arXiv:2603.07876v1 [math.GT] 9 Mar 2026

一项　　通过空间图构造椒盐卷饼链环

KOTARO SHOJI

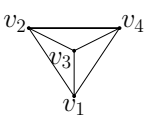
Abstract. 本文介绍图-椒盐卷饼链环，这是基于空间图投影对经典椒盐卷饼链环的推广。作为主要结果，我们研究了与四顶点完全图相关的一个子族，并据此构造出一个由互不相同的带状结组成的无限族。此外，尽管这些结的亚历山大多项式都平凡，它们仍可通过琼斯多项式彼此区分。

1. Introduction

在纽结理论中，环面链环和椒盐卷饼链环等链环类别长期以来一直被用作检验不变量效力的典型对象。环面链环通过简单地扭转并连接多股而得到，而椒盐卷饼链环则由多个双股扭转并排连接而成。将这些构造推广为以椒盐卷饼式方式连接的三股或更多股扭转，似乎是十分自然的延伸，但对此尚未进行广泛研究。受这一观察启发，我们引入一类新的链环，自然地推广了环面链环和椒盐卷饼链环。

设 Γ 是一个具有顶点 v_1、v_2、.....、v_i 的空间图投影。我们取 Γ 及其镜像，在顶点处截断，并在 v_j 处连接对应的端点，连接处施加由整数 n_j指定的若干扭转，从而构造一个链环。我们将所得链环记为 $P(\Gamma,\ \{n_1,\dots,n_i\})$，并称之为**图-椒盐卷饼链环**。这一构造的严格定义见第2节（定义2.1）。

为了研究这一新构造的类别的性质，我们首先关注多项式不变量。多项式不变量相对容易计算，同时具有很强的区分能力。然而，它们并非完备不变量；具有相同多项式不变量的不同纽结对或无限族，长期以来一直受到广泛研究。例如，突变结具有相同的 HOMFLYPT 多项式和 Kauffman 多项式。Birman [2] 给出了由三股辫闭合得到的纽结对，它们具有相同的亚历山大多项式和琼斯多项式。对于无限族，Kauffman 和 Lopes [8] 利用扭结构造出亚历山大多项式相同（但可由琼斯多项式区分）的不同纽结无限族，而 Kanenobu [6, 7] 构造了具有相同 HOMFLYPT 多项式的无限族。利用本文定义的图椒盐链环，我们得到如下纽结无限族。

定理 1.1。设 $K_n := P($  $\{-2,2,-(3n+1)\ \ 3\})$。那么，我们有

$$\Delta_{K_n}(t)=1.$$

此外，$J_{K_n}(q)\neq J_{K_m}(q)$ 若 $n\neq m$。特别地，K_n 与 K_m并非合痕的。[1]

注意， K_n 是一个纽结（一个分支的链环）。亚历山大多项式不仅无法区分这一族中的纽结，而且恒等于平凡多项式（$\Delta_{K_n}(t) = 1$），这一事实在低维拓扑中具有深远意义。亚历山大多项式平凡的纽结在代数上无法与平凡结区分，并且根据 Freedman [5]，已知它们是拓扑切片的。另一方面，它们是否全都是光滑切片的，仍是一个引人入胜的问题。例如，Fintushel 和 Stern [4] 证明，所有参数均为奇数且亚历山大多项式平凡的三股绞缠结并非光滑切片。相比之下，由于每个带状结都是光滑切片的，本文构造的图-椒盐卷饼纽结族 K_n 以更强的意义是光滑切片的，正如下述定理所示。

定理 1.2. 对任意正整数 n， K_n 是带状结。特别地， K_n 是光滑切片的。

注记 1.3. K_0 是平凡结。 K_1 由其DT名称识别为 $K14n22185$（借助SnapPy[3]）。虽然我们证明 K_1 是具有 $\Delta(t) = 1$的带状结，但它也被认为是一个双曲结，其0手术产生环面流形（见 [1]），尽管 K_1 的亏格为二而非一。因此， K_1 提供了一个兼具这些性质的罕见例子。这表明，我们的图椒盐链环框架有望成为寻找具有不寻常几何与拓扑性质的链环的搜索空间。

