arXiv:2603.07846v1 [math-ph] 8 Mar 2026

二$SL(2,\mathbb{C})$-特征簇上的有限群作用及其对超共形场论的应用

Semeon Arthamonov*

Anton Pribytok†

摘要

我们研究亏格二曲面群的 $SL(2,\ \mathbb{C})$-特征簇在 $Mod(\Sigma_2)$ 的有限群保向作用下的不动点集的不可约分支。我们采用亏格二 DAHA 的 $\mathcal{O}$-生成元表示及其经典极限 $\mathcal{A}_{q=1,\ t}$，并在其中观察到附属于不同子群的不动点轨迹之间存在非平凡的重合，同时确立了亏格/不规则性跃迁。由此得到的子簇为与 $4d$ $\mathcal{N}=2$ 超共形场论相关的对称性约化模空间提供了新颖的几何候选。

*电子邮件：arthamonov@bimsa.cn

†电子邮件：antonspribitoks@bimsa.cn

目录

1 引言 2

1.1 特征簇.3 1.2 映射类群作用.3

2 双仿射 Hecke 代数的经典极限与 $Mod(\Sigma_2)$ 子群 4

2.1 G_a子群.5 2.2 G_b 或 G_f 子群.5 2.3 G_c子群.6 2.4 G_e子群.7 2.5 G_h 或 G_o 子群.9 2.6 G_i 或 G_p 子群.10 2.7 G_{k_1} 子群.11 2.8 G_{k_2} 或 G_s 子群.12 2.9 G_l子群.13 2.10 G_m子群.15 2.11 G_n子群.17 2.12 G_r 或 G_w 子群.18 2.13 G_u子群.19 2.14 G_x子群.19

3 $\mathcal{N}=2$ 超共形场论的诠释与有限群商 21

A 亏格二 DAHA 与扭曲作用 23

A.1 J生成元与$\mathcal{A}_{1,\ t}$ 关系.23 A.2 映射类群 $Mod(\Sigma_2)$ 与自同构 . . . . . 24 A.3 有限子群 ζ-扭曲作用.25

1 引言

亏格二和三的曲面上的有限子群保向作用已在 [Bro91] 中分类。随后， [NN18] 以 Humphreys生成元的形式构造了该作用的表示。

另一方面，在 [Art25] 中，第一作者基于其与 Sh. Shakirov 的先前工作 [AS19], ，构造了亏格二曲面基本群的 (2，$\mathbb{C}$)-特征簇及其平坦泊松变形的生成元与关系表示。特征簇及其变形都具有亏格二曲面映射类群的作用。

这使得我们能够考察诱导作用在 $SL(2,\ \mathbb{C})$-特征簇上的不动点子簇（这些子簇可能是可约的）及其变形。除一个例外外，我们发现这些簇可分解为不可约分支。

1.1 特征簇。

设 Σ_g 为一个亏格为 g的定向曲面，其基本群有一个由 $2g$ 个生成元和一个关系构成的表示

$$\pi_1(\Sigma_g) = \left\langle X_i, Y_i,\ 1 \le i \le g \;\middle|\; [X_1, Y_1] \dots [X_g, Y_g] = 1 \right\rangle. \tag{1}$$

对于曲面 Σ_g 和复仿射代数群 G ，可以将基本群 $\pi_1(\Sigma_g)$关联到一个表示簇$\mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma_g)\ G)$。根据定义，表示簇的坐标环是由底层代数群 G 的坐标环的 $2g$ 个副本取商得到的，并满足从基本群的唯一关系 (1) 导出的附加关系

$$\mathbb{C}[\mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), G)] := \frac{\mathbb{C}[G]^{2g}}{(r_1, \dots, r_k)}. \tag{2}$$

当 $G = GL(n,\ \mathbb{C})$或 $SL(n,\ \mathbb{C})$时（这是本文所关注的唯一情形），环 (2) 已知是一个整环（例如，参见 [Sik12]中的命题 40）。在这种情况下，坐标环没有零因子，尤其没有幂零元。

群 G 通过同时共轭作用于表示簇；这一作用是代数的，并在坐标环上诱导出相应的作用。考虑后者的一个 G-不变子环

$$\mathbb{C}[\mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma_g), G)]^G \ \subset\ \mathbb{C}[\mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma), G)], \tag{3}$$

其谱称为基本群的 特征簇 $\pi_1(\Sigma_g)$。

当 G是约化的时，不变量子环（3）必然具有有限个生成元和有限个关系的有限表示。然而，从计算角度看，要明确找出这样的有限表示，对于具有 $g > 1$ 的曲面而言，是一个众所周知的难题。

1.2 映射类群作用。

曲面 Σ_g 的保定向微分同胚群模去同伦于恒等映射的微分同胚后，所得商群称为该曲面的 映射类群

$$\mathrm{Mod}(\Sigma_g) := \frac{Diff^+(\Sigma_g)}{Diff_0(\Sigma_g)}.$$

闭定向曲面的映射类群由有限个德恩扭转生成 [Deh38, Hum79]（见图 1）。有限个生成元和有限个关系的显式有限表示见[Waj83]。

特别地，亏格二曲面的映射类群 $\mathrm{Mod}(\Sigma_2)$ 由五个德恩扭转生成，它们分别对应于图 2 所示的简单闭曲线。

固定简单闭曲线的一组一般代表元 γ_1、.....、γ_5 $\subset\Sigma_2$。现在令 $p \in \Sigma_2 \setminus (\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_5)$ 为这些弧之外的一般点。每个左德恩扭转都通过基本群$\pi_1(\Sigma_2$、$p)$在 p 处的自同构作用。这就产生了映射类群在 $\mathbb{C}[\mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma_2$、 $p)\ G)]^G$ 上通过交换环自同构给出的作用。

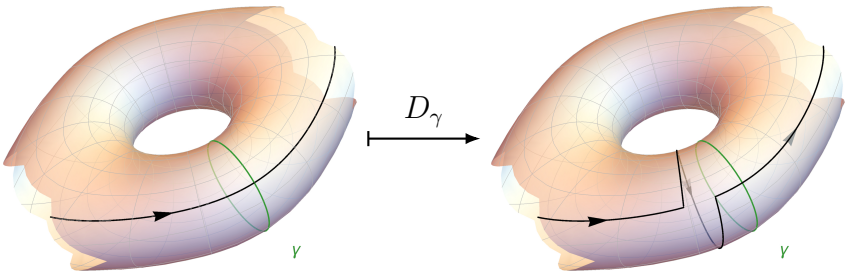


图 1：沿简单闭曲线的左德恩扭转 γ

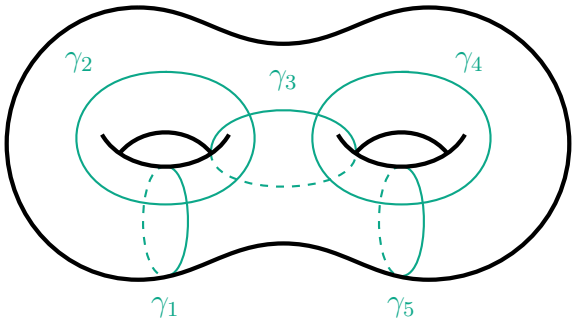


图 2：对应于 Mod(Σ_2) 生成元的简单闭曲线

现在令 $\Gamma \subset$Mod(Σ_2) 为映射类群的一个有限子群。我们关注特征簇中被 Γ 固定的闭点子集。为此，我们将消失理想计算为由约束生成的理想的根基。在大多数情况下，所得的根基理想并非素理想。我们成功计算了除一个之外所有消失理想的素分解，并在下一节给出结果。

值得注意的是，映射类群在 $SL(2,\mathbb{C})$-特征簇上的作用并不忠实，因为双曲 involution 的作用是平凡的。这自然导致了以下事实 G_a

2 DAHA 的经典极限与 $Mod(\Sigma_2)$ 子群

本节讨论亏格二 DAHA 的交换经典极限 $q=1$，并在 $\mathcal{O}$-生成元表示中分析有限子群 $\Gamma \subset$ Mod(Σ_2) 的不动点轨迹。由于 $\mathcal{A}_{q=1,t}$ 是一个单参数平坦泊松变形

$$\mathcal{A}_{q=t=1} \cong \mathbb{C}\big[\mathrm{Hom}\big(\pi_1(\Sigma_2), SL(2,\mathbb{C})\big)\big]^{SL(2,\mathbb{C})},$$

其中每个子群作用都给出一组代数约束，其根基理想描述了相应的经典且 t-变形不动点簇。

事实证明，对于每个 $Mod(\Sigma_2)$ 子群，如 [Bro91], ，我们都可以计算根基理想、它们的初等分解以及其他特征

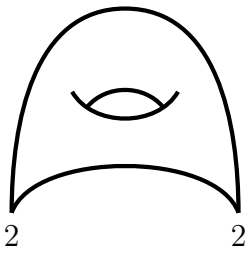
既可以在 $t=1$ 纤维上，也可以在 t-变形族中。我们还指出了不同子群产生等价簇的情形：这是因为它们的作用相差一个双曲 involution ζ_0，或者看起来以相当非平凡的形式映射。在后一种情形中，涉及亏格和奇点数量的变化。特别是，平凡的 G_a 情形重现了完整的 6 维簇，而其余情形则给出 4 维和 2 维族，以及孤立的零维分支。

2.1 G_a子群

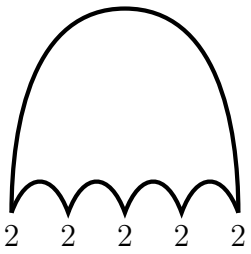
$G_a \cong \mathbb{Z}_2$, $|G_a| = 2$，数据 $\{0;\ \{2,6\}\}$ 通过扭转 ζ_0 作用，这对应于初始亏格二 DAHA 的一个自同构，并保持所有生成元 $\mathcal{O}$不变，因此重现了整个 6 维 DAHA 簇。

2.2 G_b 或 G_f 子群

$G_b \cong \mathbb{Z}_2$、$|G_b| = 2$，数据 $\{1;\ \{2,2\}\}$:



(a) 情形 G_b



(b) 情形 G_f

图 3：第 2.2 节中覆盖映射的分歧数据。

$$
I_b:\quad
\begin{aligned}
&\mathcal{O}_4=\mathcal{O}_1,\quad \mathcal{O}_5=\mathcal{O}_2,\quad \mathcal{O}_6=\mathcal{O}_3,\quad \mathcal{O}_{4,5}=\mathcal{O}_{1,2},\quad \mathcal{O}_{5,6}=\mathcal{O}_{2,3},\quad \mathcal{O}_{6,1}=\mathcal{O}_{3,4},\\
&\left(\mathcal{O}_1\mathcal{O}_3-\mathcal{O}_{1,2}\mathcal{O}_{2,3}\right)\mathcal{O}_{3,4}-\mathcal{O}_2\left(2\mathcal{O}_1\mathcal{O}_3-\mathcal{O}_1\mathcal{O}_{1,2}-\mathcal{O}_3\mathcal{O}_{2,3}\right)=0,\\
&\mathcal{O}_2\mathcal{O}_{1,2,3}-\left(2\mathcal{O}_2-\mathcal{O}_1\mathcal{O}_3+\mathcal{O}_{1,2}\mathcal{O}_{2,3}\right)=0,\\
&\left(\mathcal{O}_1\mathcal{O}_3-\mathcal{O}_{1,2}\mathcal{O}_{2,3}\right)\left(\mathcal{O}_{3,4,5}-2\right)+\mathcal{O}_2\left(\mathcal{O}_3-\mathcal{O}_{1,2}\right)^2=0,\\
&\left(\mathcal{O}_1\mathcal{O}_3-\mathcal{O}_{1,2}\mathcal{O}_{2,3}\right)\mathcal{O}_{2,3,4}+\mathcal{O}_1^2\mathcal{O}_2-2\mathcal{O}_1\mathcal{O}_3-2\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2\mathcal{O}_{2,3}+2\mathcal{O}_{1,2}\mathcal{O}_{2,3}+\mathcal{O}_2\mathcal{O}_{2,3}^2=0,\\
&\left(\mathcal{O}_1\mathcal{O}_3-\mathcal{O}_{1,2}\mathcal{O}_{2,3}\right)\Big(2\mathcal{O}_2\left(2+\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2\mathcal{O}_3\right)-\mathcal{O}_2\left(\mathcal{O}_1^2+2\mathcal{O}_3\mathcal{O}_{1,2}+\mathcal{O}_{2,3}^2\right)+\left(2\mathcal{O}_2-\mathcal{O}_1\mathcal{O}_3\right.\\
&\left.+\mathcal{O}_{1,2}\mathcal{O}_{2,3}\right)\mathcal{O}_{2,3,4}\Big)+2\mathcal{O}_2\Big(\mathcal{O}_2^2\left(-2\mathcal{O}_1\mathcal{O}_3+\mathcal{O}_1\mathcal{O}_{1,2}+\mathcal{O}_3\mathcal{O}_{2,3}\right)-\mathcal{O}_2\left(\mathcal{O}_3-\mathcal{O}_{1,2}\right)^2\Big)=0.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

