arXiv:2603.07934v1 [math.CA] 9 Mar 2026

关于抛物线的小帽平方函数与解耦估计的注记

JONGCHON KIM、LIANG WANG 和 CHUN KEUNG YEUNG

Abstract. 在本文中，我们证明了抛物线的小帽平方函数与解耦估计，其中小帽本质上是尺寸为 $\delta \times \delta^{\beta}$ （ $0 \leqslant \beta \leqslant 1$时）的轴平行矩形。我们的估计补充了关于 $1 \leqslant \beta \leqslant 2$ 的已知结果，并且除多对数因子外是尖锐的。

1. Introduction

在本文中，我们研究抛物线的小帽平方函数与解耦估计。设 δ 为一个小正常数，且 $0 \leqslant \beta \leqslant 2$。我们将单位抛物线的 $\mathcal{N}_{\mathbb{P}_1}(\delta^{\beta})$ δ^{β}邻域记为

$$\mathbb{P}_1 := \big\{(\xi, \xi^2) \in \mathbb{R}^2 : |\xi| \leqslant 1\big\}.$$

接下来，我们考虑$\mathcal{N}_{\mathbb{P}_1}(\delta^{\beta})$的一个不相交划分 $\{\gamma\}$ ，记为 $\mathcal{P}(\delta)$，其中每个划分元素 γ 定义为

$$\gamma := \big\{(\xi_1, \xi_2) \in \mathcal{N}_{\mathbb{P}_1}(\delta^{\beta}) : \xi_1 \in I\big\},$$

对于长度为 $I \subset [-1,\ 1]$ 的区间， δ集合 $\mathcal{P}(\delta)$ 由近似矩形的盒子组成， γ 其尺寸为 $\delta \times \delta^{\beta}$。当 $\beta = 2$时，我们称每个 $\gamma \in \mathcal{P}(\delta)$ 为一个典范帽。当 $1 \leqslant \beta < 2$时，每个 $\gamma \in \mathcal{P}(\delta)$ 对应于文献中尺寸为 $R^{-\alpha} \times R^{-1}$ 的小帽（例如 [3]），其中 $\delta = R^{-\alpha}$ 且 $\alpha = \beta^{-1}$。

本文主要关注范围 $0 \leqslant \beta \leqslant 1$；在此情形下，$\gamma$ 本质上是一个尺寸为 $\delta \times \delta^{\beta}$ 的轴平行矩形。设 f 为任意函数，其傅里叶变换的支集包含于 $\mathcal{N}_{\mathbb{P}_1}(\delta^{\beta})$。对于任意 $\gamma \subset \mathbb{R}^2$，我们将$\frown f_{\gamma}$ 定义为 $\chi_{\gamma} f$ 的傅里叶逆变换，即

$$f_{\gamma} := (\chi_{\gamma} \widehat{f})^{\vee}.$$

令 $S_{p、\delta、\beta}$ 和 $D_{p、\delta、\beta}$ 表示以下估计中的最佳常数:

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leqslant S_{p,\delta,\beta} \Big\| \Big(\sum_{\gamma \in \mathcal{P}(\delta)} |f_{\gamma}|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \qquad \text{（平方函数估计）}$$

and

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leqslant D_{p,\delta,\beta} \Big(\sum_{\gamma \in \mathcal{P}(\delta)} \|f_{\gamma}\|^p_{L^p(\mathbb{R}^2)} \Big)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{（解耦不等式），}$$

Date: 2026年3月10日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 42B10。

Key words and phrases. 小帽平方函数估计，小帽解耦不等式。

对于所有傅里叶变换支集位于 $\mathcal{N}_{\mathbb{P}_1}(\delta^\beta)$中的 f 均成立。

对于典范帽， $\beta = 2$，C´ordoba-Fefferman 论证 [4, 2]给出平方函数估计 $S_{4,\delta,2} \lesssim 1$。对于解耦不等式，Bourgain 和 Demeter 在其里程碑论文 [1], 中证明了 $D_{6,\delta,2} \leqslant C_\epsilon \delta^{-\epsilon}$ 对于任意 $\epsilon > 0$均成立。Guth、Maldague 和 Wang [8] 随后将该估计改进为 $D_{6,\delta,2} \lesssim |\log \delta|^c$，其中某个常数为 $c > 0$。