本文结构如下：第2节介绍图椒盐链环。第3节考察四个顶点上的完全图。在第4节中，我们给出主要结果的证明。

2. Definition and Properties of the link class

本节将严格定义图-椒盐卷饼链环，探讨其一些基本性质，并说明这一类链环自然涵盖了经典的环面链环和椒盐卷饼链环。

定义 2.1. 设 Γ 为空间图的一个投影， $\{v_1, v_2, \ldots, v_i\}$ 为 Γ的顶点集合。设 r_j 为每个顶点 v_j 的度。设$\overline{\Gamma}$ 为 Γ的镜像， $\{v_1, v_2, \ldots, v_i\}$ 为$\overline{\Gamma}$的顶点集合，其中每个 v_j对应于 v_j。那么：

(1) 在 $\mathbb{R}^3$中，我们将 Γ 作为空间图嵌入区域 $\{(x, y, z) \mid \frac{9}{10} \leq z \leq \frac{11}{10}\}$，其在 $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$ 上的投影就是 Γ 本身。我们将 $\overline{\Gamma}$ 嵌入区域 $\{(x, y, z) \mid -\frac{11}{10} \leq z \leq -\frac{9}{10}\}$，其在 $\mathbb{R}^2 \times \{-1\}$ 上的投影就是 $\overline{\Gamma}$ 本身，并使它们关于平面 $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$对称，其中每个 v_j 经反射映射到 v_j。
(2) 在每个顶点处截断 Γ 和 $\overline{\Gamma}$。(3) 设 n_1、n_2、.....、n_i为整数。对于每个顶点 v_j，用 r_j 股连接 v_j 处截断的 Γ 的 r_j 端点与 v_j 处截断的 $\overline{\Gamma}$的 r_j 端点，并施加 n_j/r_j 扭转。

由截断的 Γ、 $\overline{\Gamma}$ 和连接股构成的（无向）链环记作$P(\Gamma, \{n_1, n_2, \ldots, n_i\})$，称为 **$\Gamma$-椒盐卷饼链环**。以这种方式构造的链环称为**图-椒盐卷饼链环**。

如果它们是纽结，我们分别将 Γ-椒盐卷饼链环和图-椒盐卷饼链环称为 Γ-椒盐卷饼纽结和图-椒盐卷饼纽结。

注 2.2. 设 n 为整数， r 为正整数。当 $n \geq 0$时，将 $1/r$ 扭转的 n 个副本堆叠起来，形成 n/r 扭转（图 1）；当 $n < 0$时，将 $1/r$扭转的镜像的 $-n$ 个副本堆叠起来。此外， r/r 扭转称为整扭转。

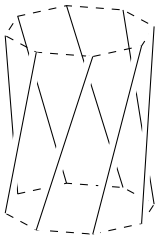


FIGURE 1. 1/8 扭转

接下来的两个例子表明，图-椒盐卷饼链环类包含环面链环和椒盐卷饼链环，分别作为其子类。

例 2.3. 设 Γ_i 为图 *2* 所示的图。那么， $P(\Gamma_i, \{n_1, n_2\})$ 在适当定向下与 $T(i, n_1 + n_2)$合痕。

例 2.4. 设 Γ_i 为一个 i 边形。那么， $P(\Gamma_i, \{n_1, \ldots, n_i\})$ 与（经典）扭结 $P(n_1, n_2, \ldots, n_i)$合痕。

根据定义，我们得到关于图-椒盐卷饼纽结桥指数的以下命题。

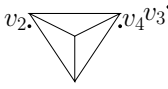
命题 2.5。 设 $K = P(\Gamma, \{n_1, \ldots, n_i\})$。 K 的桥指数小于或等于 Γ中的边数。