t-变形。

$$\mathcal{O}_4=\mathcal{O}_1,\quad \mathcal{O}_5=\mathcal{O}_2,\quad \mathcal{O}_6=\mathcal{O}_3,\quad \mathcal{O}_{4,5}=\mathcal{O}_{1,2},\quad \mathcal{O}_{5,6}=\mathcal{O}_{2,3},\quad \mathcal{O}_{6,1}=\mathcal{O}_{3,4},$$

$$I_b^{(t)}:\quad \begin{aligned}&\sqrt{t}\,\mathcal{O}_2\mathcal{O}_{1,2,3}-\sqrt{t}\,\mathcal{O}_1\mathcal{O}_3+\sqrt{t}\,\mathcal{O}_{1,2}\mathcal{O}_{2,3}-\mathcal{O}_2(1+t)=0,\\&\sqrt{t}\,\mathcal{O}_3\mathcal{O}_{2,3,4}-\sqrt{t}\,\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2+\sqrt{t}\,\mathcal{O}_{2,3}\mathcal{O}_{3,4}-\mathcal{O}_3(1+t)=0,\\&\sqrt{t}\,\mathcal{O}_1\mathcal{O}_{3,4,5}-\sqrt{t}\,\mathcal{O}_2\mathcal{O}_3+\sqrt{t}\,\mathcal{O}_{1,2}\mathcal{O}_{3,4}-\mathcal{O}_1(1+t)=0,\\&\big(\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2\mathcal{O}_{1,2}+\mathcal{O}_2\mathcal{O}_3\mathcal{O}_{2,3}+\mathcal{O}_1\mathcal{O}_3\mathcal{O}_{3,4}-\mathcal{O}_{1,2}\mathcal{O}_{2,3}\mathcal{O}_{3,4}\big)\sqrt{t}-\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2\mathcal{O}_3(1+t)=0.\end{aligned}\tag{5}$$

如 G_a 子群情形所示，可以证明，对于两个子群 G_b 与 $G_f\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ （$|G_f|=4$，$\{0;\ \{2,5\}\}$），4 维根理想表现为等价，这是由于 ζ_0引起的扭曲作用差异所致，而 ζ_0是亏格二 DAHA 的自同构。

2.3 G_c子群

（$G_c\cong\mathbb{Z}_3$，$|G_c|=3$，数据 $\{0;\ \{3,4\}\}$）：

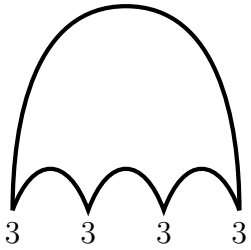


图 4：情形 G_c中覆盖映射的分歧数据

$t=1$： $I_1\cap I_2\cap I_3$，维数为 $\dim(I_1,I_2,I_3)=(2,0,0)$

$$I_1:\quad \begin{aligned}&\mathcal{O}_2=\mathcal{O}_4=\mathcal{O}_6,\qquad \mathcal{O}_{1,2}=\mathcal{O}_{3,4}=\mathcal{O}_{5,6},\\&\mathcal{O}_{2,3}=\mathcal{O}_{4,5}=\mathcal{O}_{6,1},\qquad \mathcal{O}_{1,2,3}=\mathcal{O}_{2,3,4}=\mathcal{O}_{3,4,5},\\&\mathcal{O}_1=\mathcal{O}_3=\mathcal{O}_5=-\frac{1}{3}\Big(3\mathcal{O}_6+\mathcal{O}_{3,4,5}^3+2\mathcal{O}_{3,4,5}^2\\&-\mathcal{O}_{3,4,5}\big(\mathcal{O}_{5,6}\mathcal{O}_{6,1}+\mathcal{O}_{5,6}+\mathcal{O}_{6,1}+3\big)-6\Big)\\&\mathcal{O}_6^2-\mathcal{O}_6(\mathcal{O}_{3,4,5}+2)+\mathcal{O}_{5,6}+\mathcal{O}_{6,1}=0,\\&\mathcal{O}_{5,6}(\mathcal{O}_{6,1}+1)+\mathcal{O}_{6,1}-\mathcal{O}_{3,4,5}(\mathcal{O}_{3,4,5}+2)=0\,.\end{aligned}\tag{6}$$

$$\begin{cases}I_2=\Big\langle\ \mathcal{O}_i+1,\ \mathcal{O}_{i\,i+1}+1,\ \mathcal{O}_{abc}-2\ \Big\rangle\\ I_3=\Big\langle\ \mathcal{O}_i,\ \mathcal{O}_{i\,i+1}-2,\ \mathcal{O}_{j,j+1,j+2}+1\ \Big\rangle\end{cases},\quad \forall\, i=\overline{1,\,6}\text{ and }j=(1,2,3)_{\text{cyc}}\tag{7}$$

t-变形： $I_1 \cap I_2$，维数为 $\dim(I_1, I_2) = (2,0)$

$$
I_1^{(t)}:\quad
\begin{aligned}
&\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_3 = \mathcal{O}_5, \quad \mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_4 = \mathcal{O}_6, \quad \mathcal{O}_{1,2} = \mathcal{O}_{3,4} = \mathcal{O}_{5,6},\\
&\mathcal{O}_{2,3} = \mathcal{O}_{4,5} = \mathcal{O}_{6,1} = \mathcal{O}_1\mathcal{O}_2 - \mathcal{O}_{1,2}, \quad \mathcal{O}_{1,2,3} = \mathcal{O}_{2,3,4} = \mathcal{O}_{3,4,5} = \mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2 - \frac{1+t}{\sqrt{t}},\\
&\mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2 - \sqrt{t}\Big(\mathcal{O}_1^2 + \mathcal{O}_2^2 + \mathcal{O}_{1,2}^2 + \mathcal{O}_1\mathcal{O}_2(1 - \mathcal{O}_{1,2})\Big) + (\mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2)t = 0.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

$$
I_2^{(t)}:\quad
\begin{aligned}
&\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_3 = \mathcal{O}_4 = \mathcal{O}_5 = \mathcal{O}_6 = t^{-1/6} + t^{1/6},\\
&\mathcal{O}_{1,2} = \mathcal{O}_{2,3} = \mathcal{O}_{3,4} = \mathcal{O}_{4,5} = \mathcal{O}_{5,6} = \mathcal{O}_{6,1}\\
&\qquad = \frac{1}{2}\Big(2 + (1 + i\sqrt{3})\, t^{-1/3} + (1 - i\sqrt{3})\, t^{1/3}\Big),\\
&\mathcal{O}_{1,2,3} = \mathcal{O}_{2,3,4} = \mathcal{O}_{3,4,5} = \frac{(1 + t^{1/3})\big(1 + i\sqrt{3} + (1 - i\sqrt{3})t^{2/3}\big)}{2\, t^{1/2}}.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

2.4 G_e子群

$G_e \cong \mathbb{Z}_4$, $|G_e| = 4$, 数据 $\{0;\ \{2,2\},\ \{4,2\}\}$。

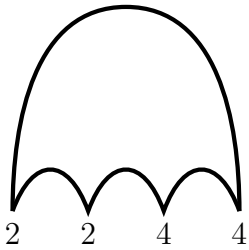


图 5：情形 G_e中覆盖映射的分歧数据

$I_1 \cap I_2$且 $\dim(I_1,\ I_2) = (2,\ 2)$:

$$
I_1:\quad
\begin{aligned}
&\mathcal{O}_4 = \mathcal{O}_2, \qquad \mathcal{O}_5 = \mathcal{O}_1, \qquad \mathcal{O}_{6,1} = \mathcal{O}_{4,5}, \qquad \mathcal{O}_{3,4,5} = \mathcal{O}_1,\\
&\mathcal{O}_6 = 2(\mathcal{O}_2 - 1), \quad \mathcal{O}_{1,2} = \mathcal{O}_1\mathcal{O}_2 - \mathcal{O}_{4,5}, \qquad \mathcal{O}_{5,6} = 2(\mathcal{O}_2 - 1)\mathcal{O}_1 - \mathcal{O}_{4,5},\\
&\mathcal{O}_{3,4} = \frac{\mathcal{O}_1^2}{2}, \qquad \mathcal{O}_{2,3} = \frac{\mathcal{O}_{4,5}^2}{2},\\
&\mathcal{O}_{1,2,3} = \mathcal{O}_1 + (\mathcal{O}_2 - 2)\mathcal{O}_{4,5}, \qquad \mathcal{O}_{2,3,4} = \mathcal{O}_3 + 2(\mathcal{O}_2 - 2),\\
&2\mathcal{O}_2\mathcal{O}_3 - \mathcal{O}_1^2 - \mathcal{O}_{4,5}^2 = 0, \quad \mathcal{O}_1^2 + \mathcal{O}_{4,5}^2 + 2\mathcal{O}_2^2 - \mathcal{O}_1\mathcal{O}_2\mathcal{O}_{4,5} - 4\mathcal{O}_2 = 0.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{O}_4=\mathcal{O}_2,\qquad \mathcal{O}_5=-\mathcal{O}_1,\qquad \mathcal{O}_{6,1}=\mathcal{O}_{4,5},\qquad \mathcal{O}_{3,4,5}=-\mathcal{O}_1,\\
&\mathcal{O}_6=-2(1+\mathcal{O}_2),\quad \mathcal{O}_{1,2}=\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2+\mathcal{O}_{4,5},\qquad \mathcal{O}_{5,6}=\mathcal{O}_{4,5}+2\mathcal{O}_1(1+\mathcal{O}_2),\\
&2\mathcal{O}_{3,4}-\mathcal{O}_1^2=0,\qquad 2\mathcal{O}_{2,3}-\mathcal{O}_{4,5}^2=0,\\
I_2:\quad &2\mathcal{O}_2\mathcal{O}_3-\mathcal{O}_1^2-\mathcal{O}_{4,5}^2=0,\quad 2\mathcal{O}_2\mathcal{O}_{2,3,4}-\big(\mathcal{O}_1^2+8\mathcal{O}_2+4\mathcal{O}_2^2+\mathcal{O}_{4,5}^2\big)=0,\\
&2\mathcal{O}_2\mathcal{O}_{1,2,3}-\big(2\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2+\mathcal{O}_1^2\mathcal{O}_{4,5}+\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2\mathcal{O}_{4,5}^2+\mathcal{O}_{4,5}^3\big)=0,\\
&\mathcal{O}_1^2+\mathcal{O}_{4,5}^2+4\mathcal{O}_2+2\mathcal{O}_2^2+\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2\mathcal{O}_{4,5}=0.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

t-变形

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{O}_4=\mathcal{O}_2,\qquad \mathcal{O}_5=\mathcal{O}_1,\qquad \mathcal{O}_{6,1}=\mathcal{O}_{4,5},\qquad \mathcal{O}_{3,4,5}=\mathcal{O}_1,\\
&\sqrt{t}\,\mathcal{O}_6-2\mathcal{O}_2\sqrt{t}+(1+t)=0,\quad \mathcal{O}_{1,2}-\big(\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2-\mathcal{O}_{4,5}\big)=0,\\
&2\mathcal{O}_{2,3}-\mathcal{O}_{4,5}^2=0,\qquad 2\mathcal{O}_{3,4}-\mathcal{O}_1^2=0,\qquad 2\mathcal{O}_2\mathcal{O}_3-\mathcal{O}_1^2-\mathcal{O}_{4,5}^2=0,\\
I_1^{(t)}:\quad &\sqrt{t}\,\big(\mathcal{O}_{5,6}+\mathcal{O}_{4,5}-2\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2\big)+\mathcal{O}_1(1+t)=0,\\
&2\mathcal{O}_2\mathcal{O}_{1,2,3}+\mathcal{O}_1^2\mathcal{O}_{4,5}+\mathcal{O}_{4,5}^3-\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2\big(2+\mathcal{O}_{4,5}^2\big)=0,\\
&2\mathcal{O}_2\sqrt{t}\,\mathcal{O}_{2,3,4}-\big(\mathcal{O}_1^2+4\mathcal{O}_2^2+\mathcal{O}_{4,5}^2\big)\sqrt{t}+4\mathcal{O}_2(1+t)=0,\\
&2\mathcal{O}_2(1+t)-\sqrt{t}\,\big(\mathcal{O}_1^2+2\mathcal{O}_2^2-\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2\mathcal{O}_{4,5}+\mathcal{O}_{4,5}^2\big)=0.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

