arXiv:2603.07862v1 [math.DS] 9 Mar 2026

概率单纯形上的选民激进化阈值动力学

ALEXANDER OMELCHENKO*

摘要。 我们分析了两个定义在不变概率单纯形上的耦合政治竞争常微分方程模型，其中选民群体总量守恒。基准三群体模型追踪左翼激进派、中间派和右翼激进派的选民占比。我们通过佩龙–弗罗贝尼乌斯阈值刻画了唯一的内部平衡点，证明了模型在对称和非对称情形下均具有全局渐近稳定性，并通过Dulac准则无条件排除了周期轨道。从结构上看，基准模型无法产生中间派不可逆衰退、依赖历史的长期下限或多个吸引子。随后，我们通过加入不参与选民舱室扩展模型，并区分纯状态冲击与永久结构参数变化。冲击后动力学受同一谱阈值支配：低于该阈值时，中间派状态全局渐近稳定；高于该阈值时，任何具有非零激进派初始种子的轨迹都会收敛至唯一的激进化平衡点。累积的阈值以下结构变化可以跨越阈值，产生基准模型中不存在的阶梯式动力学；对称约化则给出了临界冲击幅度和激进化窗口的闭式表达式。

K关键词。 政治极化、动力系统、单纯形模型、佩龙–弗罗贝尼乌斯定理 -rem, tr尖点分岔、Dulac准则、激进化

MSC 分类号。 34D23, 34C23, 37C75, 37N40, 9 1B14

1. 引言。

1.1. 实证背景。 在西方民主国家，左翼和右翼的激进运动都在壮大，而主流中间派则有所削弱。关于这一总体趋势的比较证据，见于有关民粹主义动员、意识形态排序和政党体系极化的研究 [6, 20, 21, 23]。一个反复出现的经验规律是 非对称流动：选民主要在中间派与激进阵营之间流动，但很少直接在两个激进派阵营之间流动。这促使我们采用最简化的三群体表述，分别代表左翼激进派、中间派和右翼激进派的占比。

2008年后时期还呈现出第二个特征，基准模型要么应当对此作出解释，要么应当明确证明其无法解释：危机反复发生之后，支持率往往并未完全恢复，反而形成更高的危机后激进派支持率底线。德国和法国就是突出的例子。在德国，德国选择党的得票率从2013年的4.7%升至2017年的12.6%，2021年为10.3%，并在2025年联邦选举中达到20.8% [4]。法国则提供了第二个例证：2012年后，左翼激进阵营（不屈法国）和右翼激进阵营（国民联盟）都显著壮大，而主流政党则失去了支持 [19]。由于总统选举、立法选举和欧洲选举采用不同的选举规则，我们仅将法国数据作为定性动因，而不将其视为同质时间序列。我们关注的定性特征并非某一次选举结果，而是明显的棘轮模式：接连发生危机后，激进派支持率往往会稳定在更高的底线上。

现有讨论中存在一个根本性的概念缺口。关于欧洲激进化的评论大多关注激进派支持率增长了多少，却不问这种增长是否可逆。这两个问题需要采用不同的分析方法。由危机导致的疏离所驱动的短暂激增，可能会随着危机消退而消散，即使它在峰值时看起来令人担忧。招募环境的结构性转变——制度信任降低、基于身份认同的不满日益凸显、中间派政党

*不来梅构造大学有限责任公司，校园环路1号，28759 不来梅，德国（aomelchenko@constructor.university）。

组织削弱——则可能无限期持续，无论引发危机是否得到解决。据我们所知，现有的区室式守恒选民群体常微分方程框架中，尚无模型能够将可逆的状态冲击、永久结构参数变化与对单纯形的完整定性分析结合起来。本文提出了这样一种模型。

本文在概率单纯形上建立了一套常微分方程模型的层级体系，用以区分这两个问题。基准模型刻画了在选民群体守恒条件下的正常自稳定竞争。扩展的四群体模型增加了一个脱离参与的区室，并区分状态冲击与结构冲击，从而允许不可逆转变与阶梯式动力学。我们首先强调，这是一个以定理为主导的程式化模型：我们的目标是识别激进化可能不可逆的最小结构条件，而不是为特定选举提供经过校准的因果解释。

1.2. 相关建模文献。 有界置信模型与网络模型描述个体的意见形成和聚类形成 [2, 7, 15, 18], ，但在该设定下，总体得票率动力学更难以进行精确分析。在精神上更接近本文的总体常微分方程模型包括满意化两党模型，出自 [27], ，该模型追踪意识形态立场，即政党的立场而非选民占比，以及三群体社会物理学模型，出自 [9], ，应用于2024年美国大选。

最直接可比的研究路线采用受流行病学SIS动力学启发的区室模型来追踪选民份额比例。Volkening、Linder、Porter和Rempala [28] 提出了用于两党美国选举的cRUD框架：民主党（D）、共和党（R）和未决定（U）份额满足概率单纯形上的选民群体守恒常微分方程，其参数拟合于州级民调数据，并使用10000次随机模拟生成概率预测。Branstetter等人 [3]将该方法扩展到2004年至2022年的总统、参议员和州长选举，亦发表于本刊。

本文与Volkening–Branstetter这一研究路线共享单纯形约束和选民群体守恒假设，但在问题、范围和方法上有四个方面的不同。

问题。 cRUD研究追问谁会赢得某次选举（一个通过参数拟合和蒙特卡洛模拟来回答的预测问题）。本文追问该系统是否存在稳定的中间派均衡、何种分岔会破坏它，以及危机是否会永久改变长期吸引子（一个由证明来回答的结构稳定性问题）。

模型。 cRUD模型包含两个已表态选民区室（D、 R），未决定选民则作为中介群体。本模型包含三至四个区室，并设有跨阵营反应性极化 项 γ_{LR} 和 γ_{RL}：选民转向右翼激进阵营会直接加剧左翼激进派招募，反之亦然；这种反馈在SIS型两党模型中并不存在。

地理范围与政党体制。 cRUD线是针对美国两党制校准的。本模型旨在描述欧洲多党制，在这类体制中，激进左翼与激进右翼可能同时壮大，而主流中间派则趋于弱化——这一格局在法国（国民联盟与不屈法国同时壮大）和德国（德国选择党崛起，同时左翼支持持续存在）最为明显。

数学上的完备性。 cRUD线旨在进行预测，而非探究定性理论；因此，全局渐近稳定性、分岔条件以及周期轨道的排除均不在其研究范围之内。本文证明了这三点。具体而言，杜拉克函数 $B = (LRC)^{-1}$ 在单纯形整个内部上给出严格为负的

散度，且这一结论适用于所有正参数——据我们所知，选举分舱模型文献中尚未出现过这一结果。在四群体扩展中，我们进一步证明，可逆激增与不可逆政治转变之间的区别由谱阈值决定；在对称情形下，该阈值可化为显式公式 $\Delta_c = (\mu - \beta)/(\delta - \beta)$。

本文还与关于单纯形上的动力系统以及单调性论证的研究相关 [16, 29]。我们的模型并非在整个内部都符合严格 Hirsch 意义上的竞争系统 Σ_2，因为非对角雅可比矩阵元素在内部不同位置会改变符号。因此，本文的全局结果结合了佩龙–弗罗贝尼乌斯阈值、正向量李雅普诺夫论证和杜拉克排除法，而非单调系统理论。

另有一支文献研究民主侵蚀和制度倒退 [1,13, 14, 26]。下文的扩展模型在理念上与这支文献更为接近，但仍明确聚焦于不同政治分舱之间的选民流动。

1.3. 贡献与定位。本文有两项主要贡献。

首先，对于基准三群体模型，我们在单纯形上进行了定性分析：证明正向不变性；分析对称情形和非对称情形下的全局渐近稳定性；在对称约化中给出显式平衡点公式 $C^* = \mu/(\alpha + \gamma)$；在非对称情形下给出佩龙–弗罗贝尼乌斯阈值；证明在 $\beta = \mu$处发生跨临界分岔；并通过杜拉克函数$B = (LRC)^{-1}$无条件排除周期轨道。由此可知，在参数固定时，基准模型无法产生阶梯式动力学或多个吸引子。

其次，我们引入一个具有完整全局分类的四群体脱离冲击扩展模型：若 $\mathcal{R}_{\mathrm{rad}} \le 1$，则中间派状态全局渐近稳定；若 $\mathcal{R}_{\mathrm{rad}} > 1$，则每一条具有非零激进派初始种子的轨迹都收敛到唯一的激进化平衡点（定理 6.8）。我们进一步推导出谱冲击阈值 Δ_c^{asym}（定理 7.6）、佩龙向量窗口界 t_q^*（命题 7.10），以及临界冲击幅度与激进化窗口的闭式对称情形化简。

阈值 $\mathcal{R}_{\mathrm{rad}} = \lambda_{\mathrm{PF}}(M^{-1}K)$ 在形式上类似于 [8, 10] 的下一代矩阵。本文在三个方面超越了该框架：杜拉克函数 $B = (LRC)^{-1}$ 无条件地排除了整个单纯形内部的周期轨道；全局渐近稳定性是在整个单纯形上而非局部确立的；四群体扩展则通过永久性结构冲击分析阈值跨越 ——这些问题超出了下一代矩阵框架的范围。

本文的主要目标是以定理为主导：确定激进化不可逆所需的最小结构条件，而非对具体选举提供经过校准的因果解释。实证示例仅作定性分析。

本文结构安排如下。第2–4节构建并分析基准模型。第5 节介绍四群体扩展。第6 节进行数学分析。第7 节推导冲击与累积漂移结果。第8节结合德国和法国的数据进行定性示例分析。第9 节给出数值示例。

2. 基准模型构建。

2.1. 状态空间与控制方程。 令 $L(t)$、 $R(t)$和 $C(t)$分别表示归一化选民群体中左翼激进派、右翼激进派和中间派的份额，其中

$$L(t) \ge 0, \qquad R(t) \ge 0, \qquad C(t) = 1 - L(t) - R(t) \ge 0.$$

可行状态空间是标准单纯形

$$\Sigma_2 = \{(L,R) \in \mathbb{R}^2 : L \geq 0,\ R \geq 0,\ L+R \leq 1\}.$$

定义 2.1（基准模型）。归一化三群体模型是自治系统

$$\begin{aligned} \dot{L} &= \alpha_L\, L\, C \ - \ \mu_L\, L \ + \gamma_{RL}\, R\, C, \\ \dot{R} &= \alpha_R\, R\, C \ - \mu_R\, R \ + \gamma_{LR}\, L\, C, \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中 $C = 1 - L - R$ 和 $\alpha_L, \alpha_R, \mu_L, \mu_R, \gamma_{RL}, \gamma_{LR} > 0$。根据构造，$C = -L - R$，因此 $L+R+C = 1$ 守恒。基准模型的六个参数汇总于表2.1。

2.2. 解释。项 $\alpha_i X_i C$ 表示相应激进阵营对中间派的直接招募，$-\mu_i X_i$ 表示回归中间派的去激进化，而 $\gamma_{ij} X_j C$ 表示反应性极化：一方激进派的增长会推动部分中间派转向另一方。双线性因子是与守恒和饱和相容的最简质量作用闭合形式：当招募方群体或可招募人群任一方不存在时，每个流量都会消失。

我们采用 $\gamma_{RL} RC$ 而不采用诸如 RL这样的派别间转移项。其预期机制并非激进阵营之间的直接转换——这种情况在经验上较为罕见——而是中间派因另一派别的可见度而转向其中一翼。这一选择也保留了下文分析所用的单纯形几何：由于 $\gamma_{RL} RC \geq 0$ 在面 $R = 0$ 和 $C = 0$上为零，Σ_2 的边界仍然是正向不变的（命题3.1）。

表 2.1：基准模型参数汇总。

参数	解释	范围
α_L, α_R	直接招募率（中间派 $\to$激进派）	$(0, \infty)$
μ_L, μ_R	去极端化率（激进派 $\to$中间派）	$(0,\ \infty)$
γ_{RL}	反应性极化：右侧增长 $\to$左侧	$(0,\ \infty)$
γ_{LR}	反应性极化：左侧增长 $\to$ 右侧	$(0,\ \infty)$

3. 基准模型的数学分析。分析遵循单纯形常微分方程的标准定性动力学方案：(i) 正向不变性，(ii) 均衡分类，(iii) 通过比较法和李雅普诺夫论证证明全局稳定性，(iv) 进行线性化并给出明确的谱数据，以及 (v) 运用本迪克森–杜拉克判据排除周期轨道。首先针对对称约化模型完成步骤 (i)–(iv)，此时 $(S,\ D)$ 系统的三角结构可得出完整的闭式结果；随后在不施加对称性限制的情况下，为完整非对称模型证明步骤 (v)。

3.1. 正向不变性。

命题 3.1（ Σ_2的正向不变性）。对于任意 $(L_0, R_0) \in \Sigma_2$ 以及任意正参数，（L（t） R（t）的（2.1）解始终位于 Σ_2 中，对所有 $t \geq 0$均成立。

证明。我们验证向量场 $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ 在边界 $\partial\Sigma_2$ 的每一点处都指向 Σ_2 内部（或与其相切）。

面 $L = 0$, $R \in [0,1]$: $F_1\big|_{L=0} = \gamma_{RL} R(1-R) \geq 0$。因此 $\dot{L} \geq 0$: 轨迹无法从这个面逸出。

面 $R = 0$, $L \in [0,1]$: 根据对称性, $F_2\big|_{R=0} = \gamma_{LR} L(1-L) \geq 0$。

面 $C = 0$, 即 $L + R = 1$: 这里 $C = 0$, 所以 $F_1\big|_{C=0} = -\mu_L L \leq 0$ 和 $F_2\big|_{C=0} = -\mu_R R \leq 0$。因此 $L + R \leq 0$, 这意味着 $C = -L - R \geq 0$: 激进派总占比不能超过 1，因此轨迹也无法从这个面逸出。

由于向量场在全部三个面上均指向内部（或与之相切），且由皮卡–林德洛夫定理，该系统具有唯一的局部利普希茨解，因此单纯形 Σ_2 是正向不变的。 □

注记3.2. 面 $C = 0$ 上的边界行为尤其具有启发性。当中间派群体完全耗尽时, L 与 R 均为非正：系统减速而非加速，并且必须回到 Σ_2的内部。这保证了只要 $C(0) > 0$, 对所有有限的 t 都有 $C(t) > 0$ 。

3.2. 对称约化与全局动力学。

定义3.3（对称情形）。我们称该模型是对称的，若 $\alpha_L = \alpha_R = \alpha$, $\mu_L = \mu_R = \mu$, $\gamma_{LR} = \gamma_{RL} = \gamma$。

在对称参数下，引入激进派总占比 $S := L + R$ 以及左右差异 $D := L - R$。由于 $C = 1 - S$，由（2.1）直接计算可得三角系统

$$\dot{S} = S\big[(\alpha+\gamma)(1-S) - \mu\big], \qquad \dot{D} = D\big[(\alpha-\gamma)(1-S) - \mu\big]. \tag{3.1}$$

令 $\beta := \alpha + \gamma$, S 方程是类逻辑斯蒂的，当 $\beta > \mu$ 时具有唯一正平衡点 $S^* = 1 - \mu/\beta$。一旦确定 $S(t)$, D 满足一个线性常微分方程。对角线 $\{L = R\}$ 是不变子空间 $D = 0$; 在其上 $S = 2P$，且 S 方程化为

$$\dot{P} = P[\beta(1-2P) - \mu]. \tag{3.2}$$

定理 3.4（对称模型的全局动力学）。

1. 若 $\beta \leq \mu$: $E_0 = (0,0)$ 在 Σ_2 上全局渐近稳定。两个激进派均消失: $L(t)$, $R(t) \to 0$, $C(t) \to 1$。2. 若 $\beta > \mu$: 唯一内部平衡点 $E_1 = (P^*, P^*)$，其中 $P^* = \frac{1}{2}(1-\mu/\beta)$且 $C^* = \mu/\beta$，在 $\Sigma_2 \setminus \{E_0\}$ 上全局渐近稳定； E_0 不稳定。

