arXiv:2603.07878v1 [math.RA] 9 Mar 2026

斜多项式环中宫下定理的另一种证明 II

Satoshi Yamanaka

日本冈山津山工业高等专门学校综合科学与技术系，邮编 708-8509

yamanaka@tsuyama.kosen-ac.jp

摘要

Y. Miyashita 给出了斜多项式环中可分多项式和 Hirata 可分多项式的刻画。在上一篇论文中，作者与 S. Ikehata 分别为自同构型 $B[X;\ \rho]$ 和导子型 $B[X;\ D]$ 的斜多项式环中的宫下定理给出了直接而初等的证明。本文旨在为一般斜多项式环 $B[X;\ \rho,\ D]$ 中的这些定理给出证明。

arXiv 版本说明。 本文是作者已接受的论文手稿，文章题为“斜多项式环中的宫下定理的另一种证明 II”，发表于海湾数学杂志 5 (2017)，第 4 期，9–17 页。本文稿的内容与已发表的文章一致。正式出版版本见 10.56947/gjom.v5i4.116。

2010年数学主题分类： 16S32,16S36

关键词： 可分扩张、可分多项式、平田可分扩张、平田可分多项式、斜多项式环、导子

1 引言与预备知识

本文中，所有环均带有单位元 1。设 A/B 是具有公共单位元 1 的环扩张。若从 $A\otimes_B A$ 到 A 的 A-A- 同态 $a\otimes b\mapsto ab$ 分裂，则称 A/B 为 < 样式 id='3'> 可分 </ 样式 > 的；若 $A\otimes_B A$ 与 A-A-同构于由 A 的有限个副本构成的有限直和的一个直和项，则称 A/B 为 < 样式 id='11'> 平田可分 </ 样式 > 的。众所周知，平田可分扩张是可分扩张。我们记

$$(A\otimes_B A)^A=\{\mu\in A\otimes_B A\mid z\mu=\mu z \text{ for any } z\in A\},$$
$$V_A(B)=\{g\in A\mid \alpha g=g\alpha \text{ for any } \alpha\in B\}.$$

关于可分扩张和平田可分扩张，以下事实是众所周知的。

引理 1.1. ([1, 定义 2]) A/B 可分，当且仅当存在 $\sum_i z_i \otimes w_i \in (A \otimes_B A)^A$ 使得 $\sum_i z_i w_i = 1$。

引理 1.2. ([13, 命题 1]) A/B 平田可分，当且仅当存在 $g_i \in V_A(B)$ 和 $\sum_j z_{ij} \otimes w_{ij} \in (A \otimes_B A)^A$ 使得 $1 \otimes 1 = \sum_i g_i \sum_j z_{ij} \otimes w_{ij} = \sum_i \sum_j z_{ij} \otimes w_{ij} g_i$。

设 B 为带单位元 $\mathbf{1}$ 的环， ρ为 B的一个自同构， D 为一个 ρ-导子（即 B 的一个加法自同态，满足对任意 α、$\beta \in B$，有 $D(\alpha\beta) = D(\alpha)\beta + \rho(\alpha)D(\beta)$）。记 $B[X; \rho, D]$为斜多项式环，其乘法定义为对任意 $\alpha \in B$，有 $\alpha X = X\rho(\alpha) + D(\alpha)$。特别地，记 $B[X; \rho] = B[X; \rho, 0]$和 $B[X; D] = B[X; \mathbf{1}, D]$。此外，记 $B[X; \rho, D]_{(0)}$为 $B[X; \rho, D]$ 中所有首一多项式 f的集合，其中满足 $fB[X; \rho, D] = B[X; \rho, D]f$。对于任意多项式$f \in B[X; \rho, D]_{(0)}$，剩余类环 $B[X; \rho, D]/fB[X; \rho, D]$ 是 B的一个自由环扩张。若多项式 f属于 $B[X; \rho, D]_{(0)}$，则称其在 $B[X; \rho, D]$ 中可分（分别地，平田可分），如果$B[X; \rho, D]/fB[X; \rho, D]$ 是 B的可分（分别地，平田可分）扩张。

