$\mathit{Nrm}_R^{\leq 1}$、$\mathit{Ban}_R^{\leq 1}$、$\mathit{SNrm}_R^{nA\leq 1}$、$\mathit{Nrm}_R^{nA\leq 1}$ 或 $\mathit{Ban}_R^{nA\leq 1}$ 中的态射。若 $g\bigcirc f$ 是严格单态射，则 f 是严格单态射。

因此，所有列出的范畴都是全抛物阿贝尔的，并满足隐晦公理。非阿基米德版本实际上是拟阿贝尔的。

证明。 (1) 纤维积的一个模型由 $M\times_L N = \{(m,l)\in M\times L : f(m) = g(l)\}$给出。于是 f'与 g' 分别是相应的投影，并且显然是非扩张的。我们有 $\rho_N(f(m)) = \inf_{k\in\mathrm{Ker}(f)}\rho_M(m+k)$。

f，的核是$\{(m,0) : m\in$核$(g)\}$。我们有 $\rho_{M\times_N L}(m,l) = \max\{\rho_M(m)\ \rho_L(l)\}$。对任意满足 $f(m) = g(l)$的 m（由于f是满射而存在），元素(m,l)映射到 l。于是$\max\{\rho_M(m)\ \rho_L(l)\}\geq\rho_L(l)$。

因此 $\inf\{\rho_{M\times L}(m,l) : f'(m,l) = l\}\geq\rho_L(l)$。任取满足 $g(m) = f(l)$ 的 (m,l)。现在 $\rho_N(g(m)) = \rho_N(f(l))\leq\rho_L(l)$。由于 f 是严格满态射，对于任意 $\epsilon > 0$，存在 $k_\epsilon\in\mathrm{Ker}(f)$，使得 $\rho_M(m+k_\epsilon)\leq\rho_L(l)+\epsilon$。于是 $\max\{\rho_M(m+k_\epsilon)\ \rho_L(l)\}\leq\rho_L(l)+\epsilon$，且 $f'(m+k_\epsilon,l) = l$。因此 $\inf\{\rho_{M\times L}(m,l) : f'(m,l) = l\}\leq\rho_L(l)$。因此，$\rho_L$ 实际上与映射 $\mathrm{Ker}(g)\to M\times_N L$ 的商半范数一致。特别地，g' 是严格满态射。

（2）从半赋范模到其分离化／完备化的映射是非扩张的，因此我们可以在半赋范范畴中进行讨论。推出 P可表示为 $M\oplus N/\{(f(x)\ -g(x))\}$。映射 i'是以下复合

$$L\to M\oplus L\to M\oplus L\big/\{(i(x),-g(x))\}$$

该映射是非扩张的，因为包含映射 $L\to L\oplus M$是非扩张的，而商映射也是非扩张的。对 g'同样如此。

现在设 $i : K\to M$是一个严格单态射，并设 $g : K\to L$是任意映射。回想一下，此时 i 是一个等距映射。我们有 $L\oplus_K M$是$M\oplus L$对 $\{(i(k)\ g(k)) : k\in K\}$取商所得的商空间。首先注意，若 i在 M中的像是闭的，那么映射 $k\mapsto(i(k)\ g(k))$的像也是闭的。事实上，若 $(i(k_n)\ g(k_n))$是一个收敛到某个 (m,l) 的序列，则 $i(k_n)$收敛到 m。但 i 的像在 M中是闭的，因此 k_n 收敛到K中的某个 k 。于是 $(i(k_n)\ g(k_n))$收敛到 $(i(k)\ g(k))$。特别地，在赋范范畴和巴拿赫范畴中，我们无需取闭包。现在需要证明 $L\to M\oplus L/\{(i(k)\ g(k)) : k\in K\}$ $l\mapsto[(0,l)]$ 是一个严格单态射。首先，它是单态射，因为底层模是模范畴中的通常推出。只需证明它是到其像上的等距映射。先证明阿基米德情形。考虑形如 $[(0,l)]$的元素。若 $[(0,l)] = [(m,l')]$

那么 $(m,\ l'-l) = (i(k)\ g(k))$。因此 $m = i(k)$且 $\rho_M(m) = \rho_K(k)$。于是$\rho_L(l'-l) \leq \rho_K(k)$，所以 $\rho_L(l) \leq \rho_L(l') + \rho_K(k) = \rho_L(l') + \rho_M(m)$。因此$\rho_L(l) = \rho([(0,\ l)])$，证毕。