根据定义，图-椒盐卷饼链环的镜像由以下命题给出。

命题 2.6。 $P(\Gamma, \{n_1, \ldots, n_i\})$ 的镜像与 $P(\Gamma, \{-n_1, \ldots, -n_i\})$合痕。

3. THE CASE FOR THE COMPLETE GRAPH ON FOUR VERTICES

本节讨论链环 $P(\Gamma, \{n_1, n_2, n_3, n_4\})$，其中 Γ 是具有四个顶点的完全图。这族链环用于定理 1.1。

下文中，我们假设 $\Gamma =$ 

。由四面体的对称性，我们v_1得到以下命题。

命题 3.1. $P(\Gamma, \{n_1, n_2, n_3, n_4\})$ 在对称群S_4对参数 (n_1, n_2, n_3, n_4)的作用下保持不变。

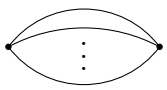


FIGURE 2

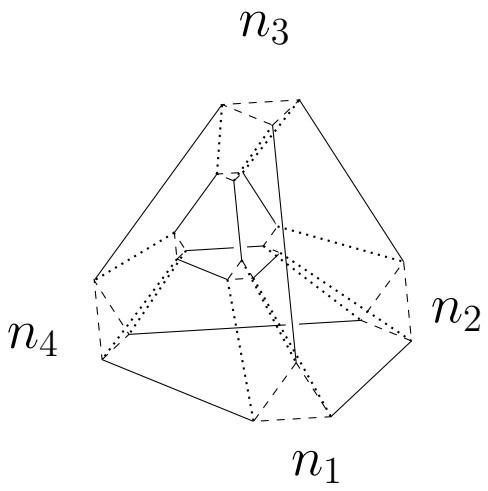


FIGURE 3. 虚线表示扭转区域。 n_i 表示扭转次数。

证明。 链环 $P(\Gamma, \{n_1, n_2, n_3, n_4\})$ 可按图3所示构造。四面体的对称性表明，它在四面体的全等变换下保持不变。四面体群同构于四阶交错群 A_4。因此，我们确认它在 A_4 下保持不变。

接下来，我们考虑所构造的 Γ-椒盐链环的 π 旋转，该旋转将 $\mathbb{R}^3$ 中的顶部和底部互换。将其映射回四面体，这对应于交换原始参数中的两个参数，设为 n_i 和 n_j。这一操作实际上向四面体群中加入了两个顶点的一个换位，这意味着该链环在对称群 S_4 的作用下保持不变。□

