arXiv:2603.07851v1 [math.NA] 8 Mar 2026

偏微分方程传播、采样与傅里叶比

A. Iosevich、J. Iosevich、E. Palsson 和 A. Yavicoli

Abstract. 我们研究如何从不完整的随机空间样本中恢复离散场，这些离散场是偏微分方程在固定时刻的快照。核心参数是傅里叶比

$$FR(g) = \frac{\|\widehat{g}\|_1}{\|\widehat{g}\|_2},$$

它量化了有效谱维数，并决定有界正交采样模型中的稳定 ℓ^1 恢复。

我们的主要发现是，相较于离散初始数据，固定时刻的偏微分方程传播能够严格改善傅里叶比界。在三维中，波快照算子会带来额外的高频衰减；离散化后，傅里叶比界在网格大小变化时仍保持一致受控（离散化误差除外），而初始离散化对应的界通常随N呈多项式增长。对于任意维数下的热方程，高斯频率衰减使固定正时间下的傅里叶比界基本不受网格分辨率影响。

将这些确定性的傅里叶比值改进与标准 ℓ^1 恢复保证相结合，可得出从缺失的空间样本中实现稳定重建的明确采样率界。数值实验表明，在实际应用中，偏微分方程传播充当谱预条件器，降低了有效采样复杂度。

1. Introduction

本文旨在将 [7] 的采样框架拓展到基本的偏微分方程演化，并量化传播如何改变从缺失空间数据中恢复信号所需的采样要求。核心观察是，定时偏微分方程传播子会降低离散场的傅里叶比。由于稳定 ℓ^1 恢复所需的随机点采样数量与傅里叶比的平方成正比（至多相差对数因子），这种降低会直接转化为更低的采样预算。在三维中，对于固定的正时间（至多相差离散化误差项），定时波快照将离散初始数据所需的关于N 的多项式采样要求，替换为一种在 N 中一致受控的采样要求。对于热方程，在任意固定的 $t > 0$下，采样要求基本上与网格大小无关。

从成像的角度来看，本文的结果量化了物理传播机制如何降低含缺失

日期：2026年3月10日。2020年数学主题分类。42B05、35L05、35K05、94A12、65T50。关键词和短语。傅里叶比、波动方程、热方程、压缩感知、随机采样、离散化、信号恢复。A. I. 部分研究获得了美国国家科学基金会的资助，资助编号为 NSF DMS-2154232。A. Y. 部分研究获得了加拿大自然科学与工程研究委员会（NSERC）的资助（GR030571 和 GR030540）。

数据的重建问题中的采样负担。在许多传感模态中，测量场并非原始信号，而是由某个底层偏微分方程所支配的传播状态。扩散过程自然存在于热传递、光学模糊及其他平滑现象中，而波传播则出现在声学、地震成像和电磁传感中。在这类情形下，观测数据可以被视为偏微分方程演化的离散快照。本文的分析表明，这种传播可以充当谱预条件器：它会抑制高频傅里叶模态，从而降低离散场的傅里叶比。由于压缩感知所用的采样保证直接取决于这一量，因此这种效应能够减少实现稳定恢复所需的空间样本数。

如 [7], ，其底层采样框架是经典的压缩感知范式，通过 ℓ^1 最小化及相关凸规划，从不完整测量中实现稳定恢复。这一范式始于 [2] ，并在例如 [4, 8, 9]等工作中得到进一步发展。一个反复出现的主题是，我们不对物理空间中的信号施加任何稀疏性假设。相反，可压缩性由傅里叶比

$$FR(g) = \frac{\|\widehat{g}\|_1}{\|\widehat{g}\|_2},$$

来量化表征有效谱维数。这一视角与不确定性原理以及信号恢复中的结构性观点自然契合，例如[3, 6]。

本文一个关键的定量结果是，我们将离散偏微分方程快照 g_t 的傅里叶比直接与离散初始数据 g的傅里叶比进行比较。离散初始数据 g 仅继承了由 f的正则性所带来的傅里叶衰减。相比之下，快照 g_t 既继承了 f 的正则性，也继承了传播算子带来的额外频率衰减。在三维波动情形下，对于固定的$t > 0$ （除离散化误差外），这使得 g 的先验多项式傅里叶比值界转变为一个关于网格大小一致受控的界。在任意维度的热方程情形下，高斯阻尼使得 g_t 的傅里叶比值界对于固定正时间而言基本不依赖于网格大小，而相应的 g 傅里叶比值界则在 $d \geqslant 3$维度下关于 N 呈多项式增长。

1.1. 波动方程的动机。 设 f 是一个在$[0,1]^3$上具有 1-周期的实值函数。考虑波动方程的解 u

$$u_{tt} = \Delta u, \qquad u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = f(x).$$

将 f 的傅里叶级数写为

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k e^{2\pi i k \cdot x}.$$

则周期波演化满足

$$u(x,t) = ta_0 + \sum_{k \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}} \frac{\sin(2\pi t|k|)}{2\pi|k|} a_k e^{2\pi i k \cdot x}.$$

Thus 对于固定的 $t > 0$ ，映射 $f \mapsto u(\cdot,\ t)$ 是一个阶数为 $-$ 的傅里叶乘子 1.

核心启发是，在 $\mathbb{Z}_N^3$ 上进行离散化后，额外因子 $|k|^{-1}$ 会改善离散傅里叶系数的高频尾部。由于傅里叶比率是一个 ℓ^1/ℓ^2 量，离散傅里叶系数尾部界的改善通常会显著降低 FR 。

1.2. 热方程的动机。 设 f 是一个实值的1-周期函数，定义在$[0,\ 1]^d$上。考虑热方程的解 v

$$v_t = \Delta v, \qquad v(x,0) = f(x).$$

将 f 的傅里叶级数写为

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k e^{2\pi i k\cdot x}.$$

那么，周期热演化 $v = e^{t\Delta} f$ 满足

$$v(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} e^{-4\pi^2 t|k|^2} a_k e^{2\pi i k\cdot x}.$$

因此，对于固定的 $t>0$ ，映射 $f \mapsto v(\cdot,\ t)$ 是傅里叶级数系数上的一个傅里叶乘子，其符号为 $e^{-4\pi^2 t|k|^2}$ ，因而具有无穷阶平滑性。

在 $\mathbb{Z}_N^d$上离散化后，这种高斯频率衰减会使离散傅里叶系数的尾部绝对可和。从傅里叶比率的角度来看，这意味着对于每个固定的$t>0$，高频对 $\|\widehat{g}_t\|_1$ 的贡献都受到一致控制，因此即使初始离散数据在物理空间中并不稀疏，有效谱维数仍然较小。

1.3. 展望：平均与动力学平滑。 本文所考虑的偏微分方程传播子为一类算子提供了典型例子：它们的谱乘子会抑制高频傅里叶模态，从而改善傅里叶比率。从这一角度看，支撑我们恢复与压缩结果的平滑效应本质上是谱性质：只要算子在傅里叶基下以对角形式作用，且乘子随着频率远离低频而衰减，这种效应就会出现。虽然椭圆型和色散型偏微分方程流为这一原理提供了自然且易于解析处理的实例，但它们并非产生此类行为的唯一机制。

在动力系统流上的时间平均中，也会出现一种相关现象。例如，考虑

$$A_T f(x) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x - t\alpha)\, dt,$$

其中 $\alpha \in \mathbb{R}^d$ 是一个固定的速度向量。

在傅里叶域中，该算子将 $\widehat{f}(k)$ 乘以一个大小为 $\lesssim (T|k\cdot\alpha|)^{-1}$ 的因子；远离共振时，这种增益令人联想到波演化中观察到的 -1 阶衰减。尽管这种衰减具有各向异性，且取决于 α的丢番图性质，但这表明，傅里叶比的改善也可能源于植根于动力学而非单独源于偏微分方程的谱平均机制。对这类动力系统平均算子及其对傅里叶比的影响进行系统研究，包括混合和谱隙的作用，超出了本文的范围，将另行展开。

从建模角度看，当移动传感器沿轨迹采集时间平均曝光时，这类动力系统平均算子便自然产生。在这种解释下，平台运动本身就起到了谱预条件器的作用：时间平均会抑制高频傅里叶模态，从而降低观测信号的傅里叶比。因此，除了扩散等物理平滑机制外，传感几何本身也能降低有效信号复杂度，并放宽稳定恢复所需的采样要求。对这一动力学视角的深入研究，包括轨迹的丢番图性质和混合现象的作用，将留待未来工作。

1.4. 文章结构与主要结果。 总之，我们证明，相较于对应的离散初始数据，定时波和热传播算子在离散化后能够严格改进傅里叶比界。在三维中，波快照将关于 N 呈多项式增长的傅里叶比界改进为在固定时间下关于 N 一致有界的界。在任意维度中，固定正时间下，热快照所得的傅里叶比界基本不依赖网格大小。这些确定性改进可直接转化为标准 ℓ^1 恢复保证所需采样预算的减少。

我们在具有 1-周期边界条件的单位立方体 $[0,1]^d$ 上进行研究。给定 $f \in C^2([0,1]^d)$，它在每个变量上均为 1-周期函数，我们将其在 $N \times N \times \cdots \times N$ 网格上的离散化定义为

$$g(x) = f(x/N), \qquad x \in \mathbb{Z}_N^d.$$

我们还考虑相应的周期波演化和热演化，并将固定时间 t 的离散快照定义为 g_t 。

我们的第一个主要结果是，为任意维度下的离散初始数据g 建立先验傅里叶比界；该界通常随 N 在维度 $d \geqslant 3$下呈多项式增长。我们的第二个主要结果是，改进三维中的波快照傅里叶比界，使其在固定 $t > 0$ 下关于 N 一致有界（忽略离散化误差）。我们的第三个主要结果是，改进任意维度下热快照的傅里叶比界，使其在固定正时间下基本不依赖 N。随后，我们将这些确定性的傅里叶比界与相同的 ℓ^1 恢复定理结合，该定理用于 [7] ，从而得到在缺失空间样本下的恢复样本复杂度界。