在本文中，始终设 $f = X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0$属于 $B[X\rho, D]_{(0)}$并且

$$
\begin{aligned}
Y_0 &= X^{m-1} + X^{m-2}a_{m-1} + \cdots + Xa_2 + a_1,\\
Y_1 &= X^{m-2} + X^{m-3}a_{m-1} + \cdots + Xa_3 + a_2,\\
&\cdots\cdots\\
Y_j &= X^{m-j-1} + X^{m-j-2}a_{m-1} + \cdots + Xa_{j+2} + a_{j+1},\\
&\cdots\cdots\\
Y_{m-2} &= X + a_{m-1},\\
Y_{m-1} &= 1.
\end{aligned}
$$

此外，我们将采用以下约定：

$$
\begin{aligned}
A &= B[X; \rho, D]/fB[X; \rho, D]\\
x &= X + fB[X; \rho, D] \in A\\
y_j &= Y_j + fB[X; \rho, D] \quad (0 \le j \le m-1)\\
B^\rho &= \{\alpha \in B \mid \rho(\alpha) = \alpha\}\\
B^D &= \{\alpha \in B \mid D(\alpha) = 0\}\\
B^{\rho,D} &= B^\rho \cap B^D\\
V_0 &= V_A(B) = \{g \in A \mid \alpha g = g\alpha \text{ for any } \alpha \in B\}\\
V_{m-1} &= \{h \in A \mid \rho^{m-1}(\alpha)h = h\alpha \text{ for any } \alpha \in B\}\\
(A \otimes_B A)^A &= \{\mu \in A \otimes_B A \mid z\mu = \mu z \text{ for any } z \in A\}
\end{aligned}
$$

在 [9], Y. Miyashita 研究了斜多项式环中的可分多项式和平田可分多项式。他证明了以下结论。

命题 1.3。 ([9, 定理 1。8]) 设 $f = X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0$ 属于$B[X;\ \rho, D]_{(0)}$。那么，当且仅当存在 $h \in V_{m-1}$ 使得 $\sum_{j=0}^{m-1} y_j h x^j = 1$时， f在 $B[X;\ \rho, D]$ 中可分。

命题 1.4。 ([9, 定理 1。9]) 设 $f = X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0$ 属于$B[X;\ \rho、\ D]_{(0)}$。则 f在 $B[X$中是平田可分的；ρ、$D]$ 当且仅当存在 $g_i \in V_0$ 和$h_i \in V_{m-1}$，使得 $\sum_i g_i x^{m-1} h_i = 1$ 且 $\sum_i g_i x^k h_i = 0\ (0 \le k \le m-2)$。

Y. Miyashita 利用(*)-正滤过环理论证明了上述结果。然而，要理解他的证明似乎并不容易。在前一篇论文中， [15],作者分别在$B[X;\ \rho]$ 和 $B[X;\ D]$中，对上述命题给出了直接且初等的证明。在本文中，我们将把这些证明推广到斜多项式环 $B[X;\ \rho,\ D]$。

现在我们简要说明 $B[X; \rho, D]_{(0)}$ 中多项式系数的一些性质。下面的引理可以通过直接计算证明。

引理 1.5. ([2, 引理 1.1]) 设 $f = X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0$属于 $B[X; \rho, D]$。那么
f $B[X\ \rho\ D]_{(0)}$ $\alpha f = f\rho^m\ \alpha$ $\alpha \in B$ $Xf = f\big(X -$属于 ;，当且仅当对任意 和 $\rho\ a_{m-1}\ + a_{m-1}\big)$
$()\,()$。

根据引理 1.5，我们得到如下结论。

引理 1.6. 假设 $\rho D = D\rho$ 和 $f = X^m + X^{m-1}a_{m-1} + \cdots + Xa_1 + a_0$ 属于$B[X; \rho, D]$。那么 f属于 $B[X; \rho, D]_{(0)}$ 当且仅当

(1) $a_i \rho^m(\alpha) = \sum_{j=i}^{m} \binom{j}{i} \rho^j D^{j-i}(\alpha) a_j \quad (\alpha \in B,\ 0 \le i \le m-1,\ a_m = 1)$