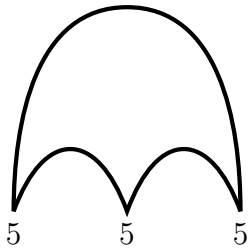
$$
\begin{aligned}
&\mathcal{O}_4=\mathcal{O}_2,\qquad \mathcal{O}_5=-\mathcal{O}_1,\qquad \mathcal{O}_{6,1}=\mathcal{O}_{4,5},\qquad \mathcal{O}_{3,4,5}=-\mathcal{O}_1,\\
&\sqrt{t}\,\mathcal{O}_6+\big(1+2\mathcal{O}_2\sqrt{t}+t\big)=0,\quad \mathcal{O}_{1,2}-\big(\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2+\mathcal{O}_{4,5}\big)=0,\\
&2\mathcal{O}_{2,3}-\mathcal{O}_{4,5}^2=0,\qquad 2\mathcal{O}_{3,4}-\mathcal{O}_1^2=0,\qquad 2\mathcal{O}_2\mathcal{O}_3-\mathcal{O}_1^2-\mathcal{O}_{4,5}^2=0,\\
I_2^{(t)}:\quad &\sqrt{t}\,(\mathcal{O}_{5,6}-\mathcal{O}_{4,5})-\mathcal{O}_1\big(1+2\mathcal{O}_2\sqrt{t}+t\big)=0,\\
&2\mathcal{O}_2\mathcal{O}_{1,2,3}-\Big(\mathcal{O}_1^2\mathcal{O}_{4,5}+\mathcal{O}_{4,5}^3+\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2(2+\mathcal{O}_{4,5}^2)\Big)=0,\\
&2\mathcal{O}_2\sqrt{t}\,\mathcal{O}_{2,3,4}-\big(\mathcal{O}_1^2+4\mathcal{O}_2^2+\mathcal{O}_{4,5}^2\big)\sqrt{t}-4\mathcal{O}_2(1+t)=0,\\
&\sqrt{t}\,\big(\mathcal{O}_1^2+2\mathcal{O}_2^2+\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2\mathcal{O}_{4,5}+\mathcal{O}_{4,5}^2\big)+2\mathcal{O}_2(1+t)=0.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{O}_2=\mathcal{O}_3=\mathcal{O}_4=2,\quad \mathcal{O}_6=\frac{1+t}{\sqrt{t}},\quad \mathcal{O}_{2,3}=\mathcal{O}_{3,4}=2-\frac{i(t-1)}{\sqrt{t}},\\
I_3^{(t)}:\quad &\mathcal{O}_1=\mathcal{O}_{1,2}=-\frac{(1+i)(\sqrt{t}-i)}{t^{1/4}},\quad \mathcal{O}_{5,6}=-\frac{(1-i)(i+t^{3/2})}{t^{3/4}}\\
&\mathcal{O}_5=\mathcal{O}_{4,5}=\mathcal{O}_{6,1}=-\frac{(1-i)(\sqrt{t}+i)}{t^{1/4}}\,.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

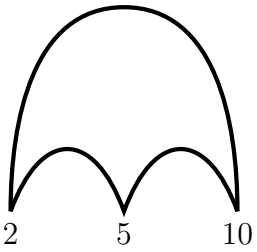
$$
\begin{aligned}
&\mathcal{O}_2=\mathcal{O}_3=\mathcal{O}_4=-2,\quad \mathcal{O}_6=\frac{1+t}{\sqrt{t}},\quad \mathcal{O}_{2,3}=\mathcal{O}_{3,4}=2-\frac{i(t-1)}{\sqrt{t}},\\
I_4^{(t)}:\qquad &\mathcal{O}_1=-\mathcal{O}_{1,2}=\frac{(1+i)(\sqrt{t}-i)}{t^{1/4}},\quad \mathcal{O}_{5,6}=-\frac{(1-i)(i+t^{3/2})}{t^{3/4}},\\
&-\mathcal{O}_5=\mathcal{O}_{4,5}=\mathcal{O}_{6,1}=\frac{(1-i)(\sqrt{t}+i)}{t^{1/4}}\,.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

2.5 G_h 或 G_o 子群

$G_h\cong\mathbb{Z}_5$, $|G_h|=5$, 数据 $\{0;\ \{5,3\}\}$



(a) 情形 G_h.



(b) 情形 G_o.

图 6：第 2.5 节情形下覆盖映射的分歧数据。

$t=1$: $I_1\cap I_2\cap I_3$ 其中 dim(I_1,I_2,I_3) $=$(0,0,0)

$$
I_1=\left\langle\,\mathcal{O}-2\,,\,\forall\,\mathcal{O}\,\right\rangle\qquad I_2:\quad
\begin{aligned}
&\mathcal{O}_1=\mathcal{O}_2=\mathcal{O}_3=\mathcal{O}_4=\mathcal{O}_{1,2,3}=\mathcal{O}_{2,3,4}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\\
&\mathcal{O}_5=\mathcal{O}_6=\mathcal{O}_{4,5}=\mathcal{O}_{6,1}=\mathcal{O}_{3,4,5}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\\
&\mathcal{O}_{1,2}=\mathcal{O}_{2,3}=\mathcal{O}_{3,4}=\mathcal{O}_{5,6}=2.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

$$
I_3:\quad
\begin{aligned}
&\mathcal{O}_1=\mathcal{O}_2=\mathcal{O}_3=\mathcal{O}_4=2+\sqrt{5},\\
&\mathcal{O}_5=\mathcal{O}_6=\mathcal{O}_{4,5}=\mathcal{O}_{6,1}=\mathcal{O}_{3,4,5}=-3-\sqrt{5},\\
&\mathcal{O}_{1,2}=\mathcal{O}_{2,3}=\mathcal{O}_{3,4}=\frac{9+5\sqrt{5}}{2},\qquad \mathcal{O}_{5,6}=12+5\sqrt{5},\\
&\mathcal{O}_{1,2,3}=\mathcal{O}_{2,3,4}=\frac{19+7\sqrt{5}}{2}.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

等价簇结构出现在 G_o 子群的情形中，由（$G_o\cong\mathbb{Z}_{10}$，$|G_o|=10$，数据 $\{0;\ \{2,1\},\ \{5,1\},\ \{10,1\}\}$）给出。

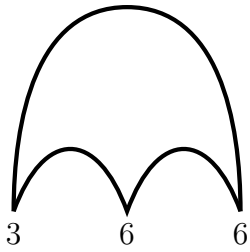
t-变形： I_1 维数为 I_1 的 $=0$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{O}_2=\mathcal{O}_3=\mathcal{O}_4=\mathcal{O}_1,\quad \mathcal{O}_6=\mathcal{O}_{4,5}=\mathcal{O}_{6,1}=\mathcal{O}_{3,4,5}=\mathcal{O}_5\\
&2\mathcal{O}_1\mathcal{O}_{1,2}=2\mathcal{O}_1\mathcal{O}_{2,3}=2\mathcal{O}_1\mathcal{O}_{3,4}=(\mathcal{O}_1-1)\mathcal{O}_1^2+\mathcal{O}_5^2,\\
&\mathcal{O}_{5,6}=-\mathcal{O}_1+\mathcal{O}_5^2,\\
&2\mathcal{O}_1\mathcal{O}_{1,2,3}=2\mathcal{O}_1\mathcal{O}_{2,3,4}=\mathcal{O}_1^2-\mathcal{O}_1^3+2\mathcal{O}_1\mathcal{O}_5^2-\mathcal{O}_5^2,
\end{aligned}
$$

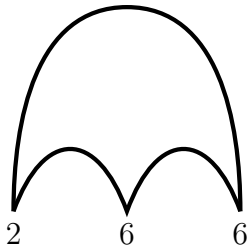
$$
I_1^{(t)}:\quad
\begin{aligned}
&2\mathcal{O}_1^2+\mathcal{O}_5\big((\mathcal{O}_1-5)\mathcal{O}_1^2+\mathcal{O}_5^2\big)t^{1/4}+2\mathcal{O}_1^2\sqrt{t}=0,\\
&(\,3\mathcal{O}_1-5\,)\mathcal{O}_5^2t^{1/4}=2\mathcal{O}_5(1+\sqrt{t})+\mathcal{O}_1^2(\mathcal{O}_1^2-5)t^{1/4},\\
&4\mathcal{O}_1^2\mathcal{O}_5+\big(-5\mathcal{O}_1^4+\mathcal{O}_1^6-2\mathcal{O}_1^3\mathcal{O}_5^2+\mathcal{O}_5^4\big)t^{1/4}+4\mathcal{O}_1^2\mathcal{O}_5\sqrt{t}=0,\\
&\mathcal{O}_1\mathcal{O}_5t^{1/4}+\big(-2+(5+(\mathcal{O}_1-5)\mathcal{O}_1)\mathcal{O}_5^2\big)\sqrt{t}+\mathcal{O}_1\mathcal{O}_5t^{3/4}=1+t,\\
&\mathcal{O}_1+\mathcal{O}_1^2\mathcal{O}_5t^{1/4}+\big(\mathcal{O}_5^4+\mathcal{O}_1(2-5\mathcal{O}_5^2)\big)\sqrt{t}+\mathcal{O}_1^2\mathcal{O}_5t^{3/4}+\mathcal{O}_1t=0,\\
&\mathcal{O}_1\Big(\mathcal{O}_1(5+\mathcal{O}_1)+2\mathcal{O}_5(-5\mathcal{O}_1+\mathcal{O}_5^2)t^{1/4}+\mathcal{O}_1(5+\mathcal{O}_1)\sqrt{t}\Big)=\mathcal{O}_5^2(1+\sqrt{t}),\\
&\mathcal{O}_1(2+\mathcal{O}_1)(3+\mathcal{O}_1)+\mathcal{O}_5^2+4\mathcal{O}_1^2\mathcal{O}_5t^{1/4}\\
&\quad+2\Big(\mathcal{O}_1(2+\mathcal{O}_1)(3+\mathcal{O}_1)+\big(1+\mathcal{O}_1(-15+2(\mathcal{O}_1-5)\mathcal{O}_1)\big)\mathcal{O}_5^2-(\mathcal{O}_1-5)\mathcal{O}_1\mathcal{O}_5^4\Big)\sqrt{t}\\
&\quad+4\mathcal{O}_1^2\mathcal{O}_5t^{3/4}+\big(\mathcal{O}_1(2+\mathcal{O}_1)(3+\mathcal{O}_1)+\mathcal{O}_5^2\big)t=0,\\
&\mathcal{O}_5^6t^{3/4}+\mathcal{O}_5(1+\sqrt{t})\big(1+(2-22\mathcal{O}_1)\sqrt{t}+t\big)\\
&\quad+\mathcal{O}_5^2t^{1/4}\Big(-7+5\mathcal{O}_1+2\big(-7+\mathcal{O}_1(70+\mathcal{O}_1(110+3\mathcal{O}_1))\big)\sqrt{t}+(-7+5\mathcal{O}_1)t\Big)\\
&\quad=\mathcal{O}_1\big(26+\mathcal{O}_1(35+\mathcal{O}_1(22+5\mathcal{O}_1))\big)(1+\sqrt{t})^2t^{1/4}+2\mathcal{O}_1(35+3\mathcal{O}_1)\mathcal{O}_5^4t^{3/4}.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

2.6 G_i 或 G_p 子群

$G_i\cong\mathbb{Z}_6$、$|G_i|=6$，数据 $\{0;\ \{3,1\},\ \{6,2\}\}$:



(a) 情形 G_i。



(b) 情形 G_p。

图7：第2.6节中覆盖映射的分歧数据。

$t=1$: $I_1\cap I_2\cap I_3\cap I_4\cap I_5$ 维数为 $\dim(I_1,\ I_2,\ I_3,\ I_4,\ I_5)=(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$

$$
I_1=\Big\langle\,\mathcal{O}-2\,,\ \forall\,\mathcal{O}_{\mathcal{O}_{i,\ i+1}}\Big\rangle\qquad I_2=\Big\langle\,\mathcal{O}_i+1,\ \mathcal{O}_{i,i+1}-2,\ \mathcal{O}_{i,+1,i+2}+1_{\mathcal{O}_{i,\ i+1,}}\Big\rangle.\tag{19}
$$

$$
I_3=\Big\langle\,\mathcal{O}_i,\ \mathcal{O}_{i,i+1,\ i+2}+2\Big\rangle,\qquad I_4=\Big\langle\,\mathcal{O}_i+4,\ \mathcal{O}_{i,\ i+1}-8,\ i+2+10\Big\rangle.\tag{20}
$$

$$I_5 = \Big\langle\, \mathcal{O}_i + 1,\ \mathcal{O}_{i,i+1} + 1,\ \mathcal{O}_{i,i+1,i+2} - 2 \,\Big\rangle \qquad i = 1 \ldots 6\,. \tag{21}$$

t-变形： $I_1 \cap I_2 \cap I_3$ 维数为 $\dim(I_1,\ I_2,\ I_3) = (0,\ 0,\ 0)$

$$I_1^{(t)} = \Big\langle \mathcal{O}_i,\ \mathcal{O}_{i,i+1},\ \mathcal{O}_{i,i+1,i+2} + \frac{1+t}{\sqrt{t}} \Big\rangle. \tag{22}$$

$$I_2^{(t)}: \quad \begin{aligned} &\mathcal{O}_i = -\frac{2(1+t^{1/3})}{t^{1/6}},, \quad \mathcal{O}_{i,i+1} = 2\Big(2 + t^{-1/3} + t^{1/3}\Big), \\ &\mathcal{O}_{i,i+1,i+2} = -\frac{1 + 4t^{1/3} + 4t^{2/3} + t}{\sqrt{t}}. \end{aligned} \tag{23}$$

$$I_3^{(t)}: \quad \begin{aligned} &\mathcal{O}_i = t^{-1/6} + t^{1/6},, \quad \mathcal{O}_{i,i+1} = \frac{1}{2}\Big(2 + (1+i\sqrt{3})t^{-1/3} + (1-i\sqrt{3})t^{1/3}\Big), \\ &\mathcal{O}_{i,i+1,i+2} = \frac{(1+t^{1/3})\big(1 + i\sqrt{3} + (1-i\sqrt{3})t^{2/3}\big)}{2\sqrt{t}}. \end{aligned} \tag{24}$$