受薄层上的指数和估计（例如下文推论1.3中出现的估计）的启发，Demeter、Guth 和 Wang [3] 引入了小帽解耦不等式的概念。具体而言，他们证明了对于 $1 \leqslant \beta \leqslant 2$ 和 $p \geqslant 2$，不等式

$$D_{p,\delta,\beta} \leqslant C_\epsilon \delta^{-\epsilon} \left(\delta^{-\left(1-\frac{2+\beta}{p}\right)} + \delta^{-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)} \right)$$

对任意 $\epsilon > 0$均成立。Johnsrude [9]将 $\delta^{-\epsilon}$ 损失改进为 $|\log \delta|^c$，其中 $c > 0$ 为某个常数。作为小帽解耦不等式的类比，Gan [6]建立了小帽平方函数估计：对于 $1 \leqslant \beta \leqslant 2$ 和 $p \geqslant 2$,

$$S_{p,\delta,\beta} \leqslant C_\epsilon \delta^{-\epsilon} \left(\delta^{-\left(1-\frac{\beta}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)} + \delta^{-\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{p}\right)} \right).$$

上述两个界在相差因子 $\delta^{-\epsilon}$（或 $|\log \delta|^c$）的意义下都是尖锐的。

本文研究 $0 \leqslant \beta \leqslant 1$情形下的小帽平方函数与解耦估计。具体而言，我们建立了以下小帽平方函数估计：

定理1.1。 对于 $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ 和 $p \geqslant 2$，有以下小帽平方函数估计：

$$S_{p,\delta,\beta} \leqslant C_p |\log \delta|^c \left(\delta^{-\left(1-\frac{\beta}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)} + \delta^{-\left(\frac{1}{2}-\frac{1+\beta}{p}\right)} \right),$$

其中 C_p 是仅依赖于 p的常数，而 $c > 0$ 是正常数。该界在相差因子 $|\log \delta|^c$ 的意义下是尖锐的。

我们指出，对于 $0 \leqslant \beta \leqslant 1$，不等式

$$\left(1 - \frac{\beta}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \geqslant \frac{1}{2} - \frac{1+\beta}{p}$$

成立当且仅当 $p \leqslant 6$。

我们的证明给出了定理 1.1，其中 $c = 1 + \frac{1}{p}$。我们在定理1.1 证明中的论证对情形 $1 \leqslant \beta \leqslant 2$ 仍然成立，该情形由 [6] 考虑，并可用于加强 [6] 的结果：将 $\delta^{-\epsilon}$ 损失替换为 |对数 $\delta|^c$ 损失。

我们进一步证明以下小帽解耦不等式：

定理 1.2。 对于 $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ 和 $p \geqslant 2$，以下估计成立：

$$D_{p,\delta,\beta} \leqslant C_p |\log \delta|^c \left(\delta^{-(2-\beta)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)} + \delta^{-\left(1-\frac{2+\beta}{p}\right)} \right),$$

其中， C_p 是仅依赖于 p的常数，而 $c > 0$ 是正常数。该界在 |对数 $\delta|^c$ 因子以内是尖锐的。

我们指出，对于 $0 \leqslant \beta \leqslant 1$，不等式

$$(2-\beta)\big(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\big) \geqslant 1-\frac{2+\beta}{p}$$

当且仅当成立 $p \leqslant 4$。定理1.2 关于临界指数 $p=4$ 是以下结果的直接推论：Johnsrude $\beta=1$ 所证明的[9] 小帽解耦不等式（情形 ... ）以及平坦解耦不等式。

作为定理1.2的推论，我们得到以下结果。

推论 1.3。 对于 $1 \leqslant \sigma \leqslant 2$ 和 $2 \leqslant p < \infty$，以下不等式成立：

$$\Big(\int_{[0,1]\times[0,N^{-\sigma}]}\Big|\sum_{k=1}^{N} a_k e\big(x_1 k+x_2 k^2\big)\Big|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \lesssim (\log N)^c\Big(N^{\frac{\sigma}{2}(1-\frac{4}{p})}+N^{1-\frac{4}{p}}\Big)\Big(\sum_{k=1}^{N}|a_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}},$$

