arXiv:2603.07863v1 [q-fin.MF] 9 Mar 2026

差异互换中的抵押品货币选择

Yining Ding [a]、Ruyi Liu [b]和 Marek Rutkowski [a,c]

[a]数学与统计学院，悉尼大学，悉尼，新南威尔士州 2006，澳大利亚

[b]数学与统计学院，新南威尔士大学，悉尼，新南威尔士州 2033，澳大利亚

[c]数学与信息科学学院，华沙理工大学，00-661 华沙，波兰

2026年3月10日

摘要

衍生品定价中抵押品的作用已不再局限于信用风险缓释；尤其是在全球金融危机之后，融资成本和基差利差成为估值实践中的核心因素。这一发展恰逢从伦敦银行同业拆借利率（LIBOR）向无风险利率过渡，以及有抵押交易日益标准化之际。我们研究一类差异互换的估值与对冲，这类互换以隔夜利率的后向平均值为参考，其中SOFR互换是一个特例。本文重点探讨抵押品货币的影响。在扩展 Ding 等人的早期结果 [Math. Fi-nance 36 (2026年)，第 180–202], 页的基础上，我们允许抵押账户以不同于合同现金流计价货币的货币计价，并采用基于期货的复制方法，推导出显式的定价与对冲策略。

我们表明，担保货币的选择可能对估值和风险管理产生不可忽视的影响。尤其是，即便合同现金流完全以本币计价，外币抵押品也可能引入额外的风险敞口。数值研究表明，抵押品效应可能导致显著的估值调整，因此需要在现代多货币建模框架中予以恰当纳入。

关键词：互换，SOFR，€STR，多币种CSA，SOFR期货，比例抵押，风险管理**MSC：**60H10, 60H30, 91G30, 91G40

1 引言

2007–2009年的全球金融危机，以及随后向中央清算的转变和保证金实践的强化，促成了场外（OTC）衍生品抵押品化交易在全市场范围内占据主导地位。与此同时，针对非中央清算衍生品保证金要求的国际标准强调，交换变动保证金是限制交易对手敞口和系统性风险的关键工具 [3]。除了在信用风险缓释方面的作用外，抵押品化还具有经济上有意义的定价影响：理论与证据表明，抵押品条款可能影响互换利率，并更广泛地影响利率衍生品的估值 [23]。因此，固定收益市场采用了危机后的定价架构，其中贴现与抵押品报酬相一致（OIS/CSA贴现），曲线构建也明确变为多曲线 [5, 20, 26]。

本文研究了抵押品多曲线环境中自然会出现的一个问题：担保货币的选择如何影响美元挂钩衍生品的估值与对冲？通常，人们会认为美元利率产品以美元作为抵押品，但在实践中，信用支持附件（CSA）指定的抵押品货币可能与支付货币不同。例如，美元 SOFR 交易可能以欧元现金作为抵押品，并按欧元短期利率计息，€STR [25]。在此类情况下，抵押品报酬率不再与支付货币曲线一致，因此产生的有效贴现和融资经济效应本质上具有跨货币特征 [17, 25]。此外，当抵押协议允许在一组合格抵押品货币之间低成本替换时，提供抵押品的一方实际上拥有选择最便宜抵押品进行交付的期权。担保货币选择相关文献强调了这一点，并自然地将抵押品资格解释为最便宜交割（CTD） [16, 30]。关于或有索偿权的相关估值公式，涉及合约现金流与抵押品现金流之间的货币错配，可见 [14, 15, 18, 19],。与我们的设定不同，这些论文使用无担保融资利率作为计价单位。

基准利率改革以及逐步停止使用 IBOR，进一步塑造了市场环境[12]。在由此形成的基于 RFR 的市场结构中，与 SOFR 和 €STR 挂钩的交易所交易期货，为短期利率风险提供了天然且标准化的对冲工具。近期有关参考后顾型隔夜利率的衍生品研究，构建了将 RFR 期货作为核心对冲工具的定价与对冲框架 [6, 11]。由于期货是在交易所交易并每日结算的工具，在解读期货隐含利率及构建对冲策略时，经典的远期与期货之区别以及凸性效应仍然十分重要 [10, 22]。这些特点使基于期货的复制尤其适合对现代 RFR 市场中的抵押品化衍生品进行建模和对冲。

多曲线利率建模和 OIS/CSA贴现现已成为危机后固定收益市场的标准组成部分。早期研究正式提出了区分远期曲线与贴现曲线的必要性，并推导了多曲线期限结构下的无套利定价关系[5, 20, 26]。近期，研究者提出了广义 Heath–Jarrow–Morton框架，用于对由带有随机不连续性的隔夜利率驱动的期限结构建模，并给出了无套利条件、仿射半鞅设定以及定价与对冲结果 [13]。关于或有索偿权的相关估值公式涉及合约现金流与抵押品现金流之间的货币错配，见 [14, 15, 18, 19], 但与我们的设定不同，这些论文采用无担保融资利率作为计价单位。更广泛而言，在理想化假设下，抵押品化估值将贴现与抵押品报酬率联系起来；一系列框架则在此基础上进一步纳入不完全抵押品化、折扣、不对称性及融资因素 [9, 17, 25]。与此同时，关于融资估值调整的解释及其会计处理仍存在活跃争论，各方对于交易商融资成本是否应计入公允价值持有不同看法 [2, 21]。

国际货币基金组织（IMF）最近的一项研究指出，涉及多种货币的跨境交易会带来额外的外汇风险，从而提高跨境交易成本 [1]。在多币种环境中，衍生品价值可能取决于抵押品货币，因而会纳入类似基差的跨货币量，即使对于

单货币收益。抵押品估值可以在任意计价单位下的无套利框架中加以表述，而无须存在无风险短期利率，从而阐明定价测度及相关融资账户的作用 [24]。我们的工作将这些脉络与LIBOR之后美元SOFR和欧元 €STR市场的具体现实联系起来。

一个在实践中有时会被忽视的重要信息是：即使合同现金流完全以本币计价，担保货币的选择也可能带来实质性的风险敞口。例如，考虑一项参考美元SOFR的债权，以欧元现金作为抵押品（按 €STR计息）。在这种情况下，相关的抵押账户和有效利率会在财富动态中引入额外的随机驱动因素，因此，仅使用本币SOFR工具进行对冲会留下系统性剩余敞口（进而导致损益泄漏）。在我们的基于期货的复制框架中，这种额外的抵押品货币风险仍然可以明确对冲：所需的SOFR和 €STR期货对冲比率由命题5.2给出，其有效性和剩余复制误差则通过第6.4节的数值实验进行量化。

本研究的主要对象是一类采用向后观察隔夜利率惯例、以美元为参考货币的差异互换。我们在一般收益函数的层面定义这一类互换，并通过特定参数选择还原若干标准美元利率产品。具体而言，远期起始SOFR互换是其中一个特例，可作为我们估值和对冲结果的具体基准。我们比较以美元现金抵押时的估值和对冲结果，以及以欧元现金抵押并按€STR计息时对应的结果，同时考虑比例（部分）抵押品化。

在这一框架下，我们的主要贡献如下。首先，我们在与有效利率相关联的定价测度下，为以美元为基准的索赔提供了明确的估值框架；该有效利率在对冲者融资利率与抵押品报酬率之间进行插值。其次，我们表明，即使所有合同现金流均以本币计价，外币抵押品也会产生不可忽视的风险敞口，并准确刻画这种风险如何影响估值与复制。第三，我们提出了一种易于实施的基于期货的对冲方法，并推导出 SOFR 和 €STR 期货的明确对冲比率。最后，我们通过数值研究量化担保货币选择的经济重要性，包括估值变化、多种抵押品货币均符合条件时的最便宜交割机制，以及基于模拟的对冲有效性评估。

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍精简的双货币抵押市场，说明比例抵押，并正式界定可接受的抵押期货交易策略类别，以及由有效利率诱导的定价鞅测度。第3节提出跨货币期限结构设定，包括相关交易期货在定价测度下的动态。第4节推导在担保货币选择下，以美元为基准的差异互换的无套利估值结果，涵盖全额外币抵押基准和比例外币抵押，并进一步将分析扩展至多期互换。第 5 节利用 SOFR 和 €STR 期货，构建相应的复制与基于期货的对冲框架。第 6 节展示估值影响和最便宜交割机制的数值示例，并报告基于模拟的对冲实验。具体而言，我们量化了完全由外币抵押品化导致的剩余风险：在我们的基准设定中，仅使用国内期货进行对冲，仍会留下系统性且具有显著经济意义的风险敞口，其规模约为 5%。

2 抵押交易策略与定价测度

本节确定符号，并为双货币市场中的抵押品化、融资及基于期货的自融资交易记录一套自成一体、无模型依赖的框架。我们重点介绍估值与复制结果中将反复用到的要素，即本国/外国隔夜基准利率（SOFR 和 €STR）、相关的交易期货、按比例进行的外币抵押品化，以及由此产生、决定财富动态的有效利率 r^{β}。

本节内容有意从简。我们首先概述相关的市场惯例和关联工具，接着形式化定义可接受的抵押品化期货策略及其自融资条件，最后介绍与有效利率 r^β 相对应的定价鞅测度。

本节的设定与模型无关，不依赖于特定的期限结构规~格。定价是在由比例抵押品化诱导的定价鞅测度 $\mathbb{Q}$下进行的（见定义 2.6）。在第 3 节中，我们随后会在本币鞅测度 $\mathbb{Q}$ 下指定一个具体的跨货币期限结构模型，并验证在该规~格下， $\mathbb{Q}$ 与 $\mathbb{Q}$一致。有关更详细的讨论，请参阅我们的早期论文 [6, 11]。

2.1 无风险利率及相关期货

按照惯例，本币为美元，外币为欧元，时点 t 的汇率记为 Q_t。虽然为具体起见我们采用美元和欧元，但外币及其对应的隔夜基准利率可以替换为任何其他货币的 RFR 货币对。

在本节中，我们固定一个计息期 $[U,T]$，其中 $0 \le U < T$，并设 $\delta := T-U$。为方便记号，只要不会引起混淆，我们就省略期货报价对 $[U,T]$ 的依赖。本币隔夜基准利率为 SOFR，外币隔夜基准利率为 €STR，其相应的复合平均利率由以下定义给出；该定义基于对实际市场惯例的连续时间代理。

定义 2.1. 令 $\mathbb{F}$-适应过程 r^d 和 r^f 分别表示瞬时 SOFR 利率和€STR 利率。连续复利*SOFR*账户 B^d 满足

$$B_t^d = \exp\Big(\int_0^t r_u^d \, du\Big), \qquad t \ge 0,$$

而回溯型*SOFR*平均利率 在 $[U,T]$ 上为

$$R^d(U,T) := \frac{1}{\delta}\Big(\exp\Big(\int_U^T r_u^d \, du\Big) - 1\Big) = \frac{1}{\delta}\Big(\frac{B_T^d}{B_U^d} - 1\Big).$$

类似地，连续复利的 *€STR*账户 B^f 满足

$$B_t^f = \exp\Big(\int_0^t r_u^f \, du\Big), \qquad t \ge 0,$$

而回溯型 *€STR*平均利率 在 $[U,T]$ 上为

$$R^f(U,T) := \frac{1}{\delta}\Big(\exp\Big(\int_U^T r_u^f \, du\Big) - 1\Big) = \frac{1}{\delta}\Big(\frac{B_T^f}{B_U^f} - 1\Big).$$

$R^d(U,T)$ 和 $R^f(U,T)$ 均为回溯型，因此尤其是 $\mathcal{F}_T$-可测的，但对于 $t < T$，并非 $\mathcal{F}_t$-可测。以这些已实现平均利率为标的的期货将是我们的主要对冲工具。

定义 2.2。针对计息期 $[U,T]$ 的*SOFR*期货 合约，是一种以 SOFR平均利率 $R^d(U,\ T)$为参考的期货合约，其期货报价利率记为 $F_t^d(U,\ T)$，其中 $t \in [0,T]$。类似地，定义 *€STR* 期货 合约，其期货报价利率为 $F_t^f(U,\ T)$。

若忽略初始保证金与变动保证金机制，订立期货合约的即期价值为零。 F^d 与 F^f 的半鞅动态将在我们于第3节引入显式期限结构模型后加以规定。

2.2 差异互换与抵押品惯例

我们始终在双经济体设定下展开分析，并允许抵押品货币独立于支付货币加以指定。这种分离正是后文所研究的估值影响与额外可对冲敞口的来源。

我们首先明确互换合约收益的一般形式。为使框架保持灵活，我们引入一个由实常数 γ索引的单参数族，用以缩放外国隔夜利率腿。改变 γ 可使同一套记号在具备可加性的统一定价与对冲框架中涵盖若干不同产品。

定义 2.3. 一份覆盖 $[U,T]$、单期 *SOFR/€STR* 互换 于 T 期末结算，是以本币结算的合约，其净收益如下：在时刻 T，多头方收取基于本币隔夜利率的浮动金额 $\delta R^d(U,T)$，并支付基于外币隔夜利率的浮动金额$\delta\gamma R^f(U,T)$以及固定利差 $\delta\kappa$。等价地，多头方在时刻 T 的净现金流为

$$\mathbf{DS}_T^{\gamma,\kappa}(U,T) = \delta\big(R^d(U,T) - \gamma R^f(U,T) - \kappa\big)P, \tag{2.1}$$

其中 P 表示以本币计价的名义本金。

设 Q_t 表示即期外汇汇率，报价为一单位外币对应的本币单位数。差异互换条款的一个显著特征是，合约支付以本币结算，且不显式涉及 Q 。这与跨币种基差互换不同，后者的外汇兑换意味着现金流条款对汇率存在显式依赖，见 [11]。

注记 2.1. 定义 2.3及其多期扩展旨在涵盖市场惯例中出现的若干互换合约情形。当 $\gamma = 0$时，由(2.1)给出的支付退化为标准单期SOFR互换：它本质上属于本币，尽管相关信用支持附件可以规定本币或外币抵押。当 $\gamma \neq 0$时，该合约成为由本币与外币隔夜利率驱动的差异互换。当常数 γ 被解释为预先确定的兑换因子（例如固定的美元/欧元汇率）时，它有时被称为量化互换。关于LIBOR框架下差异互换的更多背景，见Wei[29]。

此外，为了隔离抵押品货币选择 （而非支付设计）带来的增量影响，我们在第 6 节的数值研究中设定 $\gamma = 0$。当 $\gamma \neq 0$ 时，外币利率 r^f 会通过两个概念上截然不同的渠道影响估值和对冲：首先，通过抵押品计息惯例；其次，通过合约支付中的外国利率部分。在这种情况下，出现外币利率对冲工具在很大程度上是意料之中的，因为支付本身直接受外币收益率曲线影响。相比之下，当 $\gamma = 0$ 时，SOFR互换支付完全是本币支付，且独立于 r^f。因此，对外国经济体的任何非平凡敞口，以及使用外币期货进行复制的任何需求，都完全 源于外币担保品化。因此，这一选择提供了一个干净的对照设定，可据此透明地量化担保品引致的风险大小。

我们将抵押品流程建模为交易存续期内缴纳／收取的变动保证金，并按与抵押品货币挂钩的利率计息。比例参数 β 以简化形式规定抵押品化程度：在任意时点，当前按市值计价的互换价值中有 β 的比例视为已抵押（因此按抵押品报酬利率计息），其余 $1-\beta$的比例则视为未抵押敞口，并按对冲者融资利率融资。这一约定以简化的方式反映门槛、折扣和部分缴纳的影响：例如， $\beta = 1$ 对应完全抵押品化，而 $\beta = 0$对应无抵押基准。更一般的信用支持附件（例如，涉及多种合格抵押品货币、随时间变化的缴纳规则，或切换／混合约定）也可以通过允许报酬／融资组合随时间和状态变化来纳入模型。

此处采用比例规则，因为它能带来清晰透明的定价测度和明确的复制公式；详细的数学推导见第2.3节。

在第3节稍后引入的高斯期限结构设定下，相关的条件期望可分解为虚拟债券价格的乘积，再乘以确定性的“凸性修正”项。我们在第4.1节明确计算这些修正项，然后利用相应的因式分解推导出闭式对冲比率。这与后视利率产品中采用的更广泛的凸性调整方法一致。