此外，在这种情况下，我们可以将 G_i 子群关联簇与由 $G_p \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$, $|G_p| = 12$, 数据 $\{0$ 得到的关联簇对应起来； $\{2,1\},\{6,1\},\{6,1\}\}$。

2.7 G_{k_1}子群

$G_{k_1} \cong \mathbb{Z}_6$, $|G_{k_1}| = 6$, 数据 $\{0;\ \{2,2\},\{3,2\}\}$:

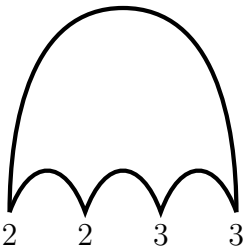


图 8：情形 G_{k1} 下覆盖映射的分歧数据

$t = 1$: $I_1 \cap I_2 \cap I_3$，维数为 $\dim(I_1, I_2, I_3) = (2,0,0)$

$$I_1: \quad \begin{aligned} &\mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_4 = \mathcal{O}_5 = \mathcal{O}_1, \quad \mathcal{O}_{1,2} = (\mathcal{O}_1 - 1)\mathcal{O}_1, \quad \mathcal{O}_{2,3} = \mathcal{O}_6, \quad \mathcal{O}_{4,5} = \mathcal{O}_1, \\ &\mathcal{O}_{6,1} = \mathcal{O}_3, \quad \mathcal{O}_{3,4} = \mathcal{O}_1\mathcal{O}_3 - \mathcal{O}_6, \mathcal{O}_{5,6} = \mathcal{O}_1\mathcal{O}_6 - \mathcal{O}_3, \\ &\mathcal{O}_{1,2,3} = 2 - \mathcal{O}_3 + (\mathcal{O}_1 - 1)\mathcal{O}_6, \\ &\mathcal{O}_{2,3,4} = \mathcal{O}_3 + \mathcal{O}_6 - 2, \quad \mathcal{O}_{3,4,5} = 2 + (\mathcal{O}_1 - 1)\mathcal{O}_3 - \mathcal{O}_6, \\ &\mathcal{O}_1^2 - \mathcal{O}_1\mathcal{O}_3\mathcal{O}_6 + \mathcal{O}_6^2 + (\mathcal{O}_3 - 2)(\mathcal{O}_3 + \mathcal{O}_6) = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

$$I_2: \quad \begin{aligned} &\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_3 = \mathcal{O}_6 = \mathcal{O}_{2,3} = \mathcal{O}_{3,4} = \mathcal{O}_{5,6} = \mathcal{O}_{6,1} = \mathcal{O}_{1,2,3} = \mathcal{O}_{2,3,4} = \mathcal{O}_{3,4,5} = -1, \\ &\mathcal{O}_4 = \mathcal{O}_5 = \mathcal{O}_{1,2} = \mathcal{O}_{4,5} = 2. \end{aligned} \tag{26}$$

$$
I_3:\quad
\begin{aligned}
&\mathcal{O}_1=\mathcal{O}_2=\mathcal{O}_{1,2}=\mathcal{O}_{3,4}=\mathcal{O}_{5,6}=\mathcal{O}_{2,3,4}=2,\\
&\mathcal{O}_3=\mathcal{O}_4=\mathcal{O}_5=\mathcal{O}_6=\mathcal{O}_{2,3}=\mathcal{O}_{4,5}=\mathcal{O}_{6,1}=\mathcal{O}_{1,2,3}=\mathcal{O}_{3,4,5}=-1.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

t-变形： $I_1\cap I_2$，维数为 $\dim(I_1,I_2)=(2,0)$

$$
I_1^{(t)}:\quad
\begin{aligned}
&\mathcal{O}_2=\mathcal{O}_4=\mathcal{O}_5=\mathcal{O}_1,\qquad \mathcal{O}_{2,3}=\mathcal{O}_6,\qquad \mathcal{O}_{4,5}=\mathcal{O}_1,\qquad \mathcal{O}_{6,1}=\mathcal{O}_3,\\
&\mathcal{O}_{1,2}=(\mathcal{O}_1-1)\mathcal{O}_1,\qquad \mathcal{O}_{3,4}=\mathcal{O}_1\mathcal{O}_3-\mathcal{O}_6,\qquad \mathcal{O}_{5,6}=-\mathcal{O}_3+\mathcal{O}_1\mathcal{O}_6,\\
&\mathcal{O}_{1,2,3}=-\mathcal{O}_3+(\mathcal{O}_1-1)\mathcal{O}_6+\frac{1+t}{\sqrt{t}},\quad \mathcal{O}_{2,3,4}=\mathcal{O}_3+\mathcal{O}_6-\frac{1+t}{\sqrt{t}},\\
&\mathcal{O}_{3,4,5}=(\mathcal{O}_1-1)\mathcal{O}_3-\mathcal{O}_6+\frac{1+t}{\sqrt{t}},\\
&\mathcal{O}_3+\mathcal{O}_6-\sqrt{t}\Big(\mathcal{O}_1^2-\mathcal{O}_1\mathcal{O}_3\mathcal{O}_6+\mathcal{O}_6^2+\mathcal{O}_3(\mathcal{O}_3+\mathcal{O}_6)\Big)+(\mathcal{O}_3+\mathcal{O}_6)\,t=0.
\end{aligned}
\tag{28}
$$

$$
I_2^{(t)}:\quad
\begin{aligned}
&\mathcal{O}_3=\mathcal{O}_6=\mathcal{O}_{2,3}=\mathcal{O}_{6,1}=\mathcal{O}_{1,2,3}=\mathcal{O}_{3,4,5}=t^{-1/6}+t^{1/6},\\
&\mathcal{O}_1=\mathcal{O}_2=\frac{1}{2}\Big(2+(1+i\sqrt{3})t^{-1/3}+(1-i\sqrt{3})t^{1/3}\Big),\\
&\mathcal{O}_4=\mathcal{O}_5=\mathcal{O}_{4,5}=\frac{1}{2}\Big(2+(1-i\sqrt{3})t^{-1/3}+(1+i\sqrt{3})t^{1/3}\Big),\\
&\mathcal{O}_{3,4}=\mathcal{O}_{5,6}=\mathcal{O}_{2,3,4}=\frac{(1+t^{1/3})\big(1-i\sqrt{3}+(1+i\sqrt{3})t^{2/3}\big)}{2\sqrt{t}},\\
&\mathcal{O}_{1,2}=\frac{(1+t^{1/3})\big(-1+i\sqrt{3}+2t^{1/3}+(1-i\sqrt{3})t^{2/3}\big)}{2t^{2/3}}.
\end{aligned}
\tag{29}
$$

2.8 G_{k_2} 或 G_s 子群

$G_{k_2}\cong D_3$、$|G_{k_2}|=6$，数据 $\{0;\ \{2,2\},\ \{3,2\}\}$:



(a) 情形 G_{k2}。　　(b) 情形 G_s。

图 9：第 2.8 节中情形的覆盖映射的分歧数据。

$t=1$： I_1，其中 $\dim(I_1)=2$

$$
I_1:\quad
\begin{aligned}
&\mathcal{O}_2=\mathcal{O}_4=\mathcal{O}_5=\mathcal{O}_1,\qquad \mathcal{O}_{1,2}=\mathcal{O}_{4,5}=(\mathcal{O}_1-1)\mathcal{O}_1,\\
&\mathcal{O}_{5,6}=\mathcal{O}_{2,3},\qquad \mathcal{O}_{2,3,4}=\mathcal{O}_3,\\
&\mathcal{O}_{3,4}=\mathcal{O}_{6,1}=2+(\mathcal{O}_1-1)\mathcal{O}_3-\mathcal{O}_{2,3},\\
&\mathcal{O}_{1,2,3}=2-\mathcal{O}_3+(\mathcal{O}_1-1)\mathcal{O}_{2,3},\\
&\mathcal{O}_{3,4,5}=\mathcal{O}_1\big(2+(\mathcal{O}_1-2)\mathcal{O}_3-\mathcal{O}_{2,3}\big)+\mathcal{O}_{2,3},\\
&\mathcal{O}_1^2-\mathcal{O}_1\mathcal{O}_3\mathcal{O}_{2,3}+\mathcal{O}_{2,3}^2+(\mathcal{O}_3-2)(\mathcal{O}_3+\mathcal{O}_{2,3})=0.
\end{aligned}
\tag{30}
$$

t-变形： I_1 维数为$I_1=2$

$$
I_1^{(t)}:\quad
\begin{aligned}
&\mathcal{O}_2=\mathcal{O}_4=\mathcal{O}_5=\mathcal{O}_1,\quad \mathcal{O}_{5,6}=\mathcal{O}_{2,3},\quad \mathcal{O}_{2,3,4}=\mathcal{O}_3,\quad \mathcal{O}_{1,2}=\mathcal{O}_{4,5}=(\mathcal{O}_1-1)\mathcal{O}_1,\\
&\mathcal{O}_{3,4}=\mathcal{O}_{6,1}=(\mathcal{O}_1-1)\mathcal{O}_3-\mathcal{O}_{2,3}+\frac{1+t}{\sqrt{t}},\quad \mathcal{O}_{1,2,3}=-\mathcal{O}_3+(\mathcal{O}_1-1)\mathcal{O}_{2,3}+\frac{1+t}{\sqrt{t}},\\
&\mathcal{O}_{3,4,5}=\mathcal{O}_{2,3}+\mathcal{O}_1\Big((\mathcal{O}_1-2)\mathcal{O}_3-\mathcal{O}_{2,3}+\frac{1+t}{\sqrt{t}}\Big),\\
&\mathcal{O}_3+\mathcal{O}_{2,3}-\sqrt{t}\Big(\mathcal{O}_1^2-\mathcal{O}_1\mathcal{O}_3\mathcal{O}_{2,3}+\mathcal{O}_{2,3}^2+\mathcal{O}_3(\mathcal{O}_3+\mathcal{O}_{2,3})\Big)+(\mathcal{O}_3+\mathcal{O}_{2,3})t=0\,,
\end{aligned}
\tag{31}
$$

其中，G_{k2} 情形似乎等价于$G_s\cong D_6$，$|G_s|=12$，数据$\{0;\ \{2,3\},\ \{3,1\}\}$。

2.9 G_l子群

$G_l\cong\mathbb{Z}_8$, $|G_l|=8$，数据 $\{0;\ \{2,1\},\ \{8,2\},\ \{8,1\}\}$:

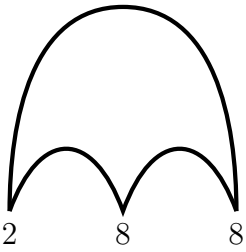


图 10：情形 G_l中的覆盖映射的分歧数据

$t=1$： $I_1\cap I_2\cap I_3\cap I_4$其中 $\dim(I_1,I_2,I_3,I_4)=(0,0,0,0)$

$$
I_1=\Big\langle\ \mathcal{O}-2,\ \forall\,\mathcal{O}\ \Big\rangle.
\tag{32}
$$

$$
I_2:\quad
\begin{aligned}
&\mathcal{O}_1=\mathcal{O}_5=\mathcal{O}_{1,2}=\mathcal{O}_{4,5}=\mathcal{O}_{5,6}=\mathcal{O}_{6,1}=\mathcal{O}_{1,2,3}=\mathcal{O}_{3,4,5}=-2,\\
&\mathcal{O}_2=\mathcal{O}_3=\mathcal{O}_4=\mathcal{O}_6=\mathcal{O}_{2,3}=\mathcal{O}_{3,4}=\mathcal{O}_{2,3,4}=2.
\end{aligned}
\tag{33}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{O}_1=\mathcal{O}_2=\mathcal{O}_3=\mathcal{O}_4=2-2\sqrt{2},\\
&\mathcal{O}_5=\mathcal{O}_{4,5}=\mathcal{O}_{6,1}=\mathcal{O}_{3,4,5}=2(\sqrt{2}-1),\\
I_3:\quad &\mathcal{O}_6=\mathcal{O}_{2,3}=\mathcal{O}_{3,4}=6-4\sqrt{2},\\
&\mathcal{O}_{1,2}=\mathcal{O}_{2,3,4}=10-6\sqrt{2},\\
&\mathcal{O}_{5,6}=26-18\sqrt{2},\qquad \mathcal{O}_{1,2,3}=18-14\sqrt{2}.
\end{aligned}
\tag{34}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{O}_1=-2(1+\sqrt{2}),\quad \mathcal{O}_6=-6-4\sqrt{2},\quad \mathcal{O}_{2,3}=\mathcal{O}_{3,4}=6+4\sqrt{2},\\
&\mathcal{O}_2=\mathcal{O}_3=\mathcal{O}_4=\mathcal{O}_5=\mathcal{O}_{4,5}=\mathcal{O}_{6,1}=\mathcal{O}_{3,4,5}=2(1+\sqrt{2}),\\
I_4:\quad &\mathcal{O}_{1,2}=-2(5+3\sqrt{2}),\qquad \mathcal{O}_{5,6}=-2(13+9\sqrt{2}),\\
&\mathcal{O}_{1,2,3}=-2(9+7\sqrt{2}),\qquad \mathcal{O}_{2,3,4}=10+6\sqrt{2}.
\end{aligned}
\tag{35}
$$

t-变形： $I_1\cap I_2\cap I_3\cap I_4\cap I_5$ 其中 $\dim(I_1,I_2,I_3,I_4,I_5)=(0,0,0,0,0)$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{O}_1=\mathcal{O}_2=\mathcal{O}_3=\mathcal{O}_4=-\mathcal{O}_5=-\mathcal{O}_{4,5}=-\mathcal{O}_{6,1}=-\mathcal{O}_{3,4,5}=2-\frac{\sqrt{2}\,(1+\sqrt{t})}{t^{1/4}},\\
&\mathcal{O}_{2,3}=\mathcal{O}_{3,4}=-\mathcal{O}_6=4+\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{2\sqrt{2}\,(1+\sqrt{t})}{t^{1/4}}+\sqrt{t},\\
I_1^{(t)}:\ &\mathcal{O}_{1,\ 2}=\mathcal{O}_{2,\ 3,\ 4}=6+\frac{2}{\sqrt{t}}-\frac{3\sqrt{2}(1+\sqrt{t})}{t^{1/4}}+2\sqrt{t},\\
&\mathcal{O}_{5,6}=14-\frac{\sqrt{2}\,(1+\sqrt{t})^3}{t^{3/4}}+\frac{6}{\sqrt{t}}-\frac{5\sqrt{2}\,(1+\sqrt{t})}{t^{1/4}}+6\sqrt{t},\\
&\mathcal{O}_{1,2,3}=10-\frac{\sqrt{2}\,(1+\sqrt{t})^3}{t^{3/4}}+\frac{4}{\sqrt{t}}-\frac{3\sqrt{2}\,(1+\sqrt{t})}{t^{1/4}}+4\sqrt{t}.
\end{aligned}
\tag{36}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{O}_1=\mathcal{O}_2=\mathcal{O}_3=\mathcal{O}_4=\mathcal{O}_5=\mathcal{O}_{4,5}=\mathcal{O}_{6,1}=\mathcal{O}_{3,4,5}=2-\frac{i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)}{t^{1/4}},\\
&\mathcal{O}_6=\mathcal{O}_{2,3}=\mathcal{O}_{3,4}=4-\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{2i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)}{t^{1/4}}-\sqrt{t},\\
I_2^{(t)}:\ &\mathcal{O}_{1,\ 2}=\mathcal{O}_{2,\ 3,\ 4}=6-\frac{2}{\sqrt{t}}-\frac{3i\sqrt{2}(\sqrt{t}-1)}{t^{1/4}}-2\sqrt{t},\\
&\mathcal{O}_{5,6}=14+\frac{i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)^3}{t^{3/4}}-\frac{6}{\sqrt{t}}-\frac{5i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)}{t^{1/4}}-6\sqrt{t},\\
&\mathcal{O}_{1,2,3}=10+\frac{i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)^3}{t^{3/4}}-\frac{4}{\sqrt{t}}-\frac{3i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)}{t^{1/4}}-4\sqrt{t}.
\end{aligned}
\tag{37}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{O}_2=\mathcal{O}_3=\mathcal{O}_4=\mathcal{O}_5=\mathcal{O}_{4,5}=\mathcal{O}_{6,1}=\mathcal{O}_{3,4,5}=-\mathcal{O}_1=2+\frac{\sqrt{2}\,(1+\sqrt{t})}{t^{1/4}},\\
&\mathcal{O}_{2,3}=\mathcal{O}_{3,4}=4+\frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{2\sqrt{2}\,(1+\sqrt{t})}{t^{1/4}}+\sqrt{t},\\
&\mathcal{O}_{2,3,4}=6+\frac{2}{\sqrt{t}}+\frac{3\sqrt{2}\,(1+\sqrt{t})}{t^{1/4}}+2\sqrt{t},\\
I_3^{(t)}:\quad &\mathcal{O}_6=-4-\frac{1+2\sqrt{2}\,t^{1/4}+2\sqrt{2}\,t^{3/4}+t}{\sqrt{t}},\\
&\mathcal{O}_{1,2}=-2(3+\sqrt{t})-\frac{2}{\sqrt{t}}-\frac{3\sqrt{2}\,(1+\sqrt{t})}{t^{1/4}},\\
&\mathcal{O}_{5,6}=-14-\frac{\sqrt{2}+6t^{1/4}+8\sqrt{2}\sqrt{t}+8\sqrt{2}t+6t^{5/4}+\sqrt{2}t^{3/2}}{t^{3/4}},\\
&\mathcal{O}_{1,2,3}=-10-\frac{\sqrt{2}+4t^{1/4}+6\sqrt{2}\sqrt{t}+6\sqrt{2}t+4t^{5/4}+\sqrt{2}t^{3/2}}{t^{3/4}}.
\end{aligned}
\tag{38}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{O}_2=\mathcal{O}_3=\mathcal{O}_4=-\mathcal{O}_5=-\mathcal{O}_1=-\mathcal{O}_{4,5}=-\mathcal{O}_{6,1}=-\mathcal{O}_{3,4,5}=2+\frac{i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)}{t^{1/4}},\\
&\mathcal{O}_6=\mathcal{O}_{2,3}=\mathcal{O}_{3,4}=4-\frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{2i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)}{t^{1/4}}-\sqrt{t},\\
I_4^{(t)}:\quad &-\mathcal{O}_{1,2}=\mathcal{O}_{2,3,4}=6-\frac{2}{\sqrt{t}}+\frac{3i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)}{t^{1/4}}-2\sqrt{t},\\
&\mathcal{O}_{5,6}=-14+\frac{i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)^3}{t^{3/4}}+\frac{6}{\sqrt{t}}-\frac{5i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)}{t^{1/4}}+6\sqrt{t},\\
&\mathcal{O}_{1,2,3}=-10+\frac{i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)^3}{t^{3/4}}+\frac{4}{\sqrt{t}}-\frac{3i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)}{t^{1/4}}+4\sqrt{t}.
\end{aligned}
\tag{39}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{O}_2=\mathcal{O}_3=\mathcal{O}_4=2,\quad \mathcal{O}_1=\mathcal{O}_{1,2}=-\frac{(1+i)(\sqrt{t}-i)}{t^{1/4}},\\
&\mathcal{O}_5=\mathcal{O}_{4,5}=\mathcal{O}_{6,1}=\mathcal{O}_{3,4,5}=-\frac{(1-i)(\sqrt{t}+i)}{t^{1/4}},\\
I_5^{(t)}:\quad &\mathcal{O}_6=\frac{1+t}{\sqrt{t}},\quad \mathcal{O}_{2,3}=\mathcal{O}_{3,4}=2-\frac{i(t-1)}{\sqrt{t}},\\
&\mathcal{O}_{5,6}=\mathcal{O}_{1,2,3}=-\frac{(1-i)(i+t^{3/2})}{t^{3/4}},\quad \mathcal{O}_{2,3,4}=2-\frac{2i(t-1)}{\sqrt{t}}.
\end{aligned}
\tag{40}
$$

2.10 G_m子群

$G_m\cong\widetilde{D}_2$, $|G_m|=8$, data $\{0;\{4,1\},\{4,1\},\{4,1\}\}$:

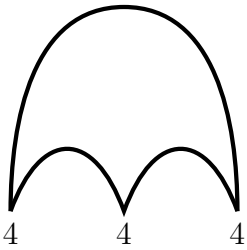


图 11： G_m 情形下覆盖映射的分歧数据

$t=1$： $I_1\cap I_2\cap I_3\cap I_4$，其中 $\dim(I_1,\ I_2,\ I_3,\ I_4)=(0,\ 0,\ 0,\ 0)$

$$I_1=\Big\langle\ \mathcal{O}-2,\ \forall\,\mathcal{O}\ \Big\rangle. \tag{41}$$

$$I_2:\quad \begin{aligned}&\mathcal{O}_1=\mathcal{O}_5=\mathcal{O}_{1,2}=\mathcal{O}_{4,5}=\mathcal{O}_{5,6}=\mathcal{O}_{6,1}=\mathcal{O}_{1,2,3}=\mathcal{O}_{3,4,5}=-2,\\&\mathcal{O}_2=\mathcal{O}_3=\mathcal{O}_4=\mathcal{O}_6=\mathcal{O}_{2,3}=\mathcal{O}_{3,4}=\mathcal{O}_{2,3,4}=2.\end{aligned} \tag{42}$$

$$I_3:\quad \begin{aligned}&\mathcal{O}_1=\mathcal{O}_6=\mathcal{O}_{2,3}=\mathcal{O}_{3,4}=\mathcal{O}_{4,5}=\mathcal{O}_{6,1}=\mathcal{O}_{1,2,3}=2,\\&\mathcal{O}_2=\mathcal{O}_3=\mathcal{O}_4=\mathcal{O}_5=\mathcal{O}_{1,2}=\mathcal{O}_{5,6}=\mathcal{O}_{2,3,4}=\mathcal{O}_{3,4,5}=-2.\end{aligned} \tag{43}$$

$$I_4:\quad \begin{aligned}&\mathcal{O}_1=\mathcal{O}_2=\mathcal{O}_3=\mathcal{O}_4=\mathcal{O}_{4,5}=\mathcal{O}_{6,1}=\mathcal{O}_{1,2,3}=\mathcal{O}_{2,3,4}=-2,\\&\mathcal{O}_5=\mathcal{O}_6=\mathcal{O}_{1,2}=\mathcal{O}_{2,3}=\mathcal{O}_{3,4}=\mathcal{O}_{5,6}=\mathcal{O}_{3,4,5}=2.\end{aligned} \tag{44}$$

t-变形： $I_1^{(t)}\cap I_2^{(t)}\cap I_3^{(t)}\cap I_4^{(t)}$，其中 $\dim(I_1^{(t)},\ I_2^{(t)},\ I_3^{(t)},\ I_4^{(t)})=(0,\ 0,\ 0,\ 0)$

$$I_1^{(t)}:\quad \begin{aligned}&\mathcal{O}_1=\mathcal{O}_{4,5}=\mathcal{O}_{6,1}=2-\frac{i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)}{t^{1/4}},\\&\mathcal{O}_2=\mathcal{O}_3=\mathcal{O}_4=\mathcal{O}_5=\mathcal{O}_{3,4,5}=-2+\frac{i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)}{t^{1/4}},\\&\mathcal{O}_6=\mathcal{O}_{2,3}=\mathcal{O}_{3,4}=4-\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{2i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)}{t^{1/4}}-\sqrt{t},\\&\mathcal{O}_{1,2}=\mathcal{O}_{2,3,4}=-6+\frac{2}{\sqrt{t}}+\frac{3i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)}{t^{1/4}}+2\sqrt{t},\\&\mathcal{O}_{5,6}=-14-\frac{i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)^3}{t^{3/4}}+\frac{6}{\sqrt{t}}+\frac{5i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)}{t^{1/4}}+6\sqrt{t},\\&\mathcal{O}_{1,2,3}=10+\frac{i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)^3}{t^{3/4}}-\frac{4}{\sqrt{t}}-\frac{3i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)}{t^{1/4}}-4\sqrt{t}.\end{aligned} \tag{45}$$

$$\mathcal{O}_1=\mathcal{O}_2=\mathcal{O}_3=\mathcal{O}_4=\mathcal{O}_5=\mathcal{O}_{4,5}=\mathcal{O}_{6,1}=\mathcal{O}_{3,4,5}=2-\frac{i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)}{t^{1/4}},$$

$$\mathcal{O}_6=\mathcal{O}_{2,3}=\mathcal{O}_{3,4}=4-\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{2i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)}{t^{1/4}}-\sqrt{t},$$

$$I_2^{(t)}:\ \mathcal{O}_{1,\ 2}=\mathcal{O}_{2,\ 3,\ 4}=6-\frac{2}{\sqrt{t}}-\frac{3i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)}{t^{1/4}}-2\sqrt{t},$$