证明。**情形** $\beta \leq \mu$**:** $\dot{S} = S[\beta(1-S) - \mu] \leq S(\beta - \mu) \leq 0$, 因此 $S(t) \to 0$。由于 $|D| \leq S$, 也有 $D(t) \to 0$, 因此 L, $R \to 0$。

情形 $\beta > \mu$**:** S 方程是类逻辑斯蒂方程；对于任意 $S(0) \in (0, 1]$, $S(t) \to S^* = 1 - \mu/\beta$ 单调变化。 D 方程是线性的:

$$\dot{D} = k(t)\, D, \qquad k(t) := (\alpha-\gamma)(1-S(t)) - \mu.$$

因此

$$D(t) = D(0) \exp\left(\int_0^t k(s)\, ds \right).$$

由于 $S(t) \to S^* = 1 - \mu/\beta$, 我们有

$$k(t) \to (\alpha-\gamma)\frac{\mu}{\beta} - \mu = -\frac{2\gamma\mu}{\beta} < 0.$$

存在 因此，存在 $T>0$和 $\eta>0$，使得对于所有 $t\geq T$， $k(t)\leq-\eta$。对于 $t\geq T$，

$$|D(t)|\leq|D(T)|\exp(-\eta(t-T))\,,$$

因此 $D(t)\to0$ 指数地。由此

$$L(t)=\frac{S(t)+D(t)}{2}\to\frac{S^*}{2}=P^*,\qquad R(t)=\frac{S(t)-D(t)}{2}\to\frac{S^*}{2}=P^*.$$

E_0的不稳定性：其主特征值为 $\lambda_1=\beta-\mu>0$。 □

推论 3.5（平衡时的中间派比例）。当 E_1 存在时（$\beta>\mu$），平衡时的中间派份额为

$$C^*=\frac{\mu}{\beta}=\frac{\mu}{\alpha+\gamma}\in(0,1). \tag{3.3}$$

C^* 随 α 和 γ严格递减，随 μ严格递增，并且对于所有正参数均为正。

证明。 将 P^* 直接代入 $C=1-2P^*$。 □

3.3. 稳定性分析：二维情形。 现在回到完整非对称系统（2.1）。

定义 3.6（内部平衡点）。 若点 (L^*,R^*) 满足 $L^*>0,\ R^*>0,L^*+R^*<1$，则称其为内部平衡点，如果 $F_1(L^*,R^*)=0$ 且 $F_2(L^*,R^*)=0$。

令 $F_1=F_2=0$ 满足 $C^*=1-L^*-R^*$，并合并同类项：

$$C^*\big(\alpha_L\,L^*+\gamma_{RL}\,R^*\big)=\mu_L\,L^*,\qquad C^*\big(\alpha_R\,R^*+\gamma_{LR}\,L^*\big)=\mu_R\,R^*. \tag{3.4}$$

结合 $L^*+R^*+C^*=1$，得到一个关于 3×3 的封闭(L^*,R^*,C^*)系统。在对称情形下 $L^*=R^*=P^*$，两个方程均化简为 $C^*(\alpha+\gamma)=\mu$，即$C^*=\mu/\beta$，这与推论 3.5一致。

一般点 $(L,R)\in\mathrm{int}(\Sigma_2)$ 处的雅可比矩阵：

$$J=\begin{pmatrix}\alpha_L(C-L)-\mu_L-\gamma_{RL}\,R & \gamma_{RL}(C-R)-\alpha_L\,L\\ \gamma_{LR}(C-L)-\alpha_R\,R & \alpha_R(C-R)-\mu_R-\gamma_{LR}\,L\end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

注意 $J_{11}\neq(\alpha_L+\gamma_{RL})(C-L)-\mu_L$： γ_{RL}项通过 L和 R求导时的方式不同，因为在 F_1中，它乘的是 RC，而不是 LC。

定理 3.7（内部平衡点的存在性、唯一性与稳定性）。定义招募矩阵和衰减矩阵：

$$K:=\begin{pmatrix}\alpha_L & \gamma_{RL}\\ \gamma_{LR} & \alpha_R\end{pmatrix},\quad M:=\begin{pmatrix}\mu_L & 0\\ 0 & \mu_R\end{pmatrix}.$$

设 $\lambda_{\mathrm{PF}}>0$为 $M^{-1}K$的佩龙根， $u=(u_1,u_2)^\top\gg0$为对应的正特征向量，其显式公式为

$$\lambda_{\mathrm{PF}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_L}{\mu_L}+\frac{\alpha_R}{\mu_R}+\sqrt{\left(\frac{\alpha_L}{\mu_L}-\frac{\alpha_R}{\mu_R}\right)^2+\frac{4\gamma_{RL}\gamma_{LR}}{\mu_L\mu_R}}\right).$$

1. 内部平衡点存在当且仅当 $\lambda_{\mathrm{PF}}>1$。

2. 当它存在时，它是唯一的：

$$C^* = \frac{1}{\lambda_{\mathrm{PF}}}, \qquad (L^*, R^*) = \frac{1 - C^*}{u_1 + u_2}\,(u_1, u_2).$$

3. 它是局部渐近稳定的。在对称情形下，它是稳定结点（或在余维一轨迹上为稳定星点，定理3.8）。在非对称情形下，它可能是稳定结点或稳定焦点。

证明。第1–2部分。在内部平衡点处，方程（3.4）为 $C^* K v = M v$，适用于 $v = (L^*, R^*)^\top \gg 0$。乘以 M^{-1}：$(M^{-1}K)v = (1/C^*)v$。根据佩龙–弗罗贝尼乌斯定理，正矩阵 $M^{-1}K$的唯一正特征向量是特征值为 λ_{PF}的佩龙特征向量，因此 $C^* = 1/\lambda_{\mathrm{PF}} \in (0,1)$当且仅当 $\lambda_{\mathrm{PF}} > 1$。显式公式由$M^{-1}K$的 2×2 特征多项式得出。

在对称情形下 $\lambda_{\mathrm{PF}} = \beta/\mu$，因此条件 $\lambda_{\mathrm{PF}} > 1$ 恰好化简为$\beta > \mu$，且 $C^* = \mu/\beta$，这与推论3.5一致。

第三部分（局部稳定性）。在内部平衡点处，以下关系

$$\mu_L = C^*\left(\alpha_L + \gamma_{RL}\frac{R^*}{L^*}\right), \qquad \mu_R = C^*\left(\alpha_R + \gamma_{LR}\frac{L^*}{R^*}\right)$$

由（3.4）得出。将它们代入雅可比矩阵（3.5）可得

$$J_{11} = -\alpha_L L^* - \gamma_{RL}R^* - C^*\gamma_{RL}\frac{R^*}{L^*}, \qquad J_{22} = -\alpha_R R^* - \gamma_{LR}L^* - C^*\gamma_{LR}\frac{L^*}{R^*}.$$

因此

$$\operatorname{tr} J = -\left[\alpha_L L^* + \alpha_R R^* + \gamma_{RL}R^* + \gamma_{LR}L^* + C^*\gamma_{RL}\frac{R^*}{L^*} + C^*\gamma_{LR}\frac{L^*}{R^*}\right] < 0.$$

对于行列式，展开 $\det J = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}$。利用上文给出的 J_{11}、J_{22} 的表达式，以及

$$J_{12} = \gamma_{RL}(C^* - R^*) - \alpha_L L^*, \qquad J_{21} = \gamma_{LR}(C^* - L^*) - \alpha_R R^*,$$

结合平衡关系 $\mu_L = C^*(\alpha_L + \gamma_{RL}R^*/L^*)$ 和 $\mu_R = C^*(\alpha_R + \gamma_{LR}L^*/R^*)$，直接计算可得

$$\det J = C^*(L^* + R^*)\left(\alpha_L\gamma_{LR}\frac{L^*}{R^*} + 2\gamma_{LR}\gamma_{RL} + \alpha_R\gamma_{RL}\frac{R^*}{L^*}\right) > 0.$$

因此，$\operatorname{tr} J < 0$ 且 $\det J > 0$，故内部平衡点局部渐近稳定。节点与焦点的分类取决于判别式 $(\operatorname{tr} J)^2 - 4\det J$ 的符号。

□

定理3.8（对称二维情形下的稳定性）。在对称模型 $(\beta > \mu)$ 中，内部平衡点 $E_1 = (P^*, P^*)$ 局部渐近稳定，其特征值为

$$\lambda_1 = \mu - \beta < 0, \qquad \lambda_2 = -\frac{2\gamma\mu}{\beta} < 0. \tag{3.6}$$

一般而言（$\lambda_1 \neq \lambda_2$），它是一个稳定结点。两个特征值在余维一轨迹 $2\gamma\mu = \beta(\beta - \mu)$ 上重合，此时 E_1 是一个稳定星点。

证明。将（3.5）代入 $L=R=P^*$，其中 $C^*=\mu/\beta$，利用 $P^*=(\beta-\mu)/(2\beta)$。对角线项和非对角线项为

$$a := J_{11}=J_{22} = \frac{\mu(\alpha-\gamma)-\beta^2}{2\beta}, \qquad b := J_{12}=J_{21} = \frac{2\gamma\mu-\beta(\beta-\mu)}{2\beta}.$$

（等式 $J_{12}=J_{21}$ 由对称性 $\alpha_L=\alpha_R$, $\gamma_{RL}=\gamma_{LR}$得出。）矩阵 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & a\end{smallmatrix}\right)$ 的特征值为 $\lambda_{1、2}=a\pm b$。计算两者之和与差：

$$\lambda_1=a+b=\frac{\mu(\alpha-\gamma)-\beta^2+2\gamma\mu-\beta(\beta-\mu)}{2\beta}=\frac{2\mu\beta-2\beta^2}{2\beta}=\mu-\beta,$$

$$\lambda_2=a-b=\frac{\mu(\alpha-\gamma)-\beta^2-2\gamma\mu+\beta(\beta-\mu)}{2\beta}=\frac{\mu(\alpha-3\gamma-\beta)}{2\beta}=\frac{-4\gamma\mu}{2\beta}=-\frac{2\gamma\mu}{\beta}.$$

由于 $\beta>\mu$，两个值都严格为负。因为 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 通常成立， E_1 是一个稳定结点。对于所有 $\beta>\mu,\gamma,\ \mu>0$，$\mathrm{tr}\,J=\lambda_1+\lambda_2=\mu-\beta-2\gamma\mu/\beta<0$ 和$\det J=\lambda_1\lambda_2=-(\beta-\mu)\cdot 2\gamma\mu/\beta>0$。 □

注释 3.9（两个特征值的解释）。特征值 $\lambda_1=\mu-\beta$正是标量约化系统的稳定性指数（定理3.4）：它支配着 L 与 R 共同变化的对称模态。特征值 $\lambda_2=-2\gamma\mu/\beta$ 支配着非对称模态（差值 $L-R$），其值由反应性极化速率 γ 与去极端化率 μ的乘积决定。在 $\gamma\to 0$ （无反应性极化） $\lambda_2\to 0$的极限下：非对称模态变为中性稳定，这反映了在没有反应性交叉耦合时，两个派别各自独立演化。

推论 3.10（不存在周期轨道：完整非对称模型）。系统 (2.1)在 Σ_2 的内部不存在闭轨道；无论参数值为何，只要参数均为正，且不施加对称性限制。

证明。在 int(Σ_2) 上取权函数 $B(L,\ R)=1/(LRC)>0$，并应用本迪克森–杜拉克判据，其中 $C=1-L-R$。令 $BF_1=\alpha_L/R-\mu_L/(RC)+\gamma_{RL}/L$ 和$BF_2=\alpha_R/L-\mu_R/(LC)+\gamma_{LR}/R$，直接计算可得

$$\frac{\partial(BF_1)}{\partial L}+\frac{\partial(BF_2)}{\partial R}=-\frac{\gamma_{RL}}{L^2}-\frac{\gamma_{LR}}{R^2}-\frac{\mu_L}{RC^2}-\frac{\mu_R}{LC^2}. \tag{3.7}$$

在 int(Σ_2) 中，我们有 $L,\ R,\ C>0$，因此四项均严格为负，其和在 int(Σ_2) 上处处严格为负。根据 Dulac 定理，不存在闭轨道。（这一结论与 $\alpha_L,\ \alpha_R$ 无关，对所有参数值均成立，包括非对称情形。特别是，在对称约化中，标量 S-方程本身就足以排除周期轨道。） □

注记 3.11（E_0 完整二维模型中的稳定性）。将（3.5）代入 $E_0=$（0，0）（其中 $C=1$）可得

$$J\big|_{E_0}=\begin{pmatrix}\alpha_L-\mu_L & \gamma_{RL}\\ \gamma_{LR} & \alpha_R-\mu_R\end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

中间派状态 E_0 是局部渐近稳定的，当且仅当

$$\alpha_L+\alpha_R<\mu_L+\mu_R \quad\text{and}\quad (\alpha_L-\mu_L)(\alpha_R-\mu_R)>\gamma_{RL}\,\gamma_{LR}. \tag{3.9}$$

在对称情形下，矩阵（ 3 8 $\left(\begin{smallmatrix}\alpha-\mu & \gamma\\ \gamma & \alpha-\mu\end{smallmatrix}\right)$ $\lambda_1=$。）

$\beta-\mu \qquad \lambda_2=\alpha-\ \mu+\gamma \qquad \beta=\alpha+\gamma<\mu$

变为具有特征值以及（ ）。二者均为负当且仅当。

定理3.12（完整非对称基准模型的全局动力学）。设λ_{PF} 为定理*3.7*中的佩龙根。则：

1. 若 $\lambda_{\mathrm{PF}} \le 1$，中间派平衡点 $E_0 = (0,0)$ 在 Σ_2上全局渐近稳定。2. 若 $\lambda_{\mathrm{PF}} > 1$，则定理 *3.7* 中的唯一内部平衡点 E_1 在 $\Sigma_2 \setminus \{E_0\}$上全局渐近稳定。

证明。 记 $x = (L,R)^{\top}$。该系统可写为

$$\dot{x} = (K - M)x + N(x),$$

其中

$$N(x) = \begin{pmatrix} -\alpha_L L^2 - (\alpha_L + \gamma_{RL})LR - \gamma_{RL}R^2 \\ -\gamma_{LR}L^2 - (\alpha_R + \gamma_{LR})LR - \alpha_R R^2 \end{pmatrix}.$$

Th对所有 $(L,R) \in \Sigma_2$， $\le 0(x)$ N按分量成立，并且对每个 $x \neq 0$， $N(x) \neq 0$。

情形 $\lambda_{\mathrm{PF}} \le 1$。 设 $q \gg 0$ 是梅茨勒矩阵 $K - M$ 的正左佩龙特征向量，使得

$$q^{\top}(K - M) = s\,q^{\top}, \qquad s := s(K - M) \le 0.$$

定义 $V(x) := q^{\top}x$. 则

$$\dot{V} = q^{\top}(K - M)x + q^{\top}N(x) = s\,V + q^{\top}N(x) \le 0,$$

对每个 $x \neq 0$，不等式均为严格不等式。因此，根据李雅普诺夫–拉萨尔原理， E_0 全局渐近稳定。

情形 $\lambda_{\mathrm{PF}} > 1$。 再次令 $q \gg 0$为 $K - M$的正左佩龙特征向量，此时其谱界为 $s = s(K - M)$ > 0。由于当 $x \to 0$时， $N(x) = O(\|x\|^2)$，因此存在 E_0 在 $\mathrm{int}(\Sigma_2)$ 中的一个邻域 U ，使得

$$\dot{V} \ge \frac{s}{2}V > 0 \qquad \text{for all } x \in U.$$

因此，从 $\mathrm{int}(\Sigma_2)$ 中出发的轨迹都不可能收敛到 E_0。

由命题3.1， Σ_2 是紧且正向不变的。由推论 3.10可知，$\mathrm{int}(\Sigma_2)$中不存在周期轨道。平衡点只有 E_0 以及定理3.7给出的唯一内部平衡点 E_1 。因此，根据庞加莱–本迪克松定理， [22], 任意内部轨迹的 ω-极限集必为一个平衡点。由于E_0 不可能是内部轨迹的 ω-极限集，因此必有

$$\omega(L_0,R_0) = \{E_1\} \qquad \text{for every } (L_0,R_0) \in \mathrm{int}(\Sigma_2).$$