2.3 抵押品化期货策略

我们考虑交易国内SOFR期货和外币 €STR期货。设 F^d 和 F^f 为连续半鞅，分别表示相应期货的价格/利率（这取决于市场报价惯例，仅影响仿射变换）。我们还引入对冲融资账户 B^h ，定义如下：

$$dB_t^h = r_t^h \, B_t^h \, dt, \qquad B_0^h = 1,$$

其中， r^h 是一个 $\mathbb{F}$适应的融资利率。

定义 2.4。期货交易策略是一个取值于 $\mathbb{R}^3$、 $\mathbb{F}$适应的过程 $\varphi = (\varphi^0, \varphi^d, \varphi^f)$，其中 φ^d 和 φ^f 分别表示SOFR期货和 €STR期货头寸， φ^0 表示现金（融资）头寸。由于期货头寸的盯市价值为零，该策略的价值等于

$$V_t^p(\varphi) = \varphi_t^0 \, B_t^h, \qquad t \in [0, T].$$

令 C 表示以美元计价的抵押品余额 （本币）。我们采用如下符号约定： $C_t > 0$ 表示对冲者收到的抵押品， $C_t < 0$ 表示对冲者提供的抵押品。我们采用市场上的每日结算惯例，并假设对冲者根据 C 的符号，对抵押品余额支付或收取应计利息。具体而言，令 C_t' 表示以抵押品货币为单位计量的抵押品余额，令 Q_t 表示将一单位抵押品货币兑换为美元的外汇汇率（即一单位外币对应的本币价格）。那么，抵押品的美元价值为

$$C_t := C_t' \, Q_t.$$

特别地，如果抵押品以美元提供，则 $Q_t \equiv 1$。抵押品报酬率记为 r^c。更确切地说，当抵押品以本币（美元）提供时，我们记为

$$r^c = r^d + \alpha^{c,d},$$

其中 $\alpha^{c,\,d}$ 表示本币抵押品报酬率与本币隔夜利率之间的利差。同样地，当抵押品以外币（欧元）提供时，我们记为

$$r^c = r^f + \alpha^{c,f},$$

其中， $\alpha^{c,\,f}$ 表示利差。这里， $\alpha^{c,\,d}$ 和 $\alpha^{c,\,f}$ 是确定性函数，对每个 $T > 0$均在 $[0, T]$上可积。在第 4–5 节中，我们关注外币抵押，符号 r^c 在这些章节中始终表示外币抵押报酬率。

在每日结算假设下，一个关键特征是，外国期货头寸（以欧元结算）必须以美元表示。每日结算（结合伊藤乘积法则）会在外汇汇率 Q 与外国期货过程 F^f之间产生一个额外的二次协变项。详细讨论请参阅 [11]。因此，下面定义以美元计价的外国期货收益过程 $F^{f,\,q}$ 。

定义 2.5。 如果抵押品化期货策略 $(\varphi, C) = (\varphi^0, \varphi^d, \varphi^f, C)$ 的价值过程 $V_t^p(\varphi, C) := \varphi_t^0 B_t^h$ 对每个 $t \in [0, T]$ 都满足以下条件，则该策略是自融资的：

$$V_t^p(\varphi, C) = V_0^p(\varphi, C) + \int_0^t \varphi_u^0 \, dB_u^h + C_t - \int_0^t r_u^c \, C_u \, du + \int_0^t \varphi_u^d \, dF_u^d + \int_0^t \varphi_u^f \, dF_u^{f,q},$$

或者，等价地，

$$dV_t^p(\varphi, C) = r_t^h V_t^p(\varphi, C)\ dt + dC_t - r_t^c C_t\ dt + \varphi_t^d\ dF_t^d + \varphi_t^f\ dF_t^{f,q},$$

其中，我们定义辅助过程 $F^{f,q}$，以表示以本币计价的外国期货头寸收益（例如，€STR 期货），其表达式为

$$F_t^{f,q} := F_0^{f,q} + \int_0^t Q_u\ dF_u^f + \langle Q, F^f \rangle_t, \tag{2.2}$$

其中，$\langle Q, F^f \rangle_t$ 表示二次协变过程。

我们将对冲者的财富过程 定义为 $V(\varphi, C) := V^p(\varphi, C) - C$。直接计算可得

$$dV_t(\varphi, C) = r_t^h V_t(\varphi, C)\ dt - (r_t^c - r_t^h) C_t\ dt + \varphi_t^d\ dF_t^d + \varphi_t^f\ dF_t^{f,q}.$$

特别地，若 $r^c = r^h$，则抵押品化不会影响财富动态。

接下来，我们施加比例抵押 $C_t = -\beta_t V_t(\varphi, C)$，其中 β 是一个非负的、$\mathbb{F}$-适应过程（在实际应用中通常为 $\beta \in [0, 1]$）。此时，$V(\varphi, C)$ 满足

$$V_t(\varphi, C) = V_0(\varphi, C) + \int_0^t r_u^\beta V_u(\varphi, C)\ du + \int_0^t \varphi_u^d\ dF_u^d + \int_0^t \varphi_u^f\ dF_u^{f,q},$$

其中有效融资利率 r^β 等于

$$r^\beta := (1 - \beta) r^h + \beta\, r^c.$$

设 B^β 为虚拟账户，其 $dB_t^\beta = r_t^\beta B_t^\beta\ dt$，并按约定，$B_0^\beta = 1$。

命题 2.1。 设 $(\varphi、 C)$ 为一个自融资抵押品化期货策略，满足 $C = -\beta V(\varphi、 C)$。则贴现财富 $\widetilde{V}^\beta(\varphi、 C)$：$= (B^\beta)^{-1} V(\varphi、 C)$ 满足

$$\widetilde{V}_t^\beta(\varphi, C) = \widetilde{V}_0^\beta(\varphi, C) + \widetilde{G}_t^\beta(\varphi, C),$$

其中贴现收益过程为

$$\widetilde{G}_t^\beta(\varphi, C) = \int_0^t (B_u^\beta)^{-1} \varphi_u^d\ dF_u^d + \int_0^t (B_u^\beta)^{-1} \varphi_u^f\ dF_u^{f,q}.$$

在比例抵押下，无需对抵押账户进行显式建模。抵押品的影响仅通过由 r^β 控制的漂移项进入财富动态，而所有随机风险敞口均由交易期货组成部分 F^d 和 F^f 承担。施加 $C_t = -\beta_t V_t(\varphi、 C)$ 后，抵押品持有成本因此转化为与头寸相关的漂移调整：头寸的 β_t 部分实际上按抵押品报酬率 r_t^c 融资，而剩余部分按 r_t^h 融资。这产生了有效融资利率 $r_t^\beta = (1 - \beta_t) r_t^h + \beta_t r_t^c$，该利率出现在 $V(\varphi、 C)$ 的漂移项中，并促成了虚拟计价单位 B^β 的引入。当 $r^h = r^c$ 时，抵押品化无关紧要；当 $\beta \equiv 0$ 时，融资完全按 r^h 进行；而当 $\beta \equiv 1$ 时，漂移由 r^c 控制，这反映了所采用约定下的全部抵押品融资。尽管我们关于融资和抵押品的假设可以按照更一般的方式表述，例如 [8] 以及 [4, 7], 中的相关处理，但在此我们有意采用相对简单的设定，从而能够为差异互换的无套利定价和对冲策略推导闭式解。

2.4 定价鞅测度

以下的定价鞅测度定义引自 [11]。

定义 2.6。 概率测度 $\mathbb{Q}$称为日期 U的定价鞅测度（*PMM*），如果 $\mathbb{Q}$与 $(\Omega\ \mathcal{F}_T)$ 上的统计测度 $\mathbb{P}$等价，并且对于任意自融资的抵押期货策略 (φ, C)，无论比例抵押水平 β为何，过程 $(\widetilde{V}_t^{\beta}(\varphi, C))_{t\in[0,U]}$ 都是一个 $\widetilde{\mathbb{Q}}$-局部鞅。

按照惯例，可容许策略仅限于 $\widetilde{V}^{\beta}$ 有下界的策略（以排除加倍策略）。应注意，根据命题 2.1，在定义 2.6 中引入的概率测度 $\mathbb{Q}$ 不依赖于过程 β的选择。要证明定价鞅测度的存在，只需（且基本上也是必要的）在某个候选定价测度下，为$(F^d,\ F^f,\ q)$ 的驱动因子指定一个无套利联合模型，然后验证局部鞅性质（见命题 3.1）。

定义 2.7。 若存在一个可容许的自融资抵押期货策略$(\varphi,\ C)$，且满足 $C = -\beta V$，使得$V_T(\varphi,\ C) = X_T$，则具有终端支付 X_T的抵押合约$(X_T,\ \beta)$是可实现的。

命题 2.2. 假设$(B_T^{\beta})^{-1}X_T$是 $\widetilde{\mathbb{Q}}$-可积的，且(X_T, β) 是可实现的。那么，对于任意 $t \in [0, T]$，无套利价格过程满足：

$$\pi_t^{\beta}(X_T) = B_t^{\beta}\,\mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{Q}}}\Big[(B_T^{\beta})^{-1}X_T \,\Big|\, \mathcal{F}_t\Big]. \tag{2.3}$$

为简便起见，我们有时记作 $X_t^{\beta} := \pi_t^{\beta}(X_T)$，于是 $X_T^{\beta} = X_T$。此外，当 $\beta = 1$时，我们将使用以下记号表示参考抵押水平

$$\pi_t^{c}(X_T) := \pi_t^{\beta}(X_T)$$

and 相应地，我们记作 $X_t^{c} := \pi_t^{c}(X_T)$。注意， $\beta \equiv 1$ 推出 $r^{\beta} \equiv r^{c}$ 且 $B^{\beta} \equiv B^{c}$.

3 跨货币期限结构模型

本节介绍一种便于处理的跨货币期限结构设定，用于推导后续章节中的显式期货动态、对冲比率和数值示例。在第 2 节介绍的无模型抵押交易框架和定价鞅测度的基础上，我们现在对本币和外币隔夜利率以及外汇汇率的联合动态采用具体的高斯设定。

第 3.1 节记录了一项固定假设，用以确定(r^d, r^f, Q)在本币鞅测度 $\mathbb{Q}$ 下的Vasicek–Garman–Kohlhagen动态，以及在外币鞅测度 $\mathbb{Q}$下的相应动态。第 3.2 节引入了 $\mathbb{Q}$ 与 $\mathbb{Q}$ 下的辅助条件贴现因子，并总结其扩散系数；这些系数可作为期货动态与对冲比率的便利输入。第 3.3 节陈述了所交易的SOFR与 €STR期货的扩散结构，并验证在该设定下，由比例抵押诱导的定价鞅测度 $\mathbb{Q}$ 与 $\mathbb{Q}$一致。最后，第 3.4 节为本文所考虑的索赔类别确立了受限完备性。

3.1 跨货币模型设定

在多曲线跨货币框架中，同一个经济模型可以通过多种等价的计价基准和定价测度选择来表述。为避免冗长讨论测度构造，我们在下文给出一个固定假设，其中规定：（i）在本币定价测度 $\mathbb{Q}$ 下，本币和外币短期利率以及外汇汇率的联合动力学；（ii）通过显式的吉尔萨诺夫变换得到的相关外币鞅测度 $\mathbb{Q}$ 。所有后续定价与对冲论证仅依赖于这一设定。关于经典跨货币框架的背景和推导，请参阅 [27,第 14]章 [11]。

我们将 $\bar{r}^d$ （分别将 $\bar{r}^f$）解释为本币（分别为外币）固定收益市场中适用的货币市场利率，因此相应的货币市场账户满足

$$d\bar{B}_t^d = \bar{r}_t^d\, \bar{B}_t^d\, dt, \qquad d\bar{B}_t^f = \bar{r}_t^f\, \bar{B}_t^f\, dt.$$

记

$$\bar{r}_t^d := r_t^d + \alpha_t^d, \qquad \bar{r}_t^f := r_t^f + \alpha_t^f, \qquad \lambda_t^q := \alpha_t^d - \alpha_t^f,$$

其中， α^d, α^f 是确定性利差（对每个 $T>0$，在 $[0,T]$ 上可积）。特别地， $\bar{r}_t^d - \bar{r}_t^f = r_t^d - r_t^f + \lambda_t^q$ 。确定性利差 α^d 和 α^f 允许在隔夜基准利率（r^d, r^f）与货币市场利率（$\bar{r}^d, \bar{r}^f$）之间进行多曲线调整。

我们假设，在 $\mathbb{Q}$ 下，过程 Z^1, Z^2, Z^3 是一维布朗运动，其瞬时协变差为

$$d\langle Z^i, Z^j\rangle_t = \rho_{ij}\, dt. \qquad i,j \in \{1,2,3\}.$$

假设3.1。 在本币定价测度 $\mathbb{Q}$下，本币和外币隔夜利率r^d, r^f 遵循 Vasicek 动态，外汇汇率 Q （一单位外币对应的本币价格）满足

$$\begin{aligned} dr_t^d &= (a - b r_t^d)\, dt + \sigma\, dZ_t^1, \\ dr_t^f &= (\widehat{c} - \widehat{b}\, r_t^f)\, dt + \widehat{\sigma}\, dZ_t^2, \\ dQ_t &= Q_t(r_t^d - r_t^f + \lambda_t^q)\, dt + Q_t \bar{\sigma}\, dZ_t^3, \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中， $a, b, \sigma, \widehat{c}, \widehat{b}, \widehat{\sigma}, \bar{\sigma}$ 是正数，过程 Z^1, Z^2和 Z^3 是在 $\mathbb{Q}$ 下的一维布朗运动，相关性为 $\langle Z^i, Z^j\rangle_t = \rho_{ij}\, dt$。固定 $T>0$ ，并在$(\Omega\ \mathcal{F}_T)$上通过密度定义外币$\widehat{\ }$鞅测度 $\mathbb{Q}$

$$\frac{d\widehat{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{Q}}\Big|_{\mathcal{F}_T} := \mathcal{E}_T^q, \qquad \mathcal{E}_t^q := \exp\Big(\bar{\sigma}\, Z_t^3 - \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 t\Big), \quad t \in [0,T]. \tag{3.2}$$

于是， $\widehat{Z}_t^1 = Z_t^1 - \bar{\sigma}\rho_{13}\, t$、 $\widehat{Z}_t^2 = Z_t^2 - \bar{\sigma}\rho_{23}\, t$ 和 $\widehat{Z}_t^3 = Z_t^3 - \bar{\sigma}\, t$ 在$\widehat{\mathbb{Q}}$下是相关布朗运动。令 $R_t := Q_t^{-1}$且 $\widehat{a} := \widehat{c} + \widehat{\sigma}\,\bar{\sigma}\,\rho_{23}$后， $\widehat{\mathbb{Q}}$ 下的动态为

$$\begin{aligned} dr_t^d &= \big(a + \sigma\bar{\sigma}\rho_{13} - b r_t^d\big)\, dt + \sigma\ d\widehat{Z}_t^1, \\ dr_t^f &= (\widehat{a} - \widehat{b}\, r_t^f)\, dt + \widehat{\sigma}\ d\widehat{Z}_t^2, \\ dR_t &= R_t(r_t^f - r_t^d - \lambda_t^q)\, dt - R_t\bar{\sigma}\ d\widehat{Z}_t^3. \end{aligned}$$

3.2 辅助贴现因子的动态

我们引入与本币和外币隔夜利率的 Vasicek 模型设定相关的辅助条件贴现因子。这些过程并非假定为额外的可交易证券。相反，它们提供了一种便捷方法，用于分离最终驱动交易期货动态、进而驱动第 5 节中推导的对冲比率的扩散项。在当前的高斯期限结构框架内，相同的量可以通过动态交易的期货投资组合生成，因此可将其用作计算工具，而不扩大可交易资产范围。现在我们回顾 Vasicek 模型的标准仿射计算 [28]。

我们先讨论本币辅助因子。对于 $u>0$ 和 $t \geq 0$ ，我们设定

$$B^d(t,u) := \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\exp\Big(-\int_t^u r_v^d\, dv\Big)\,\Big|\,\mathcal{F}_t\right]. \tag{3.3}$$

对于 $t \geq u$，条件期望简化为已实现的计息因子，即 $B^d(t,u) = \exp(\int_u^t r_v^d\, dv) = (B_u^d)^{-1}B_t^d$，其中 $dB_t^d = r_t^d B_t^d\, dt$ 且 $B_0^d = 1$。对于 $t \leq u$，仿射期限结构模型的标准论证给出半鞅动态

$$dB^d(t,u) = B^d(t,u)\Big(r_t^d\, dt - \sigma n(t,u)\, dZ_t^1\Big), \qquad t \in [0,u], \tag{3.4}$$

其中 $n(t,u) := (1-e^{-b(u-t)})/b$。

$\widehat{}$我们以类似方式定义外币辅助因子，但采用外币鞅测度 $\mathbb{Q}$。对于 $u>0$ 和 $t\geq 0$，我们设

$$B^f(t,u) := \mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}}\Big[\exp\Big(-\int_t^u r_v^f\ dv\Big)\ \Big|\ \mathcal{F}_t\Big]. \tag{3.5}$$

$\widehat{}$对于 $t\leq u$，在 $\mathbb{Q}$ 下，我们有如下动态

$$dB^f(t,u) = B^f(t,u)\Big(r_t^f\ dt - \widehat{\sigma}\widehat{n}(t,u)\ d\widehat{Z}_t^2\Big), \qquad t\in[0,u], \tag{3.6}$$

其中 $\widehat{n}(t,\ u) := (1-e^{-\widehat{b}(u-t)})/\widehat{b}$。

下面的评注总结了我们稍后将用到的扩散系数。我们还记录一个将反复应用的简单不变性原理：虽然漂移项会在等价测度变换下发生变化，但连续局部鞅部分——因此对冲所涉及的扩散系数——保持不变。具体而言，对于两个连续半鞅Y^1和 Y^2，只要 Y^1 和 Y^2 在其典范分解中具有相同的连续局部鞅部分，我们就记作 $Y^1\simeq Y^2$。如果 $Y^1\simeq Y^2$ 在 $(\Omega,\ \mathcal{F}_T)$ 上的 $\mathbb{Q}$ 下成立，那么它在 $(\Omega,\ \mathcal{F}_T)$ 上与 $\mathbb{Q}$ 等价的任何概率测度$\widehat{}$下也成立，因此在 $\mathbb{Q}$ 下同样成立。