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{5,6}&=14+\frac{i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)^3}{t^{3/4}}-\frac{6}{\sqrt{t}}-\frac{5i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)}{t^{1/4}}-6\sqrt{t},\\ \mathcal{O}_{1,2,3}&=10+\frac{i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)^3}{t^{3/4}}-\frac{4}{\sqrt{t}}-\frac{3i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)}{t^{1/4}}-4\sqrt{t}.\end{aligned}\tag{46}$$

2.11 G_n子群

$G_n\cong D_4$, $|G_n|=8$, 数据 $\{0;\ \{2,3\},\ \{4,1\}\}$。

$t=1$: $I_1\cap I_2\cap I_3$ 且 $\dim(I_1,\ I_2,\ I_3)=(2,\ 0,\ 0)$。

$$I_1:\quad\begin{aligned}&\mathcal{O}_4=\mathcal{O}_1,\quad \mathcal{O}_{4,5}=\mathcal{O}_{1,2},\quad \mathcal{O}_{6,1}=\mathcal{O}_{3,4},\quad \mathcal{O}_{3,4,5}=2(\mathcal{O}_1-1),\\ &\mathcal{O}_2=\mathcal{O}_3=\mathcal{O}_5=\mathcal{O}_6=\frac{\mathcal{O}_{1,2}+\mathcal{O}_{3,4}}{\mathcal{O}_1},\\ &\mathcal{O}_{2,3}=\mathcal{O}_{5,6}=\mathcal{O}_1(\mathcal{O}_1-2)+\frac{\mathcal{O}_{1,2}\mathcal{O}_{3,4}}{2},\\ &\mathcal{O}_{1,2,3}=2-\mathcal{O}_1+\frac{\mathcal{O}_{1,2}(\mathcal{O}_{1,2}+\mathcal{O}_{3,4})}{2\mathcal{O}_1},\\ &\mathcal{O}_{2,3,4}=2-\mathcal{O}_1+\frac{\mathcal{O}_{3,4}(\mathcal{O}_{1,2}+\mathcal{O}_{3,4})}{2\mathcal{O}_1},\\ &2\mathcal{O}_1^3(\mathcal{O}_1-2)-\mathcal{O}_1^2\mathcal{O}_{1,2}\mathcal{O}_{3,4}+(\mathcal{O}_{1,2}+\mathcal{O}_{3,4})^2=0.\end{aligned}\tag{47}$$

$$I_2=\left\langle \mathcal{O}_i,\ \mathcal{O}_{i,i+1},\ \mathcal{O}_{i,i+1,i+2}+2\right\rangle\qquad i=1,\dots,6.\tag{48}$$

$$I_3=\left\langle \mathcal{O}_1+2,\ \mathcal{O}_4+2,\ \mathcal{O}_{3,4,5}-2,\ \bar{\mathcal{O}}\right\rangle,\tag{49}$$

其中，上横线表示与前述三个条件互补。

t-变形： $I_1^{(t)}\cap I_2^{(t)}\cap I_3^{(t)}$ 维数为 $\dim(I_1^{(t)},\ I_2^{(t)},\ I_3^{(t)})=(2,\ 0,\ 0)$。

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{O}_3=\mathcal{O}_2,\qquad \mathcal{O}_5=\mathcal{O}_2,\qquad \mathcal{O}_6=\mathcal{O}_2,\qquad \mathcal{O}_{4,5}=\mathcal{O}_{1,2},\qquad \mathcal{O}_{6,1}=\mathcal{O}_{3,4},\\
&\mathcal{O}_{5,6}=\mathcal{O}_{2,3},\quad \mathcal{O}_1=\mathcal{O}_4=\frac{\mathcal{O}_{1,2}+\mathcal{O}_{3,4}}{\mathcal{O}_2},\\
&2\mathcal{O}_2^2\mathcal{O}_{1,2,3}-\mathcal{O}_2^3\mathcal{O}_{1,2}+2\mathcal{O}_{1,2}+2\mathcal{O}_{3,4}-2\mathcal{O}_2^2\frac{1+t}{\sqrt{t}}=0,\\
I_1^{(t)}:\quad &2\mathcal{O}_2^2\mathcal{O}_{2,3,4}-\mathcal{O}_2^3\mathcal{O}_{3,4}+2\mathcal{O}_{1,2}+2\mathcal{O}_{3,4}-2\mathcal{O}_2^2\frac{1+t}{\sqrt{t}}=0,\\
&\mathcal{O}_2\mathcal{O}_{3,4,5}-2(\mathcal{O}_{1,2}+\mathcal{O}_{3,4})+\mathcal{O}_2\frac{1+t}{\sqrt{t}}=0,\\
&2\mathcal{O}_2^2\mathcal{O}_{2,3}-\mathcal{O}_2^2\mathcal{O}_{1,2}\mathcal{O}_{3,4}+2(\mathcal{O}_{1,2}+\mathcal{O}_{3,4})^2-2\mathcal{O}_2(\mathcal{O}_{1,2}+\mathcal{O}_{3,4})\frac{1+t}{\sqrt{t}}=0,\\
&\mathcal{O}_2^4-\mathcal{O}_2^2\mathcal{O}_{1,2}\mathcal{O}_{3,4}+2(\mathcal{O}_{1,2}+\mathcal{O}_{3,4})^2-2\mathcal{O}_2(\mathcal{O}_{1,2}+\mathcal{O}_{3,4})\frac{1+t}{\sqrt{t}}=0.
\end{aligned}
\tag{50}
$$

$$
I_2^{(t)}=\Big\langle \mathcal{O}_i,\ \mathcal{O}_{i,i+1},\ \mathcal{O}_{i,i+1,i+2}+\frac{1+t}{\sqrt{t}}\Big\rangle. \tag{51}
$$

$$
I_3^{(t)}=\Big\langle \mathcal{O}_1+\frac{1+t}{\sqrt{t}},\ \mathcal{O}_4+\frac{1+t}{\sqrt{t}},\ \mathcal{O}_{3,4,5}-\frac{1+t}{\sqrt{t}},\ \bar{\mathcal{O}}\Big\rangle. \tag{52}
$$

2.12 G_r 或 G_w 子群

$G_r\cong D_4$、$|G_r|=12$、数据 $\{0;\ \{3,1\},\ \{4,2\}\}$。

$t=1$： $I_1\cap I_2\cap I_3$ 维数为 $\dim(I_1,I_2,I_3)=(0,0,0)$。

$$
I_1=\Big\langle \mathcal{O}_i,\ \mathcal{O}_{i,i+1},\ \mathcal{O}_{i,i+1,i+2}+2\Big\rangle,\quad I_2=\Big\langle \mathcal{O}-2,\ \forall\mathcal{O}\Big\rangle \tag{53}
$$

$$
I_3=\Big\langle \mathcal{O}_i+4,\ \mathcal{O}_{i,i+1}-8,\ \mathcal{O}_{i,i+1,i+2}+10\Big\rangle. \tag{54}
$$

t-变形： $I_1^{(t)}\cap I_2^{(t)}$ 维数为 $\dim(I_1^{(t)},I_2^{(t)})=(0,0)$。

$$
I_1^{(t)}=\Big\langle \mathcal{O}_i,\ \mathcal{O}_{i,i+1},\ \mathcal{O}_{i,i+1,i+2}+\frac{1+t}{\sqrt{t}}\Big\rangle. \tag{55}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{O}_i=-\frac{2(-1)^{2/3}\big((-1)^{2/3}+t^{1/3}\big)}{t^{1/6}},\\
I_2^{(t)}:\quad &\mathcal{O}_{i,i+1}=4+\frac{2(-1)^{2/3}}{t^{1/3}}-2(-1)^{1/3}t^{1/3},\\
&\mathcal{O}_{i,i+1,i+2}=-\frac{\big(1-2(-1)^{1/3}t^{1/3}\big)^2+t}{\sqrt{t}}.
\end{aligned}
\tag{56}
$$

G_r 关联簇等同于 $G_w\cong\mathbb{Z}_2\rtimes(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3)$ 子群的情形，其中 $|G_w|=24$ 且分歧数据为 $\{0;\ \{2,1\},\ \{4,1\},\ \{6,1\}\}$。

2.13 G_u子群

$G_u \cong D_2$, $|G_u| = 16$, 数据 $\{0;\ \{2,1\},\ \{4,1\},\ \{8,1\}\}$。

$t = 1$: $I_1 \cap I_2$，维数为 $\dim(I_1, I_2) = (0,0)$。

$$I_1 = \Big\langle \mathcal{O} - 2,\ \forall\, \mathcal{O} \Big\rangle. \tag{57}$$

$$I_2: \quad \begin{aligned} &\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_4 = \mathcal{O}_{2,3} = \mathcal{O}_{5,6} = \mathcal{O}_{1,2,3} = \mathcal{O}_{2,3,4} = \mathcal{O}_{3,4,5} = 2, \\ &\mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_3 = \mathcal{O}_5 = \mathcal{O}_6 = \mathcal{O}_{1,2} = \mathcal{O}_{3,4} = \mathcal{O}_{4,5} = \mathcal{O}_{6,1} = -2. \end{aligned} \tag{58}$$

t-变形: $I_1^{(t)} \cap I_2^{(t)}$，维数为 $\dim(I_1^{(t)}, I_2^{(t)}) = (0,0)$。

$$I_1^{(t)}: \quad \begin{aligned} &\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_4 = \mathcal{O}_{2,3,4} = 2 - \frac{i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)}{t^{1/4}}, \\ &\mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_3 = \mathcal{O}_5 = \mathcal{O}_6 = \mathcal{O}_{3,4} = \mathcal{O}_{6,1} = -2 + \frac{i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)}{t^{1/4}}, \\ &\mathcal{O}_{1,2} = \mathcal{O}_{4,5} = -6 + \frac{2}{\sqrt{t}} + \frac{3i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)}{t^{1/4}} + 2\sqrt{t}, \\ &\mathcal{O}_{2,3} = \mathcal{O}_{5,6} = \mathcal{O}_{3,4,5} = 4 - \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{2i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)}{t^{1/4}} - \sqrt{t}, \\ &\mathcal{O}_{1,2,3} = 10 + \frac{i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)^3}{t^{3/4}} - \frac{4}{\sqrt{t}} - \frac{3i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)}{t^{1/4}} - 4\sqrt{t}. \end{aligned} \tag{59}$$

$$I_2^{(t)}: \quad \begin{aligned} &\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_3 = \mathcal{O}_4 = \mathcal{O}_5 = \mathcal{O}_6 = \mathcal{O}_{3,4} = \mathcal{O}_{6,1} = \mathcal{O}_{2,3,4} = 2 - \frac{i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)}{t^{1/4}}, \\ &\mathcal{O}_{1,2} = \mathcal{O}_{4,5} = 6 - \frac{2}{\sqrt{t}} - \frac{3i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)}{t^{1/4}} - 2\sqrt{t}, \\ &\mathcal{O}_{2,3} = \mathcal{O}_{5,6} = \mathcal{O}_{3,4,5} = 4 - \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{2i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)}{t^{1/4}} - \sqrt{t}, \\ &\mathcal{O}_{1,2,3} = 10 + \frac{i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)^3}{t^{3/4}} - \frac{4}{\sqrt{t}} - \frac{3i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)}{t^{1/4}} - 4\sqrt{t}. \end{aligned} \tag{60}$$

