arXiv:2603.07877v1 [math.AP] 9 Mar 2026

关于布雷齐斯和 Mironescu 提出的问题

FANGHUA LIN、MALKIEL SHOSHAN 和 CHANGYOU WANG

Abstract. 本文旨在对 H. Brezis 和 P. Mironescu 最近出版的著作 [2] 中提出的一个开放问题给出肯定答案。该问题在书中 *Sobolev Maps to the Circle*被表述为命题4.3。特别地，我们证明，在边界为某个光滑子流形的边界这一假设下，具有给定边界的面积极小整数可求 rectifiable 链流的最小质量，等于具有相同边界的光滑浸入子流形的面积下确界。

关键词：面积极小、积分流、光滑子流形、光滑边界、奇异集**MSC（2020）：49Q15, 49Q20, 53A10**

Dedicated to the memory of Professor Haim Brezis with admiration

1. Introduction

在《到圆的 Sobolev 映射》一书的 [2, 第4节，2], Brezis 和 Mironescu 引入了一个"特定流类"。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$ 是一个有界凸开集。给定一个整数 l, $0 \leq l \leq N-2$，我们定义

$$\mathcal{F}^l = \Big\{ T \;\Big|\; T \text{ is a closed smooth } l\text{-dimensional manifold such that } T = \partial\Gamma \text{ for some } (l+1)\text{-integral rectifiable current } \Gamma \subset \Omega \text{ with } \mathbf{M}(\Gamma) < \infty \Big\},$$

其中 $\mathbf{M}(\Gamma)$ 表示流 Γ 的质量。对于 $T \in \mathcal{F}^l$，我们定义

$$A^l(T) = \inf \Big\{ \mathbf{M}(\Gamma) \Big| \Gamma \subset \Omega \text{ 是 } (l+1)\text{-整数可求 rectifiable 流}, \quad \partial\Gamma = T \Big\}. \tag{1.1}$$

我们还考虑子集 $\mathcal{F}_0^l, \subset \mathcal{F}^l$, 其定义为

$$\mathcal{F}_0^l = \Big\{ T \in \mathcal{F}^l \;\Big|\; T = \partial M \text{ 对于某个光滑浸入且定向的 } (l+1) \text{ 维子流形 } M \subset \Omega \times \mathbb{R}, \text{满足 } |M| < \infty \Big\},$$

其中 $\big|M\big|$ 表示子流形 M 的面积。对于 $T \in \mathcal{F}_0^l$，我们还定义

$$A_0^l(T) = \inf \Big\{ \big|M\big| \;\Big|\; M \text{ is a } (l+1)\text{-dimensional smoothly immersed and oriented submanifold in } \Omega \times \mathbb{R}, \text{ with } \partial M = T \Big\}. \tag{1.2}$$

Brezis 和 Mironescu [2]声称，T是某个光滑浸入的（$l+1$）维子流形的光滑边界，足以保证以下陈述成立。

定理1.1。对于任意 $T \in \mathcal{F}_0^l$、$0 \le l \le N-2$，由 T 张成的最小质量的两种定义是等价的；也就是说，在 $\Omega \times \mathbb{R}$ 中，极小化边界为 T 的光滑浸入且定向的（$l+1$）维子流形的面积，等价于极小化边界为 T 的（$l+1$）维整数可求 *rectifiable* 流的质量，或者等价地，

$$A_0^l(T) = A^l(T).$$

注 1.2：我们想指出，定理1.1与 [2], 中的命题4.3略有不同，其中 $\mathcal{F}_0^l$ 满足更强的假设，即 $T \in \mathcal{F}_0^l$必须是 Ω 中某个光滑浸入的（$l+1$）维流形的边界；而对于 $T \in \mathcal{F}_0^l$ A_0^l，T被定义为 Ω 中光滑浸入的（$l+1$）维流形的面积下确界，而不是 $\Omega \times \mathbb{R}$ 中的面积下确界，这正是我们在定义1.2中所作的假设。当然，由于凸包性质，具有相同边界的面积极小化电流必须支集于 Ω 中。另一方面，我们对光滑流形作的简单构造，旨在使其在总质量和平坦范数意义下逼近面积极小化流形，因此这些光滑流形必须位于 Ω $\times \mathbb{R}$中。事实上，在与 [2]中的命题4.3相同的假设下，因子 $\mathbb{R}$ 可以替换为任意小的区间（0，ε）。正如一位审稿人所建议的，如果采用由 [13], 提出的更一般且更复杂的构造，或许可以得到与 [2]中的命题4.3完全相同的表述。为简便起见，我们保留定理1.1目前的表述。

Brezis-Mironsecu 在 [2]中针对 l =0，$N-2$ 的情形给出了命题4.3的证明，并将中间情形 $l = 1, \cdots, N-3$ 归功于本文第一作者。这里，我们给出上述定理 1.1 所述结果的证明。

设 $T \in \mathcal{F}_0^l$，并设 M 是 Ω 中一个光滑浸入且定向的（$l+1$）维子流形，满足 $\times \mathbb{R}$ $T = \partial M$；再设 $\Gamma \subset \Omega$ 是一个（$l+1$）维整数可求 rectifiable 面积极小化流，满足 $\partial\Gamma = T$，且在 A^l（T），的定义中实现下确界；即 $\mathbf{M}$（Γ）$= A^l$（T）。这种整数可求 rectifiable 流 T 的存在性是几何测度论中的一个著名结果，归功于 Federer 和 Fleming [7]。

Let

$$\Pi(x, x') = x : \Omega \times \mathbb{R} \to \Omega$$

为正交投影映射。容易看出，$M = \Pi$（M）$\subset$ Ω 是一个（$l+1$）维整数可求 rectifiable 流，满足 $\partial M = T$。此外，由于 Π 的 Lipschitz 范数为 1，可知 M 的面积不小于 M的质量，即，

$$\big|\overline{M}\big| \le \big|M\big|.$$

由此，我们显然有 $A_0^l(T) \ge A^l(T)$。

为证明反向结论 $A_0^l(T) \le A^l(M)$，只需证明，对于任意$\varepsilon > 0$，我们都能找到一个光滑浸入且定向的（$l+1$）维子流形 $\Gamma_0 \subset \Omega$ $\times \mathbb{R}$，使得 $\partial\Gamma_0 = T$，并且

$$\mathbf{M}(\Gamma_0) < A^l(T) + \varepsilon = \mathbf{M}(\Gamma) + \varepsilon. \tag{1.3}$$

证明（1.3）的基本思路是：从原始的 Γ 中切除 Γ 的奇异集 $\mathcal{S}$ 的一个小管状邻域，然后粘贴上 $\mathcal{S}_\varepsilon$；后者是某种可光滑化的对象，其面积也很小，见下文第3节。