从逆问题视角来看，未知对象是 $\mathbb{Z}_N^d$ 上的离散场，而数据则由子集 $X \subset \mathbb{Z}_N^d$ 上的逐点样本构成。重建算法是在傅里叶域中进行标准的 ℓ^1 最小化。本工作的创新之处不在于优化过程，而在于将偏微分方程传播识别为一种确定性机制，它能降低未知对象的谱复杂度，从而减少实现稳定恢复所需的空间样本数量。

2. Imaging viewpoint: an inverse problem with a PDE-preconditioned prior

这项工作可以解释为一个存在缺失数据的成像逆问题。未知对象是离散场 $h\colon \mathbb{Z}_N^d \to \mathbb{R}$，数据是在子集 $X \subset \mathbb{Z}_N^d$ 上获取的逐点样本：

$$y = P_X h + \eta,$$

其中， P_X 表示定义为下式的坐标投影算子

$$(P_X h)(x) = \begin{cases} h(x), & x \in X, \\ 0, & x \notin X, \end{cases}$$

并且 η 表示支撑集为 X的测量噪声。用成像领域的术语来说，这是一个像素缺失问题（图像修复）或传感器失效问题。目标是根据 y重建 h 。

这里的新意不在于提出一种新的优化方法，而在于提供了一种确定性机制，通过降低未知量的内在复杂度来提高可恢复性。具体而言，我们取 $h = g_t$，其中 g_t 是对底层状态 f 施加周期偏微分方程演化后，在固定时刻得到的快照，再将其离散化。对于波动方程和热方程，快照映射在傅里叶基下是对角的，并会抑制高频。离散化后，这种抑制会转化为更优的离散傅里叶尾界，从而得到更小的傅里叶比

$$FR(g_t) = \frac{\|\widehat{g}_t\|_1}{\|\widehat{g}_t\|_2}.$$

由于标准压缩感知保证依赖于 ℓ^1/ℓ^2 谱代理（此处为FR），PDE 快照实际上充当了谱预条件器，降低了实现稳定恢复所需的空间样本数量。

从应用角度看，可以将偏微分方程演化视为测量物理过程的一部分，或视为受控的预处理阶段。在扩散主导成像模态中，观测状态自然是经过热方程演化的初始分布。在波动驱动模态中，测量场可以是初始源的带限或平滑变换。无论哪种情况，本文的估计结果都量化了这种传播如何改变从缺失空间样本中恢复信号所需的采样要求。

本文的结果属于一个广泛的逆问题研究主题：识别能够实现欠采样重建的结构或先验，并根据复杂度参数量化采样率。这里的复杂度参数是傅里叶比，而结构由偏微分方程传播所诱导。

一个自然的问题是，能否在采样前简单地应用人工平滑滤波器，从而获得类似的改进?在许多成像和传感场景中，传播后的场就是实际观测量（例如经扩散模糊的状态或波传播后的场），因此平滑是前向模型的一部分，而非算法上的选择。本文的结果量化了这种由物理过程诱导的谱阻尼如何改变缺失数据恢复的采样要求。

3. Notation and discrete Fourier transform

全文中， $N \geqslant 2$ 为整数，且 $\mathbb{Z}_N = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$。对于 $x \in \mathbb{Z}_N^d$ 和 $m \in \mathbb{Z}_N^d$，我们记作

$$x \cdot m = x_1 m_1 + \cdots + x_d m_d.$$

Let

$$\chi(t) = e^{2\pi i t/N}.$$

对于 $h\colon\ \mathbb{Z}_N^d \to \mathbb{C}$ ，我们将离散傅里叶变换定义为

$$\widehat{h}(m) = \frac{1}{N^{d/2}} \sum_{x \in \mathbb{Z}_N^d} \chi(-x \cdot m) h(x).$$

采用这一规范化后，帕塞瓦尔等式的形式为

$$\|\widehat{h}\|_2 = \|h\|_{L^2(\mathbb{Z}_N^d)}.$$

我们将傅里叶比定义为

$$FR(h) = \frac{\|\widehat{h}\|_1}{\|\widehat{h}\|_2}.$$

我们将 $FR(h)$ 解释为 0，如果 $h \equiv 0$；否则则按所示公式定义。傅里叶比最初由 [1]提出，随后在连续情形中由 [5]进行了推广。

定义 3.1 （包裹欧几里得模）。 对于 $m \in \mathbb{Z}_N^d$ ，定义 $|m|$ 为 m的代表元 $\widetilde{m} \in \{-\lfloor N/2 \rfloor, \ldots, \lfloor (N-1)/2 \rfloor\}^d$的欧几里得范数。

4. 主定理

4.1. 离散初始数据的先验傅里叶比界。 我们首先对离散初始数据本身的傅里叶比进行量化；这为衡量波和热带来的改进提供了基准。此结果将 [7] 的一项主要结论推广到了高维情形。

命题 4.1 （离散初始数据的傅里叶比值界）。令 $d \geqslant 1$ ，并设 f 是定义在 $[0、\ 1]^d$ 上的实值函数，它对每个变量均以 1 为周期，且属于 $C^2([0、\ 1]^d)$。令 $g : \mathbb{Z}_N^d \to \mathbb{R}$ 为其离散化，

$$g(x) = f(x/N), \qquad x \in \mathbb{Z}_N^d.$$

假设

$$N \|f\|^2_{L^2([0,1]^d)} \geqslant 4 C_d \|f\|^2_{C^2([0,1]^d)}.$$

那么存在一个仅依赖于 d 的常数 $C > 0$ ，使得

$$FR(g) \leqslant A^{\text{init}} + C \frac{\|f\|_{C^2([0,1]^d)}}{\|f\|_{L^2([0,1]^d)}} S_d(N) + C \frac{\|f\|_{C^2([0,1]^d)}}{\|f\|_{L^2([0,1]^d)}} \frac{1}{N},$$

其中

$$A^{\text{init}} = 2 \frac{\left| \int_{[0,1]^d} f(x) dx \right|}{\|f\|_{L^2([0,1]^d)}}$$

and

$$S_d(N) = \begin{cases} 1, & d = 1, \\ \log N, & d = 2, \\ N^{d-2}, & d \geqslant 3. \end{cases}$$

注记 4.2. 命题 4.1 中的 C^2 假设对于此处所得傅里叶比值界的标度至关重要。证明最终依赖于引理 7.3，其中两步离散分部求和给出离散傅里叶变换的 $|m|^{-2}$ 衰减估计。这一二阶衰减导致依赖维数的增长项 $S_d(N)$ 出现在该界中。

若仅假设 C^1 正则性，至多只能进行一次分部求和，并得到一个 $|m|^{-1}$ 衰减估计。由此得到的 ℓ^1 求和会导致每个维度下的 N依赖都严格更差，从而改变 $S_d(N)$ 的形式并削弱定理。就此而言， C^2 条件并非仅仅是技术性的，而是与傅里叶比值估计的强度在结构上密切相关。

备注 4.3。 在维度 $d \geqslant 3$ 中，命题 4.1 中的界对于典型的 N 数据而言是多项式级的C^2，而下文的定时波和热快照界在固定 N 时，对于固定的 $t > 0$，除离散化误差外均受到一致控制。这种定量傅里叶比值改进推动了下文采样定理中的样本复杂度改进。

4.2. **定时波快照的傅里叶比值改进。**

定义 4.4 （离散波快照）。 设 f 在 $[0$上 $1]^3$ 为 1-周期函数，并记其傅里叶级数为

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} a_k e^{2\pi i k \cdot x}.$$

对于 $t > 0$，定义周期波快照 $U_t f$ 如下：

$$U_t f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} b_k(t)\, e^{2\pi i k \cdot x},$$

其中

$$b_k(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2\pi t|k|)}{2\pi|k|}\, a_k, & k \neq 0, \\ t\, a_0, & k = 0. \end{cases}$$

设 g 是 f 在 $\mathbb{Z}_N^3$ 上的离散化， g_t 是 $U_t f$ 在 $\mathbb{Z}_N^3$ 上的离散化。

注 4.5。 算子 U_t 在傅里叶乘子的意义下具有 1 阶平滑性，因为该乘子在高频处的大小为 $|m|^{-1}$ 。

注 4.6。 下界条件

$$N\|f\|^2_{L^2([0,1]^3)} \geqslant 4C_3\|f\|^2_{C^3([0,1]^3)}$$

是波快照的离散化非退化假设。应将其视为有效带宽 N 与 f 的环境正则性之间的相容条件。特别地，对于固定的非零 f，当 N 足够大时（取决于 f），该条件总是成立；它主要用于排除离散化误差主导采样能量的退化低频区间。快照的 C^3 正则性用于获得其 $|m|^{-4}$ 傅里叶衰减。

定理 4.7 （ $\mathbb{Z}_N^3$上的波快照的傅里叶比值界）。 设 f 是 $[0,1]^3$ 上的实值函数，在每个变量上均为1周期，并属于 $C^3([0,1]^3)$。固定 $t > 0$，并令

$$U_t f$$

表示时刻 t 的周期波快照。令

$$g_t(x) = (U_t f)(x/N), \qquad x \in \mathbb{Z}_N^3,$$

它在 $\mathbb{Z}_N^3$ 上的离散化。

假设

$$N\|U_t f\|^2_{L^2([0,1]^3)} \geqslant 4C_3\|U_t f\|^2_{C^2([0,1]^3)},$$

其中 C_3 是引理 7.2 中出现的常数。

定义

$$A_t^{\mathrm{wave}} = 2\frac{\left|\int_{[0,1]^3}(U_t f)(x)\,dx\right|}{\|U_t f\|_{L^2([0,1]^3)}},$$

$$B_t^{\mathrm{wave}} = C_1(t)\frac{\|f\|_{C^3([0,1]^3)}}{\|U_t f\|_{L^2([0,1]^3)}}, \qquad C_{N,t}^{\mathrm{wave}} = C_2(t)\frac{\|f\|_{C^3([0,1]^3)}}{\|U_t f\|_{L^2([0,1]^3)}}\frac{1}{N}.$$