现在来证明非阿基米德版本。同样，若 $[(0,l)] = [(m,l')]$，则 $(m,l'-l) = (i(k)\ g(k))$。因此 $m = i(k)$，且 $\rho_M(m) = \rho_K(k)$。假设 $\rho_L(l) > \rho_L(l')$。那么 $\rho_L(l) = \rho_L(l-l') \leq \rho_K(k) = \rho_M(m)$。因此，要么 $\rho_L(l') \geq \rho_L(l)$，要么 $\rho_M(m) \geq \rho_L(l)$。无论哪种情况，$\rho_{M\oplus L}(m,l') \geq \rho_L(l)$。因此，$\rho_{M\oplus_K L}([0,l]) = \rho_L(l)$。

(3) 设 $f: X \to Y$和 $g: Y \to Z$是.....中的严格满态射

$$\mathrm{SNrm}_R^{\leq 1}, \mathrm{Nrm}_R^{\leq 1}, \mathrm{Ban}_R^{\leq 1}, \mathrm{SNrm}_R^{nA,\leq 1}, \text{ or } \mathrm{Nrm}_R^{nA,\leq 1}.$$

也就是说，它们是满射，并且满足 $\rho_Y(y) = \inf_{x\in f^{-1}(y)}\{\rho_X(x)\}$ 和$\rho_Z(z) = \inf_{y\in g^{-1}(z)}\{\rho_Y(y)\}$。特别地，$f$和 g 都是非扩张的。考虑 $g\bigcirc f: X \to Z$。令 $z \in Z$。那么

$$\rho_Z(z) = \inf_{y\in g^{-1}(z)}\rho_Y(y) = \inf_{y\in g^{-1}(z)}\inf_{x\in f^{-1}(y)}\rho_X(x) = \inf_{x\in (g\circ f)^{-1}(y)}\rho_X(x),$$

正如所需。

(4) 设 $f: X \to Y$和 $g: Y \to Z$是 $\mathrm{SNrm}_R^{\leq 1}$、$\mathrm{Nrm}_R^{\leq 1}$、$\mathrm{Ban}_R^{\leq 1}$、$\mathrm{SNrm}_R^{nA\leq 1}$、$\mathrm{Nrm}^{nA}$中的态射，$\leq 1_R$是等距映射。设 $x \in X$。那么 $\rho_Z(g(f(x)) = \rho_Y(f(x)) = \rho_X(x)$，因此$g\bigcirc f$是等距映射。假设 X、Y、Z都是赋范的，且 g和 f 的像都是闭的。设 $(g(f(x_n))$ 是 Z 中的一个序列，它收敛到某个 z。那么，对某个 $y \in Y$，有 $z = g(y)$。由于 g 是等距映射，$f(x_n)$ 收敛到 y，因此，对某个 x，有 $y = f(x)$。那么 x_n 收敛到 x。因此$g(f(x_n))$ 收敛到 $g(f(x)) = z$。

(5) 设 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$ 是 $\mathrm{SNrm}_R^{\leq 1}$，$\mathrm{Nrm}_R^{\leq 1}$，$\mathrm{Ban}_R^{\leq 1}$，$\mathrm{SNrm}_R^{nA\leq 1}$，，$\mathrm{Nrm}_R^{nA\leq 1}$ 中的态射，且 $g\bigcirc f$ 是严格满态射。特别地，$g\bigcirc f$ 是满射，因此 g 也是满射。考虑 $z \in Z$。于是

$$\rho_Z(z) \leq \inf_{y\in g^{-1}(z)}\rho_Y(y) \leq \inf_{x\in (g\circ f)^{-1}(z)}\rho_X(x) = \rho_Z(z).$$

因此所有不等式都是等式，且 g 是严格的。

(6) 设 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$ 是 $\mathrm{SNrm}_R^{\leq 1}$，$\mathrm{Nrm}_R^{\leq 1}$，$\mathrm{Ban}_R^{\leq 1}$，$\mathrm{SNrm}_R^{nA\leq 1}$，，$\mathrm{Nrm}_R^{nA\leq 1}$ 中的态射，且 $g\bigcirc f$ 是等距映射。设 $x \in X$。于是

$$\rho_X(x) = \rho_Z(g(f(x)) \leq \rho_Y(f(x))) \leq \rho_X(x).$$

因此，$\rho_X(x) = \rho_Y(f(x))$，且 f是等距映射。假设 X，Y 和Z 都是赋范的，并且 $g\bigcirc f$ 是闭像等距映射。我们声称 f具有闭像。设 $f(x_n)$ 收敛到某个 $y \in Y$。则$g(f(x_n))$ 收敛到 $g(y)$。由于 $g\bigcirc f$ 是闭像等距映射，存在某个 $x \in X$，使得$g(y) = g(f(x))$。由于 $g\bigcirc f$ 是等距映射，x_n 收敛到x，因此 $f(x_n)$ 收敛到 $f(x)$。