这里所需的一个关键结果是阿尔姆格伦的部分正则性定理 [1]，该定理断言，面积极小的（$l+1$）整数可求 rectifiable 流的奇异集 $\mathcal{S}$的豪斯多夫维数至多为（$l-1$）。利用这一结果，我们将证明一个

奇异集 $\mathcal{S}$ 的管状邻域 E' 具有很小的（$l+1$）维豪斯多夫测度。

我们通过球面反演（见下文第4节）构造 $\mathcal{S}_\varepsilon$ ，将 $B=(\Gamma\setminus(E'\cup\mathcal{S}))\cup T\cup M_0$ 投影到一个小球面中。该球面将$\widetilde{\ }$包含一个缩小后的反演“像” B ，它的体积很小。 $B\widetilde{\ }$上会有我们切除管状邻域后留下的“孔洞”，而像 B 上也会$\widetilde{\ }$有孔洞。我们通过一个锥 C （见第5节）穿过$\widetilde{\ }$各自的孔洞，将 B 和 B 连接起来，因此 $\mathcal{S}_\varepsilon=C\cup B$，而由此得到的曲面（$\Gamma\setminus(E'\cup\mathcal{S})$）$\cup T\cup\mathcal{S}_\varepsilon$可光滑化，并形成一个光滑浸入定向子流形。

最后，我们在第7节给出一个例子，说明为什么我们需要在光滑流形上取下确界，而不是取最小值。存在一个 $T\in\mathcal{F}_0^l$，使得下确界 $A_0^l(T)$无法取到。

2. Notation and Preliminaries

我们始终设 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 为一个有界凸开集。对于 $0\le m\le N$，令$\mathcal{D}^m(\Omega)$ 表示 Ω 上具有紧支集的光滑m-形式所构成的空间，即

$$\mathcal{D}^m(\Omega)=\Big\{\omega=\sum_{\alpha\in\mathbb{I}_{m,N}}\omega_\alpha dx^\alpha\ \Big|\ \omega_\alpha\in C_c^\infty(\Omega)\Big\},$$

赋予其如下拓扑

$$\omega^k=\sum_{\alpha\in\mathbb{I}_{m,N}}\omega_\alpha^k dx^\alpha\ \longrightarrow\ \omega=\sum_{\alpha\in\mathbb{I}_{m,N}}\omega_\alpha dx^\alpha$$

假设存在一个紧集 $K\subset\Omega$，使得对于所有$\alpha\in\mathbb{I}_{m,N},k\ge1$，均有 $\mathrm{spt}(\omega_\alpha^k)\subset K$ ，并且对于所有 $\alpha\in\mathbb{I}_{m,N}$ 及所有多重指标 β，$\lim\limits_{k\to\infty}D^\beta\omega_\alpha^k=D^\beta\omega_\alpha$。

Ω 中的一个 m 维流 T 定义为 $\mathcal{D}^m(\Omega)$ 上的连续线性泛函。更确切地说， $T:\mathcal{D}^m(\Omega)\to\mathbb{R}$ 是连续的，意即

$$\big\langle T,\omega^k\big\rangle\xrightarrow{k\nearrow\infty}\big\langle T,\omega\big\rangle,$$

其中 $\omega^k\in\mathcal{D}^m(\Omega)$ 满足：存在一个开集 $U\Subset\Omega$，使得对每个 k，均有 $\mathrm{spt}(\omega^k)\subset U$，且 $\omega^k\to\omega$ 属于 $\mathcal{D}^m(\Omega)$。

m维流 T的支集定义为 $\mathrm{spt}T=\Omega\setminus\bigcup V$，其中$V\Subset\Omega$ 使得 $\langle T,\omega\rangle=0$ 对所有满足 $\mathrm{spt}(\omega)\subset V$ 的 $\omega\in\mathcal{D}^m(\Omega)$ 成立。

根据斯托克斯定理，我们可以将 m维流 T的边界 ∂T定义为一个$(m-1)$维流，即

$$\big\langle\partial T,\tilde\omega\big\rangle=\big\langle T,d\tilde\omega\big\rangle,\quad\forall\tilde\omega\in\mathcal{D}^{m-1}(\Omega),$$

其中

$$d\tilde\omega=\sum_{j=1}^N\sum_{\alpha\in\mathbb{I}_{m-1,N}}\frac{\partial\tilde\omega_\alpha}{\partial x^j}dx^j\wedge dx^\alpha\in\mathcal{D}^m(\Omega)$$

是 $\tilde\omega$的外微分。 m维流 T 的质量定义为

$$\mathbf{M}(T)=\sup_{|\omega|\le1,\omega\in\mathcal{D}^m(\Omega)}\big\langle T,\omega\big\rangle.$$

给定一个光滑定向的 m-子流形 $M\subset\mathbb{R}^N$，它通过下式诱导一个 m 维流 $[\mathbf{M}]$

$$\big\langle[M],\omega\big\rangle=\int_M\omega,\quad\omega\in\mathcal{D}^m(\mathbb{R}^N),$$

则 $[M]$ 的质量等于 M 的 m 维豪斯多夫测度，即$\big|[M]\big| = \mathcal{H}^m(M)$。

1959 年，Federer 和 Fleming [6] 发现了一类流，他们认为这类流对变分法的研究很有价值，因为它们具有紧性。这类流就是整数可求 rectifiable 流。

定义 2.1。设 k 是一个满足 $0 \le k \le N-1$ 的整数，且 T 是一个具有有限质量的 k 维流。如果存在一列定向的 k 维子流形 Σ_i 以及一列 *Borel* 子集K_i，使得 $K_i \subset \Sigma_i$，$\sum_i \mathcal{H}^k(K_i) < \infty$，且

$$\langle T, \omega\rangle = \sum_i \int_{K_i} \omega, \quad \forall \omega \in \mathcal{D}^m(\mathbb{R}^N).$$

则称 T 是 $\mathbb{R}^N$ 中的一个 k-整数可求 *rectifiable* 流。

在 T 是一个由上述 K_i 构成的 k-可求长流的情况下，对于一个 $\mathcal{H}^k$-可测集 A，我们将 $T\lfloor A$ 取为由下式定义的 k-可求长流

$$\big\langle T\lfloor A, \omega\big\rangle = \sum_i \int_{K_i \cap A} \omega, \quad \forall \omega \in \mathcal{D}^m(\mathbb{R}^N).$$

为了定义带重数的整数可求 rectifiable 流，我们回顾几个概念。对于 x_1，x_2、.....、$x_m \in \mathbb{R}^N$，$x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_m$ 是一个简单的 m-向量，简单 m-向量的形式线性组合称为 m-向量，而 $\Lambda_m(\mathbb{R}^N)$ 是 m-向量的向量空间。于是，如 [9]和 [11], 中所述，我们有