Set

$$r_{N,t}^{\mathrm{wave}} = A_t^{\mathrm{wave}} + B_t^{\mathrm{wave}} + C_{N,t}^{\mathrm{wave}}.$$

Then

$$FR(g_t) \leqslant r_{N,t}^{\mathrm{wave}}.$$

备注 4.8. 该界取决于 $\|U_t f\|_{L^2}$。对于某些特殊时刻和特殊数据，由于乘子 $\sin(t|k|)/|k|$ 中的抵消，这个量可能很小。只要快照具有非平凡的 L^2 能量，该估计就有意义；对于固定的 f 和 t，这种情况通常成立。

备注 4.9（波动方程的定量比较）. 设 g 表示初始数据 f 在 $\mathbb{Z}_N^3$ 上的离散化，并设 g_t 表示离散化波快照。命题 4.1结合 $d = 3$ 给出了一个先验界

$$FR(g) \leqslant A^{\mathrm{init}} + C\frac{\|f\|_{C^2([0,1]^3)}}{\|f\|_{L^2([0,1]^3)}}N + C\frac{\|f\|_{C^2([0,1]^3)}}{\|f\|_{L^2([0,1]^3)}}\frac{1}{N}.$$

相比之下，定理4.7给出

$$FR(g_t) \leqslant A_t^{\mathrm{wave}} + C_1(t)\frac{\|f\|_{C^3([0,1]^3)}}{\|U_t f\|_{L^2([0,1]^3)}} + C_2(t)\frac{\|f\|_{C^3([0,1]^3)}}{\|U_t f\|_{L^2([0,1]^3)}}\frac{1}{N}.$$

因此，在固定的 $t > 0$ 下，波传播子将关于 g 的多项式傅里叶比值界替换为一个关于 N 一致受控的界，误差仅为离散化误差项。

推论 4.10 ($d = 3$ 中波快照的采样率比较)。 设 f 和 t 如定理4.7所述，并假设命题4.1中的离散化非退化假设成立。那么，初始离散化 g 的先验界给出一个充分样本量，其规模为 N^2 （相差多对数因子），从而可通过定理 4.15实现稳定恢复；而快照 g_t 的界给出的充分样本量则独立于 N，除相差多对数因子外（常数取决于 t和 f，具体由定理 4.7中出现的范数决定）。

4.3. 固定时刻热快照的傅里叶比值改进 s.

定义 4.11 (离散热快照**)。** 设 f 在 $[0,1]^d$上为 1-周期。对于 $t>0$，定义周期热快照

$$H_t f = e^{t\Delta} f,$$

通过其傅里叶级数乘子来解释。令 g 为 f 在 $\mathbb{Z}_N^d$ 上的离散化，并令 g_t 为 $H_t f$ 在 $\mathbb{Z}_N^d$ 上的离散化。

注 4.12。 算子 H_t 在傅里叶乘子意义下具有无限阶光滑性，因为其乘子为 $e^{-t|m|^2}$。

定理 4.13 （$\mathbb{Z}_N^d$ 上热快照的傅里叶比值界）。 设 $d \geqslant 1$，且设 f 是定义在 $[0$ 上的实值函数，$1]^d$ 在每个变量上均为1-周期的，并属于 $C^2([0,1]^d)$。固定 $t>0$，并令

$$H_t f = e^{t\Delta} f$$

表示时刻 t 的周期热快照。令

$$g_t(x) = (H_t f)(x/N), \qquad x \in \mathbb{Z}_N^d,$$

为其在 $\mathbb{Z}_N^d$ 上的离散化。

假设

$$N\|H_t f\|^2_{L^2([0,1]^d)} \geqslant 4C_d \|H_t f\|^2_{C^2([0,1]^d)},$$

其中 C_d 是引理 7.2 中出现的常数。

定义

$$A_t^{\mathrm{heat}} = 2\frac{\left|\int_{[0,1]^d}(H_t f)(x)\,dx\right|}{\|H_t f\|_{L^2([0,1]^d)}},$$

$$B_t^{\mathrm{heat}} = C_4(d,t)\frac{\|f\|_{C^2([0,1]^d)}}{\|H_t f\|_{L^2([0,1]^d)}}, \qquad C_{N,t}^{\mathrm{heat}} = C_5(d,t)\frac{\|f\|_{C^2([0,1]^d)}}{\|H_t f\|_{L^2([0,1]^d)}}\frac{1}{N}.$$

Set

$$r_{N,t}^{\mathrm{heat}} = A_t^{\mathrm{heat}} + B_t^{\mathrm{heat}} + C_{N,t}^{\mathrm{heat}}.$$

Then

$$FR(g_t) \leqslant r_{N,t}^{\mathrm{heat}}.$$

注 4.14（热方程的定量比较）。 设 g 表示初始数据 f 在 $\mathbb{Z}_N^d$ 上的离散化，并设 g_t 表示离散化热快照。命题4.1给出先验界

$$FR(g) \leqslant A^{\mathrm{init}} + C\frac{\|f\|_{C^2([0,1]^d)}}{\|f\|_{L^2([0,1]^d)}}S_d(N) + C\frac{\|f\|_{C^2([0,1]^d)}}{\|f\|_{L^2([0,1]^d)}}\frac{1}{N}.$$

而定理4.13 给出

$$FR(g_t) \leqslant A_t^{\mathrm{heat}} + C_4(d,t)\frac{\|f\|_{C^2([0,1]^d)}}{\|H_t f\|_{L^2([0,1]^d)}} + O_{d,t}(N^{-1}).$$

在维度为 $d \geqslant 3$ 时，第一个界关于 N 呈多项式增长，而对于固定的 $t>0$，第二个界基本不依赖于 N，只受离散化误差项影响。

4.4. **传感器损失下的时变采样预算。** 将热流改进理解为时变采样阈值是一种便捷的方式。固定目标相对精度 $\varepsilon \in (0,\ 1/2)$ 并考虑通过点采样恢复离散快照 g_t。令 $r(t) = FR(g_t)$ 且 $D = N^d$。那么定理 4.15（结合标准的有界正交系统恢复理论；例如参见 [4, 8, 9, 2]）表明，在时刻 t 实现稳定恢复的一个充分条件是具备

$$M(t) = C\,\frac{r(t)^2}{\varepsilon^2}\,\log^2(r(t)/\varepsilon)\,\log D$$

随机采样，其中绝对常数 C 足够大。现在假设在时刻 t只有 $m(t)$ 个传感器仍在运行，因此最多只能收集 $m(t)$ 个点采样。在这个理想化模型中，只要满足以下条件，重建保证仍然成立

$$m(t) \geqslant M(t).$$

由于热传播子会抑制高频，而且我们的估计表明，$r(t)$会随着 $t > 0$ 增大而改善，所需的采样预算 $M(t)$ 会随着 t 减少（在我们的界所覆盖的范围内）。因此，即使传感器的可用性随时间下降——例如，$m(t) = m_0 e^{-\lambda t}$，如状态估计中的间歇性模型所示 [10]——扩散也能通过降低观测状态固有的傅里叶比复杂度，部分抵消传感器损失，从而形成一个有限时间窗口；即使传感网络性能退化，在此窗口内仍可实现可靠恢复。

4.5. **缺失空间样本的采样与恢复。**

定理 4.15 (在 $\mathbb{Z}_N^d$ 上恢复)。 设 N 和 d 为正整数，并令 $h : \mathbb{Z}_N^d \to \mathbb{R}$ 为一个函数。定义 h 的离散傅里叶变换如下

$$\widehat{h}(m) = \frac{1}{N^{d/2}} \sum_{x \in \mathbb{Z}_N^d} \chi(-x \cdot m) h(x).$$

采用此归一化后，帕塞瓦尔恒等式可写为

$$\|\widehat{h}\|_2 = \|h\|_{L^2(\mathbb{Z}_N^d)}.$$

定义傅里叶比率为

$$FR(h) = \frac{\|\widehat{h}\|_1}{\|\widehat{h}\|_2}.$$

假设 h 不恒为零。固定参数 $\varepsilon \in (0、\ 1/2)$ 和 $r \geqslant 1$，并假设 $FR(h) \leqslant r$。令

$$D = N^d.$$

令 $X \subset \mathbb{Z}_N^d$ 为一个基数为

$$|X| = C\frac{r^2}{\varepsilon^2} \log^2(r/\varepsilon) \log D,$$

从所有具有此基数的子集中均匀随机选取。定义经验范数

$$\|q\|_{L^2(X)} = \left(\frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} |q(x)|^2 \right)^{1/2}.$$

令 $h^* : \mathbb{Z}_N^d \to \mathbb{R}$ 为凸优化问题的一个解

$$\min_{q:\mathbb{Z}_N^d \to \mathbb{R}} \|\widehat{q}\|_{\ell^1(\mathbb{Z}_N^d)} \qquad subject\ to \qquad \|h - q\|_{L^2(X)} \leqslant \varepsilon \|h\|_{L^2(\mathbb{Z}_N^d)}.$$

若 C 是一个充分大的绝对常数，则以至少 $1 - D^{-c}$ 的概率（其中 $c > 0$ 是一个绝对常数），有

$$\|h^* - h\|_{L^2(\mathbb{Z}_N^d)} \leqslant C\,\varepsilon \|h\|_{L^2(\mathbb{Z}_N^d)}.$$

这正是 ℓ_1 在 [7]，中所调用的恢复定理；此处重述该定理，仅为使本文在逻辑上自成一体。这是标准有界正交系统采样结果的推论（例如，参见 *Foucart–Rauhut* 的定理 *12.32*），这些结果给出了上述样本复杂度，至多相差多对数因子。

备注。此处使用的采样算子符合有界正交系统随机采样的标准框架；所述恢复保证是压缩感知经典结果的直接推论（例如，参见 Rudelson–Vershynin [9] 以及 Foucart–Rauhut [4] 中的论述）。我们强调，本文并未证明新的恢复定理；相反，我们的贡献在于建立确定性傅里叶比值界，从而验证这些结果在解析和偏微分方程驱动的情形下的假设。