□

引理 4.12. 这些范畴

$$\mathrm{SNrm}_R, \mathrm{Nrm}_R, \mathrm{Ban}_R, \mathrm{SNrm}_R^{nA}, \mathrm{Nrm}_R^{nA}, \mathrm{Ban}_R^{nA}$$

都是拟阿贝尔的。

证明。 这很容易由重新缩放，以及非扩张变体是全抛物阿贝尔范畴这一事实得出。□

4.1.2. 可表现性。 这里我们证明，非扩张范畴都是局部 $\aleph_1$-可表示的。

命题 4.13。 设 $F : \mathcal{I} \to \mathrm{SNrm}_R^{\leq 1}$ 或 $F : \mathcal{I} \to \mathrm{SNrm}_R^{nA\leq 1}$，其中 $\mathcal{I}$ 是滤向的。则有以下结论。

(1) 余极限 $\mathrm{colim}_{i\in\mathcal{I}}^{\leq 1} F(i)$ 的底层 R-模是各个 $F(i)$的底层 R-模的余极限，其半范数定义为

$$\rho([x]) = \inf\{\rho_j(f_{ji}(x)) : i \to j\},$$

其中 $x \in F(i)$，且 $f_{ji} : F(i) \to F(j)$ 是连接映射。

(2) 若 $\mathcal{I}$ 是 $\aleph_1$-滤向的，且每个 $F(i)$ 都是赋范的，则 $\mathrm{colim}_{i\in\mathcal{I}}^{\leq 1} F(i)$ 是赋范的。

(3) 若 $\mathcal{I}$ 是 $\aleph_1$-滤向的，且每个 $F(i)$ 都是巴拿赫的，则 $\mathrm{colim}_{i\in\mathcal{I}}^{\leq 1} F(i)$ 是巴拿赫的。

证明。 (1) 设 $g_i : F(i) \to G$ 是一个非扩张映射相容系统。我们需要验证典范映射 $g : \mathrm{colim}_{i\in\mathcal{I}} F(i) \to G$ 是非扩张的。设 $x \in F(i)$。那么 $g([x]) = g_i(x) = g_j(f_{ji}(x))$ 对所有 $i \to j$ 都成立。因此 $\rho_G(g_j(f_{ji}(x))) \leq \rho_j(f_{ji}(x))$。这对所有 $i \to j$ 都成立，所以 $\rho_G(g[x]) \leq \rho([x])$。

(2) 假设 I 是 $\aleph_1$-滤向的，且每个 $F(i)$ 都是赋范的。设 $x \in F(i)$ 满足 $\rho([x]) = 0$。这意味着对每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在 $i \to j_n$ 使得$\rho_{j_n}(f_{j_n i}(x)) \leq \frac{1}{n}$。设 $\{j_n \to j_\infty\}$ 是映射 $i \to j_n$ 的一个余锥。那么 $\rho_j(f_{ji}(x)) \leq \frac{1}{n}$ 对所有 n 都成立，因此 $f_{ji}(x) = 0$。故 $[x] = 0$。

(3) 假设 I 是 $\aleph_1$-滤向的，且每个 $F(i)$ 都是巴拿赫空间。我们已经知道 $\mathrm{colim}_{i\in\mathcal{I}}^{\leq 1} F(i)$ 是赋范的。设 $([x_n])$ 是 $\mathrm{colim}_{i\in\mathcal{I}}^{\leq 1} F(i)$ 中的一个柯西序列。由 $\aleph_1$-滤向条件，我们可以假设它们都由同一个 $F(i)$ 中的元素表示。又由 $\aleph_1$-条件，我们可以假设它们在 $F(i)$ 中构成一个柯西序列。因此它们在该处收敛，从而也在 $\mathrm{colim}_{i\in\mathcal{I}}^{\leq 1} F(i)$ 中收敛。

□

引理 4.14. 在 $\mathrm{SNrm}_R^{\leq 1}$、$\mathrm{Nrm}_R^{\leq 1}$、$\mathrm{Ban}_R^{\leq 1}$、$\mathrm{SNrm}_R^{nA\leq 1}$、$\mathrm{Nrm}_R^{nA\leq 1}$ 和 $\mathrm{Ban}_R^{nA\leq 1}$ 中，形如 R_δ 的每个对象都是$\aleph_1$-可表示的。