注 3.2。 $P(\Gamma, \{n_1, n_2, n_3, n_4\})$ 具有椒盐结图。见图4。

注 3.3。 根据命题 3.1，定理 1.1 中定义的纽结 K_n 不依赖于参数 $\{-2, 2, -(3n+1), 3\}$ 的顺序。

4. Proof of Main Theorems

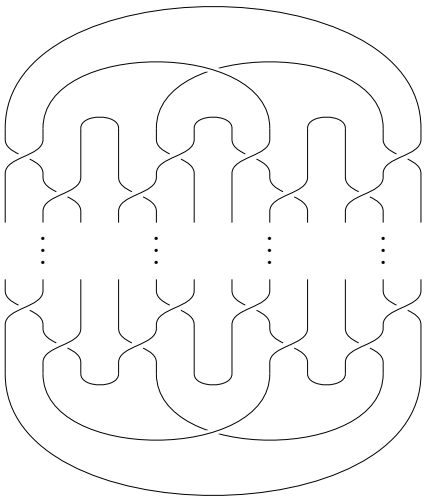
在本节中，我们证明两个主要定理。

4.1. 定理 1.1 的证明。 首先，我们使用 skein关系计算亚历山大多项式，并使用考夫曼括号计算琼斯多项式（详情请参见例如[9]）。

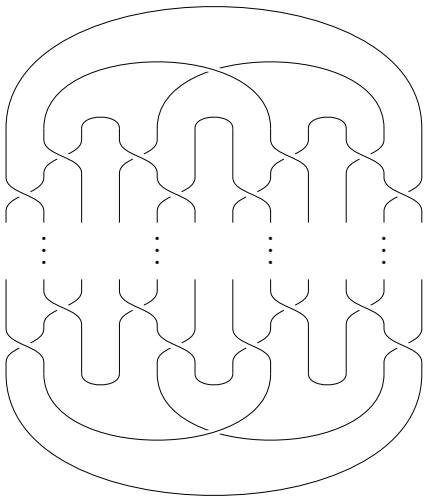
为便于计算，我们使用康威多项式代替亚历山大多项式。链环 L 的康威多项式 $\nabla(L) \in \mathbb{Z}[z]$ 定义为：其在平凡结上的取值为 1，且满足以下 skein 关系：

$$\nabla_{\diagup\!\diagdown}(z) - \nabla_{\diagdown\!\diagup}(z) = z\nabla_{\smile\,\frown}(z).$$

链环 L 的亚历山大多项式记为 $\Delta_L(t)$，可通过代入 $z = t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}$ 从康威多项式中恢复。



(A) 从左到右： n_1, n_2, n_3, n_4 （n_i 是一个正整数）



(B) 从左到右： $-n_1$， $-n_2$， $-n_3$， $-n_4$（n_i 是正整数）

FIGURE 4

无定向链环 L 的考夫曼括号 $\langle L\rangle \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ 定义如下：无交叉的平凡结取值为 1，并满足以下关系：

$$\left\langle \diagup\!\diagdown \right\rangle = A \left\langle \right\rangle \left\langle \right\rangle + A^{-1} \left\langle \asymp \right\rangle .$$

利用考夫曼括号，链环 L 的琼斯多项式定义为

$$J_L(q) = (-A^3)^{-w(D)} \langle \overline{D} \rangle |_{A^2 = q^{-1/2}},$$

其中， D 是 L 的一个图， $\overline{D}$ 是通过忘记 D 的定向而得到的无定向图，而 w（D）是 D 的缠绕数。

为了证明定理 1.1，我们证明以下引理。

引理 4.1。

$$J_{K_n}(q) = (q^{3n+2} - q^2)(1 - q^{-1} + q^{-3} - 2q^{-4} + q^{-5} - q^{-7} + q^{-8}) + 1.$$

证明。对图 5a 中的全扭转应用考夫曼括号关系，我们得到递推关系

$$\left\langle \overline{K_n} \right\rangle - (A^6 + A^{-6}) \left\langle \overline{K_{n-1}} \right\rangle + \left\langle \overline{K_{n-2}} \right\rangle = 0.$$

我们有 $\left\langle \overline{K_0} \right\rangle = 1$，且初始值

$$\left\langle \overline{K_1} \right\rangle = -A^{24} + A^{20} + A^8 - A^4 + 2 - A^{-4} - A^{-16} + A^{-20}$$