2.14 G_x子群

$G_x \cong \mathrm{SL}_2(3)$, $|G_x| = 24$, 数据 $\{0;\ \{3,2\}, \{4,1\}\}$。

$t = 1$: I_1，其中 $\dim(I_1) = 0$。

$$I_1 = \Big\langle\, \mathcal{O} - 2,\ \forall\, \mathcal{O} \,\Big\rangle. \tag{61}$$

t-变形： $I_1^{(t)}$，其中 $\dim(I_1^{(t)}) = 0$。

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_3 = \mathcal{O}_4 = \mathcal{O}_5 = \mathcal{O}_{4,5} = \mathcal{O}_{6,1} = \mathcal{O}_{3,4,5} = 2 - \frac{i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)}{t^{1/4}},\\
&\mathcal{O}_6 = \mathcal{O}_{2,3} = \mathcal{O}_{3,4} = 4 - \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{2i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)}{t^{1/4}} - \sqrt{t},\\
I_2^{(t)}:\ &\mathcal{O}_{1,\ 2} = \mathcal{O}_{2,\ 3,\ 4} = 6 - \frac{2}{\sqrt{t}} - \frac{3i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)}{t^{1/4}} - 2\sqrt{t},\\
&\mathcal{O}_{5,6} = 14 + \frac{i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)^3}{t^{3/4}} - \frac{6}{\sqrt{t}} - \frac{5i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)}{t^{1/4}} - 6\sqrt{t},\\
&\mathcal{O}_{1,2,3} = 10 + \frac{i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)^3}{t^{3/4}} - \frac{4}{\sqrt{t}} - \frac{3i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)}{t^{1/4}} - 4\sqrt{t}.
\end{aligned}
\tag{62}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_3 = \mathcal{O}_4 = \mathcal{O}_{4,5} = \mathcal{O}_{6,1} = -\mathcal{O}_5 = -\mathcal{O}_{3,4,5} = -2 - \frac{i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)}{t^{1/4}},\\
&\mathcal{O}_6 = \mathcal{O}_{2,3} = \mathcal{O}_{3,4} = 4 - \frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{2i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)}{t^{1/4}} - \sqrt{t},\\
&\mathcal{O}_{1,2} = 6 - \frac{2}{\sqrt{t}} + \frac{3i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)}{t^{1/4}} - 2\sqrt{t},\\
I_3^{(t)}:\ &\mathcal{O}_{5,6} = 14 - \frac{i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)^3}{t^{3/4}} - \frac{6}{\sqrt{t}} + \frac{5i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)}{t^{1/4}} - 6\sqrt{t},\\
&\mathcal{O}_{1,2,3} = -10 + \frac{i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)^3}{t^{3/4}} + \frac{4}{\sqrt{t}} - \frac{3i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)}{t^{1/4}} + 4\sqrt{t},\\
&\mathcal{O}_{2,3,4} = -6 + \frac{2}{\sqrt{t}} - \frac{3i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)}{t^{1/4}} + 2\sqrt{t}.
\end{aligned}
\tag{63}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_3 = \mathcal{O}_4 = -\mathcal{O}_5 = -\mathcal{O}_{4,5} = -\mathcal{O}_{6,1} = -\mathcal{O}_{3,4,5} = 2 + \frac{i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)}{t^{1/4}},\\
&\mathcal{O}_6 = \mathcal{O}_{2,3} = \mathcal{O}_{3,4} = 4 - \frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{2i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)}{t^{1/4}} - \sqrt{t},\\
I_4^{(t)}:\ &-\mathcal{O}_{1,2} = \mathcal{O}_{2,3,4} = 6 - \frac{2}{\sqrt{t}} + \frac{3i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)}{t^{1/4}} - 2\sqrt{t},\\
&\mathcal{O}_{5,6} = -14 + \frac{i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)^3}{t^{3/4}} + \frac{6}{\sqrt{t}} - \frac{5i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)}{t^{1/4}} + 6\sqrt{t},\\
&\mathcal{O}_{1,2,3} = -10 + \frac{i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)^3}{t^{3/4}} + \frac{4}{\sqrt{t}} - \frac{3i\sqrt{2}\,(\sqrt{t}-1)}{t^{1/4}} + 4\sqrt{t}.
\end{aligned}
\tag{64}
$$

3 $\mathcal{N}=2$ 超共形场论的诠释与有限群商

事实上，上文所计算的不动点子簇的有趣物理解释源于非阿贝尔霍奇理论，其中 Σ_2 的 $SL(2,\mathbb{C})$特征簇对应于Hitchin系统的Betti模空间。后者已知是与6d (2,0)理论在二维黎曼曲面上的紧致化相关联的自然Seiberg–Witten可积系统。对于由 Σ_2 [Bro91], 的全纯自同构实现的有限子群 $\Gamma \subset \mathrm{Mod}(\Sigma_2)$, 相应的商映射是具有特定分歧数据的伽罗瓦覆盖 [CDZ15] （在我们的图中标示）。（经典或 t–形变）特征簇的 Γ不动点对应于等变平坦联络。

大多数导出曲面似乎都是零亏格，此时不动点轨迹可识别为带穿孔球面的相对特征簇（不规则特征簇）。所研究的案例与具有多个穿孔的秩一和秩二Hitchin可积系统的结构相一致（例如 $n=4$，5）。因此，二维和四维理想自然成为四维 $\mathcal{N}=2$ 理论库仑支几何的候选对象。在此背景下，将六维 $\mathcal{N}=(2,0)$型理论 $\mathfrak{g}$ 紧化于带有适当不规则奇点的穿孔黎曼曲面上，可得到类$\mathcal{S}$ 构造[Gai09, GMN09, Xie12], ，对应于阿盖尔斯–道格拉斯（AD）超对称共形场论 [AD95, Cec20] 这一类（野Hitchin类型）。具体而言，特别值得研究二维、四维奇异子簇（G_b, G_f, G_e, G_k, G_n, G_s）或其约化，并考察由此产生的超共形场论、其特征谱曲线（Seiberg–Witten几何）及其他性质。还应探究相关阿盖尔斯–道格拉斯超共形场论层面的子簇等价现象，即等价子簇的亏格和不规则奇点数发生变化、而其子群各不相同的情形 $G_b(G_f)$ $G_h(G_o)$ $G_i(G_p)$ $G_{k_2}(G_s)$ $G_r(G_w)$；这将是后续工作的研究主题。

此外，从F理论的角度来看，新出现的亚纯Hitchin系统为7膜规范扇区提供了局部描述。我们的结果引出了一个相关问题：将每个有限群商与商曲线上的相应对称性约化Hitchin系统进行比较。还可以进一步探讨相应的 $\{q,t\}$形变是否会产生新颖的量子约化簇，以及它是否会为相关的四维理论提供新的（或再现已有的）受保护可观测量，例如墙穿越数据和缺陷算子代数。

致谢。 我们谨向 Alexander Belavin、Sergio Cecotti、Dmitry Orlov、Chris Brav、Mykola Dedushenko 和 Yankun Ma 致以谢意，感谢他们富有启发性的讨论和有益的意见。S.A. 的工作得到了北京市自然科学基金项目 IS25025 的资助。AP 的研究得到了北京市自然科学基金项目 IS25017 和俄罗斯科学基金会项目 RSCF-25-72-10177 的资助。本研究的部分工作是在访问国际镜像实验室期间完成的

对称性与自守形式，俄罗斯国家研究型高等经济大学，AP 谨向 Valery Gritsenko 和 Mikhail Alfimov 表达谢意，感谢他们的热情接待。

亏格二 DAHA 与扭转作用

A.1 J 的生成元和关系$\mathcal{A}_{1,\ t}$

为便于后续进行不动点分析，我们记录映射类群在亏格二 DAHA 生成元上的作用，以及其在经典 $t=1$ 纤维上的特化。亏格二 DAHA 可由以下 15 个生成元张成

$$\mathcal{O}_1,\dots,\mathcal{O}_6,\qquad \mathcal{O}_{1,2},\mathcal{O}_{2,3},\mathcal{O}_{3,4},\mathcal{O}_{4,5},\mathcal{O}_{5,6},\mathcal{O}_{6,1},\qquad \mathcal{O}_{1,2,3},\mathcal{O}_{2,3,4},\mathcal{O}_{3,4,5}. \tag{65}$$

交换经典极限记为$\mathcal{A}_{q=1,\ t}$，其在 $t=1$ 处的进一步特化为

$$\mathcal{A}_{q=t=1}\cong\mathcal{O}(Hom(\pi_1(\Sigma_2),SL(2,\mathbb{C})))^{SL(2,\mathbb{C})}. \tag{66}$$

$\mathcal{O}_i$ 和 $O_{i,\ i+1}$ 是轨道 6 的生成元，而 $\mathcal{O}_{i,\ i+1,\ i+2}$ 是轨道 3 的生成元

$$\mathcal{O}_{4,5,6}=\mathcal{O}_{1,2,3},\qquad \mathcal{O}_{5,6,1}=\mathcal{O}_{2,3,4},\qquad \mathcal{O}_{6,1,2}=\mathcal{O}_{3,4,5}. \tag{67}$$

完整的 $J_{q,\ t}$ 关系为

$$\begin{aligned}
&q^{-1/2}\,O_{i+2}O_{i+4}+q^{1/2}\,O_{i+3}O_{i+2,i+3,i+4}\\
&-O_{i+2,i+3}O_{i+3,i+4}-\Big(q^{1/2}t^{-1/2}+q^{-1/2}t^{1/2}\Big)O_i=0,\\[2ex]
&q^{-1/2}\,O_{i+3,i+4}O_{i+1,i+2,i+3}-q^{-1}\,O_{i+3}O_{i+5,i}-O_{i+4}O_{i+1,i+2}\\
&-\Big(q^{1/2}t^{-1/2}+q^{-1/2}t^{1/2}\Big)\Big(O_{i,i+1}-q^{-1/4}O_iO_{i+1}\Big)=0,\\[2ex]
&O_{i,i+1,i+2}O_{i+1,i+2,i+3}-q^{1/2}\,O_{i+1,i+2}O_{i+4,i+5}-q^{-1/2}\,O_iO_{i+3}\\
&-\Big(q^{1/2}t^{-1/2}+q^{-1/2}t^{1/2}\Big)\Big(-(q-1+q^{-1})\,O_{i+2,i+3,i+4}\\
&+q^{-3/4}O_{i+1}O_{i+5,i}+q^{3/4}O_{i+5}O_{i,i+1}-O_iO_{i+1}O_{i+5}\Big)=0\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{O}_{1,\ 2,\ 3}\mathcal{O}_{2,\ 3,\ 4}\mathcal{O}_{3,\ 4,\ 5}-\big(\mathcal{O}_1\mathcal{O}_4\mathcal{O}_{3,\ 4,\ 5}+\mathcal{O}_2\mathcal{O}_5\mathcal{O}_{1,\ 2,\ 3}+\mathcal{O}_3\mathcal{O}_6\mathcal{O}_{2,\ 3,\ 4}\big)\\
&\quad+\frac{1}{2}\big(t^{1/2}+t^{-1/2}\big)\big(\mathcal{O}_1\mathcal{O}_6\mathcal{O}_{6,1}+\mathcal{O}_2\mathcal{O}_1\mathcal{O}_{1,2}+\mathcal{O}_3\mathcal{O}_2\mathcal{O}_{2,3}\\
&\quad+\mathcal{O}_4\mathcal{O}_3\mathcal{O}_{3,4}+\mathcal{O}_5\mathcal{O}_4\mathcal{O}_{4,5}+\mathcal{O}_6\mathcal{O}_5\mathcal{O}_{5,6}\big)-\big(\mathcal{O}_1\mathcal{O}_3\mathcal{O}_5+\mathcal{O}_2\mathcal{O}_4\mathcal{O}_6\big)\\
&\quad-\frac{1}{2}\big(t^{1/2}+t^{-1/2}\big)\big(\mathcal{O}_{1,2}^2+\mathcal{O}_{2,3}^2+\mathcal{O}_{3,4}^2+\mathcal{O}_{4,5}^2+\mathcal{O}_{5,6}^2+\mathcal{O}_{6,1}^2\big)+\big(t^{1/2}+t^{-1/2}\big)^3=0.
\end{aligned} \tag{68}$$

在交换极限下，正规序关系为 $\mathcal{O}_I\mathcal{O}_J=\mathcal{O}_J\mathcal{O}_I$，且 $t=1$ 纤维导出特化的 J-关系以及一个特化的卡西米尔关系。

A.2 映射类群 $Mod(\Sigma_2)$ 与自同构

映射类群作用由德恩扭转 d_1 和六阶自同构生成

$$I=(\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2,\mathcal{O}_3,\mathcal{O}_4,\mathcal{O}_5,\mathcal{O}_6)(\mathcal{O}_{1,2},\mathcal{O}_{2,3},\mathcal{O}_{3,4},\mathcal{O}_{4,5},\mathcal{O}_{5,6},\mathcal{O}_{6,1})(\mathcal{O}_{1,2,3},\mathcal{O}_{2,3,4},\mathcal{O}_{3,4,5}), \tag{69}$$

连同

$$d_i=I^{\,i-1}d_1I^{\,1-i},\qquad i=1,\dots,5. \tag{70}$$

辫群关系和交换关系为

$$d_id_{i+1}d_i=d_{i+1}d_id_{i+1}\qquad(1\le i\le 4),\qquad d_id_j=d_jd_i\qquad(|i-j|>1), \tag{71}$$