证明。由命题 4.13，只需考虑半赋范情形。设 $F : \mathcal{I} \to \mathrm{SNrm}_R^{\leq 1}$ 是一个 $\aleph_1$-滤向图表。我们需要证明 $B_{\mathrm{colim}_{\mathcal{I}} F}(0, \delta) = \mathrm{colim}_{\mathcal{I}} B_{F(i)}(0, \delta)$。设 $x \in F(i)$ 满足 $\rho([x]) = \delta$。因此 $\inf_{i\to j} \rho_j(\alpha_{ij}(x)) = \delta$。取一个可数子集 $\{i \to j_k : k \in \mathbb{N}\}$，使得 $\inf_{k\in\mathbb{N}} \rho_j(\alpha_{ij_k}(x)) = \delta$。设 $j_k \to u$ 为一个余锥，它对应于映射 $i \to j_k$，也就是说，复合 $i \to j_k \to u$ 对所有 k 都相同。于是对所有 k，$\rho_u(\alpha_{ui}(x)) \leq \rho_j(\alpha_{ij_k}(x))$，因此 $\rho_u(\alpha_{ui}(x)) \leq \delta$，证明完毕。□

命题 4.15。 对于$\mathcal{C}$ 为以下范畴之一$\mathrm{SNrm}_R^{\leq 1}$、$\mathrm{Nrm}_R^{\leq 1}$、$\mathrm{SNrm}_R^{nA\leq 1}$，或$\mathrm{Nrm}_R^{nA\leq 1}$，的情形，以及对每个 $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$（或在赋范情形下对每个 $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$），函子

$$\mathrm{Hom}(R_\delta, -) : \mathcal{C} \to \mathrm{Set}$$

与函子 $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ 的滤过余极限可交换，其中对$\mathcal{I}$中的每个映射 $i \to j$，映射 $F(i) \to F(j)$ 都是等距映射。特别地，在$\mathrm{SNrm}_R^{nA\leq 1}$和$\mathrm{Nrm}_R^{nA\leq 1}$中，对每个 $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$（或在赋范情形下对每个 $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$），函子

$$\mathrm{Hom}(R_\delta, -) : \mathcal{C} \to \mathrm{Ab}$$

与任意直和相交换。

证明。 利用注 4.5，我们需要证明，对于任意 δ，自然映射

$$\mathrm{colim}_{i\in\mathcal{I}}\overline{B}_{F(i)}(0,\delta)\to\overline{B}_{\mathrm{colim}_{i\in\mathcal{I}}F(i)}(0,\delta)$$

是双射。注意，根据余极限上半范数的显式描述，若 $[x]\in\mathrm{colim}_{i\in\mathcal{I}}F(i)$，其中 x 是在 $F(i)$ 中的一个代表元，则 $\rho([x])=\rho_i(x)$。特别地，若每个 $F(i)$ 都是赋范的，则余极限也是赋范的。此外，每个 $F(i)\to\mathrm{colim}_{i\in\mathcal{I}}F(i)$ 本身都是等距映射。我们得到单射

$$\overline{B}_{F(i)}(0,\delta)\to\overline{B}_{\mathrm{colim}_{i\in\mathcal{I}}F(i)}(0,\delta).$$

由于 Set 中单射的余极限仍是单射，因此我们得到

$$\mathrm{colim}_{i\in\mathcal{I}}\overline{B}_{F(i)}(0,\delta)\to\overline{B}_{\mathrm{colim}_{i\in\mathcal{I}}F(i)}(0,\delta)$$

是一个单射。因此，只需证明这个映射是满射。设 $[x]\in B_{\mathrm{colim}_{i\in\mathcal{I}}F(i)}(0,\delta)$，其中 x 是在 $F(i)$ 中的一个代表元。我们有 $\delta=\rho([x])=\rho_i(x_i)$。因此，$[x]$ 属于 $B_{F(i)}(0,\delta)\to B_{\mathrm{colim}_{i\in\mathcal{I}}F(i)}(0,\delta)$ 的像。

对于非阿基米德情形，注意到直和可以写成有限直和的滤过余极限，并且一个和到更大的和的包含映射是等距映射。因此，该断言归结为如下事实：在非阿基米德、从而加性的设定中，$\mathrm{Hom}(R_\delta,-):\mathrm{xNrm}_R^{nA\le1}\to\mathrm{Ab}$与有限直和交换。□

引理 4.16. 在$\mathrm{SNrm}_R^{\le1}$与$\mathrm{SNrm}_R^{nA\le1}$中，对象的集合$\{R_\delta:\delta\in\mathbb{R}_{\ge0}\}$是一个可容许生成元集。在$\mathrm{Nrm}_R^{\le1}$、$\mathrm{Ban}_R^{\le1}$、$\mathrm{Nrm}_R^{nA\le1}$以及$\mathrm{Ban}_R^{nA\le1}$中，对象的集合$\{R_\delta:\delta\in\mathbb{R}_{>0}\}$是一个可容许生成元集。