定义 2.2。设 $1 \le m \le N$，T 是一个具有有限质量的 m 维流。$T = \tau(\Gamma, \theta, \xi)$ 称为一个整数重数（或整）可求长 *m*-流，如果存在 Γ、θ 和 ξ，使得：

（1） $\Gamma \subset \Omega$ 是一个 $\mathcal{H}^m$-可测的、可数 m-可求 *rectifiable* 集，且对于每个紧集 $K \subset\subset \Omega$，有 $\mathcal{H}^m(\Gamma \cap K) < \infty$，（2） θ 是局部 $\mathcal{H}^m$-可积的非负整数值函数，（3） ξ： $\Gamma \to \Lambda_m(\mathbb{R}^N)$ 是 $\mathcal{H}^m$-可测的，使得对于 $\mathcal{H}^m$-几乎处处的 $x \in \Gamma$，$\xi(x)$ 是 $T_x\Gamma$ 中的简单单位 m-向量，（4） T 在 $\mathcal{D}^m(\Omega)$ 上的作用由下式给出

$$\langle T, \omega\rangle = \int_\Gamma \langle \omega(x), \xi(x)\rangle \theta(x) d\mathcal{H}^m(x), \ \forall \omega \in \mathcal{D}^m(\Omega).$$

回顾一下，整单位重数可求流是重数为 $\theta \equiv 1$ 的整数重数流。

我们也回顾如下余面积公式和切片引理 [9, 定理 7.6]。

定理 2.3（余面积公式）。给定一个 $\mathcal{H}^m$-可测的、可数 m-可求长集 Γ 以及一个 *Lipschitz* 函数 f： $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$，令

$$\Gamma_+ = \Big\{ x \in \Gamma \ \Big| \ T_x\Gamma, \ \nabla^\Gamma f(x) \ exist, \ and \ \nabla^\Gamma f(x) \neq 0 \Big\}.$$

则对 L^1-几乎处处的 $t \in \mathbb{R}$,

$$\Gamma_t = f^{-1}(t) \cap \Gamma_+ \ is \ countably \ \mathcal{H}^{m-1}\text{-}rectifiable,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{\Gamma_t} g \, d\mathcal{H}^{m-1} \Big) \, dt = \int_\Gamma \big|\nabla^\Gamma f\big| g \, d\mathcal{H}^m$$

对于每一个定义在 Γ 上的非负 $\mathcal{H}^m$-可测函数 g。

定义 2.4. 整数重数 m-流 $T=\tau(\Gamma,\theta,\xi)$ 关于 ***Lipschitz*** 函数 f 的切片是一个整数重数 $(m-1)$-流 $\langle T,f,t\rangle=\tau(\Gamma_t,\theta_t,\xi_t)$，其中 $\theta_t=\theta|_{\Gamma_t}$，且 $\xi_t=\xi\llcorner_{|\nabla^\Gamma f|}^{\nabla^\Gamma f}$。

引理 2.5（切片）. 对每一个开集 $W\subset\Omega$,

$$\int_{\infty}^{\infty}\mathbf{M}(\langle T,f,t\rangle\lfloor W)\,dt\le(ess\sup_{\Gamma\cap W}\left|\nabla^\Gamma f\right|)\mathbf{M}(T\lfloor W).$$

回顾一下，若 T 与 ∂T 均为整数可求 rectifiable，则称 T 为积分流。积分流满足如下紧性结果，见 [6] 与 [11, 引理 6.3.11]。

定理 2.6（费德勒–弗莱明紧性定理）. 若 $\{T_k\}$ 是 Ω 中的一列 m-积分流，且满足

$$\sup_k\Big\{\mathbf{M}(T_k)+\mathbf{M}(\partial T_k)\Big\}<\infty,$$

则存在一个 m-积分流 T，使得在取子列之后，$T^k\rightharpoonup T$。

紧性性质给出了面积极小流的存在性，见[11,引理 7.2.1]。

定理 2.7。若 Γ 是一个具有有限质量的$(m-1)$-整数可求 ***rectifiable*** 流，则存在一个 m-整数可求 ***rectifiable*** 流 T_0，使得

$$\mathbf{M}(T_0)=\inf\Big\{\mathbf{M}(T)\Big|\ \partial T=\Gamma,\ T\ is\ m\text{-}integer\ rectifiable\Big\}.$$

我们回顾面积积极小化可求长流的以下单调性不等式，参见 [7]或 [10,定理 9.3]。

定理 2.8 (单调性**)**。设 T 是一个面积积极小化的 m-可求长流，且 $x\in spt\ T$。那么，对于 $0<r<dist(x,spt\ \partial T)$,

$$\frac{\mathbf{M}(T\cap B_r(x))}{\alpha_m r^m}$$

关于 r单调递增，其中 α_m 是 $\mathbb{R}^m$中单位球的勒贝格测度。

几何测度论中最重要的成果之一，是阿尔姆格伦关于面积积极小化流的正则性定理。

我们定义一个 m-整数可求 rectifiable 流的正则点集：对于$x\in$ spt T，若存在一个球 $B_r(x)$ 以及一个正整数 k，使得

$$\langle T,\omega\rangle=k\int_M\omega,\quad\forall\omega\in\mathcal{D}^m(B_r(x)),$$

对于嵌入的 m 维 C^1 定向子流形 M。注意，reg T 是 spt T 的相对开集。我们将 T 的奇异点集定义为 sing $T=$，即 spt $T\setminus$ \\ reg T，它是 spt T 中的相对闭集。

我们有如下由阿尔姆格伦 [1] 和 [4]得到的部分正则性结果。

定理 2.9（阿尔姆格伦正则性）。设 $N\ge2$、$0<l\le N-2$ 为整数。设 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 为一个有界凸开集，且 T 为 Ω 中一个具有有限质量的 l-整数可求 ***rectifiable*** 面积极小化电流。则若 $l=1$，***sing*** $T\cap\Omega$ 为空。若 $l\ge2$，***sing*** $T\cap\Omega$ 的豪斯多夫维数至多为 $l-2$。

最后，我们引入配边的概念。它与我们的问题的相关性是 Thom 配边定理的一个推论。

定义 2.10。 给定两个不交的 n维闭定向光滑浸入子流形 M_1 和 M_2，配边是一个（$n+1$）维光滑浸入紧集子流形 N，其边界是不交并 M_1 和 M_2；在这种情况下，我们称 M_1 和 M_2 是配边的。