注 3.1。对于任意固定期限 $T>0$，过程 $(B^d(t,\ T)\ t\leq T)$ 满足

$$dB^d(t,T)\simeq B^d(t,T)\,\sigma_T(t)\ dZ_t^1, \qquad \sigma_T(t) := -\sigma\, n(t,T).$$

类似地，对于任意固定期限 $T>0$，过程 $(B^f(t,\ T)\ t\leq T)$ 在 $\widehat{\mathbb{Q}}$ 下满足

$$dB^f(t,T)\simeq B^f(t,T)\,\widehat{\sigma}_T(t)\ d\widehat{Z}_t^2, \qquad \widehat{\sigma}_T(t) := -\widehat{\sigma}\,\widehat{n}(t,T),$$

因此，$dB^f(t,\ T)\simeq B^f(t,\ T)\ \widehat{\sigma}_T(t)\ dZ_t^2$在 $\mathbb{Q}$ 下。

在第 3.3 节和第 5 节中，我们将直接用 $\sigma_T(t)$ 和 $\widehat{\sigma}_T(t)$ 表示已交易 SOFR 和 €STR 期货的扩散项及相应的对冲比率。

3.3 期货动态与定价鞅测度

现在，我们总结将用于对冲的已交易利率期货的扩散结构。由于基于 Vasicek 的显式表示是标准结果，我们省略推导，并请参阅 [11]，其中给出了简明证明及更多细节。这里我们着重讨论半鞅分解，尤其是对冲比率中涉及的扩散系数。

回顾定义 2.1，后顾平均值 $R^d(U,\ T)$（SOFR）和 $R^f(U,\ T)$（€STR）是 $\mathcal{F}_T$-可测的。相应的期货利率定义为自然定价测度下的条件期望：SOFR期货以本币报价和结算，因此在 $\mathbb{Q}$ 下指定；而 €STR 期货以外币 $\widehat{}$ 报价和结算，因此在 $\mathbb{Q}$ 下指定。

定义 3.1。SOFR期货利率 $F_t^d(U,\ T)$和 *€STR*期货利率 $F_t^f(U,\ T)$定义如下：

$$F_t^d(U,T) := \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\big(R^d(U,T)\,\big|\,\mathcal{F}_t\big), \qquad F_t^f(U,T) := \mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}}\big(R^f(U,T)\,\big|\,\mathcal{F}_t\big), \qquad t\in[0,T].$$

下一条注记记录了由此得到的扩散系数。这些系数将在后文再次使用，因此我们明确列出，并采用第 3.2 节引入的简写记号。

注 3.2。设 $F^d = F^d(U,\ T)$ 和 $F^f = F^f(U,\ T)$ 分别为 SOFR 和 €STR 期货利率。根据 [11, 命题 4.3]，$dF_t^d = \nu_t^d\ dZ_t^1$，其中

$$\nu_t^d = \delta^{-1}\big(1+\delta F_t^d(U,T)\big)(\sigma_U(t)-\sigma_T(t)) = -\delta^{-1}\big(1+\delta F_t^d(U,T)\big)\sigma_{U,T}(t), \qquad t\in[0,U],$$

and

$$\nu_t^d = -\delta^{-1}\big(1+\delta F_t^d(U,T)\big)\sigma_T(t), \qquad t\in[U,T].$$

根据 [11, 命题 4.4]， $dF_t^f = \nu_t^f\ d\widehat{Z}_t^2$，从而有 $dF_t^f \simeq \nu_t^f\ dZ_t^2$，其中

$$\nu_t^f = \delta^{-1}\big(1+\delta F_t^f(U,T)\big)\big(\widehat{\sigma}_U(t)-\widehat{\sigma}_T(t)\big) = -\delta^{-1}\big(1+\delta F_t^f(U,T)\big)\widehat{\sigma}_{U,T}(t), \qquad t\in[0,U],$$

and

$$\nu_t^f = -\delta^{-1}\big(1+\delta F_t^f(U,T)\big)\widehat{\sigma}_T(t), \qquad t\in[U,T].$$

这里 $\delta := T-U$，我们使用简写 $\sigma_{U,T}(t) := \sigma_T(t)\ -\sigma_U(t)$ 和 $\widehat{\sigma}_{U,T}(t) := \widehat{\sigma}_T(t)\ -\widehat{\sigma}_U(t)$。

接下来，我们将这些动态与第 2 节的无模型定价框架相协调。尽管抵押品估值和对冲在定义 2.6 中引入的定价鞅测度（PMM） $\mathbb{Q}$ 下表述最为方便，但上述期限结构模型是在 $\mathbb{Q}$ 下设定的。以下命题表明，在当前设定中，这两个测度相同。关键步骤是用本币表示外币期货收益，并确定其在 $\mathbb{Q}$ 下的扩散项。

命题 3.1. 定价鞅测度 $\mathbb{Q}$ 存在，且与本币鞅测度 $\mathbb{Q}$一致。

证明。回顾 由（2.2）可知，外币期货头寸的本币价值满足 s

$$F_t^{f,q} = F_0^{f,q} + \int_0^t Q_u\ dF_u^f + \langle Q, F^f\rangle_t.$$

利用注 3.2 和 $\widehat{Z}^2 = Z^2 - \bar{\sigma}\rho_{23}\,t$，可得

$$dF_t^{f,q} = Q_t\nu_t^f\big(\,d\widehat{Z}_t^2 + \bar{\sigma}\rho_{23}\ dt\big) = Q_t\nu_t^f\ dZ_t^2.$$

因此， $F^{f,\,q}$在 $\mathbb{Q}$ 下是一个（局部）鞅。根据定义， F^d也是一个 $\mathbb{Q}$-鞅，因此 $\mathbb{Q}$是本文所考虑的交易期货族的定价鞅测度。 □

下一条注记给出了本币计价的外币期货过程由此得到的扩散系数；在第 5 节表示对冲比率时将反复用到该系数。

注3 .3. 特别地， $dF^{f,}{}_{t}{}^{q} = \nu^{f,}{}_{t}{}^{q}\ dZ_t^2$其中 $\nu^{f,}{}_{t}{}^{q} := Q_t\nu_t^f$ 且 ν_t^f 由注 3.2 给出。

3.4 受限完备性

我们在假设3.1中引入的三因子设定意味着，当交易策略仅限于 $(F^d,\ F^f)$ 时，市场对于一般的 $\mathcal{F}_T$-可测索赔是不完备的。尽管如此，本文所考虑的产品具有一个结构性特征：它们的贴现价格过程不依赖于第三个布朗分量。因此，仅使用 $(F^d,\ F^{f,\,q})$，也就是仅使用 $(F^d,\ F^f)$，即可对冲这些产品。令 $\mathbb{F}^{(2)} := (\mathcal{F}^{Z^1,}{}_{t}{}^{Z^2})_{t\in[0,T]}$ 为由 $(Z^1,\ Z^2)$ 生成的子滤过。此处， $\mathcal{F}^{Z^1,}{}_{t}{}^{Z^2} := \sigma\big(Z_u^1,\ Z_u^2\colon\ 0\le u\le t\big)\vee\mathcal{N}$ 表示通常增广，其中 $\mathcal{N}$ 表示 $\mathcal{F}$ 中所有 $\mathbb{P}$-零测集构成的集合。因此，$(Z^1,\ Z^2)$ 关于 $\mathbb{F}^{(2)}$ 具有可预测表示性质。

命题3.2. 考虑一个抵押合约(X_T,β)，其在时刻 T的终端支付为 X_T，并以比率 β进行比例抵押。假设 $X_T(B_T^\beta)^{-1}$ 是 $\mathbb{Q}$-可积的，且贴现价格过程 $\widetilde{\pi}_t^\beta(X_T) := (B_t^\beta)^{-1}\pi_t^\beta(X_T)$ 是 $\mathbb{F}^{(2)}$-适应的。则(X_T,β) 可由唯一可容许的自融资抵押期货策略复制。相应的期货头寸(φ^d,φ^f) 由下式给出

$$\varphi^d = (\nu^d)^{-1}\psi^1, \qquad \varphi^f = (\nu^{f,q})^{-1}\psi^2,$$

其中 (ψ^1,ψ^2) 是唯一的 $\mathbb{F}^{(2)}$-可预测过程，使得

$$d\widetilde{\pi}_t^\beta(X_T) = \big(B_t^\beta\big)^{-1}\big(\psi_t^1\ dZ_t^1 + \psi_t^2\ dZ_t^2\big).$$

证明。 由于 $\widetilde{\pi}^{\beta}(X_T)$ 是一个 $\mathbb{Q}$-鞅，且是 $\mathbb{F}^{(2)}$-适应的，因此 (Z^1, Z^2) 相对于 $\mathbb{F}^{(2)}$ 的可预测表示性质给出了所述表示。根据备注3.2和3.3，我们分别有 $dF^d = \nu^d\, dZ^1$ 和 $dF^{f,q} =_{\nu^{f,q}} dZ^2$ 。比较扩散系数即可得到对冲头寸；其唯一性由鞅表示的唯一性推出。 □

备注3.4。 命题3.2是一个受限完备性结果，适用于其贴现价格过程是 $\mathbb{F}^{(2)}$ 适应的，或等价地，其鞅表示在 Z^3 上的载荷为零的或有索偿权类别。这正是本文第 5 节所讨论的抵押品货币为 STR 的、以美元为参照的抵押产品所遇到的情形。

4 抵押品货币选择下的无套利定价

本节针对抵押品货币选择下以美元为参照的现金流，推导无套利定价结果，并特别关注以 €STR 计息的外币（欧元）现金抵押。我们采用第 2 节的无模型抵押期货框架。根据第3节的高斯跨货币期限结构设定，定价鞅测度 $\sim\mathbb{Q}$ 存在，且与本币鞅测度 $\mathbb{Q}$ 一致（见命题 3.1），因此以下所有定价表示均在 $\mathbb{Q}$ 下书写。

我们分三步展开。首先，第4.1节汇总了一组简明的凸性修正恒等式，用于计算短期利率积分指数的条件期望，这些恒等式将在闭式计算中反复使用。接着，第4.2节讨论完全外币抵押基准，并将相应的定价算子记为 π^c。我们给出两种代数上等价的定价表示：一种与一般比例抵押情形相呼应，因此便于比较；另一种则专为第 5 节后续的对冲分析而设计。最后，第4.3节推导常数 $\beta \in [0,1]$ 取一般值时比例外国抵押下相应的定价结果，第4.4节则将分析扩展至多期互换及其平价利率。

4.1 凸性修正

在本小节中，我们始终在定价测度 $\mathbb{Q}$ 下进行分析，并假设仿射高斯设定中出现的所有波动率载荷均为确定性。第4.2–4.3节的闭式公式依赖于这样一个事实：短期利率积分的指数的条件期望可以系统地因子分解为以下两类乘积：(i) 虚拟债券价格的幂；(ii) 确定性乘法修正。

假设短期利率积分$\int_t^T r_u^d\, du$ 和 $\int_t^T r_u^f\, du$采用高斯设定，且其波动率载荷为确定性函数，相关布朗运动之间的相关性为常数。对于任一期限 $T \geq t$，采用以下记号

$$B_T(t, r_t^d) := B^d(t,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[e^{-\int_t^T r_u^d\, du}\,\Big|\,\mathcal{F}_t\Big], \qquad \widehat{B}_T(t, r_t^f) := B^f(t,T) = \mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}}\Big[e^{-\int_t^T r_u^f\, du}\,\Big|\,\mathcal{F}_t\Big],$$

分别表示本币（外币）定价测度下的本币（外币）虚拟零息债券价格。引理 4.1 未附证明，因为它是 [11] 中引理 5.1 的推论，因此读者可参阅 [11] 中的第 5.1 节，了解完整的一般性表述。该引理表明，任何由以下形式的积分短利率项构成的条件期望

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\exp\Big(a\int_t^U r_u^d\, du + b\int_t^T r_u^d\, du + c\int_t^U r_u^f\, du + d\int_t^T r_u^f\, du\Big)\,\Big|\,\mathcal{F}_t\right], \qquad t \leq U \leq T, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R},$$

可因子分解为虚拟债券价格 $B_U(t,\ r_t^d)$、 $B_T(t,\ r_t^d)$ 和 $\widehat{B}_U(t,\ r_t^f)$、$\widehat{B}_T(t,\ r_t^f)$ 的幂次，再乘以一个确定性修正因子（由 Γ 项的乘积构成）。此外，每个修正因子在其有效系数为零时都等于 1。因此，许多项会

在 $\beta = 0$ 或 $\beta = 1$时自动消去。根据来源对调整进行分类的结果如下引理所示。

引理 4.1. *(i)* 下列等式中出现自调整 Γ^s，这些等式对任意$t \in [0,T]$ 和 $\alpha \in \mathbb{R}$均成立，

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\exp\Big(-\alpha\int_t^T r_u^d\ du\Big)\ \Big|\ \mathcal{F}_t\Big] = [B_T(t,r_t^d)]^\alpha\,\Gamma_t^s(T,\alpha,\sigma_T),$$
$$\mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}}\Big[\exp\Big(-\alpha\int_t^T r_u^f\ du\Big)\ \Big|\ \mathcal{F}_t\Big] = [\widehat{B}_T(t,r_t^f)]^\alpha\,\Gamma_t^s(T,\alpha,\widehat{\sigma}_T),$$

其中

$$\Gamma_t^s(T,\alpha,\sigma_T) := \exp\left(\frac{1}{2}\int_t^T \alpha(\alpha-1)\,\sigma_T^2(u)\ du\right)$$

and

$$\Gamma_t^s(T,\alpha,\widehat{\sigma}_T) := \exp\left(\frac{1}{2}\int_t^T \alpha(\alpha-1)\,\widehat{\sigma}_T^2(u)\ du\right).$$

特别地，$\Gamma_t^s(T,\ 1,\ \cdot) = 1$对任意 $t \in [0,T]$均成立。

(ii) 当两个积分由同一个布朗运动驱动但积分区间不同时，会出现到期调整 Γ^m。具体而言，对于 $t < U < T$ 和 $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$，

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\exp\Big(-\alpha\int_t^U r_u^d\ du - \beta\int_t^T r_u^d\ du\Big)\ \Big|\ \mathcal{F}_t\Big] = [B_U(t,r_t^d)]^\alpha[B_T(t,r_t^d)]^\beta \times \Gamma_t^s(U,\alpha,\sigma_U)\,\Gamma_t^s(T,\beta,\sigma_T)\,\Gamma_t^m(U,\alpha\sigma_U,\beta\sigma_T),$$

其中

$$\Gamma_t^m(U,\alpha\sigma_U,\beta\sigma_T) := \exp\left(\int_t^U \alpha\beta\,\sigma_U(u)\sigma_T(u)\ du\right).$$

如果相关项涉及 r^f，则适当调整记号后，同样的规则仍然适用。

(iii) 当两个积分的积分区间相同，但由具有确定性相关性 ρ_{12} 的不同布朗运动驱动时，会出现相关性调整 Γ^c。对于每个 $t \in [0,T]\alpha$、$\beta \in \mathbb{R}$，我们有：

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\exp\Big(-\alpha\int_t^T r_u^d\ du - \beta\int_t^T r_u^f\ du\Big)\ \Big|\ \mathcal{F}_t\Big] = [B_T(t,r_t^d)]^\alpha[\widehat{B}_T(t,r_t^f)]^\beta \times \Gamma_t^s(T,\alpha,\sigma_T)\,\Gamma_t^s(T,\beta,\widehat{\sigma}_T)\,\Gamma_t^c(T,\alpha\sigma_T,\beta\widehat{\sigma}_T,\rho_{12}),$$

其中

$$\Gamma_t^c(T,\alpha\sigma_T,\beta\widehat{\sigma}_T,\rho_{12}) := \exp\left(\int_t^T \alpha\beta\sigma_T(u)\widehat{\sigma}_T(u)\,\rho_{12}\ du\right).$$

(iv) 当条件期望包含概率测度的等价变换时，会产生漂移调整 $\widehat{\Gamma}^d$。此时，对于所有 $t \in [0,T]$ 和 $\alpha \in \mathbb{R}$，修正项的形式为：

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[\exp\Big(-\alpha\int_t^T r_u^f\ du\Big)\ \Big|\ \mathcal{F}_t\Big] = \mathbb{E}_{\widehat{\mathbb{Q}}}\Big[\exp\Big(-\alpha\int_t^T r_u^f\ du\Big)\ \Big|\ \mathcal{F}_t\Big]\,\widehat{\Gamma}_t^d(T,\bar{\sigma},\alpha\widehat{\sigma}_T,\rho_{23}) = [\widehat{B}_T(t,r_t^f)]^\alpha\,\Gamma_t^s(T,\alpha,\widehat{\sigma}_T)\,\widehat{\Gamma}_t^d(T,\bar{\sigma},\alpha\widehat{\sigma}_T,\rho_{23}),$$