以及 $I^6=1$。事实上，双曲 involution 在此表示中作用平凡，因此

$$H:=d_1d_2d_3d_4d_5d_5d_4d_3d_2d_1=1\,, \tag{72}$$

在当前框架中，这也对应于复合扭转 ζ_0。

关于 $\mathcal{A}_{q,\ t}$ 的量子与经典 d_1-作用

在量子代数$\mathcal{A}_{q,t}$中，德恩扭转 d_1 及其逆元的作用为

$$d_1:\begin{cases}\mathcal{O}_2\mapsto q^{1/4}\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2-q^{1/2}\mathcal{O}_{1,2},\\ \mathcal{O}_6\mapsto\mathcal{O}_{6,1},\\ \mathcal{O}_{1,2}\mapsto\mathcal{O}_2,\\ \mathcal{O}_{2,3}\mapsto q^{1/4}\mathcal{O}_1\mathcal{O}_{2,3}-q^{1/2}\mathcal{O}_{1,2,3},\\ \mathcal{O}_{5,6}\mapsto\mathcal{O}_{2,3,4},\\ \mathcal{O}_{6,1}\mapsto q^{1/4}\mathcal{O}_1\mathcal{O}_{6,1}-q^{1/2}\mathcal{O}_6,\\ \mathcal{O}_{1,2,3}\mapsto\mathcal{O}_{2,3},\\ \mathcal{O}_{2,3,4}\mapsto q^{1/4}\mathcal{O}_1\mathcal{O}_{2,3,4}-q^{1/2}\mathcal{O}_{5,6},\end{cases}\qquad d_1^{-1}:\begin{cases}\mathcal{O}_2\mapsto\mathcal{O}_{1,2},\\ \mathcal{O}_6\mapsto q^{-1/4}\mathcal{O}_1\mathcal{O}_6-q^{-1/2}\mathcal{O}_{6,1},\\ \mathcal{O}_{1,2}\mapsto q^{-1/4}\mathcal{O}_1\mathcal{O}_{1,2}-q^{-1/2}\mathcal{O}_2,\\ \mathcal{O}_{2,3}\mapsto\mathcal{O}_{1,2,3},\\ \mathcal{O}_{5,6}\mapsto q^{-1/4}\mathcal{O}_1\mathcal{O}_{5,6}-q^{-1/2}\mathcal{O}_{2,3,4},\\ \mathcal{O}_{6,1}\mapsto\mathcal{O}_6,\\ \mathcal{O}_{1,2,3}\mapsto q^{-1/4}\mathcal{O}_1\mathcal{O}_{1,2,3}-q^{-1/2}\mathcal{O}_{2,3},\\ \mathcal{O}_{2,3,4}\mapsto\mathcal{O}_{5,6},\end{cases} \tag{73}$$

而对其余生成元的作用是平凡的。在经典极限 $q=1$下，类似的公式定义了交换代数$\mathcal{A}_{q=1,t}$的一个自同构:

$$d_1:\begin{cases}\mathcal{O}_2\mapsto\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2-\mathcal{O}_{1,2},\\ \mathcal{O}_6\mapsto\mathcal{O}_{6,1},\\ \mathcal{O}_{1,2}\mapsto\mathcal{O}_2,\\ \mathcal{O}_{2,3}\mapsto\mathcal{O}_1\mathcal{O}_{2,3}-\mathcal{O}_{1,2,3},\\ \mathcal{O}_{5,6}\mapsto\mathcal{O}_{2,3,4},\\ \mathcal{O}_{6,1}\mapsto\mathcal{O}_1\mathcal{O}_{6,1}-\mathcal{O}_6,\\ \mathcal{O}_{1,2,3}\mapsto\mathcal{O}_{2,3},\\ \mathcal{O}_{2,3,4}\mapsto\mathcal{O}_1\mathcal{O}_{2,3,4}-\mathcal{O}_{5,6},\end{cases}\qquad d_1^{-1}:\begin{cases}\mathcal{O}_2\mapsto\mathcal{O}_{1,2},\\ \mathcal{O}_6\mapsto\mathcal{O}_1\mathcal{O}_6-\mathcal{O}_{6,1},\\ \mathcal{O}_{1,2}\mapsto\mathcal{O}_1\mathcal{O}_{1,2}-\mathcal{O}_2,\\ \mathcal{O}_{2,3}\mapsto\mathcal{O}_{1,2,3},\\ \mathcal{O}_{5,6}\mapsto\mathcal{O}_1\mathcal{O}_{5,6}-\mathcal{O}_{2,3,4},\\ \mathcal{O}_{6,1}\mapsto\mathcal{O}_6,\\ \mathcal{O}_{1,2,3}\mapsto\mathcal{O}_1\mathcal{O}_{1,2,3}-\mathcal{O}_{2,3},\\ \mathcal{O}_{2,3,4}\mapsto\mathcal{O}_{5,6}.\end{cases} \tag{74}$$

相同的交换公式作用于纤维 $\mathcal{A}_{q=t=1}$。

A.3 有限子群 ζ-扭曲作用

正如 [Bro91, NN18], 所指出的, $Mod(\Sigma_2)$子群作用通过 ζ 复合扭转来定义, 其作用于亏格二 DAHA 生成元 $\mathcal{O}$ 得到:

ζ_0 定义了超对合，因此如上所述，它在双仿射 Hecke 代数的生成元 $\zeta_0(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$ 上作用平凡。

$$\zeta_1: \quad \begin{array}{lll} \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2 & \mathcal{O}_{1,2} \to \mathcal{O}_{2,3} & \mathcal{O}_{1,2,3} \to \mathcal{O}_{2,3,4} \\ \mathcal{O}_2 \to \mathcal{O}_3 & \mathcal{O}_{2,3} \to \mathcal{O}_{3,4} & \mathcal{O}_{2,3,4} \to \mathcal{O}_{3,4,5} \\ \mathcal{O}_3 \to \mathcal{O}_4 & \mathcal{O}_{3,4} \to \mathcal{O}_{4,5} & \mathcal{O}_{3,4,5} \to \mathcal{O}_{1,2,3} \\ \mathcal{O}_4 \to \mathcal{O}_5 & \mathcal{O}_{4,5} \to \mathcal{O}_{5,6} & \\ \mathcal{O}_5 \to \mathcal{O}_6 & \mathcal{O}_{5,6} \to \mathcal{O}_{6,1} & \\ \mathcal{O}_6 \to \mathcal{O}_1 & \mathcal{O}_{6,1} \to \mathcal{O}_{1,2} & \end{array} \tag{75}$$

$$\zeta_2: \quad \begin{array}{ll} \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2 & \mathcal{O}_{1,2} \to \mathcal{O}_1(\mathcal{O}_2^2-1) - \mathcal{O}_2\mathcal{O}_{1,2} \\ \mathcal{O}_2 \to \mathcal{O}_1\mathcal{O}_2 - \mathcal{O}_{1,2} & \mathcal{O}_{2,3} \to \mathcal{O}_3\mathcal{O}_4 - \mathcal{O}_{3,4} \\ \mathcal{O}_3 \to \mathcal{O}_5\mathcal{O}_6 - \mathcal{O}_{5,6} & \mathcal{O}_{3,4} \to (\mathcal{O}_5^2-1)\mathcal{O}_6 - \mathcal{O}_5\mathcal{O}_{5,6} \\ \mathcal{O}_4 \to \mathcal{O}_5 & \mathcal{O}_{4,5} \to \mathcal{O}_4 \\ \mathcal{O}_5 \to \mathcal{O}_{4,5} & \mathcal{O}_{5,6} \to \mathcal{O}_{2,3}\mathcal{O}_{4,5} - \mathcal{O}_{6,1} \\ \mathcal{O}_6 \to \mathcal{O}_{2,3} & \mathcal{O}_{6,1} \to \mathcal{O}_3 \end{array}$$
$$\begin{array}{l} \mathcal{O}_{1,2,3} \to \mathcal{O}_4\mathcal{O}_{2,3} - \mathcal{O}_{2,3,4} \\ \mathcal{O}_{2,3,4} \to \mathcal{O}_3\mathcal{O}_{4,5} - \mathcal{O}_{3,4,5} \\ \mathcal{O}_{3,4,5} \to \frac{1}{2}(\mathcal{O}_2\mathcal{O}_5 + \mathcal{O}_{3,4}\mathcal{O}_{6,1} - \mathcal{O}_{2,3,4}\mathcal{O}_{3,4,5}) \end{array} \tag{76}$$

$$\zeta_3: \quad \begin{array}{ll} \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_1\mathcal{O}_2 - \mathcal{O}_{1,2} & \mathcal{O}_{1,2} \to \mathcal{O}_1\mathcal{O}_{2,3} - \mathcal{O}_{1,2,3} \\ \mathcal{O}_2 \to \mathcal{O}_3 & \mathcal{O}_{2,3} \to \mathcal{O}_{3,4} \\ \mathcal{O}_3 \to \mathcal{O}_4 & \mathcal{O}_{3,4} \to -\mathcal{O}_{2,3} + \mathcal{O}_{4,5}\mathcal{O}_{6,1} \\ \mathcal{O}_4 \to \mathcal{O}_5\mathcal{O}_{6,1} - \mathcal{O}_{2,3,4} & \mathcal{O}_{4,5} \to \mathcal{O}_5 \\ \mathcal{O}_5 \to \mathcal{O}_{6,1} & \mathcal{O}_{5,6} \to -\mathcal{O}_6\mathcal{O}_{6,1} + \mathcal{O}_1\left(-1+\mathcal{O}_{6,1}^2\right) \\ \mathcal{O}_6 \to -\mathcal{O}_6 + \mathcal{O}_1\mathcal{O}_{6,1} & \mathcal{O}_{6,1} \to \mathcal{O}_{3,4,5} \end{array}$$
$$\begin{array}{l} \mathcal{O}_{1,2,3} \to -\mathcal{O}_{5,6} + \mathcal{O}_1\mathcal{O}_{2,3,4} \\ \mathcal{O}_{2,3,4} \to -\mathcal{O}_2 + \mathcal{O}_{6,1}\mathcal{O}_{3,4,5} \\ \mathcal{O}_{3,4,5} \to \mathcal{O}_{4,5} \end{array} \tag{77}$$

$$\zeta_4: \quad \begin{array}{ll} \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2 & \mathcal{O}_{1,2} \to \mathcal{O}_{2,3} \\ \mathcal{O}_2 \to \mathcal{O}_3 & \mathcal{O}_{2,3} \to \mathcal{O}_{3,4} \\ \mathcal{O}_3 \to \mathcal{O}_4 & \mathcal{O}_{3,4} \to \mathcal{O}_6\mathcal{O}_{4,5} - \mathcal{O}_{1,2,3} \\ \mathcal{O}_4 \to \mathcal{O}_5\mathcal{O}_6 - \mathcal{O}_{5,6} & \mathcal{O}_{4,5} \to \mathcal{O}_5 \\ \mathcal{O}_5 \to \mathcal{O}_6 & \mathcal{O}_{5,6} \to -\mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_6\mathcal{O}_{6,1} \\ \mathcal{O}_6 \to \mathcal{O}_{6,1} & \mathcal{O}_{6,1} \to \mathcal{O}_{3,4,5} \end{array}$$
$$\begin{array}{l} \mathcal{O}_{1,2,3} \to \mathcal{O}_{2,3,4} \\ \mathcal{O}_{2,3,4} \to -\mathcal{O}_{1,2} + \mathcal{O}_6\mathcal{O}_{3,4,5} \\ \mathcal{O}_{3,4,5} \to \mathcal{O}_{4,5} \end{array} \tag{78}$$

所属机构

Semeon Arthamonov
中国北京市怀柔区北京数学科学与应用研究院（BIMSA），邮编101408电子邮箱：arthamonov@bimsa.cn

Anton Pribytok
北京数学科学与应用研究院（BIMSA），中国北京市怀柔区101408 俄罗斯科学院斯捷克洛夫数学研究所，古布金街8号，119991，俄罗斯莫斯科 国立研究大学高等经济学院数学系，乌萨切娃街6号，119048，俄罗斯莫斯科电子邮箱：antonspribitoks@bimsa.cn

参考文献

[AD95] Philip C. Argyres与Michael R. Douglas. SU(3)超对称规范理论中的新现象. 核物理学B, 448:93–126, 1995.[Art25] S Arthamonov. 亏格二DAHA的经典极限. Selecta Mathematica, 31(1):19, 2025.[AS19] S. Arthamonov与Sh. Shakirov. a1球面双仿射赫克代数的亏格二推广. Selecta Mathematica, 25(2):17, 2019.[Bro91] S. A. Broughton. 低亏格曲面上有限群作用的分类. 纯粹与应用代数杂志, 69(3):233–270, 1991.[CDZ15] Sergio Cecotti与Michele Del Zotto. $\mathcal{N} = 2$ BPS谱与量子单值性的伽罗瓦覆盖. 2015. 发表于理论与数学物理进展 20 (2016) 1227–1336, doi:10.4310/ATMP.2016.v20.n6.a1.[Cec20] Sergio Cecotti. 特殊几何与沼泽地. 高能物理学报, (09):147, 2020.[Deh38] M. Dehn. 映射类群：fl¨achen上的算术域. Acta Mathematica, 69(1):135–206, 1938.[Gai09] Davide Gaiotto. $\mathcal{N} = 2$ 对偶. 2009.[GMN09] Davide Gaiotto、Gregory W. Moore与Andrew Neitzke. 壁穿越、Hitchin系统与WKB近似. 2009.[Hum79] S. Humphries. 映射类群的生成元. 载于《低维流形拓扑》, 第44–47页. 施普林格, 1979.[NN18] G. Nakamura与T. Nakanishi. 由Dehn扭转生成亏格2曲面映射类群的有限子群. 纯粹与应用代数杂志, 222(11):3585–3594, 2018.[Sik12] A. Sikora. 特征簇. 美国数学会汇刊, 364(10):5173–5208, 2012.[Waj83] B. Wajnryb. 可定向曲面映射类群的一个简单表示. 以色列数学杂志, 45(2):157–174, 1983.[Xie12] Dan Xie. 源于M5膜的Argyres–Douglas理论. 2012.