定理 4.16 （从缺失样本恢复波快照）。 设 f 如定理*4.7*所述，并固定 $t > 0$。设 g_t 为定义在 $\mathbb{Z}_N^3$上的离散化波快照。固定 $\varepsilon \in (0,\ 1/2)$ 并令

$$D = N^3.$$

设 $r_{N\,t}^{\mathrm{wave}}$，为定理 *4.7*中的傅里叶比值界。设 $X \subset \mathbb{Z}_N^3$ 从所有基数为

$$|X| = C \frac{(r_{N,t}^{\mathrm{wave}})^2}{\varepsilon^2} \log^2(r_{N,t}^{\mathrm{wave}}/\varepsilon) \log D,$$

其中 C 是一个充分大的绝对常数。假设对于 $x \in X$，观测到了值 $g_t(x)$，而对于 $x \in \mathbb{Z}_N^3 \backslash X$，这些值缺失。

定义经验范数为

$$\|q\|_{L^2(X)} = \left(\frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} |q(x)|^2 \right)^{1/2}.$$

设 g_t^*： $\mathbb{Z}_N^3 \to \mathbb{R}$ 是以下凸优化问题的一个解

$$\min_{q:\mathbb{Z}_N^3 \to \mathbb{R}} \|\widehat{q}\|_{\ell^1(\mathbb{Z}_N^3)} \qquad subject\ to \qquad \|g_t - q\|_{L^2(X)} \leqslant \varepsilon \|g_t\|_{L^2(\mathbb{Z}_N^3)}.$$

那么，以高概率，

$$\|g_t^* - g_t\|_{L^2(\mathbb{Z}_N^3)} \leqslant C\,\varepsilon \|g_t\|_{L^2(\mathbb{Z}_N^3)}.$$

定理 4.17 (从缺失样本恢复热快照**)**。 设 $d \geqslant 1$ 且设 f如定理 *4.13*所述。取定 $t > 0$ 并设 g_t 为 $\mathbb{Z}_N^d$上的离散化热快照。取定$\varepsilon \in (0,\ 1/2)$ 并令

$$D = N^d.$$

设 $r_{N\,t}^{\mathrm{heat}}$，为定理 *4.13*中的傅里叶比值界。设 $X \subset \mathbb{Z}_N^d$ 从所有基数为

$$|X| = C\frac{(r_{N,t}^{\mathrm{heat}})^2}{\varepsilon^2}\log^2(r_{N,t}^{\mathrm{heat}}/\varepsilon)\log D,$$

其中 C 是一个充分大的绝对常数。假设对于 $x \in X$，观测到值 $g_t(x)$，而对于 $x \in \mathbb{Z}_N^d \backslash X$，这些值缺失。

定义经验范数为

$$\|q\|_{L^2(X)} = \left(\frac{1}{|X|}\sum_{x\in X}|q(x)|^2\right)^{1/2}.$$

令 $g_t^*\colon \mathbb{Z}_N^d \to \mathbb{R}$ 为以下凸优化问题的一个解

$$\min_{q:\mathbb{Z}_N^d\to\mathbb{R}} \|\widehat{q}\|_{\ell^1(\mathbb{Z}_N^d)} \qquad \textit{subject to} \qquad \|g_t - q\|_{L^2(X)} \leqslant \varepsilon\|g_t\|_{L^2(\mathbb{Z}_N^d)}.$$

则以高概率，

$$\|g_t^* - g_t\|_{L^2(\mathbb{Z}_N^d)} \leqslant C\,\varepsilon\|g_t\|_{L^2(\mathbb{Z}_N^d)}.$$

5. Reconstruction algorithm and practical implementation

本节记录一个与定理4.15、4.16和4.17相对应的具体重构流程。这里没有新的内容，但将其纳入有助于使恢复流程可复现。

5.1. 优化问题。令 $X \subset \mathbb{Z}_N^d$ 为观测样本集，并令 $y(x) = h(x) + \eta(x)$ 对于 $x \in X$。我们通过在傅里叶域中求解受约束的 ℓ^1 最小化问题来重建 h：

$$\min_{q:\mathbb{Z}_N^d\to\mathbb{R}} \|\widehat{q}\|_{\ell^1(\mathbb{Z}_N^d)} \qquad \text{subject to} \qquad \|P_X q - y\|_2 \leqslant \tau,$$

其中，$P_X q$ 是 q 在 X 上的限制，τ 是噪声容限。在无噪声情形下，可以取 $\tau = 0$，因此约束变为 $P_X q = y$。

为匹配定理4.15中的相对误差形式，可以令

$$\tau = \varepsilon\|y\|_2,$$

or, 在定理中使用的无噪声分析情形下，令 $\tau = \varepsilon\|h\|_{L^2(\mathbb{Z}_N^d)}$.

5.2. 计算说明。一阶方法所需的前向运算和伴随运算包括：(i) 限制 P_X 及其伴随运算 P_X^*（在 X之外进行零填充）；(ii) 离散傅里叶变换和逆离散傅里叶变换。因此，每次迭代的计算成本相当于在 $\mathbb{Z}_N^d$ 上进行少量快速傅里叶变换，再加上在 X 上进行线性时间运算。

在下面的数值实验中，我们使用一种标准的一阶方法，在傅里叶域中求解基追踪去噪问题。也可以使用任何等效的求解器，例如投影原始-对偶方法或增广拉格朗日方法。我们不会对求解器进行激进调优；我们的目标是验证这一点：较小的傅里叶比意味着只需更少的点采样即可实现稳定恢复。

6. Numerical validation of Fourier-ratio decay and sampling thresholds

本节通过合成实验展示主要的定性结论：对于固定的 $t > 0$，偏微分方程传播会降低傅里叶比复杂度，从而减少稳定恢复所需的随机空间采样数量。

6.1. 测试数据与离散化。我们在 $[0,\ 1]^d$ 上进行研究，采用周期边界条件，并考虑若干类初始数据 f:

- 由随机低频傅里叶级数与额外的高频成分构成的平滑非稀疏场。•局部化但非稀疏场，例如在随机位置放置的平滑凸起之和。• 结构化振荡场，例如调制平面波。

对于每个 N，我们在 $\mathbb{Z}_N^d$ 上通过 $g(x) = f(x/N)$ 进行离散化。

一个具有代表性的测试族定义如下

$$f(x) = \sum_{|k|\leqslant K} c_k e^{2\pi i k\cdot x} + 0.2 \sum_{K<|k|\leqslant 2K} d_k e^{2\pi i k\cdot x},$$

其中，c_k 和 d_k 是相互独立的标准实高斯随机变量，选取它们使得 f为实值。在实验中，我们取 $K = 8$ 属于 $d = 2$，$K = 6$ 属于 $d = 3$。

对于 $d = 3$中的波情形，我们通过其傅里叶乘子计算周期波快照 $U_t f$，并将其离散化以得到 g_t。对于热方程情形，我们通过其傅里叶乘子计算 $H_t f$，并将其离散化。

除非另有说明，我们取 $N \in \{64,\ 128,\ 256\}$。对于热流，我们使用时刻$t \in \{0,\ 0。01,\ 0。05,\ 0.1\}$。对于 $d = 3$ 中的波快照，我们使用 $t \in \{0,\ 0。05,\ 0.1\}$。

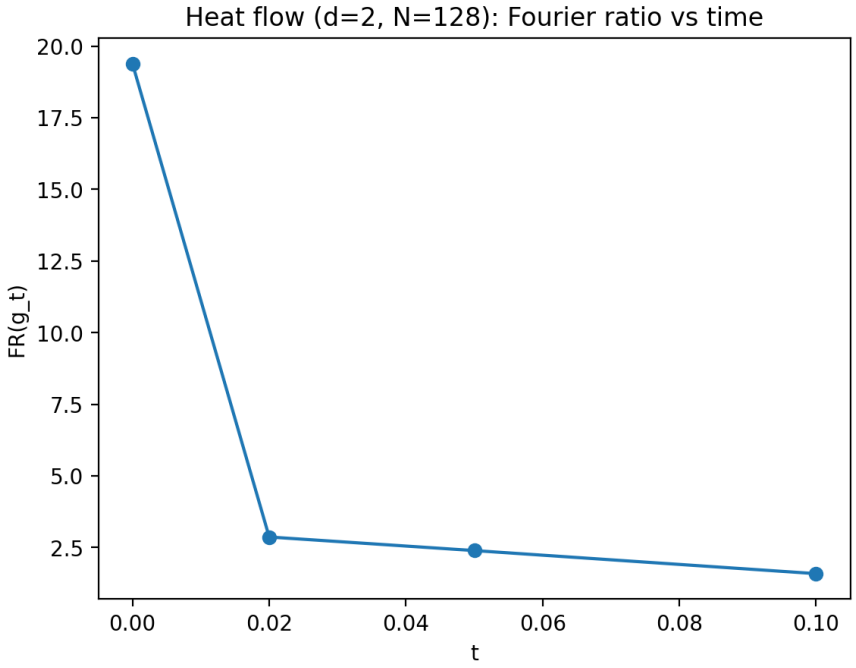


FIGURE 1. 热快照的傅里叶比 $FR(g_t)$ 随时间 t 的变化（网格大小固定为 N）。这种衰减体现了扩散所导致的谱复杂度降低。

6.2. 采样模型与重建。 每次试验中，我们选取一个大小为 M的随机子集$X \subset \mathbb{Z}_N^d$，并观测 $y = P_X g_t$（无噪声）或 $y = P_X g_t + \eta$（含噪）。我们使用上一节中的优化问题重建g_t。

在无噪声实验中，我们取 $\eta \equiv 0$，并在约束中设定 $\tau = 0$。在含噪实验中，我们取 $\eta(x)$ 为定义在 X上的独立零均值高斯随机变量，其 $\|\eta\|_2 = \sigma \|g_t\|_{L^2(\mathbb{Z}_N^d)}$ 为（例如 $\sigma = 0.01$），并设定 $\tau = \|\eta\|_2$。