其中

$$\widehat{\Gamma}_t^d(T,\bar{\sigma},\alpha\widehat{\sigma}_T,\rho_{23}) := \exp\left(\int_t^T \bar{\sigma}\alpha\widehat{\sigma}_T(u)\rho_{23}\ du\right).$$

4.2 全额外国货币抵押下互换的定价

我们始终假设本币为美元，本币隔夜利率为 SOFR，记作 r^d。外币为欧元，外币隔夜利率为 €STR，记作 r^f。在本部分中，我们考虑定义 2.3 中所述、对应计息期 $[U,T]$且于 T期末结算的单期互换。不失一般性，我们令 $P=1$；在后续定价公式中，一般名义本金对应的价格可通过乘以实际名义本金P得到。

我们首先研究全额外币抵押基准，其中欧元现金抵押品按照外国抵押品利率 $r^c=r^f+\alpha^{c,\,f}$计息。记

$$A^{c,f}_{t,T}:=\exp\Big(-\int_t^T \alpha^{c,f}_u\,du\Big),$$

这意味着有效对冲/贴现利率等于 r^c。注意，命题4.1中出现的所有凸性修正都是确定性函数，因此不会产生额外的对冲项。利用等式 $\delta R^d(U,\ T)=e^{\int_U^T r^d_u\,du}-1$和 $\delta R^f(U,\ T)=e^{\int_U^T r^f_u\,du}-1$，我们可以将式（2.1）给出的现金流便捷地分解为 $P=1$

$$\mathbf{DS}^{\gamma,\kappa}_T(U,T)=e^{\int_U^T r^d_u\,du}-\gamma e^{\int_U^T r^f_u\,du}-(1-\gamma+\delta\kappa)=:I^{(1)}_T-\gamma I^{(2)}_T-(1-\gamma+\delta\kappa)I^{(3)}_T. \tag{4.1}$$

命题4.1。 对于任意 $t\in[0,T]$，在全额外国货币抵押下，单期*SOFR/€STR*互换的无套利价格满足

$$\mathbf{DS}^{c,\gamma,\kappa}_t(U,T):=\pi^c_t\big(\mathbf{DS}^{\gamma,\kappa}_T(U,T)\big)=I^{(1)}_t-\gamma I^{(2)}_t-(1-\gamma+\delta\kappa)\,I^{(3)}_t.$$

(i) 本币浮动部分 $I^{(1)}$对于每个 $t\in[0,U]$，等于

$$I^{(1)}_t=A^{c,f}_{t,T}\,B_U(t,r^d_t)\,[B_T(t,r^d_t)]^{-1}\,\widehat{B}_T(t,r^f_t)\,\Gamma^{(1)}_t(U,T),$$

并且，对于每个 $t\in[U,T]$,

$$I^{(1)}_t=A^{c,f}_{t,T}\,(B^d_U)^{-1}B^d_t\,[B_T(t,r^d_t)]^{-1}\,\widehat{B}_T(t,r^f_t)\,\Gamma^{(1)}_t(U,T),$$

其中，凸性修正项 $\Gamma^{(1)}_t$ (U,T)对于每个 $t\in[0,U]$，定义为

$$\Gamma^{(1)}_t(U,T)=\Gamma^s_t(T,-1,\sigma_T)\,\Gamma^m_t(U,\sigma_U,-\sigma_T)\,\Gamma^c_t(U,\sigma_U,\widehat{\sigma}_T,\rho_{12})\,\Gamma^c_t(T,-\sigma_T,\widehat{\sigma}_T,\rho_{12})\,\widehat{\Gamma}^d_t(T,\bar{\sigma},\widehat{\sigma}_T,\rho_{23}),$$

并且，对于每个 $t\in[U,T]$,

$$\Gamma^{(1)}_t(U,T)=\Gamma^s_t(T,-1,\sigma_T)\,\Gamma^c_t(T,-\sigma_T,\widehat{\sigma}_T,\rho_{12})\,\widehat{\Gamma}^d_t(T,\bar{\sigma},\widehat{\sigma}_T,\rho_{23}).$$

(ii) 外币浮动部分 $I^{(2)}$对于每个 $t\in[0,U]$，等于

$$I^{(2)}_t=A^{c,f}_{t,T}\,\widehat{B}_U(t,r^f_t)\,\Gamma^{(2)}_t(U),\qquad \Gamma^{(2)}_t(U):=\widehat{\Gamma}^d_t(U,\bar{\sigma},\widehat{\sigma}_U,\rho_{23}),$$

并且，对于每个 $t\in[U,T]$,

$$I^{(2)}_t=A^{c,f}_{t,T}\,\exp\Big(\int_U^t r^f_u\,du\Big)=A^{c,f}_{t,T}\,(B^f_U)^{-1}B^f_t.$$

(iii) 固定部分 $I^{(3)}$对于每个 $t\in[0,T]$均等于，

$$I^{(3)}_t=A^{c,f}_{t,T}\,\widehat{B}_T(t,r^f_t)\,\Gamma^{(3)}_t(T),\qquad \Gamma^{(3)}_t(T):=\widehat{\Gamma}^d_t(T,\bar{\sigma},\widehat{\sigma}_T,\rho_{23}).$$

证明。 根据 (2.1) 以及等式 $\delta R^d(U,T) = \exp(\int_U^T r_u^d\,du) - 1$ 和 $\delta R^f(U,T) = \exp(\int_U^T r_u^f\,du) - 1$，终端支付可表示为

$$\mathbf{DS}_T^{\gamma,\kappa}(U,T) = \exp\Big(\int_U^T r_u^d\,du\Big) - \gamma\exp\Big(\int_U^T r_u^f\,du\Big) - (1-\gamma+\delta\kappa). \tag{4.2}$$

在全额外国货币抵押下，有效贴现率等于 $r^\beta = r^c = r^f + \alpha^{c,f}$ 因此 $A^{\beta,t,T} = A^{c,f}_{t,T}$。于是

$$\mathbf{DS}_t^{c,\gamma,\kappa}(U,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[e^{-\int_t^T (r_u^f+\alpha_u^{c,f})\,du}\,\mathbf{DS}_T^{\gamma,\kappa}(U,T)\,\Big|\,\mathcal{F}_t\Big] = I_t^{(1)} - \gamma I_t^{(2)} - (1-\gamma+\delta\kappa)I_t^{(3)},$$

根据线性关系，我们定义三个定价组成部分。

国内浮动腿。对于 $t\in[0,U]$,

$$I_t^{(1)} := \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[e^{-\int_t^T (r_u^f+\alpha_u^{c,f})\,du}\,e^{\int_U^T r_u^d\,du}\,\Big|\,\mathcal{F}_t\Big] = A^{c,f}_{t,T}\,\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[e^{\int_t^T r_u^d\,du - \int_t^U r_u^d\,du - \int_t^T r_u^f\,du}\,\Big|\,\mathcal{F}_t\Big],$$

由此可得关于 $B_U(t,\ r_t^d)$、 $B_T(t,\ r_t^d)$ 和 $\widehat{B}_T(t,\ r_t^f)$ 的所述因子分解，其修正项为 $\Gamma_t^{(1)}(U,\ T)$。对于 $t\in[U,T]$，我们使用 $e^{-\int_t^U r_u^d\,du} = e^{\int_U^t r_u^d\,du} = (B_U^d)^{-1}B_t^d$，并得到包含 $\Gamma_t^{(1)}(U,\ T)$ 的第二种表示形式。

外国浮动腿。对于 $t\in[0,U]$,

$$\begin{aligned} I_t^{(2)} :&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[e^{-\int_t^T (r_u^f+\alpha_u^{c,f})\,du}\,e^{\int_U^T r_u^f\,du}\,\Big|\,\mathcal{F}_t\Big] = A^{c,f}_{t,T}\,\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[e^{-\int_t^U r_u^f\,du}\,\Big|\,\mathcal{F}_t\Big] \\ &= A^{c,f}_{t,T}\,\widehat{B}_U(t,r_t^f)\,\widehat{\Gamma}_t^d(U,\bar\sigma,\widehat\sigma_U,\rho_{23}), \end{aligned}$$

其中最后一步依据引理 4.1 中的漂移调整规则得出。对于 $t\in[U,T]$，量 $\exp(-\int_t^U r_u^f\,du) = \exp(\int_U^t r_u^f\,du) = (B_U^f)^{-1}B_t^f$ 是 $\mathcal{F}_t$-可测的，从而得到所述表达式。固定腿。 对于每个 $t\in[0,T]$

$$I_t^{(3)} := \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[e^{-\int_t^T (r_u^f+\alpha_u^{c,f})\,du}\,\Big|\,\mathcal{F}_t\Big] = A^{c,f}_{t,T}\,\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[e^{-\int_t^T r_u^f\,du}\,\Big|\,\mathcal{F}_t\Big] = A^{c,f}_{t,T}\,\widehat{B}_T(t,r_t^f)\,\widehat{\Gamma}_t^d(T,\bar\sigma,\widehat\sigma_T,\rho_{23}),$$

这就是所声称的形式，其中 $\Gamma_t^{(3)}(T) = \widehat{\Gamma}_t^d(T,\ \bar\sigma,\ \widehat\sigma_T,\ \rho_{23})$。 □

对于全额外币抵押的单期 SOFR/€STR 差额互换，可以将相关的条件期望改写为因子化形式，该形式不同于第4.1节中引入的通常凸性修正。

命题4.2。 对于每个 $t\in[0,T]$，采用全额外币抵押的单期 *SOFR/€STR* 互换的无套利价格满足

$$\mathbf{DS}_t^{c,\gamma,\kappa}(U,T) := \pi_t^c\big(\mathbf{DS}_T^{\gamma,\kappa}(U,T)\big) = I_t^{(1)} - \gamma I_t^{(2)} - (1-\gamma+\delta\kappa)I_t^{(3)}$$

其中，外国浮动腿 $I^{(2)}$ 和固定腿 $I^{(3)}$ 如命题*4.1*所述，本币浮动腿 $I^{(1)}$ 的价格等于

$$I_t^{(1)} = A^{c,f}_{t,T}\,\big(1+\delta F_t^d(U,T)\big)\widehat{B}_T(t,r_t^f)\Gamma_t^{(1)'}(U,T), \qquad t\in[0,T],$$

其中，修正凸性修正 $\Gamma_t^{(1)'}(U,T)$ 满足，对于 $t\in[0,U]$

$$\Gamma_t^{(1)'}(U,T) = \Gamma_t^c(U,\sigma_U,\widehat\sigma_T,\rho_{12})\,\Gamma_t^c(T,-\sigma_T,\widehat\sigma_T,\rho_{12})\,\widehat{\Gamma}_t^d(T,\bar\sigma,\widehat\sigma_T,\rho_{23})$$

并且，对于 $t\in[U,T]$

$$\Gamma_t^{(1)'}(U,T) = \Gamma_t^c(T,-\sigma_T,\widehat\sigma_T,\rho_{12})\,\widehat{\Gamma}_t^d(T,\bar\sigma,\widehat\sigma_T,\rho_{23}).$$

证明。 只需证明本币浮动部分$I^{(1)}$的基于期货的表示。回想一下，在全额外国货币抵押下，

$$I_t^{(1)} = A_{t,T}^{c,f}\,\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[e^{\int_U^T r_u^d\,du-\int_t^T r_u^f\,du}\,\Big|\,\mathcal{F}_t\Big].$$

使用 $\delta R^d(U,\ T)\ = e^{\int_U^T r_u^d\,du}-1$，我们得到

$$1+\delta F_t^d(U,T)=\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[e^{\int_U^T r_u^d\,du}\,\Big|\,\mathcal{F}_t\Big],\qquad t\in[0,T],$$

其中， $F^d(U,\ T)$ 是定义3.1中的国内利率期货。因此，我们的目标是将条件期望因子分解为乘积 $\big(1+\delta F_t^d(U,\ T)\big)\widehat{B}_T(t,\ r_t^f)$，并辅以一个确定性修正项。

情形 $t\in[0,U]$. 将相同的凸性修正因子分解应用于单 指数矩 $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\big[\exp(\int_U^T r_u^d\,du)\,|\,\mathcal{F}_t\big]$，得到

$$1+\delta F_t^d(U,T)=B_U(t,r_t^d)\,[B_T(t,r_t^d)]^{-1}\,\Gamma_t^s(T,-1,\sigma_T)\,\Gamma_t^m(U,\sigma_U,-\sigma_T),\qquad t\in[0,U].\tag{4.3}$$

另一方面，根据命题4.1，我们已经得到基于债券的因子分解

$$I_t^{(1)}=A_{t,T}^{c,f}\,B_U(t,r_t^d)\,[B_T(t,r_t^d)]^{-1}\,\widehat{B}_T(t,r_t^f)\,\Gamma_t^{(1)}(U,T),\qquad t\in[0,U],\tag{4.4}$$

with

$$\Gamma_t^{(1)}(U,T)=\Gamma_t^s(T,-1,\sigma_T)\,\Gamma_t^m(U,\sigma_U,-\sigma_T)\,\Gamma_t^c(U,\sigma_U,\widehat{\sigma}_T,\rho_{12})\,\Gamma_t^c(T,-\sigma_T,\widehat{\sigma}_T,\rho_{12})\,\widehat{\Gamma}_t^d(T,\bar{\sigma},\widehat{\sigma}_T,\rho_{23}).$$

结合式(4.3)和(4.4)，我们得到

$$I_t^{(1)}=A_{t,T}^{c,f}\,\big(1+\delta F_t^d(U,T)\big)\,\widehat{B}_T(t,r_t^f)\,\Gamma_t^{(1)'}(U,T),\qquad t\in[0,U],$$

其中 $\Gamma_t^{(1)'}(U,T)$ 如上所述。

情形 $t\in[U,T]$. 同样的论证适用于 $B_U(t,r_t^d)\ =(B_U^d)^{-1}B_t^d$。由此得到带有相应修正项 $\Gamma_t^{(1)'}(U,T)$ 的表示，其显式形式通过同样的替换得到。

□

命题4.2中引入的调整并非第4.1节意义上的凸性修正，但它起着类似的作用：它是由本币与国外短期利率因子之间的高斯依赖关系所诱导的修正的相关性调整。特别地，若本币与外币利率因子相互独立（或更一般地，在高斯设定下不相关），则该调整退化为1。

注记4.1。 命题4.2的定价公式对于第 5 节中的对冲分析尤为方便，因为一旦将浮动腿直接表示为所交易的SOFR期货利率 $F^d(U,T)$，随后的伊藤分解便可依据国内期货过程的动态写出。更一般地，并不存在唯一的“最佳”闭式表达式：同一价格可以给出若干等价表示，其用处取决于预期的应用。

4.3 比例外币抵押品化互换的定价

我们考虑一个以计息期 $[U,T]$ 为参考、并于 T 期末支付的单期 SOFR/€STR 付款方互换。抵押品仍以外币提供，并按利率 $r^c=r^f+\alpha^{c,\ f}$ 计息。根据第2.3节引入的比例抵押约定，

抵押品融资通过有效利率 $r^{\beta} = (1-\beta)r^h + \beta r^c$ 纳入定价公式。回想一下， $r^h = r^d + \alpha^h$ 和 $r^c = r^f + \alpha^{c,f}$，其中 α^h 和 $\alpha^{c,f}$ 是确定性利差，因此

$$r_u^{\beta} = \beta r_u^f + (1-\beta) r_u^d + \alpha_u^{\beta,f}, \qquad \alpha^{\beta,f} := \beta\alpha^{c,f} + (1-\beta)\alpha^h.$$

我们引入扩展确定性贴现因子

$$A_{t,T}^{\beta,f} := \exp\Big(-\int_t^T \alpha_u^{\beta,f}\, du\Big).$$

比例外国抵押下互换的无套利价格过程记为

$$\mathbf{DS}_t^{\beta,\gamma,\kappa}(U,T) := \pi_t^{\beta}\big(\mathbf{DS}_T^{\gamma,\kappa}(U,T)\big), \qquad t \in [0,T].$$

对于 $\beta = 1$ 由命题 4.3 给出的价格 $\mathbf{DS}^{\beta,\gamma,\kappa}(U,T)$，当设定 $\beta = 0$时，它将化为命题4.2中得到的全额外国货币抵押互换的价格 $\mathbf{DS}_t^{c,\gamma,\kappa}(U,T)$；而设定 $\beta = 0$则得到无抵押基准，对应于按本币融资利率 r^h进行有效贴现。

命题 4.3。对于每个 $t \in [0,T]$，抵押水平为 β 的单期 *SOFR/€STR* 互换（采用比例外国抵押）的无套利价格满足

$$\mathbf{DS}_t^{\beta,\gamma,\kappa}(U,T) := \pi_t^{\beta}\big(\mathbf{DS}_T^{\gamma,\kappa}(U,T)\big) = I_t^{(1)} - \gamma I_t^{(2)} - (1-\gamma+\delta\kappa)\, I_t^{(3)}.$$