我们可以验证，配边是一种等价关系。彼此配边的流形集合称为配边类。 n维闭流形M 若与空流形配边，则称为零配边的 。在这种情况下， M 是某个（$n+1$）维流形的边界。

Thom 配边定理 [12] 给出了每个维数下配边类的分类。特别地，并非所有闭流形都是零配边的，即并非所有闭流形都是边界。

3. Cutting out a tubular neighborhood

本节开篇先重述主要结果——定理1.1。

命题 3.1. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ 为一个有界开集。给定整数l，满足 $0 < l < N-2$ 和 $T \in \mathcal{F}_0^l$，令 $A^l(T)$ 和 $A_0^l(T)$ 分别由 (1.1) 和 (1.2)给出。那么

$$A_0^l(T) = A^l(T).$$

注记 3.2. 必须假设 T 是某个光滑流形 M_0的边界，因为 Thom 配边定理 [12] 表明，即使 T 是一个无边界的 l维光滑定向流形，它也未必是某个 $(l+1)$ 维光滑流形的边界。假设 $T = \partial M_0$ 可确保 $A_0^l(T)$不是空集的下确界。 M_0 对于证明也至关重要，因为我们将在切割粘贴论证中用到它。

我们首先将 Almgren 正则性定理应用于一个面积极小流。设 Γ 是一个具有 $\partial\Gamma = T$的 $(l+1)$-整数可求 rectifiable 面积极小流，它实现了 $A^l(T)$ 定义中的下确界。根据阿尔姆格伦 [1], ，奇异集 $\mathcal{S} := \text{sing } \Gamma$ 的豪斯多夫维数至多为 $(l-1)$（如下图 1 所示）。在下面的引理中，我们将证明存在 $\mathcal{S}$ 的一个小的 ε-管状邻域（在图 2 中表示为 E），其体积和表面积都很小。

引理 3.3. 设 T、 Γ、 $\mathcal{S}$ 如上。给定 $\varepsilon > 0$，令

$$E_\varepsilon = \big\{x \in \Gamma \;\big|\; 0 < dist(x, \mathcal{S}) < \varepsilon\big\},$$

$$\partial E_\varepsilon = \big\{x \in \Gamma \;\big|\; dist(x, \mathcal{S}) = \varepsilon\big\}.$$

则存在一个 $\varepsilon' \in (\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon))$ 使得

$$\mathcal{H}^{l+1}(E_{\varepsilon'}) \leq C\varepsilon^2,$$

and

$$\mathcal{H}^l(\partial E_{\varepsilon'}) \leq C\varepsilon,$$

其中 $C = C(\Gamma、\ l、\ N) > 0$ 取决于 Γ、 l 和 N。

从此处开始， T、Γ、M_0和 $\mathcal{S}$均表示上述对象（图 1——注意，由于维数限制，我们实际上无法像上面那样示意 T、Γ、M_0、$\mathcal{S}$：如果画出 $N=3$、$l=1$，且 Γ 是一个 2-整数可求 rectifiable 流，那么 $\mathcal{S}$ 就会是空集。因此，这幅草图仅用于帮助理解高维对象）。

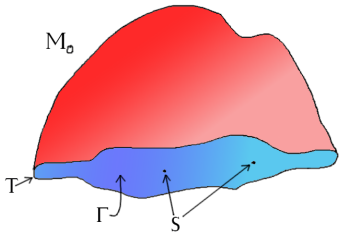

FIGURE 1.情形 $N \geq 4, l = N-2$，Γ 的示意图：是一个 $(l+1)$ 整数可求 rectifiable 流，$\mathcal{S}$ 的豪斯多夫维数为 $(l-2)$。

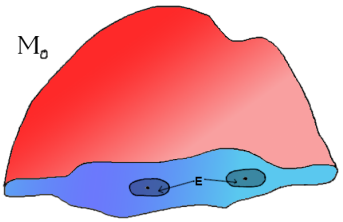

FIGURE 2.一个 ε-邻域管，包围 $\mathcal{S}$。

需要指出的是，可以假设 $\partial E_{\varepsilon'}$ 是 Γ 中的利普希茨超曲面。事实上，可以用 Γ 中有限个横截相交的光滑超曲面的并来替换 $\partial E_{\varepsilon'}$，见本节末尾的注记。

证明。 我们使用切片引理 2.5。回忆一下，$f = \operatorname{dist}(x, \mathcal{S})$：$\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ 是一个 Lipschitz 函数，其 Lip 值为 $f \leq 1$，并且对 $|\nabla f| = 1$ L^N-几乎处处成立（见 [5, 定理 3.14]）。在 $t, \langle T, f, t\rangle$ 处对 T 取 f 切片，将是距离函数 $\{\operatorname{dist}(\cdot, \mathcal{S}) = t\}$ 的水平集。应用切片引理 2.5 得

$$\int_0^{\varepsilon} \mathbf{M}(\langle \Gamma, f, t\rangle)\, dt \leq \mathbf{M}(\Gamma \lfloor E_{\varepsilon}).$$

由中值定理，存在某个 $\varepsilon' \in (\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon)$，使得

$$\mathbf{M}\big(\langle \Gamma, f, \varepsilon'\rangle\big) \leq \frac{2\mathbf{M}(\Gamma \lfloor E_{\varepsilon})}{\varepsilon}.$$

我们需要估计 $\mathbf{M}(\Gamma \lfloor E_{\varepsilon})$。首先，由于 $\mathcal{S}$ 的豪斯多夫维数至多为 $(l-1)$，我们知道对于任意小的 $\delta > 0$, $H^{l-1+\delta}(\mathcal{S}) = 0$。然后，通过用半径为 ε 的球组成的可数球族覆盖 $\mathcal{S}$，可推出

$$\sum_j \varepsilon^{l-1+\delta} \leq \lambda$$

对于某个 $\lambda > 0$。

现在用可数球族 $\{B_{r_j}(x_j)\}$ 覆盖 E_{ε}，其中 $r_j \leq \varepsilon$，因此

$$\mathbf{M}(\Gamma \lfloor E_{\varepsilon}) \leq \sum_j \mathbf{M}(\Gamma \cap B_{r_j}(x_j)) \leq \sum_j \mathbf{M}(\Gamma \cap B_{\varepsilon}(x_j)).$$

我们将使用单调性定理 2.8 来给 $\mathbf{M}(\Gamma \cap B_\varepsilon(x_j))$ 取上界。令 $R > 1$ 足够大，使得 $\Gamma \subset B_R(0) \subset \mathbb{R}^N$。于是

$$\frac{\mathbf{M}(\Gamma \cap B_\varepsilon(x_j))}{\alpha_{l+1}\varepsilon^{l+1}} \leq \frac{\mathbf{M}(\Gamma \cap B_R(0))}{\alpha_{l+1}R^{l+1}} \leq \frac{\mathbf{M}(\Gamma)}{\alpha_{l+1}}.$$