尚需证明，没有任何始于 $\mathrm{int}(\Sigma_2)$ 的轨迹会在 $\partial\Sigma_2$ 上有一个 ω-极限点，可能的 E_0 除外。

在开边 $\{L = 0,\ 0 < R < 1\}$ 上，有

$$\dot{L}\big|_{L=0} = \gamma_{RL}R(1 - R) > 0.$$

因此，这条开边上的每个点都有一个邻域，在该邻域内向量场严格指向内部，所以内部轨迹的任何 ω-极限集都不会与该边界相交。对开边 $\{R = 0,\ 0 < L < 1\}$ 也可作同样论证。

在边界 $\{C = 0\}$，即 $L + R = 1$ 上，有

$$\dot{C} = -(\dot{L} + \dot{R}) = \mu_L L + \mu_R R \ge \min\{\mu_L, \mu_R\} > 0.$$

由连续性可知，存在 $\{C=0\}$ 的一个邻域，在其中 $C>0$，因此没有内部轨迹能在正向时间趋近这条边界。

因此，内部轨迹的每个 ω-极限点都位于$\mathrm{int}(\Sigma_2)\cup\{E_0\}$中。由于当 $\lambda_{\mathrm{PF}}>1$时E_0 不稳定，我们得出

$$\omega(L_0,R_0)=\{E_1\}\qquad \text{for every } (L_0,R_0)\in \mathrm{int}(\Sigma_2).$$

最后， $\Sigma_2\setminus\{E_0\}$ 的每个边界点都会立即进入内部，因此对所有$(L_0,R_0)\in\Sigma_2\setminus\{E_0\}$，同样的结论成立。 □

3.4. $\beta=\mu$**处的分岔。**

定理 3.13（跨临界分岔）。 在对称标量模型 (3.2)中，当 $\beta=\alpha+\gamma$ 增大穿过 μ:

1. 当 $\beta<\mu$时：$[0,\frac{1}{2}]$中仅存在 E_0；它是稳定的。
2. 当 $\beta=\mu$ 时： $P^*=0$ 与 E_0重合；两个平衡点相撞。
3. 当 $\beta>\mu$ 时： P^*从 E_0分岔进入 $(0,\ 12)$； E_1稳定， E_0不稳定。这是一次跨临界分岔：当 β 穿过 μ时，两个分支交换稳定性。

证明。 分岔发生在 $(P,\ \beta)=(0,\ \mu)$。设 $f(P,\ \beta)=P[\beta(1-2P)-\mu]=\beta P-2\beta P^2-\mu P$。此时： $f=0$， $f_P=\beta-\mu=0$， $f_{PP}=-4\beta\neq 0$，$f_{P\beta}=1-4P\big|_{P=0}=1\neq 0$。这些恰好是 [25]分类中跨临界分岔的非退化条件。 □

推论 3.14（比较静态分析）。在内部平衡点 E_1 处：

1. $\partial P^*/\partial\alpha>0$：招募增加会提高激进派平衡值。2. $\partial P^*/\partial\gamma>0$：反应性极化增强会提高激进派平衡值。3. $\partial P^*/\partial\mu<0$：去极端化率提高会降低激进派平衡值。4. $\partial C^*/\partial(\alpha+\gamma)<0$：中间派份额会随着招募和极化强度的增加而下降。5. $C^*>0$ 对于所有固定的正参数均成立； $C^*\to 0$ 仅在奇异极限下成立，例如$\mu\to 0$ 或 $\alpha+\gamma\to\infty$。特别是，只要去极端化率固定为正，且招募率和极化率固定为有限值，中间派就不可能崩溃。

证明。所有结论均可通过求导，直接由 $P^*=\frac{1}{2}(1-\mu/\beta)$ 和 $C^*=\mu/\beta$（其中 $\beta=\alpha+\gamma$）得出。 □

4. 基准模型的数值分析。 所有模拟均使用来自 SciPy [24]的 solve_ivp 函数，并配合 RK45 求解器进行，相对容差为 10^{-10}，绝对容差为 10^{-12}。最大步长设为 0.05，以确保所有参数配置下的精度。

4.1. 两种定性状态：三种代表性情形。 图4.1展示了定理3.4中两种数学上截然不同的状态内的三种代表性情形：亚临界情形 $\beta\le\mu$ 与超临界共存情形$\beta>\mu$。虚线参考线显示理论平衡点值 P^* 与$C^*=\mu/\beta$，其来自推论3.5。

4.2. 相图。图 4.2 展示了同样三组参数下、具有多个初始条件的相图。定理 3.4 所证明的全局收敛性得到了证实：来自 Σ_2 内部的所有轨迹，无论起点如何，都会收敛到同一个吸引子。

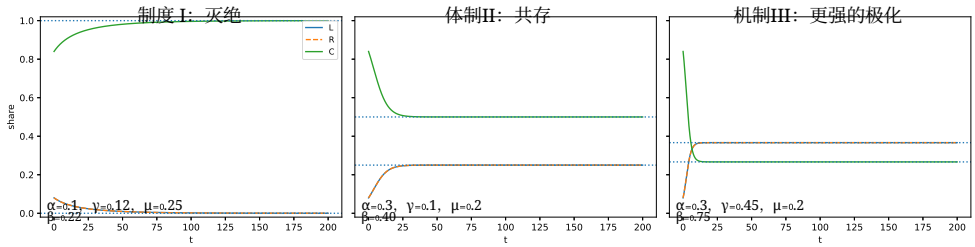


图 4.1：定理 3.4 两种动力学机制中的三个代表性情形的时间序列。 **左侧** ($\beta = 0.22 < \mu = 0.25$)：亚临界情形。两个激进派阵营均衰减；中间派份额趋近于 1。 **中间** ($\beta = 0.40 > \mu = 0.20$)：超临界情形，中度极化。所有群体均在 $P^* = 0.25$, $C^* = 0.50$.**右侧** ($\beta = 0.75 > \mu = 0.20$)：超临界情形，高度极化。强烈的反应性极化使平衡点移至 $P^* = 0.367$, $C^* = 0.267$。右侧面板中的两种情形属于相同的定性机制（$\beta > \mu$）；它们仅在平衡时极化程度上有所不同。虚线表示解析预测；数值结果与解析值在容差范围内一致 10^{-8}。

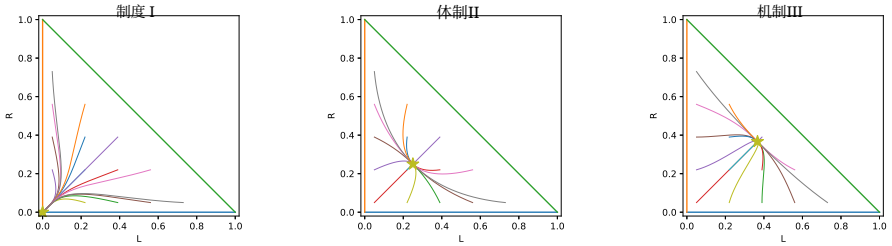


图4.2：可行单纯形中的相图 Σ_2。星号标出吸引平衡点。所有轨迹均收敛到同一不动点，从而确认全局稳定性。在制度 I 中，吸引子为 $E_0 = (0,0)$；在制度 II 和制度 III 中，则为内部平衡点 $E_1 = (P^*, P^*)$。不存在极限环，这与Dulac准则一致（推论 3.10）。

4.3. 分岔图。图 4.3 展示了均衡份额 P^* 和 C^* 随极化参数 γ 变化的情况，其中招募率 α取三个不同值。在 $\beta = \mu$(即 $\gamma = \mu - \alpha$)处的跨临界分岔清晰可见。推论 3.14所解析证实的关键定性特征是， $C^* = \mu/(\alpha+\gamma) > 0$ 对所有有限参数均成立：中间派份额会因招募和极化而减少，但永远不会降至零。

在非对称情形中，平衡点向较强翼偏移，这由 $M^{-1}K$ 的佩龙特征向量决定（定理3.7）。平衡时的中间派比例仍为 $C^* = 1/\lambda_{\mathrm{PF}}$，对所有有限正参数均严格为正。

更多基线数值结果。进一步的基线模拟——不同强度的暂时性外部冲击，以及 $C^* = \mu/(\alpha+\gamma)$ 在(α, γ) 平面上的敏感性等值线——直接证实了定理 3.4、定理 3.12和推论3.5中已通过解析方法证明的结果。这些图表可作为补充材料

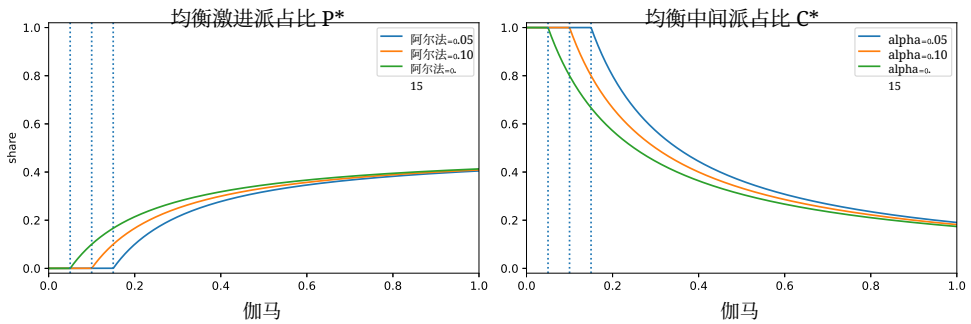


图4.3：均衡激进派占比 P^*（左）和中间派份额 C^*（右）随 γ 的变化，其中 $\alpha \in \{0.05, 0.10, 0.15\}$ 和 $\mu = 0.20$。分岔阈值$\gamma^* = \mu - \alpha > 0$ 清晰可见，是每条曲线的左端点。双曲衰减 $C^* = \mu/(\alpha+\gamma)$（右图）逐渐趋近于零，但在所绘参数范围内始终不会达到零。

应要求提供。

5. 四群体脱嵌-冲击模型。

5.1. 基准模型的结构性局限与研究动机。 对于固定的正参数，基准模型具有唯一的全局吸引子（对称情形下见定理 3.4，非对称情形下见定理 3.12）。因此，长期中间派份额仅取决于当前参数值，而阶梯式动力学、冲击历史依赖性和双稳态均不可能出现。

推论 5.1（阶梯式动力学的不可能性）。 在参数固定为正的基准模型中，对于任意初始条件，以下情况均不可能出现：

(i) 长期中间派份额单调递减的序列 $C_1^\infty > C_2^\infty > \cdots$ 由状态扰动产生；*(ii)* 长期中间派份额 C^∞ 取决于冲击历史，而非仅取决于当前参数值；*(iii)* 双稳态：在相同参数下，从不同初始条件出发可到达两个不同的长期吸引子。

证明。这直接由定理3.4和3.12中全局吸引子的唯一性得出。

□

推论5.1 是基准模型在结构上无法完整描述2008年后欧洲动态的精确数学表述。只需进行两项最小扩展，即可弥补这一缺陷：(a) 增设不参与选民舱室 A，使危机诱发的退出能够形成易受激进派动员影响的瞬态蓄积库 [5, 21]；(b) 引入结构性（改变参数的）冲击，使反复发生的危机能够永久改变招募/去激进化平衡——这一制度渠道曾在不同框架下由 [17]加以分析——从而产生累积漂移 $\beta_0 + \sum_k \Delta\beta_k$，并可能越过阈值 $\beta = \mu$。接下来的小节将对这两项扩展进行形式化阐述。

5.2. 状态空间。该扩展在基线划分中增加了一个不参与群体区室 $A(t)$。在本节中，$A(t)$ 被解释为危机引发的过量。

脱 高于背景弃权水平的参与度。守恒定律变为

$$L(t) + R(t) + C(t) + A(t) = 1 \qquad (t \geq 0), \tag{5.1}$$

因此 $C = 1 - L - R - A$ 可行状态空间是标准的 3-单纯形

$$\mathcal{T} = \{(L, R, A) \in \mathbb{R}^3 : L \geq 0,\ R \geq 0,\ A \geq 0,\ L + R + A \leq 1\}.$$

5.3. 控制方程。

定义 5.2（四群体模型）。该四群体脱嵌-冲击模型是以下系统

$$\begin{aligned} \dot{L} &= \alpha_L\, L\, C + \gamma_{RL}\, R\, C + \delta_L\, A\, L - \mu_L\, L, \\ \dot{R} &= \alpha_R\, R\, C + \gamma_{LR}\, L\, C + \delta_R\, A\, R - \mu_R\, R, \\ \dot{A} &= \sigma(t)\, C - \delta_L\, A\, L - \delta_R\, A\, R - \rho\, A, \end{aligned} \tag{5.2}$$

其中 $C = 1 - L - R - A$ 以及所有参数 α_i、μ_i、γ_{ij}、δ_i、$\rho > 0$。

新项具有直接的解释。因子 $\delta_i A X_i$ 刻画激进运动对脱离选民的动员；人们通常预期 $\delta_i > \alpha_i$，因为脱离选民已经退出主流 [21]。项 $\sigma(t)C$在危机期间将中间派转入脱离，而 ρA 使脱离选民回到中间。新增参数汇总于表 5.1。

表 5.1：四群体模型中引入的新参数。

参数	解释	预期范围
δ_L, δ_R	激进派的非政治动员率	$\delta_i > \alpha_i$
ρ	自发重新参与率	$(0, \infty)$
$\sigma(t)$	外部冲击强度	≥ 0

5.4. 脉冲冲击模型。 危机被建模为将当前中间派群体中的一部分瞬间转入脱离状态。

定义 5.3（脉冲冲击）。振幅为 $s > 0$、发生时间为t_0 的 $\sigma(t) = s\,\delta_{\mathrm{D}}(t - t_0)$ 在 (5.2)中对应于令 δ_{D} 为狄拉克δ分布。这会在 t_0处产生跳跃条件：

$$C(t_0^+) = (1 - \Delta)\, C(t_0^-), \qquad A(t_0^+) = A(t_0^-) + \Delta\, C(t_0^-), \tag{5.3}$$

其中 $\Delta := 1 - e^{-s} \approx s$ 在 s 较小时成立，且 L、R 保持不变。随后系统从 (L_0, R_0, A_0) 出发，在 $\sigma \equiv 0$ 下自主演化。

跳跃之后，冲击后动力学是自主的，从而将冲击事件与其后续后果清晰分离。

5.5. 结构冲击与状态冲击。 定义 5.3 描述了一种状态冲击：参数保持不变，仅状态受到扰动。我们进一步定义：

定义 5.4（结构性冲击）。设 θ 表示模型参数向量。在时间 t_0 发生的结构性冲击由以下部分组成：

(i) 一个状态分量：振幅为 Δ 的脉冲冲击，如定义 5.3所述；*(ii)* 一个参数分量：永久参数变化 $\theta^- \to \theta^+$ 自 t_0 起生效，并持续对所有 $t > t_0$成立。