其中， $a_k \in \mathbb{C}$ 是任意复数， $c>0$ 是正常数。这里，我们采用标准记号 $e(t):=e^{2\pi i t}$。

推论1.3 在 [12] 中得到证明，其 N^{ϵ} 损失适用于任意 $\epsilon>0$，所用的是小帽解耦估计 [3] （针对 $\beta=1$），并且该结果在此 N^{ϵ} 因子意义下是尖锐的（见 [12, 第 1 节 1]）。在本文中，推论1.3 是定理1.2的直接推论。将 N^{ϵ} 损失改进为对数因子$(\log N)^c$，是由于小帽解耦估计 [9]得到对数改进。关于区间 [3] 的尖锐界，请参见 $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$。

本文结构。 第2节中，我们采用 [3] 提出的方法，修订了 [8]中的一个双线性约化论证。通过估计窄部分与宽部分，得到定理1.1的证明。在第3节中，我们给出定理1.2 和推论1.3的证明。最后，在第4节中，我们证明定理1.1 和定理1.2的尖锐性。

记号。 下面汇总本文中频繁使用的记号。

(1) 我们用 $A \lesssim B$ 表示存在一个绝对常数 $C>0$ 使得$A \leqslant CB$。此外，如果 $A \lesssim B$ 和 $B \lesssim A$ 均成立，则记作 $A \sim B$。(2) 设 $\delta, \beta, \kappa > 0$。我们用 $\mathcal{P}(\kappa)$ 表示 $\mathcal{N}_{\mathbb{P}_1}(\delta^{\beta})$ 的一个不相交划分 $\{\tau\}$，其中划分中的每个元素 τ 定义为

$$\tau := \big\{(\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{R}^2 : \xi_1 \in I,\ |\xi_2-\xi_1^2| \leqslant \delta^{\beta}\big\},$$

其中， $I \subset [-1,1]$ 是一个长度为 κ 的区间。此外，我们用 $\tilde{\tau}$ 表示 τ 与其相邻元素 $\tau' \in \mathcal{P}(\kappa)$ 的并集。

(3) 对于边长为 $a \times b$ 的矩形 $T \subset \mathbb{R}^2$，其对偶矩形 T^* 定义为一个以原点为中心、边长为 $a^{-1} \times b^{-1}$，且各边平行于 T 对应边的矩形。此外，我们用 w_T 表示一个满足以下条件的光滑函数：在 T 上满足 $w_T \sim 1$，在 T 外快速衰减，且 supp $\widehat{w_T} \subset T^*$。

2. The proof of Theorem 1.1

本节重点证明定理 1.1。只需证明局部估计

$$\|f\|_{L^p(T)} \leqslant C_p|\log\delta|^c\Big(\delta^{-\left(1-\frac{\beta}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}+\delta^{-\left(\frac{1}{2}-\frac{1+\beta}{p}\right)}\Big)\Big\|\Big(\sum_{\gamma\in\mathcal{P}(\delta)}|f_\gamma|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{L^p(w_T)}, \tag{1}$$

其中 T 是一个尺寸为 $\delta^{-1}\times\delta^{-\beta}$的轴平行矩形。对 1.1 式在 T 的平移上求和，并将 $\mathbb{R}^2$ 分割，即可得到定理。

2.1. 宽窄分解。 在本小节中，我们将 f 分解为宽部分和窄部分，并通过采用 [8, 9]中的思路修正了 [3] 中的论证；这保证小帽平方函数估计的损失仅为 $|\log\delta|^c$。具体而言，设 $K=8$和 m为满足 $K^m\leqslant\delta^{-\frac{\beta}{2}}<K^{m+1}$的整数。由于 $K^{-m}\sim\delta^{\frac{\beta}{2}}$，下文将 $\mathcal{P}(K^{-m})$与 $\mathcal{P}\big(\delta^{\frac{\beta}{2}}\big)$等同起来。注意，每个 $\theta\in\mathcal{P}\big(\delta^{\frac{\beta}{2}}\big)$ 都是一个尺寸为 $\delta^{\beta/2}\times\delta^{\beta}$的典范帽。我们证明以下估计：

$$\|f\|_{L^p(T)}\leqslant C_p|\log\delta|\Big(\text{Narrow}+\text{Broad}\Big)^{\frac{1}{p}}, \tag{2}$$

其中

$$\text{Narrow}=\sum_{\theta\in\mathcal{P}\left(\delta^{\frac{\beta}{2}}\right)}\|f_\theta\|^p_{L^p(T)}, \tag{3}$$

and

$$\text{Broad}=\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{\tau\in\mathcal{P}(K^{-i})}\sum_{\substack{\tau_1,\tau_2\in\mathcal{P}(K^{-i-1})\\ \tau_1,\tau_2\subset\widetilde{\tau}\\ \operatorname{dist}(\tau_1,\tau_2)\geqslant K^{-i-1}}}\Big\||f_{\tau_1}f_{\tau_2}|^{\frac{1}{2}}\Big\|^p_{L^p(T)}. \tag{4}$$