So

$$\begin{aligned}\mathbf{M}(\Gamma \lfloor E_\varepsilon) &\leq \sum_j \mathbf{M}(\Gamma \cap B_\varepsilon(x_j)) \leq \mathbf{M}(\Gamma)\sum_j \varepsilon^{l+1} \\ &= \mathbf{M}(\Gamma)\varepsilon^{2-\delta}\sum_j \varepsilon^{l-1+\delta} \leq \mathbf{M}(\Gamma)\varepsilon^{2-\delta}\lambda.\end{aligned}$$

令 $C = \mathbf{M}(\Gamma)\lambda$。那么

$$\mathbf{M}(\Gamma \lfloor E_\varepsilon) \leq C\varepsilon^{2-\delta}.$$

Then

$$\mathbf{M}(\langle \Gamma, f, \varepsilon' \rangle) \leq \frac{2\mathbf{M}(\Gamma \lfloor E_\varepsilon)}{\varepsilon} \leq C\varepsilon^{1-\delta}.$$

因此取 $\delta \to 0$,

$$\mathbf{M}(\langle \Gamma, f, \varepsilon' \rangle) \leq C\varepsilon.$$

由于 $E_{\varepsilon'} \setminus \mathcal{S}$ 是 Γ 的正则集的子集，因此对于 $\partial E_{\varepsilon'} = \{x \in \Gamma \mid \operatorname{dist}(x, \mathcal{S}) = \varepsilon'\}$,

$$\mathcal{H}^l(\partial E_{\varepsilon'}) = \mathbf{M}(\langle \Gamma, f, \varepsilon' \rangle) \leq C\varepsilon.$$

此外，由上文可知

$$\mathcal{H}^{l+1}(E_{\varepsilon'}) \leq \mathbf{M}(\Gamma \lfloor E_\varepsilon) \leq C\varepsilon^{2-\delta},$$

取 $\delta \to 0$

$$\mathcal{H}^{l+1}(E_{\varepsilon'}) \leq C\varepsilon^2.$$

注意， $\partial E_{\varepsilon'}$ 可以假设为 Γ中的利普希茨超曲面，因此是紧集（$\mathcal{S}$ 也紧），并且也可以用上述覆盖中的有限个小球覆盖。此外，我们可以假设$\partial E_{\varepsilon'}$ 与 Γ光滑相交；否则，就如上所述，在外侧用这些有限个小球的边界的有限并替换 $\partial E_{\varepsilon'}$ ，使其包含 $E_{\varepsilon'}$。□

4. Applying Spherical Inversion

给定一个以原点 0 为中心、半径为 ε 的球面，我们定义 $f : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}^{N+1}$ 为

$$f(x) = \frac{\varepsilon^2}{|x|^2}x, \quad x \in \mathbb{R}^{N+1}.$$

我们称此函数为关于以原点 0 为中心、半径为 ε 的球面 $\mathbb{S}^N_\varepsilon$ 的球面反演，本节中的所有球面反演都相对于同一个球面进行。不与原点相交的球面的反演将是另一个具有不同中心和半径的球面（见 [3, 第 6 节9]）。因此，不与原点相交的球的反演将是另一个球。

我们需要了解球面的直径在球面反演下如何变化。

引理 4.1。 给定一个半径为 r 、中心为 $c \in \mathbb{R}^{N+1}$ （记作 $S_r(c)$）且不与原点相交的球面，在球面反演 $S'_{r'}(c')$ 下， $S_r(c)$ 的像将具有中心 $c' = \frac{\varepsilon^2}{|c|^2}c$和半径 $r' = \frac{\varepsilon^2 r}{|c|^2 - r^2}$。

证明。显然，$c' = f(c) = \frac{\varepsilon^2}{|c|^2}c$。为了求出新的半径，考虑球面上距离原点最近和最远的点，即射线 $\overrightarrow{0c}$ in- tersect 球面 $S_r(c)$、x_1 和 x_2所经过的点。

$$r' = \frac{1}{2}|f(x_1) - f(x_2)| = \left|\frac{\varepsilon^2}{|x_1|^2}x_1 - \frac{\varepsilon^2}{|x_2|^2}x_2\right|$$

利用 $x_2 = x_1 + 2rx_1/|x_1|$ 和 $|x_1| = |c| - r$，并作进一步简化，可得

$$r' = \frac{\varepsilon^2 r}{|x_1|(2r + |x_1|)} = \frac{\varepsilon^2 r}{|c|^2 - r^2}$$

这就完成了证明。 □

我们还回顾以下由荣格 [8] 提出的定理。

定理 4.2（荣格定理）。给定一个紧集 $K \subset \mathbb{R}^{N+1}$，其直径为 $d = diam(K)$，则存在一个半径为 $r \leq d\sqrt{\frac{N+1}{2N+2}}$（）的闭球，~~包含~~ K。

我们希望对集合 $A = M_0 \cup T \cup \Gamma \setminus (E \cup \mathcal{S})$（见下图图3）作球面反演，其中 $E = E_{\varepsilon'}$ 是奇异集 $\mathcal{S}$的 ε'-管状邻域，并证明所得的像（见下图图4）的（$l+1$）维豪斯多夫测度很小。

引理4.3. 给定 $\varepsilon > 0$, $A = M_0 \cup T \cup \Gamma \setminus (E' \cup \mathcal{S})$，其中 $E' = E_{\varepsilon'}$ 由引理 *3.3* 给出，并设 $f : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}^{N+1}$ 为由$f(x) = \frac{\varepsilon^2}{|x|^2}x$定义的球面反演，则

$$\mathcal{H}^{l+1}(f(A)) \leq C\varepsilon^{2l+2}\mathcal{H}^{l+1}(A),$$

where $C = C(l, N) > 0$.