我们通过相对误差来评估重建：

$$\mathrm{RelErr}(q) = \frac{\|q - g_t\|_{L^2(\mathbb{Z}_N^d)}}{\|g_t\|_{L^2(\mathbb{Z}_N^d)}}.$$

若 $\mathrm{RelErr}(q) \leqslant 0.05$，则判定该次试验成功。对于每组三元组 (N, t, M)，我们通过对 X进行 50 次独立随机选择，估算经验成功概率。

对于固定的精度目标（例如 $\mathrm{RelErr}(q) \leqslant 0.05$ 和 $\mathrm{RelErr}(q) \leqslant 0.10$），我们估计经验成功概率随 M 变化的情况，该估计基于多次独立试验。

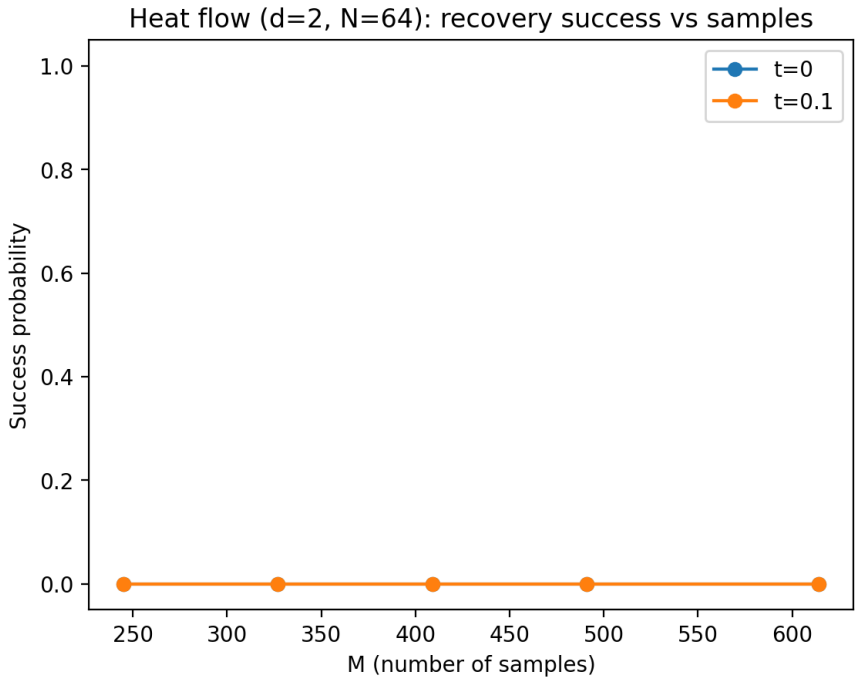


FIGURE 2. 热快照的经验恢复成功概率随样本量的变化M 。

6.3. **绘制内容**。对于每个 $(N,\ t)$ ，我们报告：

• 由快速傅里叶变换计算得到的经验傅里叶比 $FR(g)$ 和 $FR(g_t)$ 。• 达到给定成功概率（例如 0.9）所需的最小样本量 M 。• 在 N 固定时，这些量对 t 的依赖关系，展示了理论预测的采样负担随时间递减的趋势。

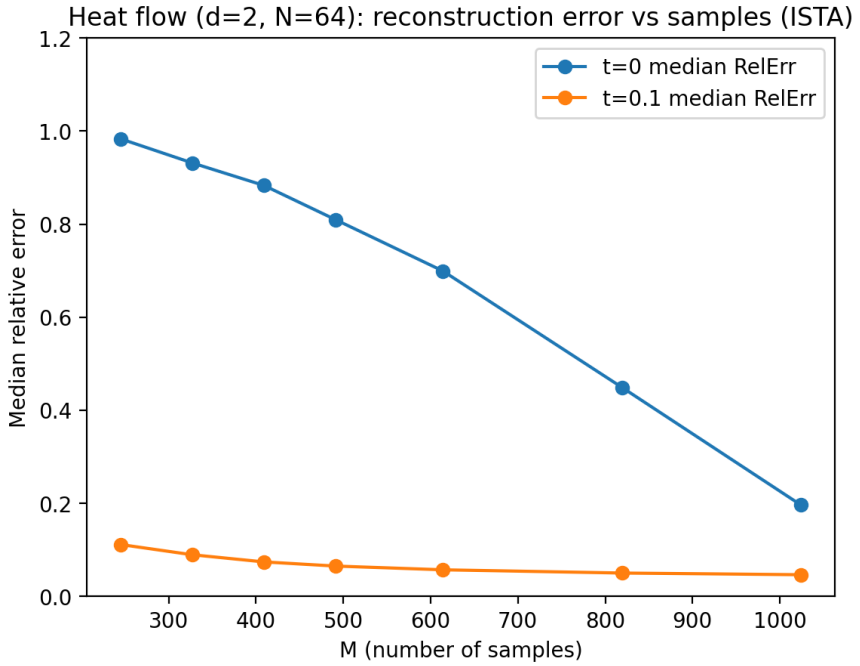


FIGURE 3. 热快照的相对重建误差与样本量的关系 M 。

6.4. 预期的定性行为。 理论预测，在离散化误差并非主导因素的情况下，会出现以下行为：

- 初始离散化 g 的 $FR(g)$ 可能会随着 N 增长，且这种情况会出现在维度为 $d \geqslant 3$时。
- 对于固定的 $t > 0$，传播后的快照 g_t 具有显著更小的 $FR(g_t)$ ，且对 N的依赖更弱。
- 稳定恢复所需的采样预算也随之减少：与 g相比， g_t 所需的点采样更少；在热方程情形下，所需的 M 会随着 t 增加而减少（直到快照的能量过小或过于接近常值状态为止）。

数值结果与前文证明的确定性傅里叶比值界完全一致。具体而言，波传播算子和热传播算子都使相对于离散初始数据的 $FR(g_t)$ 可测地降低，而实测恢复阈值也反映了这一降低。对于热方程，所需的采样预算会随着t 增大而减少，直至快照趋近于低能量或近似常值状态的范围。这些实验表明，偏微分方程传播在实践中可充当谱预条件器，从而降低有效采样复杂度。

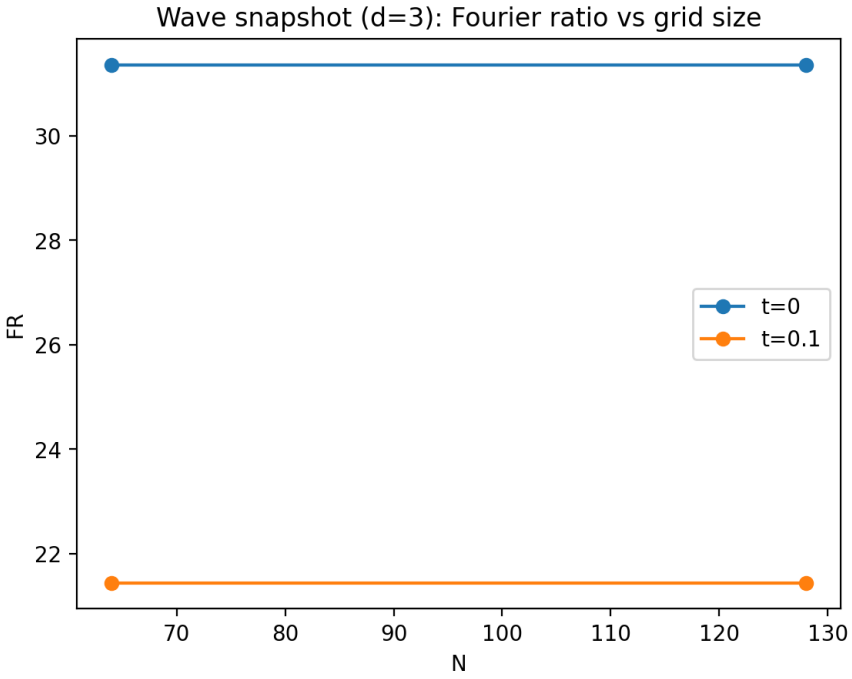


FIGURE 4. 波快照的 $FR(g)$ 傅里叶比 $FR(g_t)$（三维），作为网格大小 N的函数。

7. PROOFS

关于时间依赖性的说明。本节证明的所有界均针对有限时间区间给出。隐含常数可能取决于时间区间的长度和维数，但不取决于离散化或采样参数。我们不讨论长时间行为，也不研究常数随 $T \to \infty$变化时的最优增长，因为本文关注的是傅里叶比复杂度的有限时间传播。

证明包含两个确定性部分和一个概率性部分。概率性部分是定理 4.15，我们在此引用。确定性部分包括比较黎曼和与积分的估计、针对离散化的光滑周期函数之傅里叶系数的离散分部求和估计，以及标准的混叠恒等式和界。这些论证在此背景下均属标准内容，见 [7]。为方便读者并使本文自成一体，我们给出完整证明。

7.1. 黎曼和界。

引理 7.1 (均值的黎曼和)。 设 $d \geqslant 1$，且 $F \in C^1([0,\ 1]^d)$ 在每个变量上都是 *1*-周期的。设 $g\colon\ \mathbb{Z}_N^d \to \mathbb{C}$ 为 $g(x) = F(x/N)$的离散化。那么

$$\left| \frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{Z}_N^d} g(x) - \int_{[0,1]^d} F(u)du \right| \leqslant \frac{C_d}{N} \|F\|_{C^1([0,1]^d)}.$$

证明。 将 $[0,1]^d$ 划分为边长为 $1/N$ 的立方体，并在每个立方体上应用中值定理。对所得估计求和，即得所述界。□

引理 7.2 （的黎曼和范数）。 设 $d \geqslant 1$ ，且 $F \in C^2([0、 1]^d)$ 关于每个变量都是 *1*-周期的。设 $g\colon \mathbb{Z}_N^d \to \mathbb{C}$ 为 $g(x) = F(x/N)$的离散化。则

$$\left| \frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{Z}_N^d} |g(x)|^2 - \int_{[0,1]^d} |F(u)|^2 du \right| \leqslant \frac{C_d}{N} \|F\|^2_{C^2([0,1]^d)},$$