(i) 对于每个 $t \in [0,U]$，本币浮动部分 $I^{(1)}$ 等于

$$I_t^{(1)} = A_{t,T}^{\beta,f}\, B_U(t, r_t^d)\, [B_T(t, r_t^d)]^{-\beta}\, [\widehat{B}_T(t, r_t^f)]^{\beta}\, \Gamma_t^{(1)}(U,T),$$

其中

$$\begin{aligned}\Gamma_t^{(1)}(U,T) = {} & \Gamma_t^s(T, -\beta, \sigma_T)\Gamma_t^s(T, \beta, \widehat{\sigma}_T)\, \Gamma_t^m(U, \sigma_U, -\beta\sigma_T)\Gamma_t^c(U, \sigma_U, \beta\widehat{\sigma}_T, \rho_{12}) \\ & \times \Gamma_t^c(T, -\beta\sigma_T, \beta\widehat{\sigma}_T, \rho_{12})\, \widehat{\Gamma}_t^d(T, \bar{\sigma}, \beta\widehat{\sigma}_T, \rho_{23}),\end{aligned}$$

并且，对每一个 $t \in [U,T]$，

$$I_t^{(1)} = A_{t,T}^{\beta,f}\, (B_U^d)^{-1} B_t^d\, [B_T(t, r_t^d)]^{-\beta}\, [\widehat{B}_T(t, r_t^f)]^{\beta}\, \Gamma_t^{(1)}(U,T),$$

其中

$$\Gamma_t^{(1)}(U,T) = \Gamma_t^s(T, -\beta, \sigma_T)\Gamma_t^s(T, \beta, \widehat{\sigma}_T)\, \Gamma_t^c(T, -\beta\sigma_T, \beta\widehat{\sigma}_T, \rho_{12})\, \widehat{\Gamma}_t^d(T, \bar{\sigma}, \beta\widehat{\sigma}_T, \rho_{23}).$$

(ii) 外币浮动部分 $I^{(2)}$ 等于，对每一个 $t \in [0,U]$，

$$I_t^{(2)} = A_{t,T}^{\beta,f}\, \widehat{B}_U(t, r_t^f)\, [B_T(t, r_t^d)]^{1-\beta}\, [\widehat{B}_T(t, r_t^f)]^{\beta-1}\, \Gamma_t^{(2)}(U,T),$$

其中确定性修正为

$$\begin{aligned}\Gamma_t^{(2)}(U,T) = {} & \Gamma_t^s(T, 1-\beta, \sigma_T)\, \Gamma_t^s(T, \beta-1, \widehat{\sigma}_T)\, \Gamma_t^m(U, \widehat{\sigma}_U, (\beta-1)\widehat{\sigma}_T) \\ & \times \Gamma_t^c(U, (1-\beta)\sigma_T, \widehat{\sigma}_U, \rho_{12})\, \Gamma_t^c(T, (1-\beta)\sigma_T, (\beta-1)\widehat{\sigma}_T, \rho_{12}) \\ & \times \widehat{\Gamma}_t^d(U, \bar{\sigma}, \widehat{\sigma}_U, \rho_{23})\, \widehat{\Gamma}_t^d(T, \bar{\sigma}, (\beta-1)\widehat{\sigma}_T, \rho_{23}).\end{aligned}$$

对每一个 $t \in [U,T]$，

$$I_t^{(2)} = A_{t,T}^{\beta,f}\, (B_U^f)^{-1} B_t^f\, [B_T(t, r_t^d)]^{1-\beta}\, [\widehat{B}_T(t, r_t^f)]^{\beta-1}\, \Gamma_t^{(2)}(T),$$

其中

$$\Gamma_t^{(2)}(T) = \Gamma_t^s(T, 1-\beta, \sigma_T)\, \Gamma_t^s(T, \beta-1, \widehat{\sigma}_T)\, \Gamma_t^c(T, (1-\beta)\sigma_T, (\beta-1)\widehat{\sigma}_T, \rho_{12})\, \widehat{\Gamma}_t^d(T, \bar{\sigma}, (\beta-1)\widehat{\sigma}_T, \rho_{23}).$$

(iii) 对每个 $t \in [0,T]$，固定部分 $I^{(3)}$ 等于，

$$I_t^{(3)} = A_{t,T}^{\beta,f}\, [B_T(t, r_t^d)]^{1-\beta}\, [\widehat{B}_T(t, r_t^f)]^{\beta}\, \Gamma_t^{(3)}(T),$$

其中

$$\Gamma_t^{(3)}(T) = \Gamma_t^s(T, 1-\beta, \sigma_T)\, \Gamma_t^s(T, \beta, \widehat{\sigma}_T)\, \Gamma_t^c(T, (1-\beta)\sigma_T, \beta\widehat{\sigma}_T, \rho_{12})\, \widehat{\Gamma}_t^d(T, \bar{\sigma}, \beta\widehat{\sigma}_T, \rho_{23}).$$

证明。 利用 (4.2)，我们得到

$$\mathbf{DS}_t^{\beta,\gamma,\kappa}(U,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[e^{-\int_t^T r_u^\beta\,du}\,\mathbf{DS}_T^{\gamma,\kappa}(U,T)\,\Big|\,\mathcal{F}_t\Big] = I_t^{(1)} - \gamma I_t^{(2)} - (1-\gamma+\delta\kappa)I_t^{(3)},$$

其中， $I^{(1)}$， $I^{(2)}$， $I^{(3)}$ 分别对应式（4.2）中的三项。

国内浮动腿。对于 $t \in [0,U]$,

$$\begin{aligned} I_t^{(1)} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[e^{-\int_t^T r_u^\beta\,du}\,e^{\int_U^T r_u^d\,du}\,\Big|\,\mathcal{F}_t\Big] = A_{t,T}^{\beta,f}\,\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[e^{-\int_t^T(\beta r_u^f+(1-\beta)r_u^d)\,du}\,e^{\int_U^T r_u^d\,du}\,\Big|\,\mathcal{F}_t\Big] \\ &= A_{t,T}^{\beta,f}\,\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[e^{\int_t^T \beta r_u^d\,du-\int_t^U r_u^d\,du-\int_t^T \beta r_u^f\,du}\,\Big|\,\mathcal{F}_t\Big], \end{aligned}$$

根据引理 4.1，这给出了带有 $\Gamma_t^{(1)}(U,\ T)$ 的因子分解。对于 $t \in [U,T]$，我们使用 $e^{-\int_t^U r_u^d\,du} = e^{\int_U^t r_u^d\,du} = (B_U^d)^{-1}B_t^d$，并得到第二种表示。

外国浮动腿。对于 $t \in [0,U]$,

$$\begin{aligned} I_t^{(2)} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[e^{-\int_t^T r_u^\beta\,du}\,e^{\int_U^T r_u^f\,du}\,\Big|\,\mathcal{F}_t\Big] = A_{t,T}^{\beta,f}\,\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[e^{-\int_t^T(\beta r_u^f+(1-\beta)r_u^d)\,du}\,e^{\int_U^T r_u^f\,du}\,\Big|\,\mathcal{F}_t\Big] \\ &= A_{t,T}^{\beta,f}\,\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[e^{-(1-\beta)\int_t^T r_u^d\,du+(1-\beta)\int_t^T r_u^f\,du-\int_t^U r_u^f\,du}\,\Big|\,\mathcal{F}_t\Big], \end{aligned}$$

引理 4.1 给出了所述表示。对于 $t \in [U,T]$，我们利用等式 $e^{-\int_t^U r_u^f\,du} = e^{\int_U^t r_u^f\,du} = (B_U^f)^{-1}B_t^f$，得到第二个表达式以及调整项 $\Gamma_t^{(2)}(T)$。

固定腿。最后，

$$I_t^{(3)} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[e^{-\int_t^T r_u^\beta\,du}\,\Big|\,\mathcal{F}_t\Big] = A_{t,T}^{\beta,f}\,\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[e^{-\int_t^T((1-\beta)r_u^d+\beta r_u^f)\,du}\,\Big|\,\mathcal{F}_t\Big],$$

因此，引理 4.1 得出所述因子分解，其中包含 $\Gamma_t^{(3)}(T)$。 □

在具有确定性波动率的高斯设定下，所有凸性修正都是时间的确定性函数。因此，它们不会引入任何额外的可对冲风险因子：在价格的 Itˆo 分解中，它们只会缩放风险敞口，不会贡献新的随机驱动因素。

4.4 推广至多期差异互换

我们将第4.3节的单期定价结果推广至由 SOFR/€STR 构成的多期支付方互换，其支付日期为 $T_0 < T_1 < \cdots < T_n$，计息因子为 $\delta_j := T_j - T_{j-1}$。对于 $j = 1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ n$，第 j 个票息（于 T_j 期末结算）等于

$$\delta_j\big(R^d(T_{j-1},T_j) - \gamma R^f(T_{j-1},T_j) - \kappa\big) = \exp\Big(\int_{T_{j-1}}^{T_j} r_u^d\,du\Big) - \gamma\exp\Big(\int_{T_{j-1}}^{T_j} r_u^f\,du\Big) - (1-\gamma+\delta_j\kappa).$$

我们假设按比例进行外币抵押，比例水平为 $\beta \in [0,1]$，抵押品以外币（欧元）缴纳，并按 $r^c = r^f + \alpha^{c,f}$ 计息。与上一节一样，有效对冲利率为

$$r_u^\beta = \beta r_u^f + (1-\beta)r_u^d + \alpha_u^{\beta,f}, \qquad \alpha^{\beta,f} := \beta\alpha^{c,f} + (1-\beta)\alpha^h,$$

并且我们设定确定性因子

$$A_{t,T}^{\beta,f} := \exp\Big(-\int_t^T \alpha_u^{\beta,f}\,du\Big), \qquad T \geq t.$$

命题 4.4. 对每个 $t \in [0, T_n]$，令 $k(t) := \min\{j \in \{1, 2, \ldots, n\} : t \le T_j\}$. 则水平为 β 的按比例外币抵押品化多期 *SOFR/€STR* 互换的无套利（除息）价格满足

$$\begin{aligned}\mathbf{DS}_t^{\beta,\gamma,\kappa}(T_0, n) &:= \pi_t^{\beta}\left(\sum_{j=k(t)}^{n} \delta_j \big(R^d(T_{j-1}, T_j) - \gamma R^f(T_{j-1}, T_j) - \kappa\big)\right) \\ &= \sum_{j=k(t)}^{n} \Big(I_j^{(1)}(t) - \gamma I_j^{(2)}(t) - (1 - \gamma + \delta_j \kappa)\, I_j^{(3)}(t)\Big),\end{aligned}$$

其中，对每个 $j = 12$、…、n,

$$I_j^{(1)}(t) := \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[e^{-\int_t^{T_j} r_u^{\beta}\, du}\, e^{\int_{T_{j-1}}^{T_j} r_u^{d}\, du} \,\Big|\, \mathcal{F}_t\Big], \quad I_j^{(2)}(t) := \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[e^{-\int_t^{T_j} r_u^{\beta}\, du}\, e^{\int_{T_{j-1}}^{T_j} r_u^{f}\, du} \,\Big|\, \mathcal{F}_t\Big],$$
$$I_j^{(3)}(t) := \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big[e^{-\int_t^{T_j} r_u^{\beta}\, du} \,\Big|\, \mathcal{F}_t\Big].$$

(i) 若 $t \in [0, T_{j-1}]$，则

$$\begin{aligned}I_j^{(1)}(t) &= A_{t,T_j}^{\beta,f}\, B_{T_{j-1}}(t, r_t^d)\, [B_{T_j}(t, r_t^d)]^{-\beta}\, [\widehat{B}_{T_j}(t, r_t^f)]^{\beta}\, \Gamma_t^{(1)}(T_{j-1}, T_j), \\ I_j^{(2)}(t) &= A_{t,T_j}^{\beta,f}\, \widehat{B}_{T_{j-1}}(t, r_t^f)\, [B_{T_j}(t, r_t^d)]^{1-\beta}\, [\widehat{B}_{T_j}(t, r_t^f)]^{\beta-1}\, \Gamma_t^{(2)}(T_{j-1}, T_j), \\ I_j^{(3)}(t) &= A_{t,T_j}^{\beta,f}\, [B_{T_j}(t, r_t^d)]^{1-\beta}\, [\widehat{B}_{T_j}(t, r_t^f)]^{\beta}\, \Gamma_t^{(3)}(T_j).\end{aligned}$$

(ii) 若 $t \in [T_{j-1}, T_j]$，则

$$\begin{aligned}I_j^{(1)}(t) &= A_{t,T_j}^{\beta,f}\, (B_{T_{j-1}}^d)^{-1} B_t^d\, [B_{T_j}(t, r_t^d)]^{-\beta}\, [\widehat{B}_{T_j}(t, r_t^f)]^{\beta}\, \Gamma_t^{(1)}(T_j), \\ I_j^{(2)}(t) &= A_{t,T_j}^{\beta,f}\, (B_{T_{j-1}}^f)^{-1} B_t^f\, [B_{T_j}(t, r_t^d)]^{1-\beta}\, [\widehat{B}_{T_j}(t, r_t^f)]^{\beta-1}\, \Gamma_t^{(2)}(T_j),\end{aligned}$$

且 $I_j^{(3)}(t)$ 与第 ***(i)*** 部分相同。此外，在采用确定性波动率的高斯设定下，所有修正因子均有闭式表达式，可通过对命题 *4.3* 作替换 $(U, T) \mapsto (T_{j-1}, T_j)$ 以及 $\delta \mapsto \delta_j$ 得到。

证明。 定价算子 $\pi_t^{\beta}(\cdot)$ 的线性性以及互换支付的可加性可得

$$\begin{aligned}\mathbf{DS}_t^{\beta,\gamma,\kappa}(T_0, n) &= \sum_{j=k(t)}^{n} \pi_t^{\beta}\left(e^{\int_{T_{j-1}}^{T_j} r_u^d\, du} - \gamma e^{\int_{T_{j-1}}^{T_j} r_u^f\, du} - (1 - \gamma + \delta_j \kappa)\right) \\ &= \sum_{j=k(t)}^{n} \Big(I_j^{(1)}(t) - \gamma I_j^{(2)}(t) - (1 - \gamma + \delta_j \kappa)\, I_j^{(3)}(t)\Big).\end{aligned}$$

每个三元组 $(I_j^{(1)}, I_j^{(2)}, I_j^{(3)})$ 均按与单期情形（命题 4.3）完全相同的方式处理，即将 (U, T) 替换为 (T_{j-1}, T_j)（并将 δ 替换为 δ_j），并在 $t \ge T_{j-1}$ 时使用恒等式 $B_{T_{j-1}}(t, r_t^d) = (B_{T_{j-1}}^d)^{-1} B_t^d$ 和 $e^{-\int_t^{T_{j-1}} r_u^f\, du} = (B_{T_{j-1}}^f)^{-1} B_t^f$。 □

推论 4.1. 具有比例外国抵押的多期 *SOFR/€STR* 互换的无套利价格关于 κ 是仿射的，并且对每个 $t \in [0, T_0]$ 均可表示为

$$\mathbf{DS}_t^{\beta,\gamma,\kappa}(T_0, n) = \sum_{j=1}^{n} \Big(I_j^{(1)}(t) - \gamma I_j^{(2)}(t) - (1 - \gamma)\, I_j^{(3)}(t)\Big) - \kappa \sum_{j=1}^{n} \delta_j\, I_j^{(3)}(t). \tag{4.5}$$

由于 $I_j^{(3)}(t) > 0$ 对所有 j 成立，平价互换利率 $\kappa^\star = \kappa_t^\star(T_0, n; \beta, \gamma)$（它通过等式 $\mathbf{DS}_t^{\beta,\gamma,\kappa^\star}(T_0, n) = 0$ 隐式定义）由下式唯一给出

$$\kappa_t^\star(T_0, n; \beta, \gamma) = \frac{\sum_{j=1}^{n} \Big(I_j^{(1)}(t) - \gamma I_j^{(2)}(t) - (1 - \gamma) I_j^{(3)}(t)\Big)}{\sum_{j=1}^{n} \delta_j I_j^{(3)}(t)}. \tag{4.6}$$

等价地，

$$\mathbf{DS}_t^{\beta,\gamma,\kappa}(T_0,n)=\big(\kappa_t^\star(T_0,n;\beta,\gamma)-\kappa\big)\sum_{j=1}^{n}\delta_j I_j^{(3)}(t). \tag{4.7}$$

注 4.2. 命题 4.4 通过设定 $\beta=1$涵盖了全额外国货币抵押的情况；通过设定 $\beta=0$则涵盖了无抵押（本币融资）基准。在这两种情况下，多期价格均通过相同的分解方式获得，只需对凸性修正作相应的特殊化。

5 抵押品货币选择下基于期货的对冲

本节为抵押品货币选择下的差异互换构建基于期货的复制与对冲框架。与第 2 节的交易设置一致，我们将对冲工具限定为国内SOFR期货和外国 €STR期货。 $\gamma=0$ 这一情形将SOFR互换视为差异互换族的一个特例，但该对冲方法适用于所有情形。外国期货头寸通过辅助过程 $F^{f,\,q}$ 以本币单位表示，该过程考虑了每日结算以及外汇兑换所引起的二次协变差效应。下文推导所需的扩散输入汇总于注 3.1、3.2 和 3.3 中。