证明。首先，我们将整个集合 A 平移，使得 dist$(A, O) > 2$。这将确保我们所处理的球都不与原点相交。

固定较小的 $\delta > 0$，并选取可数个集合 $\{C_i\} \subset \mathbb{R}^{N+1}$，使得 diam$(C_i) \leq \delta$ 且 $A \subset \cup_i C_i$。由荣格定理，每个 C_i 包含于

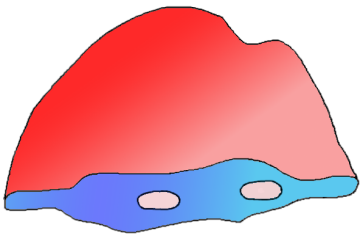

FIGURE3.移除奇异集的管状邻域后，得到 $A = M_0 \cup T \cup \Gamma \setminus (E \cup S)$



FIGURE 4. A经球面反演后的像的示意图——未按比例绘制

某个闭球 B_{r_i}，其 $r_i \le \operatorname{diam}(C_i)\sqrt{2}^{\frac{N+1}{N+2}}$。令 $\gamma = \sqrt{2}^{\frac{N+1}{N+2}}$。因此，在每个这样的球上应用引理 4.1，

$$\operatorname{diam}(f(C_i)) \le \operatorname{diam}(f(\overline{B}_{r_i})) = \frac{\varepsilon^2 r_i}{|c|^2 - r_i^2} \le \varepsilon^2 r_i \le \operatorname{diam}(C_i)\gamma\varepsilon^2 \le \delta\varepsilon^2\gamma.$$

那么， $A \subset \cup_i C_i$ 推出

$$\mathcal{H}^{l+1}_{\delta\varepsilon^2\gamma}(f(A)) \le \sum_i \alpha_{l+1}\big(\frac{\operatorname{diam}(f(C_i))}{2}\big)^{l+1} \le (\varepsilon^2\gamma)^{l+1}\sum_i \alpha_{l+1}\big(\frac{\operatorname{diam}(C_i)}{2}\big)^{l+1}.$$

对 $\{C_i\}$ 的所有覆盖 A，取下确界，其中 $\operatorname{diam}(C_i) \le \delta$，我们得到

$$\mathcal{H}^{l+1}_{\delta\varepsilon^2\gamma}(f(A)) \le (\varepsilon^2\gamma)^{l+1}\mathcal{H}^{l+1}_{\delta}(A),$$

并取 $\delta \to 0$，我们得到

$$\mathcal{H}^{l+1}(f(A)) \le (\varepsilon^2\gamma)^{l+1}\mathcal{H}^{l+1}(A).$$

因此，只需选择半径 ε 非常小的反演球，就可以使像 $f(A)$ 的测度任意小。□

5. Attaching with cones

给定 $\varepsilon, r > 0$，按引理 3.3 的证明选取 $\varepsilon' \in (\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon)$、$E' = E_{\varepsilon'}$和 $\partial E' = \partial E_{\varepsilon'}$，使得 $\partial E' = \big\{x \in \Gamma \,\big|\, \operatorname{dist}(x, \mathcal{S}) = \varepsilon'\big\}$。。我们考虑 $\Gamma\setminus\big(E'\cup\mathcal{S}\big)$的孔洞，以及 $f\big(\Gamma\setminus(E'\cup\mathcal{S})\big)$的孔洞，其中 f表示关于球面 $\mathbb{S}^N_r(0) \subset \mathbb{R}^{N+1}$的球面反演。我们希望用锥形集合将它们连接起来（见下方图 5）。

对每个 $t \in [0,1]$，定义集合 $V_t = \big\{tx : \ x \in \partial E'\big\}$，并定义锥

$$V = \Big\{tx : x \in \partial E', t \in [0,1]\Big\} = \bigcup_{t\in[0,1]} V_t.$$

此外，对每个 $x \in \partial E'$定义（注意 $f(x) = \frac{r^2}{|x|^2}x$）

$$C_x = \Big\{tx : t \in \big[\frac{r^2}{|x|^2}, 1\big]\Big\},$$

以及截锥

$$C = \bigcup_{x\in\partial E'} C_x.$$

显然， C的几何边界是 $\partial E' \cup f(\partial E')$。下述引理断言，截锥 C 的（$l+1$）维面积很小。

引理 5.1. 给定 $\varepsilon, r > 0$，如上选择 $E', \partial E', f, V$ 和 C，则

$$\mathcal{H}^{l+1}(C) < C\varepsilon,$$

其中 $C = C(\Gamma, l, N) > 0$取决于 Γ, l, N。

证明。由于 Γ 有界，我们可以取 $h = \sup_{x\in\partial E'}|x| < \infty$。然后，通过比较截锥的面积

$$C = \bigcup_{x\in\partial E'} C_x = \bigcup_{x\in\partial E'} \big\{tx : \ \frac{r^2}{|x|^2}| \le t \le 1\big\} \tag{5.1}$$

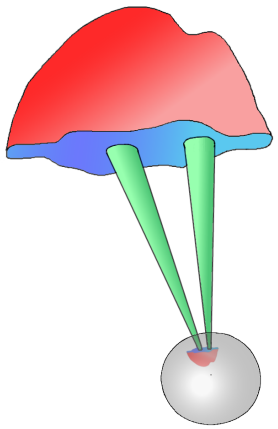

FIGURE 5. 用锥连接

与高为 h 、底面为 $\partial E'$的“柱面”，我们得到

$$\mathcal{H}^{l+1}(C) \leq \mathcal{H}^{l+1}(V) \leq Ch\mathcal{H}^{l}(\partial E') \leq C\varepsilon.$$

证明至此完成。 □

6. PROOF OF THEOREM 1.1

我们先重述定理1.1的内容，以此开始本节。

命题 6.1. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ 是一个有界凸开集。给定一个满足 $0 < l < N-2$ 的整数 l，设 T 是一个 l-可求长流，使得$T = \partial M_0$ 对于某个光滑的 $(l+1)$ 维流形 $M_0 \subset \Omega \times \mathbb{R}$。令

$$A^l(T) = \inf\Big\{\mathbf{M}(\Gamma) \mid \Gamma \subset \Omega \text{ is an } (l+1)\text{-rectifiable current such that } \partial\Gamma = T\Big\},$$

$$A_0^l(T) = \inf\Big\{|M| \mid M \subset \Omega \times \mathbb{R} \text{ is an } (l+1)\text{-smoothly immersed and oriented submanifold with } \partial M = T\Big\}.$$

Then $A_0^l(T) = A^l(T)$.