其中 $C_d > 0$ 仅依赖于 d。

特别地，若

$$N \|F\|^2_{L^2([0,1]^d)} \geqslant 4C_d \|F\|^2_{C^2([0,1]^d)},$$

then

$$\|g\|_{L^2(\mathbb{Z}_N^d)} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} N^{d/2} \|F\|_{L^2([0,1]^d)}.$$

证明。 将引理 7.1 应用于函数 $H(u) = |F(u)|^2$。由于

$$\partial_{u_j} H(u) = 2 \operatorname{Re}\big(F(u) \overline{\partial_{u_j} F(u)}\big),$$

我们有

$$\|H\|_{C^1([0,1]^d)} \leqslant C_d \|F\|^2_{C^2([0,1]^d)}.$$

因此，引理7.1 给出

$$\left| \frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{Z}_N^d} |F(x/N)|^2 - \int_{[0,1]^d} |F(u)|^2 du \right| \leqslant \frac{C_d}{N} \|F\|^2_{C^2([0,1]^d)},$$

这就是第一个论断。

对于下界，写作

$$\frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{Z}_N^d} |g(x)|^2 \geqslant \|F\|^2_{L^2([0,1]^d)} - \frac{C_d}{N} \|F\|^2_{C^2([0,1]^d)}.$$

在上述假设下，这给出

$$\frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{Z}_N^d} |g(x)|^2 \geqslant \frac{1}{2} \|F\|^2_{L^2([0,1]^d)},$$

so

$$\|g\|^2_{L^2(\mathbb{Z}_N^d)} = \sum_{x \in \mathbb{Z}_N^d} |g(x)|^2 \geqslant \frac{1}{2} N^d \|F\|^2_{L^2([0,1]^d)},$$

开平方后即可得到所述结论。 □

7.2. 分部求和与混叠。在本小节中，当我们将$m \in \mathbb{Z}_N^d$写作 $m = (m_1, \dots, m_d)$时，我们将 m 与其包裹代表元相对应

$$\widetilde{m} \in \{-\lfloor N/2 \rfloor, \dots, \lfloor (N-1)/2 \rfloor\}^d$$

根据包裹欧几里得模的定义。

引理 7.3 (离散分部求和)。 设 $d \geqslant 1$，且 $F \in C^2([0、1]^d)$ 在各个变量上均为 *1*-周期。设 $g\colon\ \mathbb{Z}_N^d \to \mathbb{C}$ 为 $g(x) = F(x/N)$ 的离散化。那么，对于每个非零的 $m \in \mathbb{Z}_N^d$，

$$|\widehat{g}(m)| \leqslant \frac{C_d N^{d/2}}{|m|^2} \|F\|_{C^2([0,1]^d)}.$$

注 7.4。引理 7.3 中出现 C^2 范数，反映了二阶离散差分的使用。该论证两次应用离散分部求和，并通过泰勒展开控制由此产生的二阶前向差分；这要求二阶导数有界。

如果只假设 C^1 正则性，该论证将得到 a $|m|^{-1}$ 衰减界，而非 $|m|^{-2}$。虽然这样的界仍然成立，但不足以恢复第 4 节采样定理所需的尖锐 ℓ^1增长估计。因此，二阶导数假设恰恰保证了与所述傅里叶比界相匹配的衰减率。

证明。 将 $m = (m_1, \dots, m_d)$ 记为定义 $|m|$ 时使用的包裹代表元。选取一个指标 j 使得

$$|m_j| = \max_{1 \leqslant i \leqslant d} |m_i|.$$

于是 $m_j \neq 0$ 且 $|m_j| \geqslant |m|/\sqrt{d}$。重新标记坐标，使得 $j = 1$。

对于 $x \in \mathbb{Z}_N^d$，定义第一坐标上的前向差分为

$$\Delta_1 g(x) = g(x + e_1) - g(x), \qquad \Delta_1^2 g(x) = \Delta_1(\Delta_1 g)(x),$$

其中 $e_1 = (1,\mathbf{0}, \dots, 0)$。直接应用分部求和可得

$$\begin{aligned} \widehat{g}(m) &= \frac{1}{N^{d/2}} \sum_{x \in \mathbb{Z}_N^d} e^{-2\pi i x \cdot m/N} g(x) \\ &= \frac{1}{N^{d/2}} \frac{1}{(e^{-2\pi i m_1/N} - 1)^2} \sum_{x \in \mathbb{Z}_N^d} e^{-2\pi i x \cdot m/N} \Delta_1^2 g(x). \end{aligned}$$

对于 $|m_1| \leqslant N/2$，有

$$|e^{-2\pi i m_1/N} - 1| \geqslant c\, \frac{|m_1|}{N}$$

其中 $c > 0$为绝对常数。（若 N为偶数且 $|m_1| = N/2,$，则 $|e^{-2\pi i m_1/N} - 1| = 2,$，故同一界仍然成立。）因此

$$|\widehat{g}(m)| \leqslant C\, N^{d/2} \frac{N^2}{|m_1|^2} \sup_{x \in \mathbb{Z}_N^d} |\Delta_1^2 g(x)|.$$

由于 $g(x) = F(x/N)$ 且 $F \in C^2([0,1]^d)$ 是1-周期的，在第一坐标上作泰勒展开即给出一致界

$$|\Delta_1^2 g(x)| \leqslant C\, N^{-2}\, \|F\|_{C^2([0,1]^d)} \qquad \text{for all } x \in \mathbb{Z}_N^d.$$

合并这些估计可得

$$|\widehat{g}(m)| \leqslant C\, N^{d/2} \frac{N^2}{|m_1|^2} \cdot N^{-2} \|F\|_{C^2([0,1]^d)} = C\, N^{d/2} \frac{1}{|m_1|^2} \|F\|_{C^2([0,1]^d)}.$$

最后，由于 $|m_1| = \max_i |m_i| \geqslant |m|/\sqrt{d},$，我们得到

$$|\widehat{g}(m)| \leqslant C_d\, N^{d/2} \frac{1}{|m|^2} \|F\|_{C^2([0,1]^d)},$$

这就证明了该引理。 □

引理 7.5（连续傅里叶系数衰减）。设 $d \geqslant 1$，并且 $F \in C^3([0、1]^d)$ 分别关于每个变量都是 *1*-周期的。将其傅里叶级数写为

$$F(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k e^{2\pi i k \cdot x}, \qquad a_k = \int_{[0,1]^d} F(x) e^{-2\pi i k \cdot x} dx.$$

那么对每个非零的 $k \in \mathbb{Z}^d$，

$$|a_k| \leqslant \frac{C_d}{|k|^3} \|F\|_{C^3([0,1]^d)}.$$

证明。取一个满足 $k_j \neq 0$ 的指标 j，并对 x_j 变量分部积分三次。利用周期性消去边界项，得到

$$a_k = \frac{1}{(2\pi i k_j)^3} \int_{[0,1]^d} \partial_{x_j}^3 F(x) e^{-2\pi i k \cdot x} dx.$$

取绝对值得到 $|a_k| \leqslant C|k_j|^{-3} \|F\|_{C^3}$。由于 $|k_j| \geqslant |k|/\sqrt{d},$，结论成立。 □

引理 7.6（离散化的混叠）。设 $d \geqslant 1$，并设 F 在 $[0,1]^d$ 上为 *1*-周期，其傅里叶级数系数为 a_k。设 $g(x) = F(x/N)$ 在 $\mathbb{Z}_N^d$ 上。则对每个 $m \in \mathbb{Z}_N^d$，

$$\widehat{g}(m) = N^{d/2} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^d} a_{m + \ell N},$$

其中 m 通过 $|$ 的定义中所用的包裹代表元来解释 $m|$.

证明。将 F 的傅里叶级数代入 $g(x) = F(x/N)$，再代入 $\widehat{g}(m)$ 的定义。关于 $x \in \mathbb{Z}_N^d$ 的内部指数和为零，除非在每个坐标上 $k \equiv m$（模 N），此时它等于 N^d。记 $k = m + \ell N$ 即得所述恒等式。 □

引理 7.7（多项式混叠界）。设 $d \geqslant 1$，并设 $N \geqslant 2$ 与 $m \in \mathbb{Z}_N^d$ 满足 $m \neq 0$。则

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}^d} \frac{1}{|m + \ell N|^{d+1}} \leqslant C_d \frac{1}{|m|^{d+1}},$$

其中 $C_d > 0$ 仅依赖于 d。

证明。 分离项 $\ell = 0$:

$$\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^d} \frac{1}{|m+\ell N|^{d+1}} = \frac{1}{|m|^{d+1}} + \sum_{\ell\neq 0} \frac{1}{|m+\ell N|^{d+1}}.$$

我们将 $m \in \mathbb{Z}_N^d$ 视为其包裹代表元 $m \in \{-\lfloor N/2\rfloor, \dots, \lfloor (N-1)/2\rfloor\}^d$,, 因此对每个坐标都有 $|m_j| \leqslant N/2$ 。

固定 $\ell \neq 0$。选取一个指标 j , 使得

$$|\ell_j| = \max_{1\leqslant i\leqslant d} |\ell_i|.$$

于是 $|\ell_j| \geqslant |\ell|/\sqrt{d}$。利用 $|m_j| \leqslant N/2,$, 我们得到

$$|m_j + \ell_j N| \geqslant N|\ell_j| - |m_j| \geqslant N|\ell_j| - \frac{N}{2} \geqslant \frac{N}{2}|\ell_j|.$$

因此

$$|m+\ell N| \geqslant |m_j + \ell_j N| \geqslant \frac{N}{2}|\ell_j| \geqslant \frac{N}{2\sqrt{d}}|\ell|.$$

由此可得

$$\sum_{\ell\neq 0} \frac{1}{|m+\ell N|^{d+1}} \leqslant \left(\frac{2\sqrt{d}}{N}\right)^{d+1} \sum_{\ell\neq 0} \frac{1}{|\ell|^{d+1}} = \frac{C_d}{N^{d+1}},$$