(2) $D(a_i) = a_{i-1} - \rho(a_{i-1}) - a_i\big(\rho(a_{m-1}) - a_{m-1}\big) \quad (1 \le i \le m-1)$

(3) $D(a_0) = a_0\big(\rho(a_{m-1}) - a_{m-1}\big)$

证明。 令 α 为 B 中的任意元素。根据引理 1.5， f 属于 $B[X;\ \rho,\ D]_{(0)}$ 当且仅当 $\alpha f = f\rho^m(\alpha)$ 且 $Xf = f(X - \rho(a_{m-1}) + a_{m-1})$。容易通过归纳法看出， $\alpha X^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} X^i \rho^j D^{j-i}(\alpha) a_j\ (j \ge 0)$。因此我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{m} \alpha X^j a_j &= \sum_{j=0}^{m} \left(\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} X^i \rho^j D^{j-i}(\alpha) \right) a_j \\ &= \sum_{i=0}^{m} X^i \left(\sum_{j=i}^{m} \binom{j}{i} \rho^j D^{j-i}(\alpha) a_j \right).\end{aligned}$$

这意味着 $\alpha f = f\rho^m(\alpha)$ 蕴含 (1)，反之亦然。通过直接计算，我们

have

$$\begin{aligned}
&f\big(X-\rho(a_{m-1})+a_{m-1}\big)\\
&=\sum_{i=0}^{m-1}X^ia_iX-\sum_{i=0}^{m-1}X^ia_i\big(\rho(a_{m-1})-a_{m-1}\big)\\
&=\sum_{i=0}^{m-1}X^i\big(X\rho(a_i)+D(a_i)\big)-\sum_{i=0}^{m-1}X^ia_i\big(\rho(a_{m-1})-a_{m-1}\big)\\
&=\sum_{i=0}^{m-1}X^{i+1}\rho(a_i)+\sum_{i=0}^{m-1}X^i\Big(D(a_i)-a_i\big(\rho(a_{m-1})-a_{m-1}\big)\Big)\\
&=X^ma_{m-1}+\sum_{i=1}^{m-1}X^i\Big(\rho(a_{i-1})+D(a_i)-a_i\big(\rho(a_{m-1})-a_{m-1}\big)\Big)\\
&\quad+D(a_0)-a_0\big(\rho(a_{m-1})-a_{m-1}\big).
\end{aligned}$$

这意味着 $Xf=f\big(X-\rho(a_{m-1})+a_{m-1}\big)$ 蕴含 (2) 和 (3)，反之亦然。证明至此完成。

推论 1.7。假设 $\rho D=D\rho$ *and* $f=X^m+X^{m-1}a_{m-1}+\cdots+Xa_1+a_0$ *is in* $B[X;\rho,D]_{(0)}\cap B^\rho[X]$。那么 f *is in* $C(B^{\rho,D})[X]$，其中 $C(B^{\rho,D})$ 是 $B^{\rho,D}$的中心。此外，

$$\alpha a_i=\sum_{j=i}^{m}(-1)^{j-i}\binom{j}{i}a_j\rho^{m-j}D^{j-i}(\alpha)\quad(\alpha\in B,\,0\le j\le m,\,a_m=1)$$

证明。令 $f=X^m+X^{m-1}a_{m-1}+\cdots+Xa_1+a_0$ be in $B[X;\rho,D]_{(0)}\cap B^\rho[X]$。则由引理 1.6（2）和（3），$a_i\in B^\rho\,(0\le i\le m-1)$ 蕴含 $a_i\in B^D\,(0\le i\le m-1)$。因此，根据引理 1.6（1），$a_i\in C(B^{\rho,D})\,(0\le i\le m-1)$。令 α 为 B 中的任意元素。通过简单的归纳法，我们得到 $X^j\alpha=\sum_{i=0}^{j}(-1)^{j-i}\binom{j}{i}\rho^{-j}D^{j-i}(\alpha)X^i\,(j\ge0)$。于是我们得到

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{m}a_jX^j\rho^m(\alpha)&=\sum_{j=0}^{m}a_j\left(\sum_{i=0}^{j}(-1)^{j-i}\binom{j}{i}\rho^{m-j}D^{j-i}(\alpha)X^i\right)\\
&=\sum_{i=0}^{m}\left(\sum_{j=i}^{m}(-1)^{j-i}\binom{j}{i}a_j\rho^{m-j}D^{j-i}(\alpha)\right)X^i
\end{aligned}$$

因此，$\alpha f=f\rho^m(\alpha)$意味着我们的断言成立。证明完毕 .