可由考夫曼括号关系直接验证。利用初始值求解此递推关系，得到

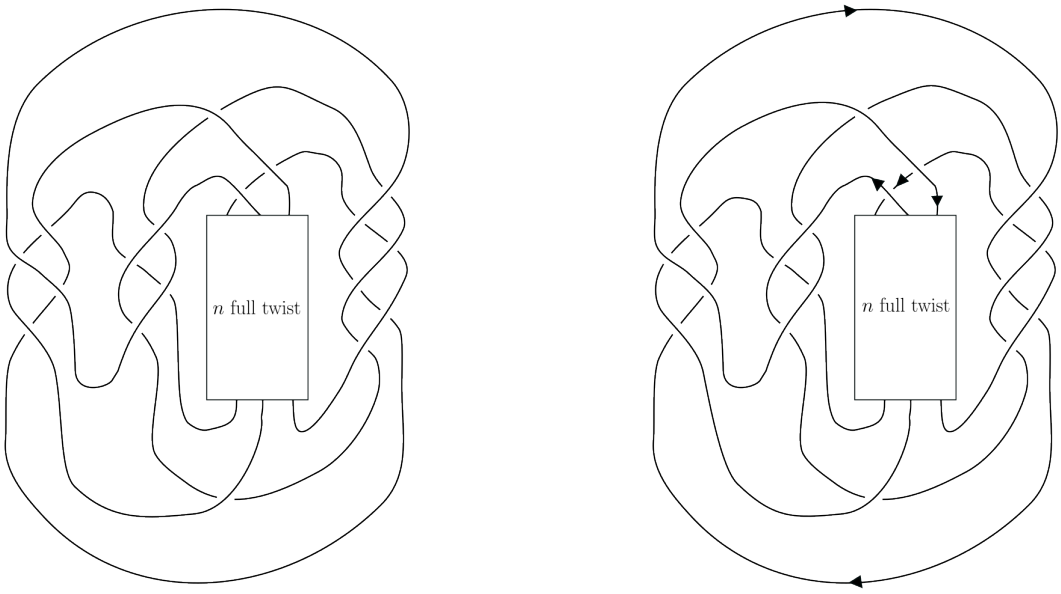
$$\left\langle \overline{K_n} \right\rangle = -A^{-14}(A^{6n} - A^{-6n})(1 - A^4 + A^{12} - 2A^{16} + A^{20} - A^{28} + A^{32}) + A^{6(n-1)}.$$

我们从图 5b 得到 $w(K_n) = 2n - 2$ 。

现在我们可以计算 K_n 的琼斯多项式：

$$\begin{aligned} J_{K_n}(q) &= -(A^{-6(n-1)})A^{-14}(A^{6n}-A^{-6n})(1-A^4+A^{12}-2A^{16}+A^{20}-A^{28}+A^{32})+1 \\ &= (A^{-12n-8}-A^{-8})(1-A^4+A^{12}-2A^{16}+A^{20}-A^{28}+A^{32})+1 \\ &= (q^{3n+2}-q^2)(1-q^{-1}+q^{-3}-2q^{-4}+q^{-5}-q^{-7}+q^{-8})+1. \end{aligned}$$

□



(A) (B)

FIGURE 5. n图中为负整数

现在我们可以证明定理 1.1。

定理 *1.1* 的证明。 对图 5b 中的全扭转应用康威多项式的 skein关系，我们得到递推关系

$$\nabla_{K_n}(z)-(3+z^2)\nabla_{K_{n-1}}(z)+(3+z^2)\nabla_{K_{n-2}}(z)-\nabla_{K_{n-3}}(z)=0.$$

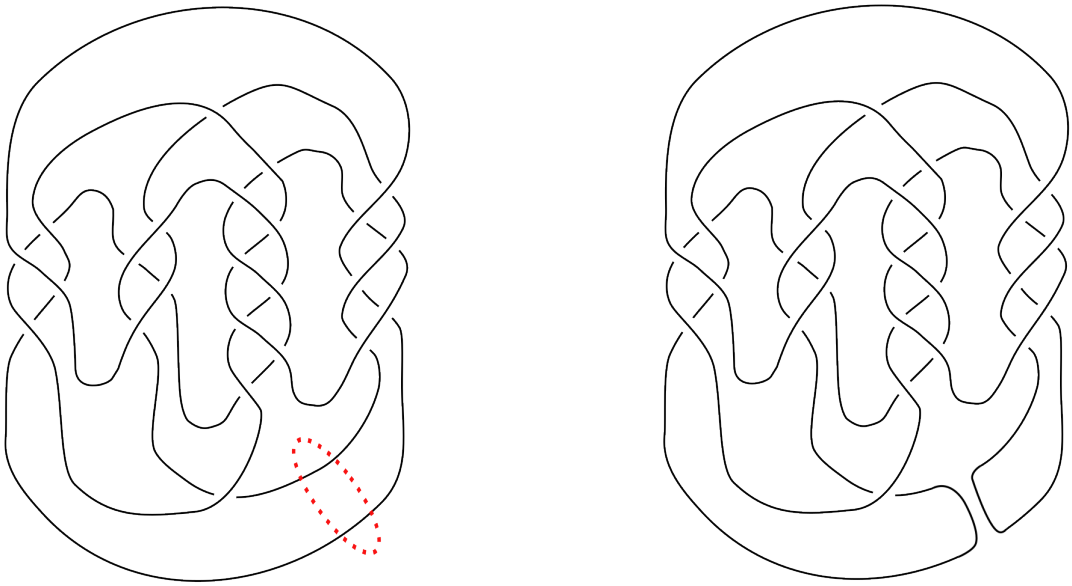
由于 K_0 是平凡结，我们有 $\nabla_{K_0}(z)=1$。初始值 $\nabla_{K_1}(z)=\nabla_{K_2}(z)=1$ 可由康威多项式的 skein关系得到。因此，我们得到 $\nabla_{K_n}(z)=1$，于是 $\Delta_{K_n}(t)=1$。由引理 4.1，我们有