含有 $\theta^+ = \theta^-$ 的冲击称为纯状态冲击。在下文讨论的对称约化中，参数分量取为标量位移 $\beta^+ = \beta^- + \Delta\beta$，其余参数保持不变。

纯状态冲击只改变状态空间中的点；结构性冲击则会同时改变状态和冲击后的参数制度。这一区别是扩展模型的组织原则。

6. 四群体模型的数学分析。

6.1. 正向不变性。

命题 6.1（ $\mathcal{T}$的正向不变性）。对于任意 $(L_0,\ R_0,\ A_0) \in \mathcal{T}$及正参数，方程 (5.2) 在 $\sigma \equiv 0$ 条件下的解始终属于 $\mathcal{T}$，对所有 $t \geq 0$均成立。

证明。我们验证向量场在 $\mathcal{T}$的每个面上指向内部（或相切）。

面 $L = 0$: $\dot{L}\big|_{L=0} = \gamma_{RL}\, R\, C \geq 0$。面 $R = 0$: $\dot{R}\big|_{R=0} = \gamma_{LR}\, L\, C \geq 0$。
面 $A = 0$: $\dot{A}\big|_{A=0} = \sigma(t)\, C \geq 0$ （其中 $\sigma \equiv 0$ 为冲击后，$\dot{A}\big|_{A=0} = 0$）。

面 $C = 0$（即 $L + R + A = 1$）：此处对 L 类似，则此外 $\dot{A}\big|_{C=0} = -A(\delta_L L + \delta_R R + \rho) \leq 0$。因此

$$\begin{aligned}\dot{L} + \dot{R} + \dot{A}\big|_{C=0} &= L(\delta_L A - \mu_L) + R(\delta_R A - \mu_R) - A(\delta_L L + \delta_R R + \rho) \\ &= -\mu_L L - \mu_R R - \rho A \leq 0.\end{aligned}$$

因此，$C = -(L + R + A) \geq 0$：总 $L + R + A$ 不能超过 1。

根据皮卡–林德洛夫定理，解是唯一的，并且 $\mathcal{T}$ 正向不变。

□

注 6.2. 与基线不同，面 $C = 0$ 现在允许轨迹在其上停留有限时间（若 $\mu_L = \mu_R = \rho = 0$）。对于所有严格正的参数（我们的既定假设），系统会立即被推回内部，因为只要 $(L,\ R,\ A) \neq (0,\ 0,\ 0)$，$\dot{C}\big|_{C=0} = \mu_L L + \mu_R R + \rho A > 0$。

6.2. 对称约化。

定义 6.3（对称四群体模型）。模型 (5.2) 是对称的，当且仅当 $\alpha_L = \alpha_R = \alpha$，$\mu_L = \mu_R = \mu$，$\gamma_{LR} = \gamma_{RL} = \gamma$，$\delta_L = \delta_R = \delta$，且 $L(0) = R(0)$。

在对称假设下，对于所有 t，$L(t) = R(t) =: P(t)$（基于与基线中相同的对角不变性论证），系统约化为二维冲击后系统：

$$\begin{aligned}\dot{P} &= P\big[(\alpha + \gamma)(1 - 2P - A) + \delta A - \mu\big] = P\big[(\beta - \mu) - 2\beta P + (\delta - \beta)A\big], \\ \dot{A} &= -(2\delta P + \rho)\, A,\end{aligned} \tag{6.1}$$

其中 $\beta := \alpha + \gamma$ 且 $C = 1 - 2P - A$。式（6.1）的可行域为

$$\mathcal{F} = \{(P, A) : P \geq 0,\ A \geq 0,\ 2P + A \leq 1\}.$$

6.3. 均衡分类。

定理6.4（对称四群体模型的均衡）。系统满足 $\sigma \equiv 0$，在 $\mathcal{F}$中恰有两个平衡点： (6.1)

(i) $E_0 = (P = 0,\ A = 0)$*: the centr ist-on ly state* $(C = 1)$
. (ii) $E_1 = \big(P^* = \frac{1}{2}(1 - \mu/\beta)\ \ A = 0\big)$: 共存，当且仅当 $\beta > \mu$ 时存在于 $\mathcal{F}$ 的内部。

不存在满足 $A^* > 0$ 的平衡点。

证明。由 $A = 0$: 由于 $2\delta P + \rho > 0$，可得 $A^* = 0$。结合 $A = 0$，$\dot{P} = P[(\beta - \mu) - 2\beta P] = 0$ 可得 $P = 0$ 或 $P^* = \frac{1}{2}(1 - \mu/\beta)$。条件 $P^* \in (0, \frac{1}{2})$ 等价于 $\beta > \mu$。 □

注 6.5（对 $A(t) \to 0$ 的解释及脱离的暂时性）。定理 6.4 表明，在每个平衡点处，$A^* = 0$，这似乎预示着长期选民投票率将达到 100%。正确的解释是，$A(t)$ 刻画的是超出 稳定基线 的（由危机引发的）额外脱离，$A_{\text{base}} > 0$ 代表 长期不参与；$A(t) \to 0$意味着系统恢复到危机前的弃权水平，而不是弃权消失。 的暂时性并非建模假设，而是正耗减率（$\rho > 0,\ \delta > 0$）的结果：长期来看，每位选民要么加入激进运动，要么回归主流。经验上重要的动态发生在暂态阶段；如果 较小，该阶段可能持续数年。

命题 6.6（基线平衡点的继承）。对于完整的四群体模型 (5.2)，在 $\sigma \equiv 0$ 且所有参数均为正的条件下，每个平衡点都满足 $A^* = 0$。因此，完整四群体模型的平衡点恰好是基准模型 (2.1) 在不变面 $A = 0$上的平衡点。

此外，在任意此类平衡点处，雅可比矩阵均为分块上三角矩阵：

$$J_4(L^*, R^*, 0) = \begin{pmatrix} J_{\text{base}}(L^*, R^*) & * \\ 0\ \ 0 & -(\delta_L L^* + \delta_R R^* + \rho) \end{pmatrix},$$

因此，局部稳定性由基准模型继承，并额外具有一个严格为负的横向特征值 $-(\delta_L L^* + \delta_R R^* + \rho) < 0$。

证明。在任意平衡点处，$0 = A = -A(\delta_L L + \delta_R R + \rho)$。由于 δ_L，δ_R，$\rho > 0$，该系数严格为正，因此 $A^* = 0$。代入 $A = 0$ 后，5.2）恰好化为基准方程 2.1）。分块上三角雅可比矩阵可通过直接求导得到。 □

命题 6.7（脱离群体的指数衰减）。对于冲击后自治系统 (5.2) 中满足 $\sigma \equiv 0$，

$$A(t) = A(0) \exp\left(- \int_0^t (\delta_L L(s) + \delta_R R(s) + \rho)\, ds \right) \le A(0) e^{-\rho t}.$$

特别地，$A(t) \to 0$ 随 $t \to \infty$ 指数衰减。

证明。该方程

$$\dot{A} = -(\delta_L L + \delta_R R + \rho) A$$

是标量且可分离的。从 0 积分到 t 即可得到精确公式。由于 $\delta_L L + \delta_R R + \rho \ge \rho > 0$，指数界立即成立。 □

定理 6.8（完整非对称四群体模型的全局动力学）。考虑冲击后自治系统 (5.2) 其中 $\sigma \equiv 0$。定义

$$K := \begin{pmatrix} \alpha_L & \gamma_{RL} \\ \gamma_{LR} & \alpha_R \end{pmatrix}, \qquad M := \begin{pmatrix} \mu_L & 0 \\ 0 & \mu_R \end{pmatrix},$$

并令

$$\mathcal{R}_{\rm rad} := \lambda_{\rm PF}(M^{-1}K).$$

则：

(i) 若 $\mathcal{R}_{\rm rad} \le 1$，仅中间派平衡点 $E_0 = (L, R, A) = (0, 0, 0)$ 在 $\mathcal{T}$ 上全局渐近稳定。*(ii)* 若 $\mathcal{R}_{\rm rad} > 1$，令 $E_1 = (L^*, R^*, 0)$ 为定理*6.10(ii)* 中唯一的激进化平衡点。无激进派轴

$$\Gamma := \{(L, R, A) \in \mathcal{T} : \ L = R = 0\}$$

是正向不变的，且其上每条轨迹都收敛于 E_0。对于 $\mathcal{T} \setminus \Gamma$ 中的每个初始条件，均有

$$(L(t), R(t), A(t)) \to E_1 \qquad (t \to \infty).$$

证明。记 $x = (L, R)^\top$ 并

$$D := \begin{pmatrix} \delta_L & 0 \\ 0 & \delta_R \end{pmatrix}.$$

利用 $C = 1 - L - R - A$，(L, R)-子系统可精确写为

$$\dot{x} = \big[(1 - A)K + AD - M\big]x - (L + R)Kx = (K - M)x + A(D - K)x - (L + R)Kx.$$

部分 (i)。令 $q \gg 0$ 为不可约梅茨勒矩阵 $K - M$ 的正左佩龙特征向量，并将其归一化，使得

$$q^\top (K - M) = s_0 q^\top, \qquad s_0 := s(K - M) \le 0.$$

定义

$$V(x) := q^\top x.$$

取

$$\eta > \max\left\{0, \ \frac{(q^\top (D - K))_1}{\delta_L}, \ \frac{(q^\top (D - K))_2}{\delta_R}\right\},$$

并令

$$W(L, R, A) := V(x) + \eta A.$$

沿轨迹求导可得

$$\begin{aligned} \dot{W} &= s_0 V + A\, q^\top (D - K)x - (L + R)\, q^\top Kx - \eta(\delta_L L + \delta_R R + \rho)A \\ &= s_0 V - (L + R)\, q^\top Kx - \eta\rho A \\ &\quad + A\Big(\big[(q^\top (D - K))_1 - \eta\delta_L\big]L + \big[(q^\top (D - K))_2 - \eta\delta_R\big]R\Big). \end{aligned}$$

根据 η 的构造，最后一行非正。由于 $s_0 \le 0$、$q \gg 0$ 和 K 的各项均严格为正，因此我们得到

$$\dot{W} < 0 \qquad \text{for every } (L, R, A) \ne (0, 0, 0).$$

因此， W 是紧正向不变集 $\mathcal{T}$ 上的严格李雅普诺夫函数，且 E_0 是全局渐近稳定的。

第 (ii) 部分。在轴 Γ 上，有 $L = R = 0$，因此

$$\dot{A} = -\rho A,$$

因此， Γ 是正向不变的，且其上的每条轨迹都收敛到 E_0。

现在令初始条件位于 $\mathcal{T}\backslash\Gamma$。根据解的唯一性以及 Γ的不变性，对于所有 $t \geq 0$, 都有 $x(t) \neq 0$，因此对于所有 $t \geq 0$，都有 $V(t) > 0$。由于 $\mathcal{R}_{\rm rad} > 1$，谱界

$$s_0 := s(K - M) > 0.$$

根据命题 6.7， $A(t) \to 0$ 指数地。

定义

$$\kappa := \max_{i=1,2} \frac{|(q^\top (D-K))_i|}{q_i}, \qquad c_K := \max_{i=1,2} \frac{(q^\top K)_i}{q_i}, \qquad q_{\min} := \min\{q_1, q_2\}.$$

Then

$$q^\top (D-K)x \geq -\kappa\, q^\top x = -\kappa V, \qquad q^\top K x \leq c_K\, q^\top x = c_K V, \qquad L + R \leq \frac{V}{q_{\min}}.$$

代入 V 的精确恒等式，得到

$$\dot{V} \geq \left[s_0 - \kappa A(t) - \frac{c_K}{q_{\min}} V \right] V.$$

选取 $T > 0$，使得对所有 $t \geq T$， $\kappa A(t) \leq s_0/4$，并令

$$\varepsilon := \frac{s_0 q_{\min}}{4 c_K} > 0.$$

那么对所有 $t \geq T$，以及所有满足 $0 < V(t) \leq \varepsilon$ 的情形，

$$\dot{V}(t) \geq \frac{s_0}{2} V(t) > 0.$$

由此可知，存在 $T_1 \geq T$ 使得

$$V(t) \geq \varepsilon \qquad \text{for all } t \geq T_1.$$

事实上，若对所有充分大的 t， $V(t) \leq \varepsilon$，则上述微分不等式会导致指数增长；而从 $V = \varepsilon$ 到 $V < \varepsilon$ 的任何穿越都不可能发生，因为当 $t \geq T$ 时， $V > 0$ 在边界 $V = \varepsilon$ 上。

因此，任何始于 $\mathcal{T} \setminus \Gamma$ 的轨迹的 ω-极限集都包含于

$$\Sigma_2^\varepsilon := \{(L, R, 0) \in \mathcal{T} : \ q^\top (L, R)^\top \geq \varepsilon\} \subset \Sigma_2 \setminus \{E_0\},$$

其中

$$\Sigma_2 := \{(L, R, 0) \in \mathcal{T}\}$$

是基线面。根据命题 6.7，有 $A(t) \to 0$ 指数地，因此每个ω-极限点都满足 $A = 0$。由于完整的冲击后系统是自治的，且其在不变面 $A = 0$ 上的限制恰好与基线流（2.1）一致，因此，轨迹在 ω中的每个 $\mathcal{T} \setminus \Gamma$ -极限集都是基线的一个紧不变子集

面 Σ_2。由于它包含于 $\Sigma_2^\varepsilon \subset \Sigma_2 \setminus \{E_0\}$，定理 3.12 意味着这个$\omega$-极限集必定是 $\{E_1\}$。

根据定理 3.12，平衡点 E_1 对于 $\Sigma_2 \setminus \{E_0\}$上的基线流是全局渐近稳定的。由于每个 ω-极限集都是Σ_2^ε的紧不变子集，根据连续性和紧性， E_1 在该集合上的吸引是一致的。因此，对于 U 的每个邻域 E_1，存在 T_U ，使得基线流ϕ_t 满足

$$\phi_t(p) \in U \qquad \text{for all } p \in \omega(L_0, R_0, A_0),\ t \geq T_U.$$

由于 ω-极限集在 ϕ_t下是不变的，我们有

$$\omega(L_0, R_0, A_0) = \phi_t\big(\omega(L_0, R_0, A_0)\big) \subset U \qquad (t \geq T_U).$$

由于 U 是任意的，

$$\omega(L_0, R_0, A_0) = \{E_1\},$$

因此 $(L(t)\ R(t)\ A(t)) \to E_1$。 □

注 6.9（与下一代阈值的关系）。量

$$\mathcal{R}_{\rm rad} := \lambda_{\rm PF}(M^{-1}K)$$

是基本再生数的政治学类比。在流行病学区室模型中，这类阈值恰好源自 [8] 和 [10] 的下一代矩阵框架：矩阵 $M^{-1}K$ 扮演下一代算子的角色， K 收集新感染（此处为招募和反应性极化）项，而 M 收集移除（此处为去激进化）项。在这里，两个激进派阵营扮演“传染性”区室的角色。因此，阈值 $\mathcal{R}_{\rm rad} = 1$ 与 $R_0 = 1$具有相同的数学地位：低于该阈值时，中间派平衡点稳定；高于该阈值时，激进派可能持续存在。

定理6.10（完整非对称四群体模型中的佩龙–弗罗贝尼乌斯结构阈值）。考虑冲击后自治系统 (5.2) 其中 $\sigma \equiv 0$且冲击后参数向量为 θ^+。定义

$$K^+ := \begin{pmatrix} \alpha_L^+ & \gamma_{RL}^+ \\ \gamma_{LR}^+ & \alpha_R^+ \end{pmatrix}, \qquad M^+ := \begin{pmatrix} \mu_L^+ & 0 \\ 0 & \mu_R^+ \end{pmatrix}, \qquad B^+ := (M^+)^{-1}K^+,$$