2 主要结果

本节沿用上一节所用的约定和记号。我们假设 $\rho D=D\rho$ 和 $f=X^m+X^{m-1}a_{m-1}+\cdots+Xa_1+a_0$ 属于 $B[X;\rho,D]_{(0)}\cap B^\rho[X]$。注意，根据推论 1.7，$f$ 属于 $C(B^{\rho,D})[X]$。首先我们证明以下结论。

引理 2.1。

$$(A\otimes_B A)^A=\left\{\sum_{j=0}^{m-1}y_jh\otimes x^j\;\middle|\;h\in V_{m-1}\right\}.$$

证明。由于 $\{1,x,x^2,\cdots,x^{m-1}\}$ 是 B 的自由基，A 中的每个元素都可以写成 $\sum_{j=0}^{m-1}z_j\otimes x^j$ 的形式，其中 $z_j\in A$。令 $\sum_{j=0}^{m-1}z_j\otimes x^j$ 属于 $(A\otimes_B A)^A$，并令 α 为 B 中的任意元素。由于 $\alpha\left(\sum_{j=0}^{m-1}z_j\otimes x^j\right)=\left(\sum_{j=0}^{m-1}z_j\otimes x^j\right)\alpha$ 和 $x^j\alpha=\sum_{i=0}^{j}(-1)^{j-i}\binom{j}{i}\rho^{-j}D^{j-i}(\alpha)x^i$（$j\geq 0$），我们有

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{m-1}\alpha z_j\otimes x^j&=\sum_{j=0}^{m-1}z_j\otimes x^j\alpha\\&=\sum_{j=0}^{m-1}z_j\otimes\left(\sum_{i=0}^{j}(-1)^{j-i}\binom{j}{i}\rho^{-j}D^{j-i}(\alpha)x^i\right)\\&=\sum_{j=0}^{m-1}z_j\Big(\sum_{i=0}^{j}(-1)^{j-i}\binom{j}{i}\rho^{-j}D^{j-i}(\alpha)\Big)\otimes x^i\\&=\sum_{i=0}^{m-1}\left(\sum_{j=i}^{m-1}(-1)^{j-i}\binom{j}{i}z_j\rho^{-j}D^{j-i}(\alpha)\right)\otimes x^i\\&=\sum_{j=0}^{m-1}\left(\sum_{i=j}^{m-1}(-1)^{i-j}\binom{i}{j}z_i\rho^{-i}D^{i-j}(\alpha)\right)\otimes x^j.\end{aligned}$$

因此我们得到

$$\alpha z_j=\sum_{i=j}^{m-1}(-1)^{i-j}\binom{i}{j}z_i\rho^{-i}D^{i-j}(\alpha)\quad(0\leq j\leq m-1).$$

现在令 $h=z_{m-1}$。显然，h 属于 V_{m-1}。由于 $x\left(\sum_{j=0}^{m-1}z_j\otimes x^j\right)=\left(\sum_{j=0}^{m-1}z_j\otimes x^j\right)x$ 和 $x^m=-\sum_{j=0}^{m-1}x^ja_j=-\sum_{j=0}^{m-1}a_jx^j$，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{m-1}xz_j\otimes x^j&=\sum_{j=0}^{m-1}z_j\otimes x^{j+1}\\&=\sum_{j=0}^{m-2}z_j\otimes x^{j+1}+h\otimes x^m\\&=\sum_{j=1}^{m-1}z_{j-1}\otimes x^j+h\otimes\left(-\sum_{j=0}^{m-1}a_jx^j\right)\\&=\sum_{j=1}^{m-1}z_{j-1}\otimes x^j-\sum_{j=0}^{m-1}ha_j\otimes x^j\\&=-ha_0\otimes 1+\sum_{j=1}^{m-1}(z_{j-1}-ha_j)\otimes x^j.\end{aligned}$$