这里，对于每个 $\tau\in\mathcal{P}(K^{-i})$，$\widetilde{\tau}$ 表示 τ 及其相邻元素 $\tau'\in\mathcal{P}(K^{-i})$ 的并集。

为证明估计（2），我们需要以下引理。

引理 2.1。 设 $\{a_i\}_{i=1}^n$ 是一个复数序列，$C\geqslant 1$ 是一个正常数。那么，以下估计至少有一个成立：

$$\Big|\sum_{i=1}^n a_i\Big|\leqslant 2Cn\max_{i,j:|i-j|>1}|a_ia_j|^{\frac{1}{2}}, \tag{5}$$

and

$$\Big|\sum_{i=1}^n a_i\Big|\leqslant\big(1+C^{-1}\big)\max_i\Big|\sum_{j:|i-j|\leqslant 1}a_j\Big|. \tag{6}$$

证明。假设下列不等式成立：

$$\Big|\sum_{i=1}^n a_i\Big|>\big(1+C^{-1}\big)\max_i\Big|\sum_{j:|i-j|\leqslant 1}a_j\Big|. \tag{7}$$

令 i^* 和 i^{**} 为满足 $|a_{i^*}| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}|a_i|$ 和 $|a_{i^{**}}| = \max_{i:|i-i^*|>1}|a_i|$的指标。由三角不等式可得

$$\left|\sum_{j:|i^*-j|\leqslant 1} a_j\right| \geqslant \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| - n|a_{i^{**}}|. \tag{8}$$

结合不等式（7）和（8），可得

$$\begin{aligned} n|a_{i^{**}}| &\geqslant \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| - \left|\sum_{j:|i^*-j|\leqslant 1} a_j\right| \\ &> \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| - \frac{1}{1+C^{-1}}\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \\ &= \frac{1}{C+1}\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right|. \end{aligned}$$

注意到

$$|a_{i^{**}}|^2 \leqslant |a_{i^*}a_{i^{**}}| \leqslant \max_{i,j:|i-j|>1}|a_i a_j|,$$

这意味着 $|a_{i^{**}}| \leqslant \max_{i,\ j:|i-j|>1}|a_i a_j|^{\frac{1}{2}}$。-将其代入上述不等式，可得

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leqslant 2Cn \max_{i,j:|i-j|>1}|a_i a_j|^{\frac{1}{2}}.$$

□

引理 *2.2*。*</style>*对所有 $x\in\mathbb{R}^2$ 和 $p>0$，以下逐点界成立：

$$|f(x)| \leqslant C_p|\log\delta|\Bigg(\sum_{\theta\in\mathcal{P}\left(\delta^{\frac{\beta}{2}}\right)}|f_\theta(x)|^p + \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{\tau\in\mathcal{P}(K^{-i})}\sum_{\substack{\tau_1,\tau_2\in\mathcal{P}(K^{-i-1})\\ \tau_1,\tau_2\subset\widetilde{\tau}\\ \operatorname{dist}(\tau_1,\tau_2)\geqslant K^{-i-1}}}|f_{\tau_1}(x)f_{\tau_2}(x)|^{\frac{p}{2}}\Bigg)^{\frac{1}{p}}, \tag{9}$$

其中 C_p 是仅依赖于 p 的常数，且 c 是一个绝对常数。

证明。对于每个满足 $0\leqslant i\leqslant m-1$ 的 $\tau\in\mathcal{P}(K^{-i})$，我们首先注意到以下分解 n

$$f_{\widetilde{\tau}}(x) = \sum_{\substack{\tau_1\in\mathcal{P}(K^{-i-1})\\ \tau_1\subset\widetilde{\tau}}} f_{\tau_1}(x).$$