证明. 设(X,ρ_X)为半赋范 R-模。对每个满足 $x\neq0$的 $x\in X$，考虑 R-模$R_{\rho_X(x)}$。存在自然映射$R_{\rho_X(x)}\to X$，它将 $r\mapsto rx$映出。因此我们得到一个诱导映射

$$\pi:R_X=\coprod_{x\in X\setminus\{0\}}R_{\rho_X(x)}\to X$$

$$(r_x)_{x\in X\setminus\{0\}}\mapsto\sum_{x\in X\setminus\{0\}}r_xx.$$

设 $x\in X$。那么标准单位向量 δ_x 在 π下映射为 x，且 $\rho_{R_X}(\delta_x)=\rho_X(x)=\rho_X(\pi(\delta_x))$。显然，$\pi$ 是一个严格满态射。这就证明了半赋范情形。注意，若 (X,ρ_X) 是分离的，那么对所有 $x\in X\setminus\{0\}$，根据定义，$\rho_X(x)\neq0$。因此，我们也证明了赋范情形。巴拿赫情形由 Cpl 是左伴随这一事实得出——因此它保留严格满态射和余积。□

下一个命题是定理 2.32、引理 4.7、定理 4.11(5)、引理 4.14 和引理 4.16 的推论。

命题 4.17. 范畴 $\mathrm{SNrm}_R^{\le1}$、$\mathrm{Nrm}_R^{\le1}$ 和$\mathrm{Ban}_R^{\le1}$、$\mathrm{SNrm}_R^{nA\le1}$、$\mathrm{Nrm}_R^{nA\le1}$和$\mathrm{Ban}_R^{nA\le1}$都是局部$\aleph_1$-可表示的。

4.1.3. 滤过余极限的正合性。 接下来我们考察滤过余极限的正合性。

命题 4.18. 若 $u : X \to Y$ 是 $\mathrm{SNrm}_R^{\leq 1}$ （相应地，在$\mathrm{SNrm}_R^{nA\leq 1}$，）中的严格单态射，则 $\mathrm{Cpl}(u) : \mathrm{Cpl}(X) \to \mathrm{Cpl}(Y)$ 是 $\mathrm{Ban}_R^{\leq 1}$（相应地，在$\mathrm{Ban}_R^{nA\leq 1}$，）中的严格单态射。

证明。 显然 $\mathsf{Cpl}(u)$ 是等距映射。我们需要证明它具有闭像。设 $[(x_{n,\ m})_n]_m$ 是 $\mathsf{Cpl}(X) \subset \mathsf{Cpl}(Y)$ 中收敛于某个 $y \in \mathsf{Cpl}(Y)$ 的序列。特别地，$[(x_{n,\ m})_n]_m$ 在 $\mathsf{Cpl}(Y)$ 中是柯西的。于是它在 $\mathsf{Cpl}(X)$ 中也是柯西的，因而在 $\mathsf{Cpl}(X)$ 中收敛。非阿基米德情形完全相同。□

推论 4.19. (1) 函子 $\mathrm{Cpl} : \mathrm{SNrm}_R^{\leq 1} \to \mathrm{Ban}_R^{\leq 1}$ 对于仿阿贝尔原恰当结构是正合的。(2) 函子 $\mathrm{Cpl} : \mathrm{SNrm}_R^{nA\leq 1} \to, \mathrm{Ban}_R^{nA\leq 1}$，对于拟阿贝尔正合结构是正合的。

证明。 我们证明第一个断言，第二个证明完全相同。函子 Cpl 是包含映射 $\mathsf{Ban}_R^{\leq 1} \to \mathsf{SNrm}_R^{\leq 1}$ 的左伴随。因此它与余核可交换。考虑一个短正合列

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

在 $\mathsf{SNrm}_R^{\leq 1}$ 中。那么 $\mathsf{Cpl}(f)$ 是严格单态射，因此是其余核的核。但它的余核是 $\mathsf{Cpl}(g)$。证明完毕。□

引理 4.20。 (1) 滤过余极限在$\mathrm{SNrm}_R^{\leq 1}$ 和$\mathrm{Ban}_R^{\leq 1}$ 中是正合的。在$\mathrm{SNrm}_R^{\leq 1}$ 中，滤过余极限实际上是强正合的——也就是说，它们与核和余核可交换。(2)滤过余极限在$\mathrm{SNrm}_R^{nA\leq 1}$,和$\mathrm{Ban}_R^{nA\leq 1}$,中是正合的。在$\mathrm{SNrm}_R^{nA\leq 1}$,中，滤过余极限实际上是强正合的——也就是说，它们与核和余核可交换。(3) 在范畴$\mathrm{Nrm}_R^{\leq 1}$ 和$\mathrm{Nrm}_R^{nA\leq 1}$,中，所有对象构成的类都是可并合的。