并令

$$\mathcal{R}_{\rm rad}^+ := \lambda_{\rm PF}(B^+).$$

那么：

(i) 仅中间派平衡点 $E_0 = (L, R, A) = (0,\ 0,\ 0)$ 局部渐近稳定当且仅当 $\mathcal{R}^+_{\text{辐射}} < 1$，在 $\mathcal{R}^+_{\text{辐射}} = 1$处为非双曲，而当 $\mathcal{R}^+_{\text{辐射}} > 1$时不稳定。*(ii)* 当且仅当 $\mathcal{R}^+_{\text{辐射}} > 1$时，存在满足 $L^* > 0$ 和 $R^* > 0$ 的非平凡平衡点。该平衡点存在时唯一，且形式为

$$(L^*, R^*, A^*) = (L^*, R^*, 0), \qquad C^* = \frac{1}{\mathcal{R}_{\rm rad}^+},$$

其中 $(L^*,\ R^*)$ 由 B^+的正佩龙特征向量确定。其局部稳定性由定理 *3.7* 的基线平衡点通过命题 *6.6*继承而来。

(iii) 在对称约化中

$$\alpha_L^+ = \alpha_R^+ = \alpha^+, \qquad \mu_L^+ = \mu_R^+ = \mu^+, \qquad \gamma_{LR}^+ = \gamma_{RL}^+ = \gamma^+,$$

则有

$$\mathcal{R}_{\text{rad}}^+ = \frac{\alpha^+ + \gamma^+}{\mu^+} = \frac{\beta^+}{\mu^+},$$

因此，完整阈值 $\mathcal{R}^+$ 辐射 $= 1$ 恰好约化为标量跨临界阈值 $\beta^+ = \mu^+$。

证明。 在 $E_0 = (0,0,0)$ 处，我们有 $C = 1$， $A = 0$，且（5.2）关于 (L, R, A) 的雅可比矩阵为

$$J_4(E_0) = \begin{pmatrix} \alpha_L^+ - \mu_L^+ & \gamma_{RL}^+ & 0 \\ \gamma_{LR}^+ & \alpha_R^+ - \mu_R^+ & 0 \\ 0 & 0 & -\rho^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K^+ - M^+ & 0 \\ 0 & -\rho^+ \end{pmatrix}.$$

因此， E_0 的局部稳定性等价于梅茨勒矩阵 $K^+ - M^+$的谱界符号。根据标准的M-矩阵准则，

$$s(K^+ - M^+) < 0 \iff \lambda_{\text{PF}}\big((M^+)^{-1}K^+\big) < 1.$$

同样，

$$s(K^+ - M^+) = 0 \iff \lambda_{\text{PF}}\big((M^+)^{-1}K^+\big) = 1,$$
$$s(K^+ - M^+) > 0 \iff \lambda_{\text{PF}}\big((M^+)^{-1}K^+\big) > 1.$$

这证明了第 (i) 部分。

第 (ii) 部分由命题6.6推出：完整四群体模型的每个平衡点都有 $A^* = 0$，因此平衡点恰好是冲击后参数集 θ^+ 对应的基线平衡点。将定理 3.7 应用于该参数集，可得存在当且仅当$\mathcal{R}^+$ 辐射 > 1，且平衡点唯一，其公式为 $C^* = 1/\mathcal{R}^+$ 辐射，并且具有局部稳定性。

第 (iii) 部分显然成立，因为在对称情形下

$$B^+ = \frac{1}{\mu^+}\begin{pmatrix} \alpha^+ & \gamma^+ \\ \gamma^+ & \alpha^+ \end{pmatrix}$$

其佩龙根为 $(\alpha^+ + \gamma^+)/\mu^+ = \beta^+/\mu^+$。 □

注 6.11（与对称冲击定理的关系）。定理6.14–7.12是在对称不变流形 $L = R$上陈述的，在该流形上，暂态冲击后动力学具有封闭形式的公式。定理 6.10 表明，其中使用的标量阈值$\beta = \mu$ 并非随意设定：它恰好是完整非对称佩龙–弗罗贝尼乌斯阈值 $\mathcal{R}^+$ 辐射 $= 1$ 的对称特例。

具体而言，结构分岔的位置由招募／反应性极化参数与去激进化参数（α_i， γ_{ij}，μ_i）之间的平衡决定，而动员与再参与参数（δ_i， ρ）则决定冲击后的短暂放大与衰减。

6.4. 稳定性分析。

命题 6.12（对称模型中平衡点的稳定性）。对于系统(6.1) 在 $\sigma \equiv 0$:

(i) 若 $\beta \le \mu$: $E_0 = (0,\ 0)$ 在 $\mathcal{F}$ 上是全局渐近稳定的；对于所有初始条件， $P(t) \to 0$ 和 $A(t) \to 0$ 。

(ii) 如果 $\beta > \mu$: 边界 $\{P = 0\}$ 是正向不变的。

- 满足 $P_0 = 0$ 的每个初始条件都满足 $P(t) \equiv 0$ 以及 $A(t) \to 0$；轨迹收敛于 E_0。

满足 $P_0 > 0$ 的每个初始条件都收敛于 $E_1 = \left(\frac{1}{2}(1-\mu/\beta)\ _0\right)$。

在此情形下， E_0 是鞍点，而 E_1 是局部渐近稳定的。

证明。 **情形 (i)**。 定义李雅普诺夫函数 $V(P,\ A) := P + A \ge 0$。利用（6.1），

$$\dot{V} = P\big[(\beta-\mu) - 2\beta P + (\delta-\beta)A\big] - (2\delta P + \rho)A = (\beta-\mu)P - 2\beta P^2 - (\beta+\delta)PA - \rho A.$$

当 $\beta \le \mu$ 时，每一项均非正，因此 $V \le 0$，且仅在 $(P,\ A) = (0,\ 0)$ 处取等号。根据 LaSalle不变性原理， E_0 全局渐近稳定。

情形 (ii)。若 $P_0 = 0$，则 $\dot{P}\big|_{P=0} = 0$，因此 $P(t) \equiv 0$，且 $\dot{A}$方程化简为 $\dot{A} = -\rho A$，从而得到 $A(t) = A_0 e^{-\rho t} \to 0$。

现在假设 $P_0 > 0$。 P方程的正性意味着，对所有 $t \ge 0$， $P(t) > 0$ 。由于

$$\dot{A} = -(2\delta P + \rho)A,$$

我们有 $A(t) \to 0$ 地指数衰减。

任取 $\eta \in (0,\ \beta-\mu)$。由于 $A(t) \to 0$，存在 $T_\eta > 0$ 使得

$$|(\delta-\beta)A(t)| \le \eta \qquad \text{for all } t \ge T_\eta.$$

因此，对所有 $t \ge T_\eta$,

$$P\big[(\beta-\mu) - \eta - 2\beta P\big] \ \le\ \dot{P}\ \le\ P\big[(\beta-\mu) + \eta - 2\beta P\big].$$

令 $z_-(t)$和 $z_+(t)$满足逻辑斯蒂比较方程

$$\dot{z}_\pm = z_\pm\big[(\beta-\mu) \pm \eta - 2\beta z_\pm\big], \qquad z_\pm(T_\eta) = P(T_\eta).$$

由标量比较,

$$z_-(t) \le P(t) \le z_+(t) \qquad \text{for all } t \ge T_\eta.$$

由于每个逻辑斯蒂方程都有一个全局吸引的正平衡点,

$$z_\pm(t) \to \frac{\beta-\mu\pm\eta}{2\beta} \qquad (t \to \infty),$$

我们得到

$$\frac{\beta-\mu-\eta}{2\beta} \le \liminf_{t\to\infty} P(t) \le \limsup_{t\to\infty} P(t) \le \frac{\beta-\mu+\eta}{2\beta}.$$

令 $\eta \to 0$ ，得到

$$P(t) \to P^* = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu}{\beta}\right).$$

又由于 $A(t) \to 0$，因此$(P(t),\ A(t)) \to E_1$。

雅可比矩阵确认了每个平衡点的类型:

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} \beta-\mu & 0 \\ 0 & -\rho \end{pmatrix}, \qquad J(E_1) = \begin{pmatrix} -(\beta-\mu) & P^*(\delta-\beta) \\ 0 & -(2\delta P^* + \rho) \end{pmatrix}.$$

在 E_0: 特征值为 $\beta-\mu > 0$ 和 $-\rho < 0$ （鞍点）。在 E_1: 两个特征值均为实数且为负，因为 $J(E_1)$ 是上三角的。因此 E_1 是稳定结点（若对角元重合，则可能为退化/非正常结点）。

□

注 6.13（激进种子要求）。 $\{P=0\}$ 的不变性意味着该模型无法从完全为零的起点产生激进派。在对称约化系统中，若 $P_0=0$ 则 $P(t)\equiv 0$，无论 A 的大小或任何结构参数偏移 $\Delta\beta$。这并非模型的缺陷，而是政治现实的反映：激进运动必须具备某种预先存在的组织核心，才能利用脱离参与群体。第7 和 8节的所有结果均隐含假定$P_0>0$；在欧洲，这一假定几乎普遍成立。

6.5. 临界冲击幅度。 现在，我们量化脉冲冲击导致激进化激增的条件。假设冲击前的状态接近 E_0： $P_0=\varepsilon\ll 1$， $A_0=\Delta$（根据跳跃条件（5.3））。

定理 6.14（临界冲击幅度）。 假设 $\beta<\mu$（制度 I：民主制稳定）且 $\delta>\beta$（非政治化动员比直接招募中间派更有效）。脉冲冲击发生后，激进派占比 P 会经历初始激增（$P>0$），当且仅当

$$\Delta>\Delta_c:=\frac{\mu-\beta}{\delta-\beta}. \tag{6.2}$$

证明。 在 P/P由（6.1）在 $(P,\ A)=(\varepsilon,\ \Delta)$ 处取值并令 $\varepsilon\to 0$:

$$\left.\frac{\dot P}{P}\right|_{\varepsilon\to 0}=(\beta-\mu)+(\delta-\beta)\Delta.$$

这为正当且仅当 $(\delta-\beta)\,\Delta>\mu-\beta$，即 $\Delta>(\mu-\beta)/(\delta-\beta)=\Delta_c$。 □

注释 6.15（精确瞬时增长判据）。对于一般的冲击后对称状态（P_0，A_0），其中 $\delta>\beta$，初始激增的精确条件为

$$\dot P(0)>0\iff A_0>A_c(P_0):=\frac{\mu-\beta+2\beta P_0}{\delta-\beta}.$$

定理 6.14 是近中间派近似 $P_0=\varepsilon\ll 1$，得出 $A_c\approx\Delta_c=(\mu-\beta)/(\delta-\beta)$。对于已经显著激进化的系统（$P_0$不小），有效阈值 $A_c(P_0)>\Delta_c$ 更高：既有激进活动会部分消耗脱离参与群体，使其无法为进一步增长提供动力。

推论 6.16（ Δ_c的性质）。临界阈值 $\Delta_c=(\mu-\beta)/(\delta-\beta)$满足:

- $\Delta_c>0$ 当且仅当 $\mu>\beta$ 且 $\delta>\beta$。
- $\Delta_c<1$ 当且仅当 $\delta>\mu$。当 $\beta<\delta\le\mu$ 时，我们有 $\Delta_c\ge 1$，这意味着没有任何可行的冲击（$\Delta\le 1$）能够触发激增——无论危机规模多大，系统都抗冲击。当 $\delta>\mu>\beta$ 时，阈值位于 (0,1)。
- 随 μ增加：更强的去激进化会提高韧性阈值。
- 对 β的依赖： $\partial\Delta_c/\partial\beta=(\mu-\delta)/(\delta-\beta)^2$ 的符号取决于 δ与 μ的大小。若 $\delta>\mu$： Δ_c 随 β 递减（既有极化会降低阈值）。若 $\delta<\mu$：在此状态下，无论 $\Delta\le 1$ 为何，系统都具有抗冲击性。
- 随 δ 递减（对于 $\delta>\mu$）：更高的激进动员效率会降低阈值。
- $\Delta_c\to 0$ 当 $\beta\to\mu^-$（当 $\delta>\mu$）：在分岔点附近，任意小的冲击都足以奏效。

证明。 所有结论均可通过对（6.2）直接求导并进行符号分析得出。条件 $\Delta_c < 1$ 等价于 $\mu - \beta < \delta - \beta$，即 $\mu < \delta$。 □

推论6.16中与分岔的接近程度，是一个众所周知的政治学观察的数学表达：已经“两极分化”的社会对外部冲击异常敏感。基准模型预测平滑、成比例的响应；四群体模型则预测具有显式公式的阈值行为。

6.6. 激进化窗口定理。

定理6.17（激进化窗口上界）。在定理*6.14* 取 $\Delta > \Delta_c$ 与 $P_0 = \varepsilon \ll 1$的条件下，考虑早期阶段，其中 P（t）保持较小。在此情形下 $\dot{A} \approx -\rho A$，从而得到 A（t）$\lesssim \Delta e^{-\rho t}$ （此为上界，因为完整衰减率 $2\delta P + \rho \geq \rho$ 超过 ρ，一旦 $P > 0$）。

瞬时激进化增长率 $\dot{P}/P$，通过将 A（t）替换为其上界 $\Delta e^{-\rho t}$来近似，在估计窗口持续时间处改变符号

$$t^* = \frac{1}{\rho} \ln\left(\frac{\Delta}{\Delta_c}\right) = \frac{1}{\rho} \ln\left(\frac{(\delta - \beta)\,\Delta}{\mu - \beta}\right). \tag{6.3}$$

实际的激增持续时间$\hat{}t$ 满足$\hat{}t \leq t^*$：用其上界替换 $A(t)$ 会高估可用的动员燃料。对于 $P_0 \approx 0$，界 t^* 是渐近紧的。

证明。 由于对所有 $P \geq 0$， $2\delta P(t) + \rho \geq \rho$，因此我们有

$$A(t) \leq \Delta e^{-\rho t}.$$

精确的瞬时增长率为

$$\frac{\dot{P}}{P} = (\beta - \mu) - 2\beta P + (\delta - \beta)A(t).$$

因此

$$\frac{\dot{P}}{P} \leq (\beta - \mu) + (\delta - \beta)A(t) \leq (\beta - \mu) + (\delta - \beta)\Delta e^{-\rho t}.$$

右侧在所述的 t^*值处改变符号。因此，真实的激增持续时间$\hat{}t$ 满足$\hat{}t \leq t^*$。

对于 $P_0 = \varepsilon \ll 1$，早期阶段近似 $P(t) \approx 0$ 使修正项 $-2\beta P$ 可以忽略不计，而 $A(t) \approx \Delta e^{-\rho t}$。在该范围内， t^* 作为真实符号变化时间的估计是渐近紧的。 □

推论 6.18（影响窗口持续时间的政策杠杆）。窗口界限 t^* 在(6.3) 对模型参数的依赖如下。记 $t^* = \rho^{-1}\ln(\Delta/\Delta_c)$：

(i) 重新参与率 ρ：以线性方式进入，作为 $1/\rho$； ρ 加倍会使 t^*减半。这是最直接的制度杠杆：对公民再参与的投入会按比例缩短窗口。***(ii)*** 冲击比 Δ/Δ_c：以对数方式进入；降低 Δ 或提高 Δ_c 的边际收益递减。***(iii)*** 极化参数 β：通过 Δ_c 进入，形式为比值$(\delta-\beta)/(\mu-\beta)$。当 $\delta > \mu$时， $\beta \to \mu$ 会使 $\Delta_c \to 0$ 且 $t^* \to \infty$：接近分岔点的社会，其激进化窗口可以任意长。因此，降低β 既会提高 Δ_c ，也会缩短 t^*，使其成为能够同时作用于阈值和窗口持续时间的杠杆。