$$J_{K_n}(q)=(q^{3n+2}-q^2)(1-q^{-1}+q^{-3}-2q^{-4}+q^{-5}-q^{-7}+q^{-8})+1.$$

这意味着，如果 $n\neq m$，那么 K_n 和 K_m 并非合痕。 □

4.2. **定理 1.2 的证明。**

定理 *1.2* 的证明。沿红色虚线所圈出的带剪开后，我们得到两个平凡圆，如图 6a 所示。这表明 K_1 是两个平凡圆的带和，因此它是一个带状结。此外，添加负全扭转不会影响这一性质。因此，我们可以得出结论：对于任意正整数 n， K_n 也都是带状结。证明完毕。□



(A) K_1 (B)

FIGURE 6. 带手术

5. CONCLUDING REMARKS

本文提出了图-椒盐卷饼链环这一框架，并通过从四个顶点的完全图构造出一族带有 $\Delta(t) = 1$ 的带状结，展示了该框架的实用性。未来研究的一个自然方向是考察与其他空间图相关联的图椒盐链环。探究底层图和扭转参数的选择与各种纽结不变量之间的关系，或许能在低维拓扑中带来更多有趣的例子和无限族。

ACKNOWLEDGEMENTS

作者谨向 Shin-ichi Oguni 致谢，感谢他对本研究给予的悉心指导，并就此项工作进行了有益的讨论。

References

[1] 阿部哲也、Marc Kegel 和 Nicolas Weiss。相同 0-手术的复杂度。《纽约数学杂志》，即将出版。[2] Joan S. Birman。关于闭三股辫的琼斯多项式。《数学发明》，81(2):287–294，1985。[3] Marc Culler、Nathan M. Dunfield、Matthias Goerner 和 Jeffrey R. Weeks。SnapPy：一款用于研究三维流形的几何与拓扑的计算机程序。网址：http://snappy.computop.org（19/02/2026）。[4] Ronald Fintushel 和 Ronald J. Stern。伪自由轨形。《数学年刊》，122(2):335–364，1985。[5] Michael Hartley Freedman。四维流形的拓扑。《微分几何杂志》，17(3):357–453，1982。[6] 金延保泰三。具有相同多项式不变量的无穷多个纽结。《美国数学会会刊》，97(1):158–162，1986。[7] 金延保泰三。具有相同多项式不变量的无穷多个纽结。《日本数学会杂志》，即将出版。[8] Louis H. Kauffman 和 Pedro Lopes。具有相同亚历山大不变量的无穷多个素纽结。《纽结理论及其应用杂志》，26(9):1743009，13，2017。[9] W.B. Raymond Lickorish。纽结理论导论。施普林格出版社，1997。

Graduate School of Science and Engineering, Ehime University, 2-5 Bunkyo-cho, Mat-suyama, Ehime 790-8577, Japan电子邮箱地址：m807023a@mails.cc.ehime-u.ac.jp