在比例抵押品化 $C_t=-\beta_t V_t(\varphi,C)$ 下，现金头寸并非独立的控制变量：一旦财富过程得到复制， φ^0 便由等式确定

$$(1-\beta_t)V_t(\varphi,C)=V_t^p(\varphi,C)=\varphi_t^0\,B_t^h,\qquad t\in[0,T].$$

因此，只需确定期货对冲比率（φ^d,φ^f）。我们首先讨论全额外币抵押基准，用上标 c 表示（对应于 $\beta\equiv1$），然后转向抵押水平为常数 $\beta\in[0,1]$ 的比例外币抵押。

在全额外币抵押的情形下，我们有 $\varphi^0\equiv0$，且复制完全通过抵押品报酬率 r^c 融资。为确定对冲策略的其余组成部分，我们将采用命题4.2中的基于期货的定价表示，该表示直接用交易的 SOFR 期货利率表示浮动部分，并由此得到清晰的伊藤分解。也可以从命题4.1出发实施同一复制方案，但所得动态不够清晰，因此本文不再探讨。

5.1 全额外币抵押下的对冲

为通过复制支持第4.2节的定价结果，我们现在为全额外币抵押下的单期 SOFR/€STR 互换构建复制策略。关键在于，一旦抵押品货币为外币，估值除了受外国浮动腿影响外，还会通过外币贴现因子受到额外随机驱动因素的影响。在当前框架中，这一额外风险可由外币利率期货覆盖，因此，对冲者可以使用两 份交易期货合约，同时中和该风险与本币SOFR敞口。

此处我们采用全额外币抵押，即 $\beta=1$ and $r^c=r^f+\alpha^{c,\,f}$，因此有效利率等于抵押品报酬率，现金部分为零。事实上，抵押品规则为 $C_t=-V_t(\varphi,\ C)$，因此 $V_t^p(\varphi,\ C)=V_t(\varphi,\ C)+C_t=0$，从而 $\varphi^0\equiv0$。因此，复制归结为确定期货合约的期货对冲比率（$\varphi^d,\ \varphi^f$）。

与经典的单期 LIBOR掉期不同，SOFR/€STR 互换的价格过程在计息区间 $[U,T]$内仍会持续变化。特别是，对冲比率在 $[U,T]$ 并非静态，因为（回溯的）已实现利率仍在累积，且期货扩散系数在 $t=U$ 发生变化（见注 3.2）。由于预计复制策略是连续的，因此自然可以推测 $\varphi^d_{U-}=\varphi^d_{U+}$ 和 $\varphi^f_{U-}=\varphi^f_{U+}$，这一点将得到证明。

回顾一下，期限为 $[U,T]$ 的单期 SOFR/€STR 付款方互换在 T 的收益为

$$X_T = \delta\big(R^d(U,T) - \gamma R^f(U,T) - \kappa\big) = \exp\Big(\int_U^T r_u^d\, du\Big) - \gamma \exp\Big(\int_U^T r_u^f\, du\Big) - (1 - \gamma + \delta\kappa),$$

其中 $\delta = T - U$。其全额外币抵押下的无套利价格，记为 $\mathbf{DS}_t^{c,\gamma,\kappa}(U,T)$，由命题4.1给出。现在我们构造一个明确的复制策略。

命题5.1。考虑终端支付为 $\mathbf{DS}_T^{\gamma,\kappa}(U,T)$、采用全额外币抵押的单期 *SOFR/€STR* 互换。无套利价格过程 $\mathbf{DS}^{c,\gamma,\kappa}(U,T)$ 可由自融资抵押期货策略 $(\varphi, C) = (\varphi^0, \varphi^d, \varphi^f, C)$ 复制，其中 $C = -V$ 且

$$V_t(\varphi, C) = \mathbf{DS}_t^{c,\gamma,\kappa}(U,T), \qquad t \in [0,T].$$

对冲比率由 $\varphi^0 \equiv 0$ 给出，

$$\varphi_t^d = \delta\, A_{t,T}^{c,f}\, \widehat{B}_T(t, r_t^f)\, \Gamma_t^{(1)'}(U,T), \tag{5.1}$$

$$\varphi_t^f = \frac{1}{\nu_t^{f,q}}\Big(\widehat{\sigma}_T(t)\, \mathbf{DS}_t^{c,\gamma,\kappa}(U,T) + \gamma(\widehat{\sigma}_T(t) - \mathbf{1}_{\{t\le U\}}\, \widehat{\sigma}_U(t))\, I_t^{(2)}\Big), \tag{5.2}$$

其中：*(i)* $\Gamma^{(1)'}(U,T)$ 是命题*4.2*中的修正的相关性调整；*(ii)* $\widehat{\sigma}_T(t)$（分别为 $\widehat{\sigma}_U(t)$）是注 *3.1* 中 $\widehat{B}_T(t, r_t^f)$（分别为 $\widehat{B}_U(t, r_t^f)$）的扩散系数；*(iii)* $\nu^{f,q}$ 是注 *3.3* 中 $F^{f,q}(U,T)$ 的扩散系数；$I^{(2)}$ 是命题*4.1*中的定价分量。

证明。任何采用全额外国货币抵押的自融资期货策略，其财富动态均简化为 $\varphi^0 \equiv 0$和

$$dV_t(\varphi, C) = r_t^c\, V_t(\varphi, C)\, dt + \varphi_t^d\, dF_t^d(U,T) + \varphi_t^f\, dF_t^{f,q}(U,T), \tag{5.3}$$

其中，根据注 3.3，$dF^{f,q}_t(U,T) = \nu^{f,q}_t\, dZ_t^2$在 $\mathbb{Q}$ 下。我们寻求满足以下条件的 (φ^d, φ^f)：对所有 $t \in [0,T]$，$V_t(\varphi, C) = \mathbf{DS}^{c,\gamma,\kappa}_t(U,T)$。为此，我们使用价格分解

$$\mathbf{DS}_t^{c,\gamma,\kappa}(U,T) = I_t^{(1)} - \gamma I_t^{(2)} - (1 - \gamma + \delta\kappa)\, I_t^{(3)},$$

其中，$I^{(1)}$ 由命题4.2给出，$I^{(2)}$，$I^{(3)}$ 如命题4.1所述。特别地，$A^{c,f}_{t,T}$ 且所有修正因子都是 t 的确定性函数。由于 $(B_t^c)^{-1}\mathbf{DS}^{c,\gamma,\kappa}_t(U,T)$ 是一个 $\mathbb{Q}$-鞅，只需匹配 Itô 分解中的局部鞅部分。利用命题4.1和命题4.2，我们对每个 $t \in [0,T]$ 得到

$$\begin{aligned}
I_t^{(1)} &= A_{t,T}^{c,f}\, \widehat{B}_T(t, r_t^f)\, \Gamma_t^{(1)'}(U,T)\, \big(1 + \delta\, F_t^d(U,T)\big),\\
I_t^{(2)} &= A_{t,T}^{c,f}\, \widehat{B}_U(t, r_t^f)\, \Gamma_t^{(2)}(U) \mathbb{1}_{\{t\le U\}} + A_{t,T}^{c,f}\, (B_U^f)^{-1} B_t^f \mathbb{1}_{\{t>U\}},\\
I_t^{(3)} &= A_{t,T}^{c,f}\, \widehat{B}_T(t, r_t^f)\, \Gamma_t^{(3)}(T),
\end{aligned}$$

其中，$\Gamma_t^{(1)'}(U,T)$ $\Gamma_t^{(2)}(U)$ 和 $\Gamma_t^{(3)}(T)$ 是确定性的。因此，利用注 3.1，我们得到

$$\begin{aligned}
dI_t^{(1)} &\simeq A_{t,T}^{c,f}\, \widehat{B}_T(t, r_t^f)\, \Gamma_t^{(1)'}(U,T)\, \delta\; dF_t^d(U,T) \;+\; I_t^{(1)}\, \widehat{\sigma}_T(t)\; dZ_t^2,\\
dI_t^{(2)} &\simeq \mathbf{1}_{\{t\le U\}}\, I_t^{(2)}\, \widehat{\sigma}_U(t)\; dZ_t^2, \qquad dI_t^{(3)} \simeq\; I_t^{(3)}\, \widehat{\sigma}_T(t)\; dZ_t^2,
\end{aligned}$$

其中我们使用了 $d\widehat{B}_T(t, r_t^f) \simeq \widehat{B}_T(t, r_t^f)\widehat{\sigma}_T(t)\, dZ_t^2$以及 $I^{(2)}$ 在 $[U,T]$ 上具有有限变差这一事实。一方面，对每一个 $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}
d\mathbf{DS}_t^{c,\gamma,\kappa}(U,T) \simeq\; & A_{t,T}^{c,f}\, \widehat{B}_T(t, r_t^f)\, \Gamma_t^{(1)'}(U,T)\, \delta\; dF_t^d(U,T)\\
&+ \Big(\widehat{\sigma}_T(t)(I_t^{(1)} - (1 - \gamma + \delta\kappa) I_t^{(3)}) - \gamma\, \mathbf{1}_{\{t\le U\}} \widehat{\sigma}_U(t)\, I_t^{(2)}\Big)\; dZ_t^2.
\end{aligned}$$

由于对 $F^d(U,T)$ 的依赖仅通过项 $I^{(1)}$ 进入，由 $dF_t^d(U,T)$ 生成的 $d\mathbf{DS}_t^{c,\gamma,\kappa},$,的鞅部分给出 (5.1)。

另一方面，根据注 3.3， $dF^{f,\ t\ q}(U,\ T) = \nu^{f,\ t\ q}\, dZ_t^2$因此，项 dZ_t^2可表示为以下可交易形式：$\varphi_t^f\ dF^{f,\ t\ q}(U,\ T)$，前提是

$$\varphi_t^f = \frac{1}{\nu_t^{f,q}}\Big(\widehat{\sigma}_T(t)\,\mathbf{DS}_t^{c,\gamma,\kappa}(U,T) + \gamma(\widehat{\sigma}_T(t) - \mathbf{1}_{\{t\le U\}}\,\widehat{\sigma}_U(t))\,I_t^{(2)}\Big),$$

这就是 (5.2)。因此， $d\mathbf{DS}_t^{c,\gamma,\kappa},$,$(U,\ T)$ 的局部鞅部分与 (5.3) 中收益项的局部鞅部分一致。由于 $V_0(\varphi,\ C) = \mathbf{DS}_0^{c,\gamma,\kappa},$,$(U,\ T)$，该策略复制了互换价格过程。 □

5.2 欠比例外币抵押对冲

现在考虑在恒定水平 β 下、采用比例外币抵押的单期 SOFR/€STR 互换，期限为 $[U,T]$（如第 4.3 节所述）。

命题5.2。 对于固定的 β，考虑终端支付为$\mathbf{DS}_T^{\gamma,\kappa},\ (U,T)$ 且以固定水平 β 进行比例外国抵押的单期 *SOFR/€STR* 互换。其无套利价格过程 $\mathbf{DS}^{\beta,\ \gamma,\ \kappa}(U,T)$ 可由自融资抵押期货策略 $(\varphi,C) = (\varphi^0,\varphi^d,\varphi^f)$ 复制，其中 $C=-\beta V$，且对每个 $t\in[0,T]$,

$$\varphi_t^0 = \frac{(1-\beta)\,\mathbf{DS}_t^{\beta,\gamma,\kappa}(U,T)}{B_t^h} \tag{5.4}$$

期货对冲比率如下所示。

(i) 本币期　　货头寸。设 $I^{(1)},I^{(2)},I^{(3)}$ 如命题 *4.3* 所定义。那么，对每个 $t\in[0,U]$,

$$\varphi_t^d = \frac{(\sigma_U(t)-\beta\sigma_T(t))\,I_t^{(1)} - \gamma(1-\beta)\sigma_T(t)\,I_t^{(2)} - (1-\gamma+\delta\kappa)(1-\beta)\sigma_T(t)\,I_t^{(3)}}{\nu_t^d},$$

其中 ν^d 是 $F^d(U,T)$ 的扩散系数（注 *3.2*），且对每个 $t\in[U,T]$,

$$\begin{aligned}\varphi_t^d &= \frac{-\beta\sigma_T(t)\,I_t^{(1)} - \gamma(1-\beta)\sigma_T(t)\,I_t^{(2)} - (1-\gamma+\delta\kappa)(1-\beta)\sigma_T(t)\,I_t^{(3)}}{\nu_t^d}\\ &= \frac{\delta\big(\beta I_t^{(1)} + (1-\beta)\big(\gamma I_t^{(2)} + (1-\gamma+\delta\kappa)I_t^{(3)}\big)\big)}{1+\delta\,F_t^d(U,T)}.\end{aligned}$$

(ii) 外国期货头寸。对每个 $t\in[0,T]$,

$$\varphi_t^f = \frac{1}{\nu_t^{f,q}}\Big(\beta\,\widehat{\sigma}_T(t)\,\mathbf{DS}_t^{\beta,\gamma,\kappa}(U,T) + \gamma\big(\widehat{\sigma}_T(t) - \mathbf{1}_{\{t\le U\}}\widehat{\sigma}_U(t)\big)\,I_t^{(2)}\Big),$$

其中 $\nu^{f,\ t\ q}:=Q_t\nu_t^f$是 $F^{f,\ q}(U,T)$ 的扩散系数（见注 *3.3*）。

证明。在 比例抵押下，任何自融资策略的财富都满足 s

$$dV_t(\varphi,C) = r_t^\beta\,V_t(\varphi,C)\,dt + \varphi_t^d\,dF_t^d(U,T) + \varphi_t^f\,dF_t^{f,q}(U,T),$$

见命题 2.1。对于复制策略，只需匹配 Itô 分解中的局部鞅部分。根据命题 4.3,

$$\mathbf{DS}_t^{\beta,\gamma,\kappa}(U,T) = I_t^{(1)} - \gamma I_t^{(2)} - (1-\gamma+\delta\kappa)\,I_t^{(3)},$$

并且， $I^{(1)},I^{(2)},I^{(3)}$ 中出现的所有修正因子都是 t 的确定性函数。下面利用 Itô 公式和注 3.1 中的辅助动态计算鞅部分。

步骤 *1*。我们先考察 $I^{(1)}, I^{(2)}$ 和 $I^{(3)}$ 的动态中的扩散项。首先，对于$I^{(1)}$，命题 4.3 得出一个因子 $B_U(t, r_t^d)$，适用于 $t \le U$；而在 $t > U$ 时，则得到一个有限变差过程 $(B_U^d)^{-1} B_t^d$。这可以表示为

$$dB_U(t, r_t^d) \simeq \mathbf{1}_{\{t \le U\}}\, B_U(t, r_t^d)\, \sigma_U(t)\; dZ_t^1,$$

连同 $dB_T(t, r_t^d) \simeq B_T(t, r_t^d)\sigma_T(t)\; dZ_t^1$和 $d\widehat{B}_T(t, r_t^f) \simeq \widehat{B}_T(t, r_t^f)\widehat{\sigma}_T(t)\; dZ_t^2$。因此，对于每个 $t \in [0,T]$,

$$t \in [0,T].\, dI_t^{(1)} \simeq I_t^{(1)} \Big(\big(\mathbf{1}_{\{t \le U\}} \sigma_U(t) - \beta \sigma_T(t) \big)\, dZ_t^1 + \beta \widehat{\sigma}_T(t)\; dZ_t^2 \Big). \tag{5.5}$$

接下来，对于 $I^{(2)}$，命题 4.3 在 $t \le U$时包含因子 $\widehat{B}_U(t, r_t^f)$，并且

$$d\widehat{B}_U(t, r_t^f) \simeq \mathbf{1}_{\{t \le U\}}\, \widehat{B}_U(t, r_t^f)\, \widehat{\sigma}_U(t)\; dZ_t^2.$$

结合 这一点与 $B_T(t, r_t^d)$ 和 $\widehat{B}_T(t, r_t^f)$ 的扩散项，对于每个 $t \in [0,T]$可得 .

$$dI_t^{(2)} \simeq I_t^{(2)} \Big((1-\beta)\sigma_T(t)\; dZ_t^1 + \big(\mathbf{1}_{\{t \le U\}} \widehat{\sigma}_U(t) + (\beta - 1)\widehat{\sigma}_T(t) \big)\, dZ_t^2 \Big). \tag{5.6}$$

其余部分 来研究项 $I^{(3)}$。由命题 4.3，我们推得，对于每个 $t \in [0,T$],

$$I_t^{(3)} = A_{t,T}^{\beta,f}\, [B_T(t, r_t^d)]^{1-\beta}\, [\widehat{B}_T(t, r_t^f)]^{\beta}\, \Gamma_t^{(3)}(T)$$

因此，利用注 3.1，我们得到

$$dI_t^{(3)} \simeq I_t^{(3)} \Big((1-\beta)\sigma_T(t)\; dZ_t^1 + \beta \widehat{\sigma}_T(t)\; dZ_t^2 \Big). \tag{5.7}$$