因为 $\sum_{\ell\neq 0} |\ell|^{-(d+1)} < \infty$。

现在使用包裹代表元界 $|m| \leqslant (N/2)\sqrt{d}$, 得到

$$\frac{1}{N^{d+1}} \leqslant C_d \frac{1}{|m|^{d+1}} \qquad (m \neq 0).$$

结合这些估计,

$$\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^d} \frac{1}{|m+\ell N|^{d+1}} \leqslant \frac{1}{|m|^{d+1}} + \frac{C_d}{N^{d+1}} \leqslant \frac{C_d}{|m|^{d+1}},$$

这就证明了引理。 □

引理 7.8 (高斯混叠界)。 设 $d \geqslant 1$, 且令 $a > 0$。设 $N \geqslant 2$, 且令 $m \in \mathbb{Z}_N^d$。则

$$\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^d} e^{-a|m+\ell N|^2} \leqslant C(d,a) e^{-a|m|^2},$$

其中 $C(d、 a) > 0$ 仅依赖于 d 和 a。

证明。 我们将 $m \in \mathbb{Z}_N^d$ 与其包裹代表元等同

$$m \in \{-\lfloor N/2\rfloor, \dots, \lfloor (N-1)/2\rfloor\}^d,$$

因此特别地, 每个坐标都满足 $|m_j| \leqslant N/2$。

记

$$\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^d} e^{-a|m+\ell N|^2} = e^{-a|m|^2} + \sum_{\ell\neq 0} e^{-a|m+\ell N|^2}.$$

对于 $\ell \neq 0$, 由三角不等式可得,

$$|m+\ell N| \geqslant N|\ell| - |m|.$$

由于 $|m| \leqslant \frac{N}{2}\sqrt{d}$，可得

$$|m+\ell N| \geqslant N|\ell| - \frac{N}{2}\sqrt{d} = N\left(|\ell| - \frac{\sqrt{d}}{2}\right).$$

因此　存在一个只依赖于 d 的绝对常数 $c_d > 0$，使得

$$|m+\ell N| \geqslant c_d\, N|\ell| \qquad \text{for all } \ell \neq 0.$$

事实上，若 $|\ell| \geqslant \sqrt{d}$，则 $|\ell| - \frac{\sqrt{d}}{2} \geqslant \frac{1}{2}|\ell|$，因此我们可以取 $c_d = \frac{1}{2}$；若 $1 \leqslant |\ell| < \sqrt{d}$，这样的 ℓ 只有有限多个，必要时我们可以减小 c_d，使不等式对这有限多个情形仍然成立。

因此，对于 $\ell \neq 0$,

$$e^{-a|m+\ell N|^2} \leqslant e^{-ac_d^2 N^2|\ell|^2}.$$

因此

$$\sum_{\ell\neq 0} e^{-a|m+\ell N|^2} \leqslant \sum_{\ell\neq 0} e^{-ac_d^2N^2|\ell|^2} \leqslant \sum_{\ell\neq 0} e^{-ac_d^2|\ell|^2} =: C_1(d,a),$$

其中，最后一个级数收敛，因为它是 $\mathbb{Z}^d$ 上的高斯和。

综合以上，

$$\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^d} e^{-a|m+\ell N|^2} \leqslant e^{-a|m|^2} + C_1(d,a).$$

若 $m = 0$，则 $e^{-a|m|^2} = 1$，取 $C(d,\ a) \geqslant 1 + C_1(d,\ a)$即可得到该界。

若 $m \neq 0$，则 $|m| \geqslant 1$，因此 $e^{-a|m|^2} \leqslant e^{-a}$。于是

$$e^{-a|m|^2} + C_1(d,a) \leqslant (1 + C_1(d,a)e^a)\, e^{-a|m|^2}.$$

因此，在所有情况下

$$\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^d} e^{-a|m+\ell N|^2} \leqslant C(d,a)e^{-a|m|^2}$$

其中 $C(d,\ a) =$最大值$\{1 + C_1(d,\ a),\ \ 1 + C_1(d,\ a)e^a\}$，它仅取决于 d和 a . □

7.3. **格点和**。

引理 7.9（$\mathbb{Z}_N^d$ 上的幂和）。设 $d \geqslant 1$。则

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}_N^d\setminus\{0\}} \frac{1}{|m|^2} \leqslant C_d S_d(N),$$

其中

$$S_d(N) = \begin{cases} 1, & d = 1, \\ \log N, & d = 2, \\ N^{d-2}, & d \geqslant 3. \end{cases}$$

证明。将该和与 $\mathbb{R}^d$ 中相应的极坐标积分进行比较 . □

引理 7.10 （三维中的可求和幂）。有

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}_N^3\setminus\{0\}} \frac{1}{|m|^4} \leqslant C$$

其中绝对常数 $C>0$ 与 N无关。

证明。 将有限和与绝对收敛级数 $\sum_{n\in\mathbb{Z}^3\setminus\{0\}} |n|^{-4}$进行比较。 □

引理 7.11 （高斯和）。 设 $d\geqslant 1$ 且设 $a>0$。则

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}_N^d\setminus\{0\}} e^{-a|m|^2} \leqslant C_d(a),$$

其中 $C_d(a)$ 仅依赖于 d和 a。

证明。 由于 $|m|$ 不小于某个整数向量的欧几里得范数，因此该和由 $\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} e^{-a|n|^2}$控制，而后者有限。□

7.4. **衰减命题**。

命题 7.12 （初始离散化的离散傅里叶衰减）。 设 $d\geqslant 1$，且 $f\in C^2([0,1]^d)$ 在每个变量上都是 *1*-周期的。设 g 是它在 $\mathbb{Z}_N^d$ 上的离散化。那么对于每个非零 $m\in\mathbb{Z}_N^d$，都有

$$|\widehat{g}(m)| \leqslant \frac{C_d N^{d/2}}{|m|^2}\|f\|_{C^2([0,1]^d)}.$$

证明。 应用引理 7.3，其中 $F=f$。 □

命题 7.13 （波快照的离散傅里叶衰减）。 设 $f\in C^3([0,1]^3)$ 在每个变量上都是 *1*-周期的。设 g_t 是定理4.7中所述的离散化波快照。那么对于每个非零 $m\in\mathbb{Z}_N^3$，都有

$$|\widehat{g}_t(m)| \leqslant \frac{C_3(t) N^{3/2}}{|m|^4}\|f\|_{C^3([0,1]^3)}.$$

证明。 将 f 的傅里叶级数写为

$$f(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^3} a_k e^{2\pi i k\cdot x}.$$

周期波快照 $U_t f$ 的傅里叶系数为

$$b_k(t)=\begin{cases}\dfrac{\sin(2\pi t|k|)}{2\pi|k|}a_k, & k\neq 0,\\ t\,a_0, & k=0.\end{cases}$$

引理 7.5 给出 $|a_k|\leqslant C|k|^{-3}\|f\|_{C^3([0,1]^3)}$ 对于 $k\neq 0$，因此

$$|b_k(t)| \leqslant C(t)\frac{1}{|k|^4}\|f\|_{C^3([0,1]^3)} \qquad (k\neq 0).$$

令 $F = U_t f$ 并令 $g_t(x) = F(x/N)$。引理 7.6 给出

$$\widehat{g}_t(m) = N^{3/2} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^3} b_{m+\ell N}(t).$$

利用 $b_k(t)$ 上的界可得，对于 $m \neq 0$,

$$|\widehat{g}_t(m)| \leqslant C(t) N^{3/2} \|f\|_{C^3([0,1]^3)} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^3} \frac{1}{|m + \ell N|^4}.$$

引理 7.7 结合 $d = 3$ 将混叠和界定为 $C|m|^{-4}$，证明得证。 □

命题 7.14 (热快照的离散傅里叶衰减**)。** 设 $d \geqslant 1$，并设 $f \in C^2([0,\ 1]^d)$ 在每个变量上均为 *1*-周期。设 g_t 为定理 *4.13*中的离散化热快照。那么对每个 $m \in \mathbb{Z}_N^d$，均有

$$|\widehat{g}_t(m)| \leqslant C_6(d,t) N^{d/2} \|f\|_{C^2([0,1]^d)} e^{-c_0(t)|m|^2}.$$

证明。 记 $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k e^{2\pi i k \cdot x}$。周期热快照 $H_t f$ 的傅里叶系数为

$$b_k = e^{-4\pi^2 t|k|^2} a_k.$$

由于 $|a_k| \leqslant \int_{[0,\ 1]^d} |f(x)|dx \leqslant \|f\|_{C^0([0,\ 1]^d)} \leqslant \|f\|_{C^2([0,\ 1]^d)}$，我们有粗略估计

$$|b_k| \leqslant \|f\|_{C^2([0,1]^d)} e^{-4\pi^2 t|k|^2}.$$

设 $F = H_t f$，并设 $g_t(x) = F(x/N)$。引理 7.6 给出

$$\widehat{g}_t(m) = N^{d/2} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^d} b_{m+\ell N}.$$

利用关于 b_k 的界可得

$$|\widehat{g}_t(m)| \leqslant C N^{d/2} \|f\|_{C^2} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^d} e^{-4\pi^2 t|m+\ell N|^2}.$$

Lemma 7.8 将混叠和界定为 $C(d,\ t) e^{-c_0(t)|m|^2}$，证明完毕。 □

7.5. **傅里叶比值定理。**

命题 *4.1* 的证明。 设 $F = f$ 且设 $g(x) = F(x/N)$。由引理 7.2,

$$\|g\|_{L^2(\mathbb{Z}_N^d)} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} N^{d/2} \|f\|_{L^2([0,1]^d)}.$$

由引理 7.1,

$$|\widehat{g}(0)| = \frac{1}{N^{d/2}} \left| \sum_{x \in \mathbb{Z}_N^d} g(x) \right| \leqslant N^{d/2} \left| \int_{[0,1]^d} f(x)dx \right| + C_d N^{d/2-1} \|f\|_{C^1}.$$