将引理 2.1 应用于参数为 $n=K=8$ 和 $C=|\log\delta|$（注意$C=|\log\delta|\geqslant 1$，它满足引理 2.1 的假设），我们得出以下两个估计至少有一个成立：

$$|f_{\widetilde{\tau}}(x)|^p \leqslant (16|\log\delta|)^p \max_{\substack{\tau_1,\tau_2\in\mathcal{P}(K^{-i-1})\\ \tau_1,\tau_2\subset\widetilde{\tau}\\ \operatorname{dist}(\tau_1,\tau_2)\geqslant K^{-i-1}}}|f_{\tau_1}(x)f_{\tau_2}(x)|^{\frac{p}{2}}, \tag{10}$$

and

$$|f_{\widetilde{\tau}}(x)|^p \leqslant \left(1+|\log\delta|^{-1}\right)^p \max_{\substack{\tau_1\in\mathcal{P}(K^{-i-1})\\ \tau_1\subset\widetilde{\tau}}} |f_{\widetilde{\tau}_1}(x)|^p. \tag{11}$$

将其用于和式 $f=\sum_{\tau_1\in\mathcal{P}(K^{-1})} f_{\tau_1}$，我们得到

$$|f(x)|^p \leqslant (16|\log\delta|)^p \max_{\substack{\tau_1,\tau_2\in\mathcal{P}(K^{-1})\\ \operatorname{dist}(\tau_1,\tau_2)\geqslant K^{-1}}} |f_{\tau_1}(x)f_{\tau_2}(x)|^{\frac{p}{2}} + \left(1+|\log\delta|^{-1}\right)^p \max_{\tau_1\in\mathcal{P}(K^{-1})} |f_{\widetilde{\tau}_1}(x)|^p. \tag{12}$$

接下来，对于任意 $\tau\in\mathcal{P}(K^{-1})$，我们应用相同的推理，得到

$$|f_{\widetilde{\tau}}(x)|^p \leqslant (16|\log\delta|)^p \max_{\substack{\tau_1,\tau_2\in\mathcal{P}(K^{-2})\\ \tau_1,\tau_2\subset\widetilde{\tau}\\ \operatorname{dist}(\tau_1,\tau_2)\geqslant K^{-2}}} |f_{\tau_1}(x)f_{\tau_2}(x)|^{\frac{p}{2}} + \left(1+|\log\delta|^{-1}\right)^p \max_{\substack{\tau_1\in\mathcal{P}(K^{-2})\\ \tau_1\subset\widetilde{\tau}}} |f_{\widetilde{\tau}_1}(x)|^p. \tag{13}$$

结合不等式 (12) 和 (13，我们得到

$$\begin{aligned}|f(x)|^p \leqslant \sum_{i=0}^{1} \left(1+|\log\delta|^{-1}\right)^{pi} (16|\log\delta|)^p \sum_{\tau\in\mathcal{P}(K^{-i})} \max_{\substack{\tau_1,\tau_2\in\mathcal{P}(K^{-i-1})\\ \tau_1,\tau_2\subset\widetilde{\tau}\\ \operatorname{dist}(\tau_1,\tau_2)\geqslant K^{-i-1}}} |f_{\tau_1}(x)f_{\tau_2}(x)|^{\frac{p}{2}}\\ + \left(1+|\log\delta|^{-1}\right)^{2p} \max_{\tau_1\in\mathcal{P}(K^{-2})} |f_{\widetilde{\tau}_1}(x)|^p.\end{aligned}$$

将这一迭代过程延续 m 步，我们得到

$$\begin{aligned}|f(x)|^p &\leqslant \sum_{i=0}^{m-1} \left(1+|\log\delta|^{-1}\right)^{pi} (16|\log\delta|)^p \sum_{\tau\in\mathcal{P}(K^{-i})} \max_{\substack{\tau_1,\tau_2\in\mathcal{P}(K^{-i-1})\\ \tau_1,\tau_2\subset\widetilde{\tau}\\ \operatorname{dist}(\tau_1,\tau_2)\geqslant K^{-i-1}}} |f_{\tau_1}(x)f_{\tau_2}(x)|^{\frac{p}{2}}\\ &\quad + \left(1+|\log\delta|^{-1}\right)^{mp} \max_{\theta\in\mathcal{P}\left(\delta^{\frac{\beta}{2}}\right)} |f_{\widetilde{\theta}}(x)|^p\\ &\leqslant C_p|\log\delta|^p \left(\sum_{\theta\in\mathcal{P}\left(\delta^{\frac{\beta}{2}}\right)} |f_\theta(x)|^p + \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{\tau\in\mathcal{P}(K^{-i})} \sum_{\substack{\tau_1,\tau_2\in\mathcal{P}(K^{-i-1})\\ \tau_1,\tau_2\subset\widetilde{\tau}\\ \operatorname{dist}(\tau_1,\tau_2)\geqslant K^{-i-1}}} |f_{\tau_1}(x)f_{\tau_2}(x)|^{\frac{p}{2}} \right).\end{aligned}$$