步骤 *2.* 现在我们可以确定对冲比率了。利用 (5.5)、(5.6) 和 (5.7)，我们得到

$$\begin{aligned} d\mathbf{DS}_t^{\beta,\gamma,\kappa}(U,T) \simeq & \Big(\big(\mathbf{1}_{\{t \le U\}} \sigma_U(t) - \beta \sigma_T(t) \big) I_t^{(1)} - \gamma(1-\beta)\sigma_T(t) I_t^{(2)} - (1 - \gamma + \delta\kappa)(1-\beta)\sigma_T(t) I_t^{(3)} \Big)\, dZ_t^1 \\ & + \Big(\beta \widehat{\sigma}_T(t) I_t^{(1)} - \gamma \big(\mathbf{1}_{\{t \le U\}} \widehat{\sigma}_U(t) + (\beta - 1)\widehat{\sigma}_T(t) \big) I_t^{(2)} - (1 - \gamma + \delta\kappa)\beta \widehat{\sigma}_T(t) I_t^{(3)} \Big)\, dZ_t^2. \end{aligned}$$

dZ_t^2 系数可简化为关于 $\mathbf{DS}^{\beta,\ \gamma\ \kappa}_{t,}(U,\ T)$ 和 $I_t^{(2)}$ 的表达式，如下所示

$$\begin{aligned} & \beta \widehat{\sigma}_T(t) I_t^{(1)} - \gamma \big(\mathbf{1}_{\{t \le U\}} \widehat{\sigma}_U(t) + (\beta - 1)\widehat{\sigma}_T(t) \big) I_t^{(2)} - (1 - \gamma + \delta\kappa)\beta \widehat{\sigma}_T(t) I_t^{(3)} \\ & = \beta \widehat{\sigma}_T(t) \big(I_t^{(1)} - \gamma I_t^{(2)} - (1 - \gamma + \delta\kappa) I_t^{(3)} \big) + \gamma \big(\widehat{\sigma}_T(t) - \mathbf{1}_{\{t \le U\}} \widehat{\sigma}_U(t) \big) I_t^{(2)} \\ & = \beta \widehat{\sigma}_T(t)\, \mathbf{DS}_t^{\beta,\gamma,\kappa}(U,T) + \gamma \big(\widehat{\sigma}_T(t) - \mathbf{1}_{\{t \le U\}} \widehat{\sigma}_U(t) \big) I_t^{(2)}. \end{aligned}$$

此外，由备注3.2和3.3， $dF_t^d = \nu_t^d\; dZ_t^1$ 和 $dF^{f,\ q}_{t} = \nu^{f,\ q}_{t}\; dZ_t^2$.。对扩散系数进行匹配，即可得到所述对冲比率的表达式。最后，由 $(1-\beta)V_t(\varphi,\ C) = \varphi_t^0 B_t^h$，其中 $V(\varphi,\ C) = \mathbf{DS}^{\beta,\ \gamma,\ \kappa}(U,\ T)$，可得等式 (5.4)。 □

总而言之，本节的对冲结果证实，抵押品货币不仅影响价格水平，也会影响合约的风险分解：一旦以外币提供抵押品，互换价值便会产生由外国贴现部分带来的额外随机敞口。在确定性波动率的高斯设定下，所有凸性修正均为确定性，因此不会产生新的可对冲风险因子。相反，它们会重新缩放交易期货的敏感度。因此，复制只需确定明确的对冲比率，而在完全抵押的基准情形下，现金账户并不存在。

上述对冲恒等式清楚地揭示了抵押品货币选择如何重塑风险分解。当 $\gamma = 0$ 时，我们得到比例外国抵押下标准单期SOFR互换的对冲。当 $\gamma \neq 0$ 时，对冲中会多出一个与 €STR 腿相关的外国利率部分。因此，这一策略类似于跨货币/利差互换对冲：本币和外币利率风险都必须进行动态管理，尽管合约以本币结算。

6 数值结果

第 4.2–5.2 节中的定价与对冲结果适用于形式为 $\delta\big(R^d(U,\ T)\ -\gamma R^f(U,\ T)\ -\kappa\big)$ 的一类单期支付，其中包括满足$\gamma \neq 0$时的差额（quanto 型）设定。在这种情况下，外国因子通过两个不同渠道进入估值与对冲问题：外币抵押品约定，以及支付中的外国浮动腿。为分离完全由抵押品货币选择引起的增量风险，本节始终设定$\gamma = 0$ 。因此，标的支付完全以本币计价，估值或对冲比率相较于本币基准的任何偏离，都可归因于抵押品货币和抵押水平 β。

有了 $\gamma = 0$，这个实验可以更一般地视为研究非本币抵押品化下的本币美元支付。也就是说，定价与对冲结果可以更一般地解读为适用于非本币抵押品化。在数值实验中，我们选取欧元作为非本币抵押品货币的代表；但只要引入 r^c 以及相应的交易所交易隔夜期货（例如，日元抵押品对应 TONA，英镑抵押品对应 SONIA），以取代 €STR，同样的公式就适用于任何抵押品货币。

本节旨在量化抵押品货币选择对高斯设定下单期和多期 SOFR 互换（对应 $\gamma = 0$）估值与对冲的经济影响。我们首先报告平价互换利率及选定参数敏感度方面的定价影响。随后，我们评估将第 5 节推导出的连续时间复制策略应用于离散再平衡网格时的对冲表现。

在这一设计中，核心要点很明确：即使合同现金流是本币的，外币抵押也会通过有效贴现率影响估值，并通过对外国期货的额外对冲需求影响风险分解 。因此，我们考虑两种抵押品约定。第一种约定中，抵押品货币和比例水平 β 在起始时刻固定，并在整个合约期限内保持不变。第二种约定中，我们采用多币种CSA的最便宜可交割解释：在时点 0 选定一种符合条件的抵押品货币，此后保持不变。这一比较阐明了抵押品选择权何时主要体现为前期定价效应，何时会导致对冲构成和对冲有效性持续出现差异。

6.1 理论定价的设定与验证

我们考虑支付日期为 $0 = T_0 < T_1 < \cdots < T_n = T$、计息因子为 $\delta_j := T_j - T_{j-1} = 0.5$ 的 SOFR互换。第 j 个浮动票息为 $\delta_j R^d(T_{j-1},\ T_j)$，固定票息为 $\delta_j\kappa$，两者均于 T_j 期末结算。多期互换的估值由命题 4.4 决定，平价互换利率记为 $\kappa_t^\star(T,\ \beta)$，通过推论 4.1 代入$\gamma = 0$即可显式计算，即

$$\kappa_t^\star(T;\beta) := \kappa_t^\star(T_0, n; \beta, 0) = \frac{\sum_{j=1}^n \big(I_j^{(1)}(t) - I_j^{(3)}(t)\big)}{\sum_{j=1}^n \delta_j\, I_j^{(3)}(t)}. \tag{6.1}$$

在数值研究中，我们考察起始时刻（$t\ =\ 0$），并报告期限为 $T\ \in\{1, 2, 3, 5, 7, 10\}$ 年的 $\kappa_0^\star$（T；β）。所有数值结果均在国内定价鞅测度 $\mathbb{Q}$ 下，根据假设3.1中提出的联合动力学生成。

完整的基准参数集，包括（ρ_{12}，ρ_{13}，ρ_{23}）和初始值（r_0^d，r_0^f，Q_0），均列于表 1，并在本节中始终使用。这些参数是合成的，而非通过正式校准得出：初始水平（r_0^d，r_0^f，Q_0）的选取旨在大致反映当前美元和欧元隔夜利率及即期外汇水平；其余参数则设定为生成一个稳定基准。

我们采用比例外国抵押，即缴纳欧元抵押品，并按 $r^c = r^f + \alpha^{c,\ f}$ 计息。与第 2 节一样，有效贴现率为 $r^\beta = (1-\beta)r^h + \beta r^c$。在数值基准中，我们设定 $r^h = r^d$（等价地，$\alpha^h \equiv 0$），因此 $r^\beta = (1-\beta)r^d + \beta r^c$。回想一下

表 1：基准参数。

本币（美元）		外币（欧元）		外汇/抵押品/离散化	
参数	值	参数	值	参数	值
a	0.1101	$\widehat{c}$	0.05799	$\bar{\sigma}$	0.075
b	3	$\widehat{b}$	3	Q_0	1.178
σ	0.012	$\widehat{\sigma}$	0.01	$\alpha^{c,f}$	0.002
r_0^d	0.0367	r_0^f	0.01933	Δt	$1/252$
相关性				$(\rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{23})$	$(0.25, -0.25, 0.10)$

，$\beta = 0$ 的基准情形对应本币融资情形，而 $\beta = 1$ 对应全额外国货币抵押。中间取值 $\beta \in (0,\ 1)$ 可简洁地近似表示部分外币抵押。在下文报告的所有定价实验中，β 在互换存续期内保持不变。

核心定价对象 $\kappa_0^\star(T;\ \beta)$ 通过命题 4.4 的闭式解结合 (6.1) 计算，蒙特卡洛（MC）方法仅用作验证工具。为此，我们在日网格 $\Delta t = 1/252$ 上模拟高斯因子，以验证在闭式平价利率下估计得到的互换价值在统计上与其理论零值一致。

我们从两个层面验证实现。首先，对于单期互换，我们在一组计息区间 $(U,\ T)$ 和抵押水平 $\beta \in \{0, 0.5, 1\}$ 下比较闭式价格与蒙特卡洛估计值。其次，对于采用半年付息日的多期互换，我们计算理论平价利率 $\kappa_0^\star(T;\ \beta)$，并验证在 $\kappa = \kappa_0^\star(T;\ \beta)$ 下，互换价值的蒙特卡洛估计值在统计上接近 0。表 2 的每一行中，闭式现值表示理论初始价格，而蒙特卡洛现值表示蒙特卡洛估计值；最后一列报告了贴现收益样本的相应标准误。对于单期互换，$(U,\ T)$ 表示计息区间；对于多期互换，我们报告 $T_0 = 0$ 和 T 作为最终到期日，因此中间支付日期隐含在半年付息安排中。表 2 显示，蒙特卡洛偏差与蒙特卡洛标准误处于同一数量级。

表 2：理论值的蒙特卡洛验证。

产品类型	U	T	β	$\kappa_0^\star(T;\ \beta)$ (%)	闭式现值	蒙特卡洛现值	MC 标准误差
单期互换	0.00	0.50	0.00	3.7000	1.110e-16	4.506e-05	2.127e-05
单期互换	0.50	1.00	0.50	3.6984	0.000e+00	4.146e-05	2.768e-05
单期互换	2.50	3.00	1.00	3.7040	0.000e+00	5.420e-05	2.615e-05
多期互换	—	3.00	0.50	3.6928	-1.110e-16	4.265e-04	8.603e-05
多期互换	—	5.00	1.00	3.7040	3.331e-16	1.834e-04	1.153e-04

6.2 抵押品货币效应：平价利率和敏感度

现在我们转向主要的定价影响。在本小节中，互换存续期内的抵押品规格保持不变。对于每个 $\beta \in [0, 1]$，我们计算初始平价互换利率 $\kappa_0^\star(T;\ \beta)$，并探讨以下问题：(i) 平价曲线如何随 β 在不同期限上变化；(ii) 哪些模型参数最显著地影响外币抵押所引致的调整。图 1 绘出了 $\beta \in \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$ 下闭式平价互换利率 $\kappa_0^\star(T;\ \beta)$ 随期限的变化。在基准参数组中，平价利率的期限结构随期限延长而递减，而提高 β 会使平价曲线上移。从本币与外币隔夜利率的水平差异来看，这种排序在经济上直观合理。在 Vasicek 的 $\widehat{\ }$ 设定下，长期均值分别为 $\theta_d = a/b$ 和 $\theta_f = \widehat{c}/b$，且在基准情形中有 $\theta_f < \theta_d$。

因此，从 $\beta = 0$ （不进行抵押品化）转向 $\beta = 1$ （全额外国货币抵押），意味着贴现方式主要从较高的本币利率转为较低的外国抵押品利率，从而提高外币抵押下互换现金流的现值。由于平价固定利率是使互换价值为零的唯一 κ ，平价曲线因此上移。

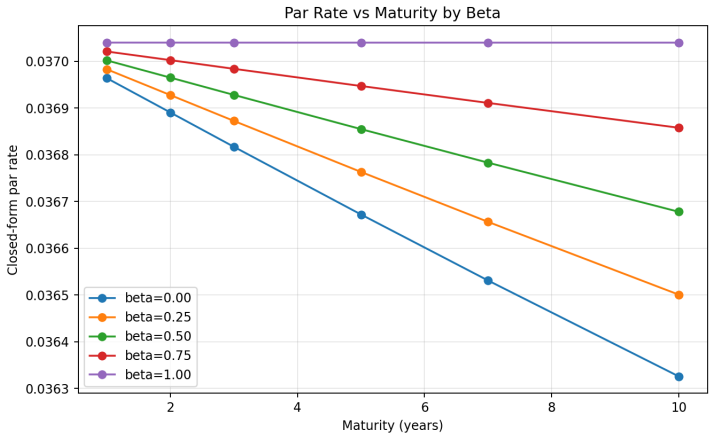


图 1：期限为 $T \in \{1, 2, 3, 5, 7, 10\}$ 、抵押水平为 $\beta \in \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$ 时的闭式平价互换利率 $\kappa_0^\star(T;\ \beta)$。

为单独考察抵押品化的影响，我们报告平价利率差

$$\Delta\kappa_0^\star(T;\beta) := \kappa_0^\star(T;\beta) - \kappa_0^\star(T;0)$$

（以基点计）。表 3 显示，短期限的调整相对较小，但随着期限延长，其经济意义逐渐显现；对于采用全额外币抵押的互换，期限为 $T = 10$Y 时，调整达到数个基点。这种期限依赖性与理论表达式的结构相符：抵押品化调整通过指数贴现因子和确定性修正项随时间累积，因此，随着现金流接受抵押调整的期限范围扩大，其对平价利率的影响也会增大。

表 3：不同期限和抵押水平下的平价利率差 $\Delta\kappa_0^\star(T;\ \beta)$（基点） s.

期限 T	$\beta = 0.25$	$\beta = 0.50$	$\beta = 0.75$	$\beta = 1.00$
1	0.19	0.38	0.57	0.76
2	0.37	0.75	1.12	1.50
3	0.55	1.11	1.67	2.23
5	0.91	1.83	2.75	3.68
7	1.26	2.52	3.80	5.09
10	1.75	3.52	5.32	7.15

接下来，我们考察哪些参数主要驱动抵押品化引起的调整。对于 $T = 5$Y，我们考虑 $\Delta\kappa_0^\star$(5Y;1) $= \kappa_0^\star$(5Y; 1) $- \kappa_0^\star$(5Y; 0)，并进行 OAT $\pm 10\%$ 扰动分析。图 2 报告了所得的龙卷风图。在基准参数集合中，主要驱动因子是外汇波动率 $\bar{\sigma}$ 以及本币与外汇相关性 ρ_{13}，其次是本币短期利率的波动率 σ 。这一模式反映出，根据假设3.1，外国抵押品化贴现规则通过确定性修正因子，与 (r^d, r^f, Q) 的联合高斯依赖关系相互作用。具体而言，更高的外汇波动率会放大这些修正项的幅度，而 ρ_{13} 的符号和幅度决定了外汇冲击是否倾向于与本币利率冲击同向变动，从而使抵押品化引起的平价互换利率变动增大或减小。

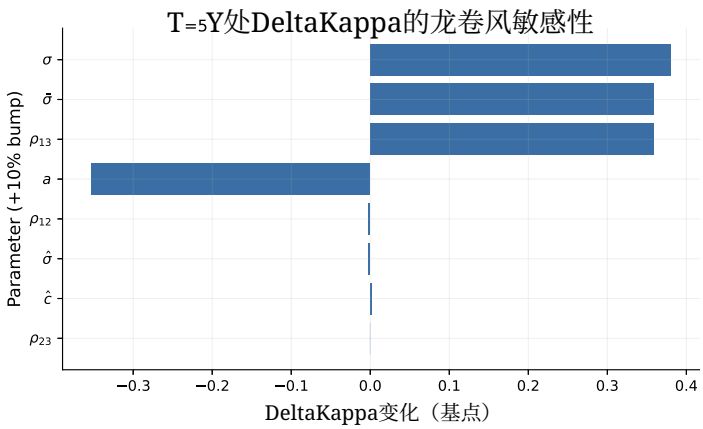


图2： $\Delta\kappa_0^\star$(5Y; 1)的OAT $\pm 10\%$敏感性（基点）。

6.3 货币选择下的最便宜交割抵押品

接下来，我们采用多币种CSA的经典解释，其具有一个抵押货币的可 admissible 集合 $\mathcal{C}$：抵押品货币在时间 0 选定，随后在交易存续期内保持不变。为便于说明，只需取 $\mathcal{C} = \{$美元,欧元$\}$，并比较相应的固定抵押品平价互换利率。回顾第2.3节，在欧元抵押情形下，我们有 $r^c = r^f + \alpha^{c,f}$；而在美元抵押情形下，我们写作 $r^c = r^d + \alpha^{c,d}$。在本小节的数值实验中，我们专门考虑 $\alpha^{c,d} = 0$ 的情形。因此，全额美元抵押与基准情形 $\beta = 0$ 一致，而欧元抵押对应于全额外国货币抵押，即 $\beta = 1$。因此，内嵌抵押品选择效应完全可以通过比较两条平价曲线 $\kappa_0^\star(T; 0)$ 和 $\kappa_0^\star(T; 1)$ 来刻画。