证明。 (1) 首先证明，$\mathsf{SNrm}_R^{\leq 1}$ 中的滤过余极限与所有核和余核相交换。显然，它们与余核相交换。令 $F, G : \mathbb{I} \to \mathsf{SNrm}_R^{\leq 1}$ 为滤向图表，并令 $\eta : F \to G$ 为一个自然变换。令 K 为由 $K(i) = \mathsf{Ker}(\eta(i))$ 定义的函子。令 $|-| : \mathsf{SNrm}_R^{\leq 1} \to |R|\mathsf{Mod}$ 表示到 $|R|$-模范畴的遗忘函子，其中$|R|$表示 R的底环。这个函子与所有极限和余极限相交换。特别地，底层模的

$$\mathrm{colim}_i \mathrm{Ker}(\eta(i))$$

and

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{colim}_i \eta(i))$$

相同。剩下只需验证半范数相同。这由余极限上的半范数以及子模半范数的显式描述得出。关于 $\mathsf{Ban}_R^{\leq 1}$ 的结论现在由关于 $\mathsf{SNrm}_R^{\leq 1}$ 的结论以及 Cpl 的正合性推出。 ——

(2) 这与第一个断言相同。

(3) 设 C 表示 $\mathrm{Nrm}_R^{\leq 1}$ 或 $\mathrm{Nrm}_R^{nA\leq 1}$,。我们需要证明，对任意赋半范 R-模 N，以及任意超限序列

$$F:\lambda\to\mathcal{C}$$

配备了一个自然变换 $\eta: F\to \mathrm{cst}(N)$ 到 N 上的常值图，使得对每个 α， $\eta(\alpha):F(\alpha)\to N$都是严格单态射，那么余极限

$$\mathrm{colim}_\alpha F(\alpha)\to N$$

是严格单态射。根据第（1）部分，半赋范模的余极限

$$\mathrm{colim}_\alpha^{\mathrm{SNrm}} F(\alpha)\to N$$

是严格单态射。这尤其意味着，在半赋范模范畴中计算的余极限 $\mathrm{colim}_\alpha^{\mathrm{SNrm}} F(\alpha)$，与 N 的一个子模等距同构。因此，它是赋范的。于是它也是赋范模的余极限，证毕。

□

推论 4.21. 第（1）部分 范畴 $\mathrm{SNrm}_R^{\leq 1}$ 是纯$\aleph_1$-局部可呈的，且滤向余极限的函子是强正合的。范畴 $\mathrm{Nrm}_R^{\leq 1}$ 是纯$\aleph_1$-局部可呈的，且所有对象组成的类可并合。范畴 $\mathrm{Ban}_R^{\leq 1}$ 是纯$\aleph_1$-局部可呈的，且滤向余极限的函子是正合的。特别地，所有范畴都有足够的内射对象。

(2)范畴$\mathrm{SNrm}_R^{nA\leq 1}$，是纯$\aleph_1$-局部可呈范畴，具有滤过余极限的强正合函子。范畴$\mathrm{Nrm}_R^{nA\leq 1}$，是纯$\aleph_1$-局部可呈范畴，且全体对象类是可并合的。范畴$\mathrm{Ban}_R^{nA\leq 1}$，是纯$\aleph_1$-局部可呈范畴，并具有滤过余极限的正合函子。特别地，所有范畴都有足够的内射对象。

4.2. **可缩放余挠理论**。设 A 为 $\mathrm{SNrm}_R^{\leq 1}$ 中的一个对象类（相应地，在 $\mathrm{SNrm}_R^{nA\leq 1}$，、$\mathrm{Nrm}_R^{\leq 1}$、$\mathrm{Nrm}_R^{nA\leq 1}$，$\mathrm{Ban}_R^{\leq 1}$ 或 $\mathrm{Ban}_R^{nA\leq 1}$，中）。我们称 A 是可缩放的，如果每当 $A\in$A, 且 $A'\to A$ 或 $A\to A'$ 是 SNrm_R 中的同构（相应地，在 Ban_R、SNrm_R^{nA} m 或 Ban_R^{nA} 中）——不仅仅在 $\mathrm{SNrm}_R^{\leq 1}$ 中——则 $A'\in$A。此后我们将专注于情形 $\mathrm{SNrm}_R^{\leq 1}$，但下面的讨论同样适用于 $\mathrm{SNrm}_R^{nA\leq 1}$，、$\mathrm{Nrm}_R^{\leq 1}$、$\mathrm{Nrm}_R^{nA\leq 1}$，、$\mathrm{Ban}_R^{\leq 1}$ 和 $\mathrm{Ban}_R^{nA\leq 1}$，。我们令 A$^{\perp}$ 表示 $\mathrm{SNrm}_R^{\leq 1}$ 中的右正交类，A$^{\perp}$ 表示 SNrm_R 中的右正交类。