由此可得 $xz_j = z_{j-1} - ha_j (1 \le j \le m-1)$ 和 $xz_0 = -ha_0$。注意到 $ha_j = \rho^{m-1}(a_j)h = a_j h$ ($0 \le j \le m-1$)，我们有 $z_{j-1} = xz_j + a_j h$ ($1 \le j \le m-1$) 和$xz_0 = -a_0 h$。归纳可得 $z_j = y_j h$ ($0 \le j \le m-1$)。

反之，假设 h 属于 V_{m-1}。为证明 $\sum_{j=0}^{m-1} y_j h \otimes x^j \in (A \otimes_B A)^A$，只需证明对于任意 $\alpha \in B$，$x\left(\sum_{j=0}^{m-1} y_j h \otimes x^j\right) = \left(\sum_{j=0}^{m-1} y_j h \otimes x^j\right) x$ 且 $\alpha\left(\sum_{j=0}^{m-1} y_j h \otimes x^j\right) = \left(\sum_{j=0}^{m-1} y_j h \otimes x^j\right)\alpha$。注意到 $xy_j = y_{j-1} - a_j (1 \le j \le m-1)$ 以及 $xy_0 = -a_0$，我们得到

$$\begin{aligned}
x\left(\sum_{j=0}^{m-1} y_j h \otimes x^j\right) &= xy_0 h \otimes 1 + \sum_{j=1}^{m-1} xy_j h \otimes x^j \\
&= (-a_0)h \otimes 1 + \sum_{j=1}^{m-1} (y_{j-1} - a_j)h \otimes x^j \\
&= h \otimes (-a_0) + \sum_{j=1}^{m-1} (-a_j)h \otimes x^j + \sum_{j=1}^{m-1} y_{j-1} h \otimes x^j \\
&= h \otimes (-a_0) + h \otimes \left(-\sum_{j=1}^{m-1} x^j a_j\right) + \sum_{j=0}^{m-2} y_j h \otimes x^{j+1} \\
&= h \otimes x^m + \sum_{j=0}^{m-2} y_j h \otimes x^{j+1} \\
&= \left(\sum_{j=0}^{m-1} y_j h \otimes x^j\right) x.
\end{aligned}$$

接下来，对于任意 $\alpha \in B$，有

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=0}^{m-1} y_j h \otimes x^j\right)\alpha &= \sum_{j=0}^{m-1} y_j h \otimes \left(\sum_{i=0}^{j} (-1)^{j-i}\binom{j}{i}\rho^{-j} D^{j-i}(\alpha) x^i\right) \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} y_j h \left(\sum_{i=0}^{j} (-1)^{j-i}\binom{j}{i}\rho^{-j} D^{j-i}(\alpha)\right) \otimes x^i \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} \left(\sum_{j=i}^{m-1} (-1)^{j-i}\binom{j}{i} y_j \rho^{m-j-1} D^{j-i}(\alpha)\right) h \otimes x^i \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} \left(\sum_{i=j}^{m-1} (-1)^{i-j}\binom{i}{j} y_i \rho^{m-i-1} D^{i-j}(\alpha)\right) h \otimes x^j.
\end{aligned}$$

因此，要证明 $\alpha\left(\sum_{j=0}^{m-1} y_j h \otimes x^j\right) = \left(\sum_{j=0}^{m-1} y_j h \otimes x^j\right)\alpha$，只需证明

$$\alpha y_j = \sum_{i=j}^{m-1} (-1)^{i-j}\binom{i}{j} y_i \rho^{m-i-1} D^{i-j}(\alpha) \quad (0 \le j \le m-1).$$

我们将用归纳法证明。由于 $y_{m-1}=1$，当 $j=m-1$ 时结论成立。对于某个 j（$0\le j\le m-2$），我们假设

$$\alpha y_{j+1}=\sum_{i=j+1}^{m-1}(-1)^{i-j-1}\binom{i}{j+1}y_i\rho^{m-i-1}D^{i-j-1}(\alpha).$$