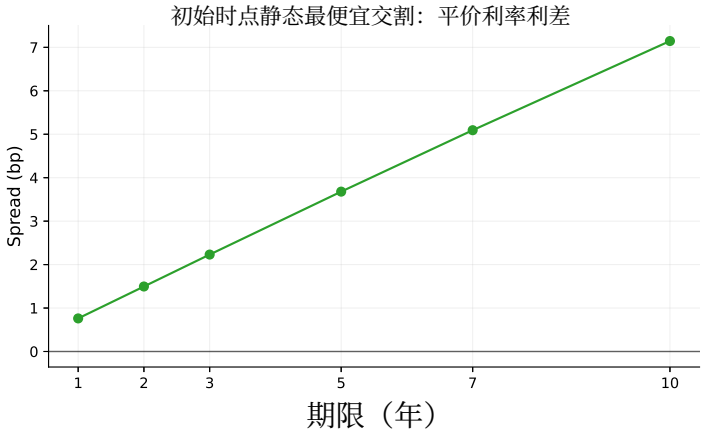


图3：最便宜交割：平价利率利差 $\kappa^\star_{,0}{}^{(\mathrm{EUR})}(T) - \kappa^\star_{,0}{}^{(\mathrm{USD})}(T)$（基点）。

图3绘出了各个期限下的平价利率利差 $\kappa_0^\star(T; 1) - \kappa_0^\star(T; 0)$。该数值根据图1中的两条极端曲线得出：对应全额外国货币抵押的曲线始终高于基准曲线（$\beta = 0$），且两条曲线的间距随期限延长而扩大。按照当前的识别方式，这正是欧元抵押与美元抵押的平价互换利率之间的利差。

CTD解释通过将可 admissible 集合 $\mathcal{C} = \{$美元,欧元$\}$视为两种固定抵押品规范之间的选择，从而形式化了这一排序。付款方偏好与较低平价固定利率相关联的抵押品货币，而收款方则偏好与

较高的平价固定利率。因此，抵押品选择的内嵌效应自然可由相应平价曲线之间的差额加以量化，而图3提供了这种分离的直接基点表示。

总体而言，定价结果支持三项结论。第一，相对于基准情形 $\beta = 0$，比例外国抵押会导致SOFR平价互换利率发生系统性且依期限而异的变化。第二，敏感性分析表明，抵押品化调整的幅度主要受波动率和相关性输入控制。第三，在多币种CSA下，经典的CTD解释可归结为平价互换利率的抵押品货币排名，从而得出一种透明且易于报告的内嵌抵押品选择效应度量。

6.4 本币和外币风险来源的对冲

现在我们转而讨论比例外国抵押下的对冲影响。与定价数值分析一样，所有结果均在本币定价测度 $\mathbb{Q}$ 和假设3.1中的高斯设定下得出。由于多期互换在多个支付日期结算，我们基于含股息收益过程评估对冲表现。对于支付日期为 $\{T_j\}_{j=1}^n$的SOFR支付方互换，回顾在 T_j时的已实现期间现金流

$$\mathbf{CF}_j = e^{\int_{T_{j-1}}^{T_j} r_u^d \, du} - (1 + \delta_j \kappa),$$

并通过以有效利率 r^β再投资已实现现金流来定义收益过程，其中 $t_k \in \{0, \Delta t, 2\Delta t, \ldots, T\}$,

$$G_{t_k} := V_{t_k} + \sum_{j: T_j \le t_k} \mathbf{CF}_j \exp\Big(\int_{T_j}^{t_k} r_u^\beta \, du \Big),$$

其中 $\Delta t = 1/252$。这种变换消除了支付日期的跳跃，并为离散时间下的自融资复制提供了自然目标。

在对冲实验中，我们采用定义 2.5 意义下的抵押品化期货策略 $(\varphi, C) = (\varphi^0, \varphi^d, \varphi^f)$。在抵押水平恒定为 $\beta \in [0,1]$，的比例外币抵押下，保证金账户为 $C_t = -\beta X_t$，其中 X 表示以本币（美元）计价的对冲投资组合价值过程。将 $C_t = -\beta X_t$ 代入定义 2.5 中的自融资条件，可得有效漂移 $r^\beta = (1-\beta) r_t^d + \beta (r_t^f + \alpha^{c,\,f})$，以及动态

$$dX_t = r_t^\beta X_t \, dt + \varphi_t^d \, dF_t^d + \varphi_t^f \, dF_t^{f,q}, \tag{6.2}$$

其中， F^d表示国内SOFR期货，而 $F^{f,\,q}$表示外国期货成分的本币表示，定义见式（2.2）。

在数值实现中，我们在离散网格 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_M = T$上进行再平衡，并在每个区间 $(t_m, t_{m+1}]$内将 (φ^d, φ^f)保持为分段常数。我们通过对式（6.2）进行欧拉型离散化，在日网格 $\Delta t = 1/252$ 上计算投资组合价值。我们设定 $X_0 = G_0$，并报告终端对冲误差 $\varepsilon_T := X_T - G_T$。

我们的首要目标是验证第 5 节推导的对冲策略是否与第4节的闭式定价结果一致。结果似乎表明，在每日再平衡下，对冲投资组合的财富过程几乎完美地跟踪价格过程。图4展示了一条有代表性的路径，其中 G和 X 在视觉上无法区分，路径误差始终处于数值精度水平。

为量化本币与外币风险来源的经济相关性，我们比较三种对冲集合：不对冲 H_0、仅国内对冲 H_d（即仅使用本币期货），以及国内外对冲 H_{df} （即使用本币和外币期货）。尽管互换支付完全以本币计价，但在外币抵押（$\beta > 0$）下，抵押品调整价格会通过有效融资利率 r^β 取决于 (r^f, Q)，因此，仅对冲本币风险并不能消除终期损益中的所有方差。

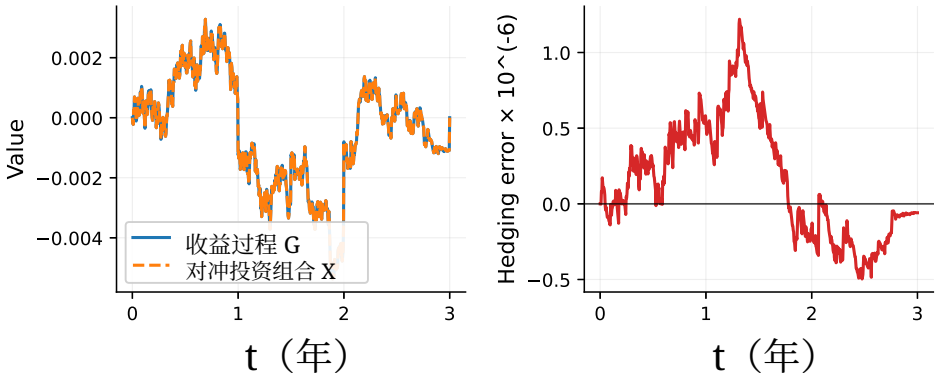
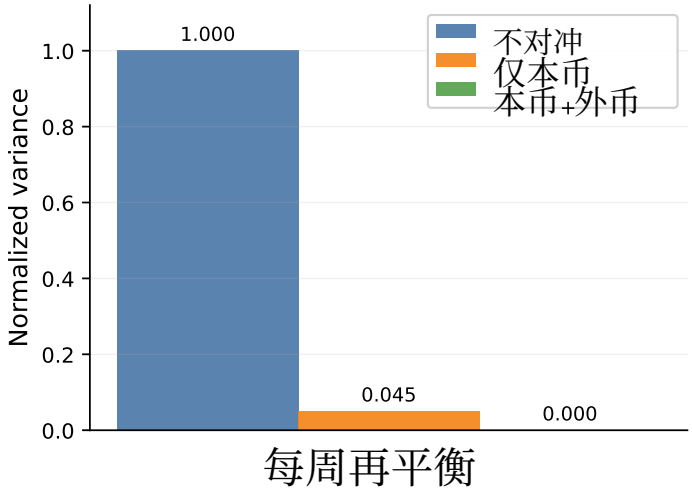


图4：收益过程 G 和对冲投资组合 X，以及路径误差 $X - G$ （每日再平衡）。

我们认为，本币对冲的贡献可以通过终端对冲误差 ε_T 的方差比 $= X_T - G_T$ 来衡量。为此，我们定义

$$\text{Share}_d := 1 - \frac{\text{Var}(\varepsilon_T^{H_d})}{\text{Var}(\varepsilon_T^{H_0})},$$

也就是说，仅对冲本币部分所消除的未对冲终端方差比例。在 $T = 5$ 和 $\beta = 1$ 的基准实验中，采用每周再平衡，我们发现 $\text{Var}(\varepsilon_T^{H_d})/\text{Var}(\varepsilon_T^{H_0}) \approx 0.05$，因此本币对冲消除了占主导地位的大部分终端风险，同时仍留下不可忽略的残余风险。



Figu图5：每周再平衡下的标准化终端误差方差（$T = 5, \beta = 1$）

图5报告了相应的标准化方差。仅凭国内工具无法消除残余风险：在对冲中加入外国期货后，本实验中的剩余方差降至可忽略的水平。这表明，在外币抵押的情况下，终端对冲风险中一个虽小但具有结构性的组成部分，源于抵押品调整后的贴现所引发的外币利率风险。

综合来看，数值结果证实，抵押品货币的选择会对平价利率产生切实影响；一旦以外币提交抵押品，仅基于国内工具的对冲就会留下系统性剩余敞口。下一节将作出结论

并总结这些发现对于现代多币种抵押品协议下定价和风险管理的实际意义。

7 结论

本文研究了以外币提供抵押品时差异互换的估值与对冲。在本币定价测度 $\mathbb{Q}$ 和一个可处理的高斯设定下，我们推导了比例外国抵押下单期和多期差异互换价格及对冲策略的闭式表达式，这些表达式以市场可观测构件和确定性修正项表示。数值研究表明，抵押品货币的选择会导致平价互换利率出现系统性且依期限而异的变化，并且通过多币种CSA的最便宜交割解释，已可观察到这一影响。实际意义在于，即使合约仅部分采用外币抵押，按纯本币对冲/融资利率 r^h 贴现也可能产生显著误差。具体而言，当 $\beta \in (0,1)$不接近零时，有效融资利率 $r^\beta = (1-\beta)r^h + \beta r^c$ 会改变价格和平价互换利率，因此使用 r^h 而非 r^β 可能导致系统性偏差。

在对冲方面，我们提出了一种基于期货的自融资框架，并通过验证逐路径复制来检验其数值实现。在基准配置下，主要的可对冲风险由本币利率驱动，因此，持有国内期货头寸能够消除大部分终端风险敞口。然而，在外币抵押情形下，仅使用国内期货进行对冲仍会留下剩余风险敞口；而纳入外国期货后，这一风险几乎可以完全消除。尽管相对于本币部分而言，这只是二阶效应，但对于名义本金较大的互换，从风险管理角度看，剩余风险不容忽视。

本研究有若干自然的延伸方向。首先，可以将相同的方法应用于更多合格抵押品货币以及其他CSA惯例（门槛、折扣、报酬利差）。其次，纳入模型的不确定性、交易成本以及对冲工具的限制，将有助于从更贴近市场的角度评估对冲有效性。最后，直接根据期限结构和外汇期权数据校准模型，将有助于定量比较不同市场状态下的抵押品货币溢价。

致谢。R. Liu与M. Rutkowski的研究得到澳大利亚研究理事会探索项目计划的资助，项目编号为DP200101550下行风险下养老金保证给付的公平定价。本工作亦部分得到国家自然科学基金委员会的资助，资助编号为12371447。

参考文献

[1] Tobias Adrian、Federico Grinberg、Tommaso Mancini-Griffoli、Robert M. Townsend 和 Nico- las Zhang。《多币种交易与合约平台》。国际货币基金组织，工作论文 22/217，2022年11月。[2] Leif B. G. Andersen、Darrell Duffie 和 Yang Song。融资估值调整。《金融学杂志》，74(1):145–192，2019年。[3] 巴塞尔银行监管委员会和国际证券事务监察委员会组织。《非集中清算衍生品的保证金要求》。技术报告，国际清算银行，2015年3月。[4] Francesca Biagini、Alessandro Gnoatto 和 Immacolata Oliva。采用CSA贴现和初始保证金的统一xVA方法。《*SIAM*金融数学期刊》，12(3):1013–1053，2021年。

[5]Marco Bianchetti。两条曲线，一个价格：通过拆分远期收益率曲线和贴现收益率曲线，实现利率衍生品的定价与对冲，2009年。可见 arXiv：https: //arxiv.org/abs/0905.2770。[6] Matthew Bickersteth、Yining Ding 和 Marek Rutkowski。SOFR衍生品的定价与对冲。《*Mathematical Finance*》，36(1):180–202，2026年。[7] Tomasz R. Bielecki、Igor Cialenco 和 Marek Rutkowski。非线性市场模型中的衍生品无套利定价。《*Probability, Uncertainty and Quantitative Risk*》，3(1):1229–1258，2018年。[8] Tomasz R. Bielecki 和 Marek Rutkowski。含融资成本和抵押品安排的合约估值与对冲。《*SIAM*金融数学期刊》，6(1):594–655，2015年。[9] Damiano Brigo、Massimo Morini 和 Andrea Pallavicini。《交易对手信用风险、抵押品与融资：涵盖所有资产类别的定价案例》。John Wiley & Sons，2013年。[10] John C. Cox、Jonathan E. Ingersoll 和 Stephen A. Ross。远期价格与期货价格之间的关系。《金融经济学杂志》，9(4):321–346，1981年。[11] Yining Ding、Ruyi Liu 和 Marek Rutkowski。基于后顾型利率的交叉货币基差互换多曲线方法，2024年。可见 arXiv：https://arxiv.org/ abs/2410.08477。[12] Darrell Duffie 和 Jeremy C. Stein。改革LIBOR及其他金融市场基准。《经济展望杂志》，29(2):191–212，2015年。[13]Claudio Fontana、Zorana Grbac 和 Thorsten Schmidt。超越随机连续性的隔夜利率期限结构建模。《*Mathematical Finance*》，34(1):151–189，2024年。[14] Masaaki Fujii、Yasufumi Shimada 和 Akihiko Takahashi。关于有抵押和无抵押情况下多条互换曲线构建的说明，2010年。可见 SSRN：https://ssrn.com/ abstract=1440633.[15] Masaaki Fujii、Yasufumi Shimada 和 Akihiko Takahashi。基差利差、抵押品与多种货币条件下的利率期限结构，2010年。可见 SSRN：https: //ssrn.com/abstract=1556487.[16] Masaaki Fujii 和 Akihiko Takahashi。担保货币的选择。《*Risk*》，一月：120–125，2011年。[17] Masaaki Fujii 和 Akihiko Takahashi。非对称及不完全抵押品安排下的衍生品定价与CVA。《定量金融》，13(5):749–768，2013年。[18] Alessandro Gnoatto 和 Silvia Lavagnini。多曲线设定下的交叉货币 Heath-Jarrow-Morton 框架，2023年。可见 arXiv：https://arxiv.org/abs/2312. 13057。[19] Alessandro Gnoatto 和 Nicole Seiffert。多曲线框架下的交叉货币估值与对冲。《*SIAM*金融数学期刊》，12(2):967–1012，2021年。[20] Marc Henrard。衍生品贴现中的讽刺，第二部分：危机。《*Wilmott Journal*》，2:301–316，2010年。[21] John Hull 和 Alan White。衍生品估值：融资估值调整与公允价值。《金融分析师杂志》，70(3):46–56，2014年。[22] Robert A. Jarrow 和 George S. Oldfield。远期合约与期货合约。《金融经济学杂志》，9(4):373–382，1981年。

[23] Michael Johannes 和 Suresh Sundaresan。抵押品化对互换利率的影响。《金融学杂志》，62(1):383–410，2007年。[24] Joanne Kennedy。使用任意计价单位对抵押品化衍生品进行定价。《*Mathemati- cal Finance*》，30(2):464–500，2020年。[25] Jean-Paul Laurent、Philippe Amzelek 和 Joe Bonnaud。抵押品化衍生品合约估值概述。《衍生品研究评论》，17(3):261–286，2014年。[26] Fabio Mercurio。现代LIBOR市场模型：使用不同曲线预测利率和进行贴现。《理论与应用金融国际期刊》，13(1):113–137，2010年。[27] Marek Musiela 和 Marek Rutkowski。《金融建模中的鞅方法》。施普林格，柏林-海德堡，第2版，2005年。[28] Oldrich Vasicek。期限结构的均衡刻画。《金融经济学杂志》，5(2):177–188，1977年。[29] Jason Z Wei。差异互换估值。《衍生品杂志，春季刊》，1:64–76，1994年。[30] Felix L. Wolf、Lech A. Grzelak 和 Griselda Deelstra。最便宜交割抵押品：共同因子方法。《定量金融》，22(4):707–723，2022年。