这里，最后一个不等式利用了以下事实：$m<|\log\delta|$ 和 $\left(1+|\log\delta|^{-1}\right)^{|\log\delta|}$ 均以 e 为界。□

于是，估计式 (2) 由引理2.2得出。因此，只需分别估计窄部分与宽部分。

2.2. 宽窄分析。 在本小节中，我们旨在建立窄部分与宽部的估计。为此，我们首先陈述以下基本引理，它们对我们后续的分析至关重要。

引理 2.3 （局部 L^2-正交性；参见例如 [6], 引理 2）。 设 $\{f_i\}_i$ 为一列函数，并设 $T \subset \mathbb{R}^2$ 为一个矩形，使得族 $\{supp\widehat{f_i} + T^*\}_i$ 具有有限重叠。则估计

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left| \sum_i f_i w_T \right|^2 \mathrm{d}x \lesssim \int_{\mathbb{R}^2} \sum_i |f_i w_T|^2 \, \mathrm{d}x$$

成立，其中 w_T 表示一个光滑函数，它在 T上满足 $w_T \sim 1$ ，在 T之外迅速衰减，且 $supp\ \widehat{w_T} \subset T^*$。

引理 2.4 （窄部分）。 设 $\theta \in \mathcal{P}(\delta^{\frac{\beta}{2}})$ 与 T为一个尺寸为 $\delta^{-1} \times \delta^{-\beta}$的轴平行矩形。则对 $p \geqslant 2$，下列不等式成立：

$$\|f_\theta\|_{L^p(T)} \leqslant C\delta^{-\left(1-\frac{\beta}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)} \left\| \left(\sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{P}(\delta) \\ \gamma \subset \theta}} |f_\gamma|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(w_T)}.$$

证明。 我们将 T 分解为尺寸为 $\delta^{-\frac{\beta}{2}} \times \delta^{-\beta}$的矩形 B 的不交并。于是，

$$\begin{aligned}
\|f_\theta\|_{L^p(T)} &= \left(\sum_{B \subset T} \|f_\theta\|_{L^p(B)}^p \right)^{1/p} \\
&\lesssim |B|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \left(\sum_{B \subset T} \|f_\theta\|_{L^2(w_B)}^p \right)^{1/p} \qquad \text{(by Bernstein's inequality)} \\
&\lesssim \delta^{\frac{3\beta}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)} \left(\sum_{B \subset T} \|f_\theta\|_{L^2(w_B)}^2 \right)^{1/2} \\
&\lesssim \delta^{\frac{3\beta}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)} \|f_\theta\|_{L^2(w_T)}.
\end{aligned}$$

由局部 L^2-正交性（引理2.3），我们进一步得到

$$\|f_\theta\|_{L^p(T)} \lesssim \delta^{\frac{3\beta}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)} \|f_\theta\|_{L^2(w_T)} \lesssim \delta^{\frac{3\beta}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)} \left\| \left(\sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{P}(\delta) \\ \gamma \subset \theta}} |f_\gamma|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^2(w_T)}.$$

应用 H¨older 不等式，并利用事实 $|T| \sim \delta^{-(1+\beta)}$，我们推导出

$$\begin{aligned}
\left\| \left(\sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{P}(\delta) \\ \gamma \subset \theta}} |f_\gamma|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^2(w_T)} &\lesssim |T|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \left\| \left(\sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{P}(\delta) \\ \gamma \subset \theta}} |f_\gamma|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(w_T)} \\
&\lesssim \delta^{-(1+\beta)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)} \left\| \left(\sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{P}(\delta) \\ \gamma \subset \theta}} |f_\gamma|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(w_T)}.
\end{aligned}$$

因此，我们得出结论：

$$\|f_\theta\|_{L^p(T)} \lesssim \delta^{-\left(1-\frac{\beta}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)} \Big\| \Big(\sum_{\substack{\gamma\in\mathcal{P}(\delta)\\ \gamma\subset\theta}} |f_\gamma|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p(w_T)}.$$