证明。令 Γ 为达到下确界 $A^l(T)$ 的极小流。令 $\mathcal{S}$ 为 Γ的奇异点集。固定 $\varepsilon' > 0$。选取由引理 3.3 给出的 $\mathcal{S}$ 的一个 ε' 管状邻域 $E_{\varepsilon'}$，使得

$$\mathcal{H}^{l+1}(E_{\varepsilon'}) < C\varepsilon^2,$$
$$\mathcal{H}^{l}(\partial E') < C\varepsilon,$$

以及由引理 5.1 给出的相应锥 D_ε，使得

$$\mathcal{H}^{l+1}(D_\varepsilon) < C\varepsilon.$$

为确保 $M_0 \cup \Gamma$ 在 M_0与 Γ的公共边界 T 处是浸入的，我们沿正 x_{N+1}方向对 M_0 作微小变形。更确切地说，令 $\mathrm{dist}(\cdot, T) : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}_+$ 表示到 $T = \partial M_0$的距离函数。那么

存在一个 $\delta_0 > 0$，使得 dist$(\cdot,\ T)$ 在 T的 $2\delta_0$-邻域内是光滑的。令 $\eta \in C^\infty([0,\infty))$ 满足 $0 \le \eta \le 1, \eta(t) = t$ （当 $0 \le t \le \delta_0$时），且 $\eta(t) = 2\delta_0$ （当 $t \ge 2\delta_0$时）。现在我们定义 $M_0 = \{(x,\ x_{N+1} + \eta(\text{dist}((x,\ x_{N+1}),\ T)) : (x,\ x_{N+1}) \in M_0\}$。不难看出

$$\mathcal{H}^{l+1}(\overline{M}_0) \le C\mathcal{H}^{l+1}(M_0).$$

此外，利用引理4.3，对 $A = M_0 \cup T \cup \Gamma \setminus (E'_\varepsilon \cup \mathcal{S})$进行球面反演，反演球面为 N维球面 $\mathbb{S}^N_r(0)$，其中心为0，半径为 r。取 $0 < r << \varepsilon^{\frac{1}{l+1}}$ 足够小，使得球面反演像 $\widetilde{A}$of A 满足

$$\mathcal{H}^{l+1}(\widetilde{A}) \le Cr^{2l+1}\mathcal{H}^{l+1}(A) \le C\varepsilon.$$

为确保截锥 $\mathcal{D}_\varepsilon \cup (\Gamma \setminus (E' \cup \mathcal{S}))$在 $\partial(\Gamma \setminus (E' \cup \mathcal{S}))$处是浸入的，我们还将截锥 $\mathcal{D}_\varepsilon$ 变形为 $\widehat{\mathcal{D}_\varepsilon}$，方法是将顶点从 $0 \in \mathbb{R}^{N+1}$移动到$(0',\ \varepsilon)$。更具体地，定义

$$\widehat{\mathcal{D}_\varepsilon} = \Big\{(tx, (1-t)\varepsilon) \ \Big|\ x \in \partial E',\ \frac{r^2}{|x|^2} \le t \le 1\Big\}.$$

显然，$\partial\widehat{\mathcal{D}_\varepsilon} = \partial E' \cup \big\{\big(\frac{r^2}{|x|^2}x, (1 - \frac{r^2}{|x|^2})\varepsilon\big) :\ x \in \partial E'\big\}$。此外，不难看出，存在一个光滑等距映射 $\Phi : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}^{N+1}$，使得

$$\Phi(\frac{r^2}{|x|^2}x) = \Big(\frac{r^2}{|x|^2}x,\ (1 - \frac{r^2}{|x|^2})\varepsilon\Big),\ \forall x \in \partial E'.$$

定义 $\widehat{A} = \Phi\big(\widetilde{A}\big)$。于是有

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{l+1}\big(\Gamma \setminus (E_{\varepsilon'} \cup \mathcal{S}) \cup \widehat{D_\varepsilon} \cup \widehat{A}\big) &= \mathcal{H}^{l+1}(\Gamma) - \mathcal{H}^{l+1}(E_{\varepsilon'}) + \mathcal{H}^{l+1}(\widehat{D_\varepsilon}) + \mathcal{H}^{l+1}(\widehat{A}) \\ &\le \mathcal{H}^{l+1}(\Gamma) + C\mathcal{H}^{l+1}(D_\varepsilon) + C\mathcal{H}^{l+1}(\widetilde{A}) \\ &\le \mathcal{H}^{l+1}(\Gamma) + C\varepsilon\end{aligned}$$

其中某个 $C > 0$ 与 ε无关。

注意，$\Gamma \setminus (E' \cup \mathcal{S}) \cup \widehat{D_\varepsilon} \cup A$ 是光滑浸入定向子流形的有限并。事实上，$\Gamma \setminus (E' \cup \mathcal{S})$ 是一个带边界 $\partial E'$ 的光滑浸入子流形，类似地，对于 A （关于上述球面作反演所得的像）以及光滑浸入的柱面曲面 D_ε，结论同样成立。记 X 为一个维数为 $(l+1)$ 的抽象流形，并令$F : X \to \mathbb{R}^{N+1}$ 为一个光滑浸入，其像为 $\Gamma \setminus (E' \cup \mathcal{S})$，即 dF在 X的每一点处均具有满秩 $(l+1)$。对于 A，其浸入只需将 F 与上述球面反演映射复合即可。这样，柱面曲面 D_ε 可以看作一个光滑浸入 $G(x,t) :\ \partial X \times [0,1] \to \mathbb{R}^{N+1}$。现在，映射 G 的微分的秩等于限制 $F\big|_{\partial X}$的微分的秩加一。因此，dG 具有满秩 $(l+1)$。由于 $\Gamma \setminus (E' \cup \mathcal{S})$的浸入 F与 D_ε的浸入在 ∂X上的限制相同，不难看出，可以在局部将 F 与 D_ε 的浸入光滑化，从而得到将 $X \cup (\partial X \times [0,1])$ 整体光滑浸入 $\mathbb{R}^{N+1}$的映射。为说明后一个事实，考虑 X_δ，即 X中 ∂X 的 δ 邻域。对于充分小的 $\delta > 0$，可以将 X_δ 看作 $\partial X \times [-\delta, 0]$，而 F是从 X_δ到 $\Gamma \setminus (E' \cup \mathcal{S})$ 中 $\partial E'$ 的一个小开邻域的光滑浸入。对于 $t \in [-\delta, 0]$，F_x 和F_t 共同构成像 $F(X_\delta)$ 的一个 $(l+1)$ 维切标架，其中 $x \in \partial X$ 且l =维数为 $\partial E'_\varepsilon$。现在需要做的是延拓定义在 F 上的浸入

$\partial X \times [-\delta, 0]$ 以及定义在 $\partial X \times [\delta, 1]$ 上的 G，使其光滑延拓到 $\partial X \times [0, \delta]$，从而成为 $\partial X \times [-\delta, 1]$ 上的浸入。当 ∂X 为一点时，处理方法显而易见：只需将两条在一点相交的短光滑弧（可以是横截的，也可以是相切的）的并集像，替换为一条稍长的光滑浸入弧（在整个两条弧并集的（外部）边界点邻域内，甚至可以假设这条浸入弧与原来的两条弧相同）。对于每个点 $x^* \in \partial X$，都可以在 x^*的小邻域内重复上述操作，并且所得光滑弧会随着 x 在x^*附近变化而光滑变化。换言之，只需构造一个光滑浸入弧的光滑变化族（以x为指标），使其具有给定的端点位置及端点处的切向量，如上所述。随后利用单位分解，便可在 $\partial X \times [0, \delta]$上构造这样的延拓浸入。同样，也可以在$\widehat{\quad}\qquad\widehat{\quad}$的公共边界附近对 D_ε 和 A进行光滑化。如果进行上述构造时取足够小的 δ，使得 $F(\partial X \times [0, \delta])$ 的像的 $(l+1)$ 维豪斯多夫测度很小（并且当 δ 趋于零时趋于零，特别是远小于 ε），那么我们将所得的逼近称为 M_ε，使得

$$A_0^l(T) \leq \mathcal{H}^{l+1}(M_\varepsilon) \leq \mathbf{M}(\Gamma) + C\varepsilon,$$