7. 分岔触发与累积冲击。

7.1. 分岔触发定理。

定理7.1（分岔触发）。考虑一个初始处于制度 I、参数为 $\beta_0 < \mu$ 且具有非零激进派初始种子 $P(t_0^-) > 0$ （等价地，在完整模型中为$L(t_0^-) + R(t_0^-) > 0$）的系统。在时间 t_0 施加振幅为$(\Delta, \Delta\beta)$ 的结构性冲击，当且仅当满足以下条件时，才会永久改变长期均衡

$$\beta_0 + \Delta\beta > \mu. \tag{7.1}$$

当 (7.1) 成立时，冲击后的长期中间派份额为

$$C^\infty = \frac{\mu}{\beta_0 + \Delta\beta} < 1, \tag{7.2}$$

且该值与冲击的状态分量 Δ 无关。

若 $P(t_0^-) = 0$，则 $P(t) \equiv 0$ 对所有 $t > t_0$ 均成立，无论 $\Delta\beta$如何，且系统收敛到 E_0（完全中间派恢复）。

证明。 情形 $P(t_0^-) = 0$ 由命题 6.12(ii) 处理： $P \equiv 0$ 保持不变，系统返回到 E_0。

对于 $P(t_0^-) > 0$: 状态冲击保留 $P(t_0^+) = P(t_0^-) > 0$（只有 C和 A受到脉冲的影响）。冲击后，系统在参数 (β', μ) 下演化， $\beta' = \beta_0 + \Delta\beta$从具有 $P(t_0^+) > 0$ 的状态开始。根据命题 6.12(ii)，如果 $\beta' \le \mu$ ，长期吸引子为 E_0 ；如果 $\beta' > \mu$，则为具有 $C^* = \mu/\beta'$ 的 E_1 。条件 (7.1) 正是$\beta' > \mu$。公式 (7.2) 可由推论 3.5 得出，其中用 β'替换 β 。由于C^∞ 仅取决于 β' 和 μ，因此它独立于 Δ。 □

注释 7.2（基本分解）。定理 7.1 将任意冲击清晰地分解为两个各自会产生影响的组成部分：**统计**

计组成部分 **t Δ:** d确定 i定义了何种 heth生激增（ Th理。）的14 d h其持续时间（定理 6.17）。不会决定长期均衡。这正是危机管理的对象。

结构分量 $\Delta\beta$**:** 决定长期均衡是否会永久发生转变。 Δ的幅度与这一判断无关。这正是结构韧性的对象。

一个社会可以成功管理危机（限制 Δ），同时未能维持结构韧性（允许 $\Delta\beta > 0$），最终仍会达到一个永久更加激进化的平衡点。

推论7.3（结构转变的不可逆性）。在定理 *7.1* 的条件下，若 $\beta_0 + \Delta\beta > \mu$，则回到冲击前中间派份额 $C^*_{\text{pre}} = 1$ （或任何高于 $C^\infty = \mu/$（β_0+$\Delta\beta$）的中间派份额）在自治动力学下是不可能的。恢复需要结构性反向冲击：持续降低 $\alpha+\gamma$，从而逆转参数偏移。

证明。 根据命题6.12(ii)，每条 $P_0 > 0$ 轨迹都收敛到 E_1 ，其中间派份额为 μ/β'。由于 $\beta' = \beta_0 + \Delta\beta > \mu$ 是固定参数，因此吸引子唯一且独立于初始条件。 □

备注 7.4（不参与群体的作用）。不参与群体$A(t)$在分析中发挥两种不同的作用。首先，它刻画危机引发的暂时性退缩，这种退缩会放大激进激增，并决定窗口持续时间 t^*。其次，它通过耗减率 δ 和 ρ调节有效阈值Δ_c。然而， $A(t)$本身并不会引发不可逆的长期变化：由于

$A^* = 0$ 在每个平衡点（定理6.4）处，所有渐近动力学都位于面$A = 0$ 上，并由基线参数所支配。不可逆的长期激进化完全源于永久性结构变化，这些变化发生在 β，并推动系统跨越佩龙–弗罗贝尼乌斯阈值 $\mathcal{R}_{\mathrm{rad}} = 1$。

备注 7.5（通过佩龙–弗罗贝尼乌斯进行非对称推广）。定理7.1是在对称不变流形 $L = R = P$上表述的。在完整非对称四群体模型中，跨临界条件 $\beta = \mu$ 的自然推广是交叉

$$\lambda_{\mathrm{PF}}\big(M_{\mathrm{post}}^{-1} K_{\mathrm{post}}\big) = 1,$$

其中 M_{post} 和 K_{post} 分别是冲击后的去激进化矩阵和招募矩阵（如定理 6.10所述）。当该特征值超过 1 时，冲击后的基线具有一个内部平衡点，系统不再回到完全中间主义状态。因此，非对称瞬态阈值是谱性的，而非标量性的；定理 7.6 对此作出了精确说明，而命题7.10 则为相应的增长窗口提供了一个比较界。

定理 7.6（中间派状态附近的非对称临界冲击阈值）。设

$$K = \begin{pmatrix} \alpha_L & \gamma_{RL} \\ \gamma_{LR} & \alpha_R \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} \mu_L & 0 \\ 0 & \mu_R \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} \delta_L & 0 \\ 0 & \delta_R \end{pmatrix},$$

并对 $\Delta \in [0,1]$ 定义，

$$\Phi(\Delta) := \lambda_{\mathrm{PF}}\Big(M^{-1}\big((1-\Delta)K + \Delta D\big)\Big).$$

假设基线是亚临界的：$\Phi(0) = \lambda_{\mathrm{PF}}(M^{-1}K) < 1$。

则有以下结论。

(i) 若 $\Phi(1) = \lambda_{\mathrm{PF}}(M^{-1}D) = \max\{\delta_L/\mu_L, \delta_R/\mu_R\} \le 1$，则对所有$\Delta \in [0,1]$，$\Phi(\Delta) < 1$ 均成立。因此，不存在可行的纯状态冲击能够引发初始的近中间主义激进增长。

(ii) 若 $\Phi(1) > 1$，则存在唯一的 $\Delta_c^{\mathrm{asym}} \in (0,\ 1)$ 使得

$$\Phi(\Delta_c^{\mathrm{asym}}) = 1.$$

考虑从近中间派冲击后状态 $x(t_0^+) = (L, R)^\top = \varepsilon v$ 出发、振幅为 Δ 的纯状态冲击，其中 $v \gg 0$ 且 $0 < \varepsilon \ll 1$，并令

$$G(\Delta) := (1-\Delta)K + \Delta D - M.$$

若 $q(\Delta) \gg 0$ 是梅茨勒矩阵 $G(\Delta)$的正左佩龙特征向量，则加权激进质量 $V_\Delta(x) := q(\Delta)^\top x$ 满足

$$\dot{V}_\Delta(t_0^+) = s\big(G(\Delta)\big)\, V_\Delta(t_0^+) + O(\varepsilon^2),$$

因此，当 ε 足够小时，

$$\dot{V}_\Delta(t_0^+) \gtrless 0 \iff s\big(G(\Delta)\big) \gtrless 0 \iff \Phi(\Delta) \gtrless 1 \iff \Delta \gtrless \Delta_c^{\mathrm{asym}}.$$

在对称情形下，该阈值恰好化简为

$$\Delta_c^{\mathrm{asym}} = \frac{\mu - \beta}{\delta - \beta}.$$

证明。 对于近中间派冲击后状态，有

$$\dot{x} = G(\Delta)\, x + O(\varepsilon^2), \qquad G(\Delta) = (1-\Delta)K + \Delta D - M.$$

若 $q(\Delta) \gg 0$是不可约梅茨勒矩阵$G(\Delta)$的正左佩龙特征向量，则

$$\dot{V}_\Delta(t_0^+) = q(\Delta)^\top \dot{x} = s\big(G(\Delta)\big)\, V_\Delta(t_0^+) + O(\varepsilon^2),$$

一旦确立了 $\Phi(\Delta)$ 的阈值结构，即可据此证明符号判据。

根据 M-矩阵准则，

$$s\big(G(\Delta)\big) \gtrless 0 \iff \lambda_{\mathrm{PF}}\Big(M^{-1}\big((1-\Delta)K + \Delta D\big)\Big) \gtrless 1,$$

因此，瞬时线性化增长的符号由 $\Phi(\Delta) - 1$ 决定。记

$$a_L(\Delta) = \frac{(1-\Delta)\alpha_L + \Delta\delta_L}{\mu_L}, \quad a_R(\Delta) = \frac{(1-\Delta)\alpha_R + \Delta\delta_R}{\mu_R}, \quad b_0 = \frac{\gamma_{RL}}{\mu_L}, \quad c_0 = \frac{\gamma_{LR}}{\mu_R}.$$

Then

$$\Phi(\Delta) = \frac{1}{2}\Big(a_L(\Delta) + a_R(\Delta) + \sqrt{(a_L(\Delta) - a_R(\Delta))^2 + 4b_0c_0(1-\Delta)^2}\Big).$$

平方根项是仿射向量的欧几里得范数

$$\Big(a_L(\Delta) - a_R(\Delta),\, 2\sqrt{b_0c_0}\,(1-\Delta)\Big),$$

he.....是 Δ 的凸函数。因此， Φ 在 $[0,1]$ 上连续且为凸函数。

如果 $\Phi(1) \le 1$，那么由凸性可知

$$\Phi(\Delta) \le (1-\Delta)\Phi(0) + \Delta\Phi(1) < 1 \qquad (0 \le \Delta < 1),$$

并且 $\Phi(1) \le 1$，从而证明了 (i) 部分。

如果 $\Phi(1) > 1$，由连续性可知， $\Phi(\Delta) = 1$ 在 $(0,\ 1)$ 中至少有一个根。由于凸函数的次水平集 $\{\Delta \in [0,1] :\ \Phi(\Delta) \le 1\}$ 是一个区间，且 $\Phi(0) < 1 < \Phi(1)$，该根唯一。对称约化显然成立，因为

$$\Phi(\Delta) = \frac{(1-\Delta)\beta + \Delta\delta}{\mu}$$

当 $\alpha_L = \alpha_R = \alpha$、 $\gamma_{LR} = \gamma_{RL} = \gamma$、 $\mu_L = \mu_R = \mu$ 和 $\delta_L = \delta_R = \delta$ 时。 □

注 7.7. 与对称标量公式不同， $\Phi(\Delta)$ 不一定随 Δ 单调变化：脱离程度增加，既会强化对角动员项 $\delta_i A$，也会通过因子 $(1-\Delta)$ 削弱中间派介导的招募项。因此，Δ_c^{asym}的唯一性源于凸性，而非单调性。

注 7.8（Δ_c^{asym}的二次方程）。记

$$a_i := \alpha_i - \mu_i, \qquad e_i := \delta_i - \alpha_i, \qquad g := \gamma_{RL}\gamma_{LR},$$

因此

$$G(\Delta) = \begin{pmatrix} a_L + e_L\Delta & (1-\Delta)\gamma_{RL} \\ (1-\Delta)\gamma_{LR} & a_R + e_R\Delta \end{pmatrix}.$$

在阈值处，有 $s(G(\Delta_c^{\mathrm{asym}}))=0$，因此

$$\det G(\Delta_c^{\mathrm{asym}})=0.$$

这得出二次方程

$$q_2\,\Delta^2+q_1\,\Delta+q_0=0, \tag{7.3}$$

其系数为

$$q_2:=e_Le_R-g,\qquad q_1:=a_Le_R+a_Re_L+2g,\qquad q_0:=a_La_R-g=\det(K-M)>0.$$

等价地，

$$(a_L+e_L\Delta)(a_R+e_R\Delta)=g(1-\Delta)^2.$$

临界阈值 Δ_c^{asym}是 大于 0的第一个根；等价地，它是 (7.3) 在 (0,1) 中满足以下条件的唯一根

$$\operatorname{tr}G(\Delta)\le 0.$$

如果 $q_2\neq 0$，该根为

$$\Delta_c^{\mathrm{asym}}=\frac{-q_1-\sqrt{q_1^2-4q_2q_0}}{2q_2}, \tag{7.4}$$

而当 $q_2=0$ 时，它简化为

$$\Delta_c^{\mathrm{asym}}=-\frac{q_0}{q_1}.$$

可能还存在第二个代数根（甚至可能位于 (0，1) 内）；若存在，它对应的是非佩龙特征值变为零，而非不稳定性阈值。

在对称情形 ($a_L=a_R=a$, $e_L=e_R=e$, $\gamma_{LR}=\gamma_{RL}=\gamma$) 中，变为 (7.3)

$$(a+e\Delta)^2=\gamma^2(1-\Delta)^2.$$

相关分支为

$$a+e\Delta=-\gamma(1-\Delta),$$

由此得到

$$\Delta_c^{\mathrm{asym}}=\frac{\mu-\beta}{\delta-\beta}=\Delta_c,$$

从而精确还原对称标量公式。

注记7.9（一个玩具非对称计算）。例如，由

$$(\alpha_L,\alpha_R,\gamma_{RL},\gamma_{LR},\mu_L,\mu_R,\delta_L,\delta_R)=(0.08,0.14,0.10,0.06,0.30,0.28,0.55,0.60),$$

公式（7.4）给出

$$\Delta_c^{\mathrm{asym}}\approx 0.2347.$$

因此，带有 $\Delta=0.20$ 的纯状态冲击是亚临界的，而 $\Delta=0.25$ 在定理 7.6的意义下是超临界的。

命题 7.10（非对称佩龙向量窗口界）。设

$$x(t) := (L(t), R(t))^{\top}, \qquad s_0 := s(K-M) < 0,$$

并令 $q \gg 0$ 为梅茨勒矩阵 $K-M$的一个正左佩龙特征向量，其归一化方式任意，只需满足

$$q^{\top}(K-M) = s_0 q^{\top}.$$

定义加权激进质量 $V(t) := q^{\top}x(t)$，以及比较系数

$$\bar{\kappa} := \max_{i=1,2} \frac{(q^{\top}(D-K))_i}{q_i}.$$

对于完整非对称四群体模型 (5.2) 中$\sigma \equiv 0$ 的每条冲击后轨迹，若该轨迹源于在 $t=0$ 时施加的振幅为 Δ 的纯状态冲击，且冲击作用于满足$A(0^-) = 0$的状态，则有

$$\dot{V}(t) \le \big[s_0 + \bar{\kappa}A(t)\big]V(t) \le \big[s_0 + \bar{\kappa}\Delta e^{-\rho t}\big]V(t).$$

因此：

(i) 若 $\bar{\kappa} \le 0$，则 $V(t)$ 对所有 $t \ge 0$均严格递减。

(ii) 若 $\bar{\kappa} > 0$，定义

$$\Delta_q := -\frac{s_0}{\bar{\kappa}}, \qquad t_q^* := \frac{1}{\rho}\ln\!\left(\frac{\Delta}{\Delta_q}\right) \quad (\Delta > \Delta_q).$$

那么 $\Delta \le \Delta_q$ 意味着 $V(t)$ 对所有 $t \ge 0$ 都是非递增的。若 $\Delta > \Delta_q$，则每个 V 递增的区间都包含于

$$0 \le t < t_q^*.$$

在对称情形下，可取 $q = (1, 1)^{\top}$，此时 $s_0 = \beta - \mu$、$\bar{\kappa} = \delta - \beta$，因此

$$\Delta_q = \frac{\mu - \beta}{\delta - \beta} = \Delta_c, \qquad t_q^* = \frac{1}{\rho}\ln\!\left(\frac{\Delta}{\Delta_c}\right) = t^*.$$