设 A 是 $\mathrm{SNrm}_R^{\leq 1}$ 中的一个可缩放类。我们证明 A$^{\perp}\subseteq$A$^{\perp}$。设

$$0\longrightarrow K\xrightarrow{f} X\xrightarrow{g} Y\longrightarrow 0$$

是 SNrm_R 中的一个正合序列。考虑同构正合列

$$0\longrightarrow \mathrm{Im}(f)\xrightarrow{i_f} X\xrightarrow{q_f} X\big/\mathrm{Im}(f)\longrightarrow 0.$$

这是 $\mathrm{SNrm}_R^{\leq 1}$ 中的一个正合序列，其中 $\mathrm{Im}(f)\in$ A。

We shall 写作 t $\mathrm{h}_{\text{放}}^{\text{被重新缩}}$ led 正合序列为

$$0\to\overline{K}\to X\to\overline{L}\to 0$$

在 $\mathrm{SNrm}_R^{\leq 1}$ 中。最后，设 $T\in$A$^{\perp}$。现在我们有

$$0\to\mathrm{Hom}^{\leq 1}(\overline{L},T)\to\mathrm{Hom}^{\leq 1}(X,T)\to\mathrm{Hom}^{\leq 1}(\overline{K},T)\to 0$$

是右半正合的。

对于 $r \in \mathbb{R}_{>0}$，用 $\mathbf{Hom}^{\leq r}(X,Y)$ 表示范数不超过 r 的有界态射集合。我们有

$$\mathrm{Hom}^{\leq r}(X,Y) \cong \mathrm{Hom}^{\leq 1}(X_r, Y).$$

对于每个 $n \in \mathbb{N}$，带基点集合的序列

$$0 \to \mathrm{Hom}^{\leq n}(\overline{L}, T) \to \mathrm{Hom}^{\leq n}(X,T) \to \mathrm{Hom}^{\leq n}(\overline{K}, T) \to 0$$

于是就是

$$0 \to \mathrm{Hom}^{\leq 1}(\overline{L}_n, T) \to \mathrm{Hom}^{\leq 1}(X_n,T) \to \mathrm{Hom}^{\leq 1}(\overline{K}_n, T) \to 0.$$

现在 $\overline{L}_n$ 在 $\mathbf{Ban}_R$ 中同构于 L，因此属于 A。该序列

$$0 \to \overline{K}_n \to X_n \to \overline{L}_n \to 0$$

是短正合的。因此

$$0 \to \mathrm{Hom}^{\leq 1}(\overline{L}_n, T) \to \mathrm{Hom}^{\leq 1}(X_n,T) \to \mathrm{Hom}^{\leq 1}(\overline{K}_n, T) \to 0$$

是右半正合的。对 $\mathbb{N}$ 取余极限，得到

$$0 \to \mathrm{Hom}(\overline{L}, T) \to \mathrm{Hom}(X,T) \to \mathrm{Hom}(\overline{K}, T) \to 0$$

是右半正合的。但现在这是一个阿贝尔群的序列。因此它是短正合的，且 $T \in \mathsf{A}^{\perp}$。

现在假设对 $(\mathsf{A}, \mathsf{A}^{\perp})$ 这一对而言，它是完备的。也就是说，对于任意对象 $X \in \mathbf{SNrm}_R^{\leq 1}$，存在一个正合序列

$$0 \to X \to B \to A \to 0$$

其中 $B \in \mathsf{A}^{\perp}$ 且 $A \in \mathsf{A}$，并且存在一个正合序列

$$0 \to F \to G \to A \to 0$$

其中 $G \in \mathsf{A}$ 且 $F \in \mathsf{A}^{\perp}$。

那么我们自然可以得到，$(\mathsf{A}, \mathsf{A}^{\perp})$ 作为一对是完备的。因此我们得到以下结果。

定理 4.22。内射余挠对 $(\mathrm{SNrm}_R^{\leq 1}, \mathrm{Inj}_R^{\leq 1})$ 是 $\mathrm{SNrm}_R^{\leq 1}$ 中的可扩展完全余挠对。因此，$(\mathrm{SNrm}_R^{\leq 1}, \mathrm{Inj}_R^{\leq 1})$ 是完全余挠对。特别地，$\overline{\mathrm{Inj}}_R^{\leq 1} = \mathrm{Inj}_R$，且 SNrm_R 有足够的内射对象。这也适用于 SNrm_R^{nA}、Nrm_R、Nrm_R^{nA}、Ban_R 和 Ban_R^{nA}。