注意到 M_ε 满足 $\partial M_\varepsilon = T$。那么我们不可能有 $A^l(T) < A_0^l(T)$，但我们已经证明了 $A^l(T) \leq A_0^l(T)$。因此，$A_0^l(T) = A^l(T)$. □

7. An example

我们已经证明，当 $T = \partial M_0$ 是某个光滑流形的边界时，可以用光滑流形逼近面积极小化电流 Γ，其中 $\partial\Gamma = T$。我们可以提出这样一个问题：对于这样的 T，我们是否总能找到一个由 T 界定的光滑流形 M，使得 M 的面积等于极小流的面积——在这种情况下，定理1.1可以用最小值而不是下确界来表述。现在我们说明情况并非如此。

假设我们有一个没有边界的光滑 l维子流形 $T_1 \subset \mathbb{R}^N$，它不是零配边的，因此不界定任何（$l+1$）维光滑流形。然而，根据阿尔姆格伦 [1], ，我们知道它是某个具有奇异集的极小流 Γ_1 的边界。

现在，如果我们取一个固定的 $v \in \mathbb{R}^N$，使其满足 $|v| = L >> \operatorname{diam}(T_1)$，并令 $T_2 = \{x + v : x \in T_1\}$，从而复制一份 T_1，那么存在一个光滑可定向的（$l+1$）维流形 M_0，使得 $\partial M_0 = T_1 \cup T_2$，即柱面

$$M_0 = \left\{x + tv \;\middle|\; x \in T_1, t \in [0, 1]\right\}.$$

接下来我们可以再次考虑以下量

$$A^l := \inf\left\{\mathbf{M}(\Gamma) \middle| \Gamma \subset \mathbb{R}^N \text{是一个（}l+1\text{）可求长流，使得 } \partial\Gamma = T_1 \cup T_2\right\},$$

and

$$A_0^l := \inf\left\{|M| \;\middle|\; M \subset \mathbb{R}^{N+1} \text{是一个光滑定向流形，且 } \partial M = T_1 \cup T_2\right\}.$$

设 $\Gamma_2 = \Gamma_1 + \{v\}$。那么 $\partial(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = T_1 \cup T_2$。我们注意到，$T_1$ 和 T_2 不是零配边的，这意味着 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 不可能是光滑的。因此，如果存在光滑极小曲面，它不可能是由两个不连通分支 $M_1 \cup M_2$的不交并构成的，其中 $T_1 = \partial M_1$ 和 $T_2 = \partial M_2$。

然而，我们也不可能有一个连通的光滑极小曲面 M，满足 $\partial M = T_1 \cup T_2$。为证明这一点，取任意一点 $x \in T_1$，以及一个经过该点 $x + \frac{v}{2}$、垂直于 v 的平面 π_v。如果存在某个边界为 $T_1 \cup T_2$的（$l+1$）维光滑极小曲面 M，它将在某点 y与 π_v 相交。

但是，根据定理 2.8 中的面积单调性公式，我们有

$$\big|M \cap B_r(y)\big| \geq \alpha_{l+1} r^{l+1}.$$

取 $r \to \frac{L}{2}$，我们必须有

$$\big|M\big| \geq \big|M \cap B_{\frac{L}{2}}(y)\big| \geq \alpha_{l+1}\big(\frac{L}{2}\big)^{l+1}.$$

另一方面，很容易看出 $\big|M\big| \leq CL$。由此得到所需的矛盾，因为 $l \geq 1$ 和 L 可以任意大。

虽然不存在能实现下确界 A^l 的光滑流形，但我们仍然可以用前面描述的方法逼近实现 A^l 的极小流。

Acknowledgments

第一作者获得美国国家科学基金会 DMS 2247773 项目的部分资助。本文是第二作者在第一作者指导下完成的硕士论文的一部分。第三作者获得美国国家科学基金会 DMS 2453789 项目和西蒙斯旅行资助 TSM-00007723 的部分资助。作者感谢匿名审稿人仔细审阅稿件并提出宝贵意见，也感谢其提醒我们注意一篇相关的近期预印本 [13]。

References

[1] F. J. 阿尔姆格伦。 *Almgrens big regularity paper*《世界科学数学专著丛书》第 1 卷。World Scientific Publishing Co. Inc.，2000 年。

[2] 2021 H. 布雷齐斯，P.

[3] *Introduction to geometry.* 1969 Mironescu。 *Sobolev Maps to the Circle.* Birkhauser - Springer，H. Coxeter。John Wiley and Sons，。

[4] *arXiv* 1506 08118, 2015 C. De

[5] *Measure theory and fine properties of functions.* 2015 Lellis。面积极小流奇异集的大小。。L. Evans。R. Gariepy。CRC Press，Taylor and Francis Group，

[6] H. Federer 和 W. H. Fleming。正规流与整流。 *Ann. of Math.* (2)，72:458-520，1960[7] H. Federer。 *Geometric measure theory*。《数学科学基础丛书》第 153 卷。Springer-Verlag New York Inc.，纽约，1969 年。[8] H. 荣格。关于包含空间图形的最小球。 *Journal for die reine und angewandte Mathematik.* 123 1901 241 257 ( ): - 。

[9] 2008 S. Krantz，H. Parks。

[10] *Geometric measure theory a beginner's guide* *Geometric integration theory.*Birkhauser Boston，MA，F. Morgan。。Elsevier Inc.，2016

[11] *Introduction to geometric measure theory.* L. Simon。清华讲座，2014

[12] 、、 、、 、 R. Thom。可微流形的若干全局性质。*matici Helvetici* 1954 *Commentarii Mathe-* 。

[13] F.阿尔姆格伦，W. Browder，G. Caldini，C. DeLellis，整循环的最优光滑逼近。 *arXiv:2411.17678*

Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, NY 10012, USA *Email address*: linf@cims.nyu.eduDepartment of Mathematics, Purdue University, West Lafayette, IN 47907, USA*Email address*: wang2482@purdue.edu