注意到 $\alpha a_j=\sum_{i=j}^{m}(-1)^{i-j}\binom{i}{j}a_i\rho^{m-i}D^{i-j}(\alpha)$（$0\le j\le m$，$a_m=1$）且 $xy_i=y_{i-1}-a_i$（$1\le i\le m-1$），我们得到

$$\begin{aligned}
\alpha y_j &= \alpha x y_{j+1}+\alpha a_{j+1}\\
&= x\rho(\alpha)y_{j+1}+D(\alpha)y_{j+1}+\alpha a_{j+1}\\
&= x\left(\sum_{i=j+1}^{m-1}(-1)^{i-j-1}\binom{i}{j+1}y_i\rho^{m-i-1}D^{i-j-1}(\rho(\alpha))\right)\\
&\quad+\sum_{i=j+1}^{m-1}(-1)^{i-j-1}\binom{i}{j+1}y_i\rho^{m-i-1}D^{i-j-1}(D(\alpha))\\
&\quad+\sum_{i=j+1}^{m}(-1)^{i-j-1}\binom{i}{j+1}a_i\rho^{m-i}D^{i-j-1}(\alpha)\\
&= \sum_{i=j+1}^{m-1}(-1)^{i-j-1}\binom{i}{j+1}(y_{i-1}-a_i)\rho^{m-i}D^{i-j-1}(\alpha)\\
&\quad-\sum_{i=j+1}^{m-1}(-1)^{i-j}\binom{i}{j+1}y_i\rho^{m-i-1}D^{i-j}(\alpha)\\
&\quad+\sum_{i=j+1}^{m}(-1)^{i-j-1}\binom{i}{j+1}a_i\rho^{m-i}D^{i-j-1}(\alpha)\\
&= \sum_{i=j+1}^{m-1}(-1)^{i-j-1}\binom{i}{j+1}y_{i-1}\rho^{m-i}D^{i-j-1}(\alpha)\\
&\quad-\sum_{i=j+1}^{m-1}(-1)^{i-j-1}\binom{i}{j+1}a_i\rho^{m-i}D^{i-j-1}(\alpha)\\
&\quad-\sum_{i=j+1}^{m-1}(-1)^{i-j}\binom{i}{j+1}y_i\rho^{m-i-1}D^{i-j}(\alpha)\\
&\quad+\sum_{i=j+1}^{m}(-1)^{i-j-1}\binom{i}{j+1}a_i\rho^{m-i}D^{i-j-1}(\alpha)\\
&= \sum_{i=j}^{m-2}(-1)^{i-j}\binom{i+1}{j+1}y_i\rho^{m-i-1}D^{i-j}(\alpha)\\
&\quad-\sum_{i=j+1}^{m-1}(-1)^{i-j}\binom{i}{j+1}y_i\rho^{m-i-1}D^{i-j}(\alpha)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + (-1)^{m-j-1}\binom{m}{j+1} D^{m-j-1}(\alpha) \\
&= y_j \rho^{m-j-1}(\alpha) \\
&\quad + \sum_{i=j+1}^{m-2} (-1)^{i-j} \left\{ \binom{i+1}{j+1} - \binom{i}{j+1} \right\} y_i \rho^{m-i-1} D^{i-j}(\alpha) \\
&\quad + (-1)^{m-j-1} \left\{ \binom{m}{j+1} - \binom{m-1}{j+1} \right\} D^{m-j-1}(\alpha) \\
&= y_j \rho^{m-j-1}(\alpha) \\
&\quad + \sum_{i=j+1}^{m-2} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} y_i \rho^{m-i-1} D^{i-j}(\alpha) \\
&\quad + (-1)^{m-j-1} \binom{m-1}{j} D^{m-j-1}(\alpha) \\
&= \sum_{i=j}^{m-1} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} y_i \rho^{m-i-1} D^{i-j}(\alpha).
\end{aligned}
$$

引理 2.1 的证明至此完成。

最后我们将证明命题 1.3 和命题 1.4。

命题 *1.3* 的证明。由引理 1.1 和引理 2.1 可知，这是显然的。

命题 *1.4* 的证明。设 f 在 $B[X$ 中是平田可分的； ρ， $D]$。由引理 1.2 和引理 2.1 可知，存在 $g_i \in V_0$ 和 $\sum_{j=0}^{m-1} y_j h_i \otimes x^j \in (A \otimes_B A)^A$，使得 $h_i \in V_{m-1}$

$$
1 \otimes 1 = \sum_i g_i \sum_{j=0}^{m-1} y_j h_i \otimes x^j = \sum_{j=0}^{m-1} \left(\sum_i g_i y_j h_i \right) \otimes x^j.
$$