参考文献

[1] Jiří Adámek 和 Jiří Rosický，《局部可表现与可及范畴》，伦敦数学会讲义系列，第 189 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1994。MR **1294136**[2] Tibor Beke 和 Jirí Rosick`y，《抽象初等类与可及范畴》，《纯粹与应用逻辑年刊》**163**（2012），第 12 期，2008–2017。[3] Oren Ben-Bassat、Jack Kelly 和 Kobi Kremnizer，《导出解析几何基础的一种视角》，arXiv 预印本 arXiv:2405.07936（2024）。[4] Oren Ben-Bassat 和 Kobi Kremnizer，《作为相对代数几何的非阿基米德解析几何》，《图卢兹科学院数学纪事》（ 6 **26** 2017 1, 49 126 **3626003** ）（），[5] 第 – 期。MR L. Bican、R. El Bashir 和 E. Enochs，《所有模都有平坦覆盖》，《伦敦数学会通报》**33**（2001），第 4 期，385–390。MR **1832549**[6] Francis Borceux，《范畴代数手册。第 *2* 册，数学及其应用百科全书第 *51* 卷》，剑桥大学出版社，剑桥，1994。

[7] Haim Brezis 和 Haim Brézis, 《泛函分析、Sobolev空间与偏微分方程》, 第 2 卷, Springer, 2011。[8] Theo Bühler, 《正合范畴》, Expo. Math. 28（2010）, 第 1 期, 1–69。MR 2606234[9] Tobias Dyckerhoff 和 Mikhail Kapranov, 《高阶Segal空间》, 数学讲义, 第 2244 卷, Springer, Cham, 2019。MR 3970975[10] Tobias Dyckerhoff、Mikhail M Kapranov 等, 《高阶Segal空间》, 第 2244 卷, Springer, 2019。[11] Paul C. Eklof 和 Jan Trlifaj, 《如何使 Ext 消失》, 《伦敦数学会通报》 33（2001）, 第 1 期, 41–51。MR 1798574[12] Sergio Estrada, 《经由模型结构研究 Artin叠上的拟凝聚模导出范畴》, Int. Math. Res. Not. IMRN

15 2015 6411 6432 **3384483** （）, –。MR Ja

[13] R

mes Gillespie, 《Ch() 上的平坦模型结构》, Trans. Amer. Math. Soc. 356（2004）, 第 8 期, 3369–3390。MR 2052954[14] , 《层复形上的平坦模型结构》, 《美国数学会汇刊》358（2006）, 第 7 期, 2855–2874。[15] Horst Herrlich 和 George E. Strecker, 《范畴论》, 第三版, 纯数学 Sigma 系列, 第 1, 2007 **2377903** 卷,

[16]

Heldermann Verlag, Lemgo, 。导论。MR Mark Hovey, 《模型范畴》, 数学调查与专著, 第 63 卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 1999。MR 1650134[17] Tim Campion（ https://mathoverflow.net/users/2362/tim campion）, 《两个可呈现对象的二元积》。网址: https://mathoverflow.net/q/306129（版本: 2019-03-12）。[18] , 哪些半环的模范畴有足够的内射对象? 网址: https://mathoverflow.net/q/277284（版本: 2017-07-26）。[19] Mike Shulman（ https://mathoverflow.net/users/49/mike shulman）, 《可呈现对象在有限极限下的闭包》。网址: https://mathoverflow.net/q/324621（版本: 2019-03-04）。[20] Jack Kelly, 《可达正合范畴的平坦模型结构》, arXiv 预印本 arXiv:2401.06679（2024）。[21] , 《正合范畴中的同伦》, Mem. Amer. Math. Soc. 298（2024）, 第 1490 期, v+160。MR 4756824[22] Sergey Mozgovoy, 《原正合与旁阿贝尔范畴》, arXiv 预印本 arXiv:2503.05940（2025）。[23] L. Positselski 和 J. Rosický, 《局部可呈现阿贝尔范畴与反模范畴中的覆盖、包络和余挠理论》, J. Algebra

483 2017 83 128 **3649814** （）, –。

[24] ,

33 2018

MR《近局部可呈现范畴》, Theory Appl. Categ.（）, 第 10 篇, 253 264 3795415 –。MR[25] Leonid Positselski, 《局部相容正合范畴》, arXiv 预印本 arXiv:2311.02418（2023）。[26] , 《可及范畴中的纯单态射与纯满态射》, arXiv 预印本 arXiv:2506.13374（2025）。[27] Manuel Saorín 和 Jan Šťovíček, 《正合范畴及其在三角伴随与模型结构中的应用》, Adv. Math.

228 2011 2, 968 1007 **2822215** （）, 第 – 期。

[28]

MR Mike Shulman, 《关于可表现性与尖锐大滤子的迷思》, 2019。 https://golem.ph.utexas.edu/category/2019/03/the_myths_of_presentability_an.html。[29] Jan Šťovíček, 《正合模型范畴、逼近理论与拟凝聚层上同调》, 《代数表示论进展》, 2013, 第 297–367 页。 MR 3220541 电子邮件地址: jack.kelly@lincoln.ox.ac.uk