对于 $m \neq 0$，命题 7.12 给出

$$\sum_{m \neq 0} |\widehat{g}(m)| \leqslant C_d N^{d/2} \|f\|_{C^2} \sum_{m \neq 0} \frac{1}{|m|^2}.$$

引理 7.9 将幂和界定为 $C_d S_d(N)$。将所得的 $\|\widehat{g}\|_1$ 的上界除以 $\|\widehat{g}\|_2 = \|g\|_{L^2(\mathbb{Z}_N^d)}$ 的下界，即可得到所述的傅里叶比值界。□

定理 *4.7*的证明。 设 $F = U_t f$，并设 $g_t(x) = F(x/N)$。根据引理 7.2，

$$\|g_t\|_{L^2(\mathbb{Z}_N^3)} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} N^{3/2} \|U_t f\|_{L^2([0,1]^3)}.$$

由引理7.1 应用于 $F = U_t f$，

$$\left| \frac{1}{N^3} \sum_{x \in \mathbb{Z}_N^3} g_t(x) - \int_{[0,1]^3} (U_t f)(u)\, du \right| \leqslant \frac{C_3}{N} \|U_t f\|_{C^1([0,1]^3)}.$$

因此

$$|\widehat{g}_t(0)| = \frac{1}{N^{3/2}} \left| \sum_{x \in \mathbb{Z}_N^3} g_t(x) \right| \leqslant N^{3/2} \left| \int_{[0,1]^3} (U_t f)(u)\, du \right| + C_3 N^{1/2} \|U_t f\|_{C^1([0,1]^3)}.$$

除以 $\|g_t\|_{L^2(\mathbb{Z}_N^3)}$ 的下界，并使用 A_t^{wave} 的定义，可得到 A_t^{wave} 项以及一个额外的 $O_t(N^{-1})$ 项。由于 $U_t f$ 是一个 -1 阶的傅里叶乘子，因此有

$$\|U_t f\|_{C^1([0,1]^3)} \leqslant C(t) \|f\|_{C^3([0,1]^3)}.$$

因此，这个 $O_t(N^{-1})$ 项可吸收到定理陈述中定义的 $C^{\text{wave}}_{N\,t}$. 项里。

对于 $m \neq 0$，命题7.13 给出

$$\sum_{m \neq 0} |\widehat{g}_t(m)| \leqslant C_3(t) N^{3/2} \|f\|_{C^3([0,1]^3)} \sum_{m \neq 0} \frac{1}{|m|^4}.$$

引理7.10 将格点和界定为一个绝对常数。将得到的 $\|\widehat{g}_t\|_1$ 的上界除以 $\|\widehat{g}_t\|_2 = \|g_t\|_{L^2(\mathbb{Z}_N^3)}$ 的下界，即得所述傅里叶比值界。□

定理 *4.13*的证明。 令 $F = H_t f$并令 $g_t(x) = F(x/N)$ 其中 $x \in \mathbb{Z}_N^d$。

将引理 7.2 应用于 $F = H_t f$，并利用假设

$$N \|H_t f\|^2_{L^2([0,1]^d)} \geqslant 4C_d \|H_t f\|^2_{C^2([0,1]^d)},$$

我们得到

$$\|g_t\|_{L^2(\mathbb{Z}_N^d)} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\, N^{d/2}\, \|H_t f\|_{L^2([0,1]^d)}.$$

由于 $\|\widehat{g}_t\|_2 = \|g_t\|_{L^2(\mathbb{Z}_N^d)}$ 根据帕塞瓦尔等式，这给出了 $FR(g_t)$ 中分母所需的下界。

接下来我们对 $\|\widehat{g}_t\|_1 = |\widehat{g}_t(0)| + \sum_{m \neq 0} |\widehat{g}_t(m)|$ 进行估计。

对于零频率，我们使用引理7.1 应用于 $F = H_t f$:

$$\left| \frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{Z}_N^d} g_t(x) - \int_{[0,1]^d} (H_t f)(u)\, du \right| \leqslant \frac{C_d}{N} \|H_t f\|_{C^1([0,1]^d)}.$$

乘以 N^d并除以 $N^{d/2}$，得到

$$|\widehat{g}_t(0)| = \frac{1}{N^{d/2}} \left| \sum_{x \in \mathbb{Z}_N^d} g_t(x) \right| \leqslant N^{d/2} \left| \int_{[0,1]^d} (H_t f)(u)\, du \right| + C_d\, N^{d/2-1} \|H_t f\|_{C^1([0,1]^d)}.$$

除以 $\|g_t\|_{L^2(\mathbb{Z}_N^d)}$ 的下界，得到

$$\frac{|\widehat{g}_t(0)|}{\|g_t\|_{L^2(\mathbb{Z}_N^d)}} \leqslant 2 \frac{\left| \int_{[0,1]^d} (H_t f)(u)\, du \right|}{\|H_t f\|_{L^2([0,1]^d)}} + C(d)\, \frac{\|H_t f\|_{C^1([0,1]^d)}}{\|H_t f\|_{L^2([0,1]^d)}} \frac{1}{N}.$$

根据热乘子表示，有

$$\|H_t f\|_{C^1([0,1]^d)} \leqslant C(d,t) \|f\|_{C^2([0,1]^d)}.$$

因此，最后一项被以下式子控制

$$C(d,t)\, \frac{\|f\|_{C^2([0,1]^d)}}{\|H_t f\|_{L^2([0,1]^d)}} \frac{1}{N},$$

其形式为 $C_{N\,t}^{\text{heat}}$，。

现在考虑非零频率。根据命题 7.14，对于 $m \in \mathbb{Z}_N^d$，

$$|\widehat{g}_t(m)| \leqslant C_6(d,t)\, N^{d/2}\, \|f\|_{C^2([0,1]^d)}\, e^{-c_0(t)|m|^2}.$$

因此

$$\sum_{m \neq 0} |\widehat{g}_t(m)| \leqslant C_6(d,t)\, N^{d/2}\, \|f\|_{C^2([0,1]^d)} \sum_{m \in \mathbb{Z}_N^d \setminus \{0\}} e^{-c_0(t)|m|^2}.$$

由引理 7.11，

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}_N^d \setminus \{0\}} e^{-c_0(t)|m|^2} \leqslant C_d(c_0(t)),$$

so

$$\sum_{m \neq 0} |\widehat{g}_t(m)| \leqslant C(d,t)\, N^{d/2}\, \|f\|_{C^2([0,1]^d)}.$$

除以 $\|g_t\|_{L^2(\mathbb{Z}_N^d)}$ 的下界，得到

$$\frac{\sum_{m \neq 0} |\widehat{g}_t(m)|}{\|g_t\|_{L^2(\mathbb{Z}_N^d)}} \leqslant C(d,t)\, \frac{\|f\|_{C^2([0,1]^d)}}{\|H_t f\|_{L^2([0,1]^d)}},$$

其形式为 B_t^{heat}。

结合零频率界和非零频率界，我们得到

$$FR(g_t) = \frac{\|\widehat{g}_t\|_1}{\|\widehat{g}_t\|_2} \leqslant A_t^{\text{heat}} + B_t^{\text{heat}} + C_{N,t}^{\text{heat}} = r_{N,t}^{\text{heat}},$$

正如所声称的。 □

定理 *4.16* 的证明。 应用定理 4.15，其中 $d = 3$ 和 $h = g_t$。 □

定理的证明 *4.17*。 应用定理 4.15，其中 d 和 $h = g_t$。 □

References

[1] K. Aldahleh, W. Burstein, G. Garza, A. Iosevich, J. Iosevich, A. Khalil, J. King, T. Le, I. Li, A. Mayeli, K. Nguyen, 和 N. Shaffer, 《傅里叶比与信号复杂度》, arXiv:2511.19560（2025年）。6[2] E. J. Candes, J. Romberg, 和 P. Tao, 《从不完整且不准确的测量中稳定地恢复信号》, 《纯粹与应用数学通讯》59（2006年）, 第 8 期, 1207–1223。2, 10[3] D. Donoho 和 P. Stark, 《不确定性原理与信号处理》, 《SIAM 应用数学杂志》49（1989年）, 第 3 期, 906–931。2[4] S. Foucart 和 H. Rauhut, 《压缩感知数学导论》, Birkhauser, 波士顿, 2013年。2, 10, 11[5] A. Iosevich, Z. Li, E. Palsson, A. Yavicoli, 《傅里叶比率：紧支撑测度的不确定性、限制与逼近》, arXiv:2512.16751（2025年）。6[6] A. Iosevich 和 A. Mayeli, 《不确定性原理、限制、Bourgain 定理与信号恢复》, 《应用与计算调和分析》76（2025年）, 101734。2[7]A. Iosevich, E. Palsson, 和 A. Yavicoli, 《离散化、采样与傅里叶比》, arXiv:2601.17493（2026年）。1, 2, 4, 6, 11, 17[8] H. Rauhut, 《压缩感知与结构化随机矩阵》, 载于《稀疏恢复的理论基础与数值方法》, M. Fornasier 编, 《计算与应用数学拉东系列》第 9 卷, De Gruyter, 柏林, 2010年, 1–92。2, 10[9] M. Rudelson 和 R. Vershynin, 《基于傅里叶测量和高斯测量的稀疏重建》, 《纯粹与应用数学通讯》61（2008年）, 第 8 期, 1025–1045。2, 10, 11[10] B. Sinopoli, L. Schenato, M. Franceschetti, K. Poolla, M. Jordan, 和 S. Sastry, 《间歇观测下的卡尔曼滤波》, IEEE 自动控制汇刊, 49（2004年）, 1453–1464。10

Department of Mathematics, University of Rochester, Rochester, NY, USA电子邮件地址: iosevich@gmail.comDepartment of Applied Mathematics,
Rochester Institute of Technology, Rochester,NY, USA电子邮件地址: joshuaiosevich@gmail.comDepartment of Mathematics, Virginia Tech, Blacksburg, VA, USA电子邮件地址: palsson@vt.eduDepartment of Mathematics, University of British Columbia,
Vancouver, BC, Canada电子邮件地址: yavicoli@math.ubc.ca