这意味着

$$
\sum_i g_i y_0 h_i = 1 \quad \text{and} \quad \sum_i g_i y_k h_i = 0 \ (1 \le k \le m-1).
$$

于是我们归纳地得到,

$$
\sum_i g_i x^k h_i = 0 \ (0 \le k \le m-2) \quad \text{and} \quad \sum_i g_i x^{m-1} h_i = 1.
$$

反过来，设 $g_i \quad V_0 \quad h_i \quad V_{m-1} \quad \sum_i g_i x^{m-1} h_i = 1 \quad \sum_i g_i x^k h_i =$ 属于，且 $0 \quad 0 \le k \le m-2$ $A \otimes_B A \ ^A \quad 2\ 1$ 满足 和（）。注意，根据引理 . .， $\sum_{j=0}^{m-1} y_j h_i \otimes x^j \in$ （）。通过简单的归纳法，我们得到

$$
\sum_i g_i y_k h_i = 0 \ (1 \le k \le m-1) \quad \text{and} \quad \sum_i g_i y_0 h_i = 1.
$$

这意味着

$$\sum_i g_i \sum_{j=0}^{m-1} y_j h_i \otimes x^j = \sum_{j=0}^{m-1} \left(\sum_i g_i y_j h_i \right) \otimes x^j = 1 \otimes 1.$$

因此，根据引理 1.2，f 在 $B[X$中是平田可分的；ρ，$D]$ 。命题 1.4 的证明至此完成。

致谢。 作者谨向审稿人致谢，感谢他提出的宝贵意见和建议。

参考文献

[1] K. Hirata 和 K. Sugano，关于非交换环上的半单扩张与可分扩张，《日本数学会杂志》18 (1966), 360–373。[2] S. Ikehata，关于斜多项式环中的可分多项式与弗罗贝尼乌斯多项式，《冈山大学数学杂志》22 (1980), 115–129。[3] S. Ikehata，阿祖玛雅代数与斜多项式环，《冈山大学数学杂志》23 (1981), 19–32。[4] S. Ikehata，关于导子型斜多项式环中的可分多项式的一则注记，《冈山大学数学杂志》22 (1980), 59–60。[5] S. Ikehata，关于素数次 H-可分多项式，《冈山大学数学杂志》33 (1991), 21–26。[6] S. Ikehata，关于斜多项式环中次数为 p 的 H-可分多项式与伽罗瓦多项式，《国际数学论坛》3 (2008), 第29–32期，1581–1586。[7] S. Ikehata，关于斜多项式环中次数为 p 的可分多项式与 H-可分多项式，《国际纯粹与应用数学杂志》51 (2009), 第1期，149–156。[8] K. Kishimoto，关于环的阿贝尔扩张。I，《冈山大学数学杂志》14 (1970), 159–174。[9] Y. Miyashita，关于斜多项式环，《日本数学会杂志》31 (1979), 第2期, 317–330。[10] T. Nagahara，关于斜多项式环中的二次可分多项式，《冈山大学数学杂志》19 (1976), 65–95。[11] T. Nagahara，关于自同构型斜多项式环中的可分多项式的一则注记，《冈山大学数学杂志》22 (1980), 73–76。[12] H. Okamoto 和 S. Ikehata，关于二次 H-可分多项式，《冈山大学数学杂志》32 (1990), 53–59。

[13] K. Sugano，可分扩张与弗罗贝尼乌斯扩张，《大阪数学杂志**7** 》(1970), 29–40。
[14] G. Szeto 和 L. Xue，关于 H-可分斜多项式环的 Ikehata 定理，《冈山大学数学杂志》，**40** 1998, 27–32。[15] S. Yamanaka 和 S. Ikehata，斜多项式环中 Miyasita 定理的另一种证明，《国际代数杂志》，**21**2012, 1011–1023