证明。利用 $C = 1 - L - R - A$，$(L,\ R)$-子系统（5.2）可精确写为

$$\dot{x} = \big[(1-A)K + AD - M\big]x - (L+R)Kx.$$

因此

$$\dot{V} = q^{\top}\dot{x} = s_0 V + A\, q^{\top}(D-K)x - (L+R)\, q^{\top}Kx.$$

由于 $x \ge 0$、$q \gg 0$，且 K的各项均非负，因此（$L+R$）$q^{\top}Kx \ge 0$。根据 $\bar{\kappa}$的定义，

$$q^{\top}(D-K)x \le \bar{\kappa}\, q^{\top}x = \bar{\kappa}V.$$

因此

$$\dot{V} \le [s_0 + \bar{\kappa}A(t)]V.$$

此外，

$$\dot{A} = -(\delta_L L + \delta_R R + \rho)A \le -\rho A,$$

so

$$A(t) \le A(0)e^{-\rho t}.$$

根据脉冲跳跃条件（5.3），其中 $A\left(0^{-}\right)=0$,

$$A(0)=\Delta C(0^{-})\leq\Delta.$$

因此

$$A(t)\leq\Delta e^{-\rho t}.$$

结合这两个不等式即可得到所述比较界。

若 $\bar{\kappa}\leq 0$，则对所有 t， $s_0+\bar{\kappa}A(t)<0$，因此 V严格递减。若 $\bar{\kappa}>0$ 且 $\Delta\leq\Delta_q$，则对所有 t， $s_0+\bar{\kappa}\Delta e^{-\rho t}\leq s_0+\bar{\kappa}\Delta\leq 0$，因此 V单调不增。最后，若 $\Delta>\Delta_q$，则当 $\Delta e^{-\rho t}<\Delta_q$ 时比较系数变为负值，即当 $t>t_q^*$ 时。因此， V在时间 t_q^*之后不能增加。对称约化可通过直接代入得到。 □

7.2. 累积冲击。自2008年以来的欧洲经验并非由一次重大冲击所主导，而是经历了一系列不同的危机。

定义7.11（冲击序列）。冲击序列是在时间 $t_1<t_2<\cdots<t_n$ 发生的一组混合冲击，其状态分量为 Δ_1、.....、 Δ_n，结构分量为 $\Delta\beta_1$、.....、 $\Delta\beta_n\geq 0$。经过 k 次冲击后的累积结构偏移为

$$B_k:=\beta_0+\sum_{j=1}^{k}\Delta\beta_j.$$

定理7.12（累积冲击定理）。考虑一个处于制度 I ($\beta_0<\mu$) 的系统，其激进派初始种子非零 ($P\left(t_k^{+}\right)>0$ 每次冲击之后)。设 $\{(\Delta_k,\Delta\beta_k)\}$为一个冲击序列，且 $\Delta\beta_k\geq 0$，并令 k^* 为满足 $B_{k^*}>\mu$ 的第一个指标。那么：

(i) 对所有 $k<k^*$：每次冲击后的长期中间派份额为 $C_k^{\infty}=1$。此外，若 $\delta>B_k$，则只有在以下情况下才可能出现近中间派瞬态激增

$$\Delta_k>\Delta_c^{(k)},\qquad\Delta_c^{(k)}=\frac{\mu-B_k}{\delta-B_k},$$

其中，激增阈值按冲击后参数值B_k计算。若 $\delta\leq B_k$，则定理*6.14* 中的近中间派阈值公式不适用于这种情况。

(ii) 在 $k=k^*$ 时：系统跨越分岔阈值，并永久转变为体制*II*。长期中间派份额为 $C_{k^*}^{\infty}=\mu/B_{k^*}<1$。

（*iii*）每次后续冲击均满足

$$C_k^{\infty}=\frac{\mu}{B_k}\leq C_{k-1}^{\infty},$$

当且仅当 $\Delta\beta_k>0$ 时，不等式严格成立。

（*iv*）阈值穿越指标 k^* 满足

$$k^*=\min\left\{k:\sum_{j=1}^{k}\Delta\beta_j>\mu-\beta_0\right\}. \tag{7.5}$$

证明。 （i）–（iii）由定理 7.1 反复应用可得：每次冲击后，冲击后参数为 B_k，长期吸引子为 E_0 若 $B_k<\mu$，且 $E_1(B_k)$若 $B_k>\mu$。 （iv）是对 k^* 定义的重述。 □

推论 7.13（阶梯式动力学）。 在定理 *7.12* 的条件下，发生 k^*跨越阈值的冲击后，后续每次满足 $\Delta\beta_k > 0$ 的冲击都会严格降低长期中间派份额： $C_k^\infty < C_{k-1}^\infty$。若所有后续结构成分均满足 $\Delta\beta_k > 0$，则序列 $C_{k^*}^\infty > C_{k^*+1}^\infty > \cdots$ 严格递减。这就是第 8 节针对德国和法国定性讨论的 阶梯模式。

证明。 由定理 7.12(iii) 可直接得出： $\Delta\beta_k > 0$ 意味着 $B_k > B_{k-1}$，因此 $\mu/B_k < \mu/B_{k-1}$。 □

8. 德国和法国的定性例证。 本节仅作示例，不识别冲击，也不估计参数。德国的情况在定性上与一系列混合冲击和累积性结构转变相符：德国选择党的支持率从4.7%（2013年）升至12.6%（2017年），随后降至10.3%（2021年），再升至20.8%（2025年）；这一模式与危机后激进派基准线不断抬升时出现的短暂波动相符 [4, 11]。2021年下降并非异常：推论 7.13描述的是长期基准线，而非单调变化的逐次选举观测值。对法国的分析则更为谨慎：由于总统选举、立法选举和欧洲选举在制度上各不相同，彼此不可直接比较，因此该情形仅用于说明非对称情形，即国民联盟和不屈法国阵营均有所壮大，而主流中间派则日渐式微 [19]。本文不声称进行了计量经济学识别。

上图中的数值是第二票或已投选票的得票率百分比。下方第 8.1 节采用了不同的归一化方式： $V = （L + R） \times$ 投票率以合资格选民的比例表示，因此 $L + R + C + A = 1$ 严格成立。

8.1. 可观测代理指标与参数合理性。

与可观测数据的对应关系。守恒定律 $L + R + C + A = 1$ 要求四个区室均以同一参照人口的比例表示。我们采用合资格选民（所有登记选民）：

$$\begin{aligned} R(t) &= \big(\text{AfD Zweitstimmen}\%\big) \times \text{turnout}, \\ L(t) &= \big(\text{far-left Zweitstimmen}\%\big) \times \text{turnout}, \\ C(t) &= \big(\text{all remaining parties}\big) \times \text{turnout}, \\ A(t) &= 1 - \text{turnout}. \end{aligned} \tag{8.1}$$

这里，“极左翼”在2013年–2021年指左翼党，在2025年则指左翼党与莎拉·瓦根克内希特联盟。所有未被归入 L 或 R的政党——基民盟/基社盟、德国社会民主党、德国自由民主党、绿党及小党——均被纳入 C。按构造，在每次观测中均有 $L+R+C+A=1$，因此守恒定律得到严格满足。关键在于， $A(t)$ $=1$ –投票率可直接从官方选举记录中观测到，无需构造任何代理变量。

表 8.1：2013–2025年联邦议院选举，按照映射（8.1）表示为合资格选民的比例。$V = L + R$ 为激进派总占比。来源：德国联邦选举主任 [4]。

Year	$V = L + R$	C （主流 +剩余）	A （未投票者）	$V + C + A$
2013	0.095	0.620	0.285	1.000
2017	0.166	0.596	0.238	1.000
2021	0.116	0.650	0.234	1.000
2025	0.246	0.584	0.170	1.000

背景与危机引发的脱离。该模型预测，在每个平衡点都有 $A^* = 0$ （定理 6.4），这意味着危机引发的脱离从长期来看会逐渐消散。原始可观测的 $A = 1$ –投票率混合了长期不投票这一结构性背景，以及模型所追踪的危机引发的超额部分。2025年的数值 A (2025) $= 0.170$ 是德国统一以来德国联邦议院系列数据中的最低值，很可能代表结构性背景；它对应于一场高投票率选举，在该选举中，此前的脱离很大程度上被动员进激进派阵营。取 $A_{\mathrm{bg}} \approx 0.170$后，危机引发的超额部分 $A_{\mathrm{exc}} = A - A_{\mathrm{bg}}$ 读数为：2013年0.115、2017年0.068、2021年0.064，以及2025年0.000；该序列单调下降至零，与 $A^* = 0$一致。 A 从2021年的0.234降至2025年的0.170，与 V单个时期最大幅度的增长相吻合：其数值从0.116升至0.246，这正是 $A \to L \cup R$ 机制的动员特征。

示例性参数值。 我们给出一组参数值，使模型的均衡下限与数据相符。固定 $\mu = 0.22$ 和 $\beta_0 = 0.18$，它们对应于一个与2013年以前的德国政党体系相符的次临界基线（$\mathcal{R}_{\mathrm{rad}} = 0.82 < 1$； $V_0^* = 0$）；在这一时期，自德国统一以来还没有极右翼政党进入德国联邦议院。2015年移民危机之后，设

$$\beta_1 = 0.249, \qquad \mathcal{R}_{\mathrm{rad}} = \tfrac{\beta_1}{\mu} = 1.13 > 1, \qquad V_1^* = 1 - \tfrac{\mu}{\beta_1} = 0.1165. \tag{8.2}$$

2022年能源危机和生活成本危机之后，设

$$\beta_2 = 0.2917, \qquad \mathcal{R}_{\mathrm{rad}} = 1.33 > 1, \qquad V_2^* = 1 - \tfrac{\mu}{\beta_2} = 0.2458. \tag{8.3}$$

这两次结构性转变分别发生在 $\Delta\beta_1 = \beta_1 - \beta_0 = 0.069$ （2015年）和 $\Delta\beta_2 = \beta_2 - \beta_1 = 0.043$（2022）。

备注 8.1（不主张循环论证）。(β_1 和 β_2 在（8.2）–（8.3）中的取值是通过要求 $V_1^* \approx V$（2021）和 $V_2^* \approx V$（2025年）来定义的。这两个等式不具有独立的预测内容。模型具有非平凡经验内容的部分仅由下文列出的三项结构性预测构成；参数的选取并未使用其中任何一项。

三项定性预测。 在校准（8.2）–（8.3下，模型提出了三项可直接与表8.1对照检验的结构性预测。

（P1）长期下限呈阶梯式上升。 推论7.13 预测冲击后的均衡严格递增：$V_0^* = 0 < V_1^* < V_2^*$。数据中相关的比较对象是每次冲击过去很久之后举行的选举：2021年（冲击1发生六年后）和2025年（冲击2发生三年后）。观 V测序列（2021年） $= 0.116 <$ V（2025年） $= 0.246$ 与阶梯式预测一致。

（P2）瞬态过冲高于新下限。 定理6.14 预测冲击1发生后，系统会立即过冲至 $V_1^* = 0.116$ 之上，然后回归该值。2017年观测值 V（2017年） $= 0.166 > V_1^* = 0.116$ 与系统处于瞬态过冲阶段相符；到2021年时，$V = 0.116 \approx V_1^*$。因此，相较于2017年，2021年的下降是模型预测，并非需要另行解释的异常。

(P3) 的联动变化和 A。模型预测，随着危机诱发的群体被吸纳进激进派阵营（$A \to L \cup R$）， V与 A的变化方向相反。在数据中， A 从2013年的0.285单调下降至2025年的0.170，而 V 则从0.095上升至0.246。2021年至2025年间最大的单期联动变化——A下降0.064， V 上升0.130——与 δ动员机制会加剧2022年后激进派激增的观点一致。

我们强调，这是一种风格化校准：参数值的选择旨在再现定性的机制结构（2015年前为亚临界，2015年后为超临界，2022年后呈阶梯式变化），而非最小化任何统计准则。严谨的估计程序需要概率观测模型，这超出了本文的研究范围。

9. 四群体模型的数值示例。所有模拟均使用`solve_ivp` 函数（RK45 求解器），来自`SciPy` [24]相对容差为 10^{-9}，绝对容差为 10^{-12}。

9.1. 三种动态机制。图9.1展示了第6节通过分析确定的三种性质截然不同的冲击后轨迹，使用参数$\beta_0 = 0.30$、 $\mu = 0.40$、 $\delta = 0.70$、 $\rho = 0.10$，得到 $\Delta_c = 0.25$。

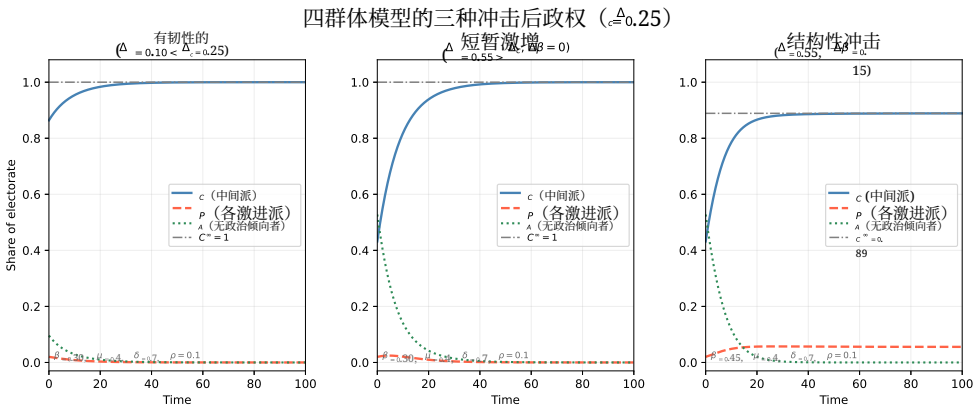


图 9.1：四群体模型的三种冲击机制。**左：**小冲击（$\Delta = 0.10 < \Delta_c = 0.25$）：没有激增，并单调恢复至 $C^\infty = 1$。**中：**大型状态冲击（$\Delta = 0.55 > \Delta_c$、 $\Delta\beta = 0$）：短暂民粹主义激增，随后完全恢复。非政治群体 A （虚线）推动激增，并在时间尺度$1/\rho = 10$上逐渐耗尽。**右：**结构性冲击（$\Delta = 0.55$、 $\Delta\beta = 0.15$）： $\beta' = 0.45 > \mu = 0.40$；系统收敛至新均衡，其中 $C^\infty = \mu/\beta' \approx 0.89 < 1$。状态分量 Δ决定瞬态过程；结构分量 $\Delta\beta$ 单独决定 C^∞。参数： $\beta_0 = 0.30$、 $\mu = 0.40$、 $\delta = 0.70$、 $\rho = 0.10$。

9.2. 阶梯模式。图9.2 模拟了发生在以下时刻的四次冲击： t =10、25、40、60 （冲击间隔分别为 15、15、20，特意选取不均匀的间隔，以说明阶梯模式并不需要周期性驱动），每次冲击的状态分量为 Δ_k =0.40 ，结构分量为 $\Delta\beta_k$ = 0.04。累积结构漂移 B_k在冲击 $\mu = 0.40$ 处越过 $k^* = 3$ （因为 $\beta_0 + 3 \times 0.04 = 0.42 > \mu$）。

9.3. 非对称四群体动力学。以上两个小节采用对称参数（$\alpha_L = \alpha_R$、 $\delta_L = \delta_R$），以最大限度地提高解析可处理性。现在，我们通过非对称情景补充这些示例，展现定理6.10 和7.6所保证的完整结构。

佩龙–弗罗贝尼乌斯阈值以下和以上的轨迹。 图9.3展示了四组系统（5.2）在两组非对称参数组下的轨迹。在亚临界情形（$\mathcal{R}_{\text{rad}} = 0.840 < 1$）中，脉冲冲击会造成短暂激增

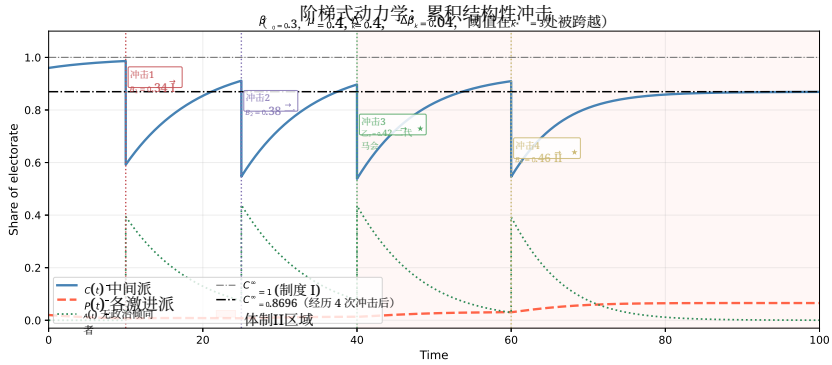


图 9.2：四次连续冲击下的阶梯式动力学。每次冲击都有状态分量 $\Delta_k = 0.40$ 和结构分量 $\Delta\beta_k = 0.04$。累积结构位移 B_k 在第 $k^* = 3$ 次冲击时越过 $\mu = 0.40$（因为 $\beta_0 + 3\times 0.04 = 0.42 > \mu$）。在 k^*之前：中间派份额在每次冲击后都会（部分）恢复。在 k^*之后：每增加一次冲击，长期中间派份额都会永久降低，从而形成阶梯模式。参数： $\beta_0 = 0.30$、 $\mu = 0.40$、 $\delta = 0.70$、 $\rho = 0.10$。

在 $A(t)$ ，并短暂减缓中间派恢复，但根据定理 $E_0(C^\infty = 1)$，所有轨迹最终都会收敛到 6.8。在超临界情形（$\mathcal{R}_{\rm rad} = 1.593 > 1$）中，系统收敛到非对称共存平衡点 $E_1 = (L^*,\ R^*,\ 0)$，其中 $L^* = 0.285 \neq R^* = 0.088$由 $M^{-1}K$的佩龙特征向量确定（定理 6.10(ii)）。中间派平衡点满足 $C^* = 1/\mathcal{R}_{\rm rad} = 0.628$，经数值计算验证，误差在容差范围 10^{-8}内。

非对称冲击阈值 $\Delta_c^{\rm asym}$。图 9.4 绘出了 $\Phi(\Delta)$: $= \lambda_{\rm PF}(M^{-1}((1-\Delta)K + \Delta D))$ 随冲击幅度 Δ 的变化，分别对应一组对称参数和一组非对称参数；两组参数均满足 $\Phi(0) < 1$（次临界基线）以及 $\Phi(1) > 1$（大冲击下动员占主导）。每条曲线都严格递增，并且恰好与 $\Phi = 1$ 相交一次，分别交于 $\Delta_c^{\rm sym} = 0.091$ 和 $\Delta_c^{\rm asym} = 0.116$ ，这证实了定理 7.6(ii)所保证的唯一性。两个阈值之间的差异完全由 K 和 D 相对于 M的非对称性决定；在对称约化下，两个阈值都与标量公式 $\Delta_c = (\mu - \beta)/(\delta - \beta)$重合。

10. 结论。

10.1. 主要结果总结。 我们建立并分析了两个选民群体总量守恒的政治竞争耦合常微分方程模型。

我们证明，基准三群体模型在结构上具有自我稳定性：在对称情形和非对称情形下，全局渐近稳定性均成立；借助杜拉克函数 $B = (LRC)^{-1}$，无条件排除了周期轨道；而在参数固定时，该模型无法产生阶梯式动力学、依赖历史的长期下限或多个吸引子。

四群体扩展增加了一个不参与群体，并区分了纯状态冲击与永久结构参数变化。冲击后的动力学可按谱阈值 $\mathcal{R}_{\rm rad} = \lambda_{\rm PF}(M^{-1}K)$ 进行完整的全局分类：低于该阈值时，中间派状态全局渐近稳定；高于该阈值时，所有具有非零激进派初始种子的轨迹都会收敛到唯一的激进化平衡。不可逆的长期转变仅由跨越该阈值的结构参数变化引起

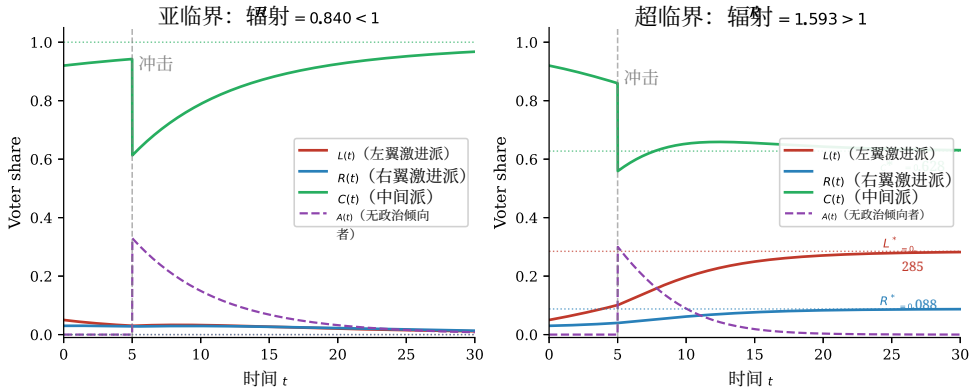


图 9.3：四群体非对称轨迹，在 $t = 5$ 时受到振幅为$\Delta = 0.35$ 的脉冲冲击。**左(**$\mathcal{R}_{\text{rad}} = 0.840 < 1$**)**：亚临界状态。冲击导致无政治倾向者短暂激增（A，紫色虚线），并使中间派恢复短暂减速，但系统最终回归完全中间主义（$C^{\infty} = 1$，绿色点线）。**右 (**$\mathcal{R}_{\text{rad}} = 1.593 > 1$**)**：超临界状态。系统收敛至非对称内部平衡点 $L^* = 0.285 \neq R^* = 0.088$ （点线），其中$C^* = 1/\mathcal{R}_{\text{rad}} = 0.628$。强烈的左右不对称源于 $\alpha_L > \alpha_R$ ，并体现在 $M^{-1}K$的佩龙特征向量中。参数：左图 $\alpha_L = 0.15$, $\alpha_R = 0.20$, $\gamma_{RL} = 0.08$, $\gamma_{LR} = 0.12$, $\delta_L = 0.70$, $\delta_R = 0.55$, $\mu_L = 0.30$, $\mu_R = 0.35$, $\rho = 0.12$；右图 $\alpha_L = 0.40$, $\alpha_R = 0.25$, $\gamma_{RL} = 0.15$, $\gamma_{LR} = 0.08$, $\delta_L = 0.75$, $\delta_R = 0.60$, $\mu_L = 0.28$, $\mu_R = 0.32$, $\rho = 0.10$。

；累积的亚阈值偏移会产生基线模型中不存在的阶梯式动力学。基于2013–2025年德国联邦议院数据的实证示例仅为定性分析，不构成统计检验。

10.2. 可识别性与估计。 严谨的定量校准需要建立一个概率观测模型，将常微分方程状态与选举数据和调查数据联系起来，并面临以下可识别性障碍。

基准模型中的结构性不可识别。 在对称三群体模型中， α 和 γ 仅通过它们的和进入线性化过程 $\beta = \alpha + \gamma$。Perron–Frobenius 阈值 $\mathcal{R}_{\text{rad}} = \beta/\mu$ 和平衡点 $V^* = 1 - \mu/\beta$ 可以从得票率时间序列中识别出来，但 α、 γ和 μ无法分别识别。要分别识别这些参数，需要有关选民流动的数据，即连续选举之间的选民流动数据；原则上，这些数据可以通过德国纵向选举研究（GLES）等小组调查获得 [12]。

四组可识别性。四群体模型增加了动员率 δ和重新参与率 ρ。由于 $A(t) = 1 - $投票率$(t)$ 可直接观测（第8.1节）， A区室提供了一个独立的观测方程，原则上可联合识别 δ 与 ρ ，依据是各次选举中得票率与投票率的联动变化。第8.1节中的共同变动预测（P3）是这一识别的未经检验版本： $\Delta A/\Delta V$的符号与大致量级约束了δ/ρ。然而，精确估计需要完整的随机形式，我们将其留待未来研究。

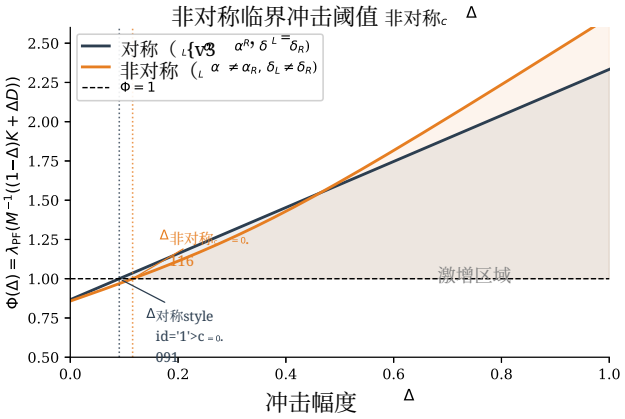


图 9.4：函数 $\Phi(\Delta) = \lambda_{\mathrm{PF}}(M^{-1}((1-\Delta)K + \Delta D))$ 对于对称（深色，$\alpha_L = \alpha_R$，$\delta_L = \delta_R$）和非对称（橙色，$\alpha_L \neq \alpha_R$，$\delta_L \neq \delta_R$）参数组的曲线。两条曲线均严格递增，并且恰好与阈值 $\Phi = 1$ 相交一次，交点分别位于 $\Delta_c^{\mathrm{sym}} = 0.091$ 和 $\Delta_c^{\mathrm{asym}} = 0.116$（垂直虚线处）。阴影区域（$\Phi > 1$）为激增状态。两个阈值之间的差距反映了定理 7.6 的佩龙向量修正。对称参数：$\alpha = 0.18$，$\gamma = 0.08$，$\mu = 0.30$，$\delta = 0.70$。非对称参数：$\alpha_L = 0.15$，$\alpha_R = 0.22$，$\gamma_{RL} = 0.08$，$\gamma_{LR} = 0.05$，$\mu_L = \mu_R = 0.30$，$\delta_L = 0.80$，$\delta_R = 0.55$。

冲击分解。每一次冲击都包含一个状态分量 Δ_k（C中立即转移到 A的比例）和一个结构分量 $\Delta\beta_k$（β的永久性增加）。状态分量会在随后的选举中造成投票率回落，而结构分量则反映在冲击后长期下限 V_k^*中。要在单个选举周期内区分这两个分量，需要较强的时序假设，或关于选举间隔期调查态度的辅助数据。

局限与未来工作.. 在数学方面，主要的未决问题是为非对称四群体模型建立更精确的瞬态理论，包括在反复出现非对称冲击时对激增持续时间和峰值规模给出明确界限，并为带有参数漂移的结构性冲击序列建立更明确的全局理论。随机强迫和时间周期冲击将进一步使我们能够研究自治设定之外的阈值穿越和棘轮效应。

主要的方法论启示是，可逆激增与不可逆的政治转变是不同的动力学现象，不应使用同一个模型来描述：当危机是暂时性的，基线模型便适用；当数据表明长期激进下限存在棘轮效应时，则应采用四群体扩展。

参考文献。

[1] C. M. Abels 等，“躲避专制子弹：借助行为科学阻止民主倒退”，行为公共政策，第1–28页，2024年。[2] F. Baumann、P. Lorenz-Spreen、I. M. Sokolov和M. Starnini，“社交网络中回声室与极化动态的建模”，物理评论快报，第124卷，048301，2020。[3] R. Branstetter、S. Chian、J. Cromp、W. L. He、C. M. Lee、M. Liu、E. Mansell、M. Paranjape、T. Pattanashetty、A. Rodrigues和A. Volkening，“时间如何

以及民调机构历史如何影响基于区室建模方法的美国选举预测”，SIAM应用动力系统期刊，第25卷，第1期，第160–195页，2026年，doi:10.1137/24M1719505。[4] 联邦选举主任，“2025年联邦议院选举结果”，德国联邦选举主任，德国，2025年。可查阅：https://www.bundeswahlleiterin.de[5] R. J. Dalton，《民主挑战与民主选择》。牛津大学出版社，2004年。[6]R. J. Dalton，“政党极化与公民态度”，《政治行为》，第43卷，第921–939页，2021年。[7] G. Deffuant、D. Neau、F. Amblard和G. Weisbuch，“相互作用主体之间的信念混合”，《复杂系统进展》，第3卷，第87–98页，2000年。[8] O. Diekmann、J. A. P. Heesterbeek和J. A. J. Metz，《异质种群传染病模型中基本再生数的定义与计算》 R_0 ，《数学生物学杂志》，28(4):365–382，1990年。[9] H. T. Diep、M. Kaufman和S. Kaufman，“三群体模型在2024年美国大选中的应用”，《熵》，第27卷，第9期，文章935，2025年。[10] P. van den Driessche和J. Watmough，《区室模型中的疾病传播再生数与亚阈值地方性平衡态》。《数学生物科学》，180:29–48，2002年。[11] 欧盟委员会，“标准欧洲晴雨表80：欧盟公众舆论”，2013年秋。[12] S. Roßteutscher、M. Debus、T. Faas和H. Schoen，“德国纵向选举研究横截面调查2021：选前与选后”，GESIS数据档案馆，科隆。ZA7702版本2.1.0，2023年，doi:10.4232/1.14170。[13] E. Grillo、Z. Luo、M. Nalepa和C. Prato，“民主倒退理论”，《政治学年度评论》，第27卷，第381–400页，2024年。[14] S. Haggard和R. Kaufman，《民主倒退：当代世界的民主衰退》。剑桥大学出版社，2021年。[15] R. Hegselmann和U. Krause，“观点动力学与有界置信：模型、分析与仿真”，《人工社会与社会模拟杂志》，第5卷，第3期，2002年。[16] M. W. Hirsch，“具有竞争性或合作性的微分方程组。III. 竞争物种”，《非线性》，第1卷，第1期，第51–71页，1988年。[17] S. Levitsky和D. Ziblatt，《民主如何死亡》。皇冠出版社，2018年。[18] J. Lorenz，“有界置信条件下的连续观点动力学：综述”，《国际现代物理学杂志C辑》，第18卷，第1819–1838页，2007年。[19] 法国内政部，“2024年立法选举结果”，法兰西共和国，2024年。可查阅：https://www.resultats-elections.interieur.gouv.fr[20] C. Mudde，《欧洲民粹激进右翼政党》。剑桥大学出版社，2019年。[21] P. Norris和R. Inglehart，《文化反弹：特朗普、英国脱欧与威权民粹主义》。剑桥大学出版社，2019年。[22] L. Perko，《微分方程与动力系统》，第3版。施普林格，2001年。[23] 皮尤研究中心，“美国公众的政治极化”，2014年。[24] P. Virtanen等，“SciPy 1.0：用于Python科学计算的基础算法”，《自然·方法》，第17卷，第261–272页，2020年。[25] S. H. Strogatz，《非线性动力学与混沌》。珀尔修斯图书，1994年。[26]B. Torgler，“极化导致的民主倒退动态”，BITA工作论文第6号，昆士兰科技大学，2024年。

[27] J. Yang 等，《政治竞争中的满意化动力学》，*SIAM*评论，第64卷，第1期，第168–204页，2022年。[28] A. Volkening、D. F. Linder、M. A. Porter 和 G. A. Rempala，《使用感染隔室模型预测选举》，*SIAM*评论，第62卷，第4期，第837–865页，2020年。[29]E. C. Zeeman，《竞争性三维 Lotka–Volterra 系统中的霍普夫分岔》，系统动力学与稳定性，第8卷，第3期，第189–216页，1993年。