□

接下来我们陈述以下双线性限制估计。

引理 2.5。 设 $1 < R$，并设 f_1、f_2 为满足 $\mathrm{supp}\ \widehat{f_1}$、$\mathrm{supp}\ \widehat{f_2} \subset \mathcal{N}_{\mathbb{P}_1}(R^{-1})$ 且 $\mathrm{dist}\big(\mathrm{supp}\ \widehat{f_1}、\mathrm{supp}\ \widehat{f_2}\big) \gtrsim 1$ 的函数。则有

(1) 对于 $2 \leqslant p \leqslant 4$，估计

$$\|(f_1 f_2)^{1/2}\|_{L^p(B_R)} \lesssim R^{\frac{2}{p}-1} \big(\|f_1\|_{L^2(w_{B_R})} \|f_2\|_{L^2(w_{B_R})} \big)^{1/2} \tag{14}$$

成立。

(2) 对于 $4 \leqslant p \leqslant \infty$，估计

$$\|(f_1 f_2)^{1/2}\|_{L^p(B_R)} \lesssim R^{-1/2} \big(\|f_1\|_{L^2(w_{B_R})} \|f_2\|_{L^2(w_{B_R})} \big)^{1/2} \tag{15}$$

成立。

证明。 对于 $p = 2$，估计式（14）由 H¨older 不等式可直接推出。对于 $p = \infty$，我们计算得

$$\begin{aligned} \|(f_1 f_2)^{1/2}\|^2_{L^\infty(B_R)} &\lesssim \Big\| \widehat{f_1} * \widehat{w_{B(R)}} \Big\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \Big\| \widehat{f_2} * \widehat{w_{B(R)}} \Big\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \\ &\lesssim |\mathcal{N}_{\mathbb{P}_1}(R^{-1})| \Big\| \widehat{f_1} * \widehat{w_{B(R)}} \Big\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \Big\| \widehat{f_2} * \widehat{w_{B(R)}} \Big\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ &\lesssim R^{-1} \|f_1\|_{L^2(w_{B_R})} \|f_2\|_{L^2(w_{B_R})}. \end{aligned}$$

对于 $p = 4$，结果归结为标准的双线性限制估计（例如参见 [11,引理 2.4]）。结合这些边界情形与 H¨older 不等式，可得对所有 $2 \leqslant p \leqslant \infty$，估计式（14）和（15）。□

引理 2.6（宽部）。 设 T 是一个维数为 $\delta^{-1} \times \delta^{-\beta}$ 的轴平行矩形。固定 $\tau \in \mathcal{P}(\Delta)$，其中 $\Delta = K^{-i}$ 对某个 $0 \leqslant i < m$ 成立，并令 τ_1、$\tau_2 \in \mathcal{P}(K^{-1}\Delta)$ 满足 τ_1、$\tau_2 \subset \tilde{\tau}$，且 $\mathrm{dist}(\tau_1、\tau_2) \geqslant K^{-1}\Delta$。那么，我们有

$$\Big\| |f_{\tau_1} f_{\tau_2}|^{\frac{1}{2}} \Big\|_{L^p(T)} \lesssim \left(\delta^{-\left(1-\frac{\beta}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)} + \delta^{-\left(\frac{1}{2}-\frac{1+\beta}{p}\right)} \right) \Big\| \Big(\sum_{\substack{\gamma\subset\tilde{\tau}\\ \gamma\in\mathcal{P}(\delta)}} |f_\gamma|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{L^p(w_T)}.$$

证明。 我们进行抛物缩放：对于一个以 $(x_1,\ x_1^2)$ 为中心的固定 $\tau \in \mathcal{P}(\Delta)$，我们在 $\mathbb{R}^2$ 上定义仿射变换 G_τ，使得

$$G_\tau(\xi_1, \xi_2) := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1^2 \end{bmatrix} + L_\tau \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix},$$

其中 $L_\tau = \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 2\Delta x_1 & \Delta^2 \end{bmatrix}$。那么 $G_\tau^{-1}(\widetilde{\tau})$ 与 $\mathcal{N}_{\mathbb{P}_1}(\delta^\beta\Delta^{-2})$ 重合，且 $L_\tau^\top(T)$ 是一个尺寸为 $\delta^{-1}\Delta\times\delta^{-\beta}\Delta^2$ 的矩形，其中 $L_\tau^\top$ 是 L_τ 的转置。我们进一步将 $L_\tau^\top(T)$ 分解为尺寸为 $\delta^{-\beta}\Delta^2\times\delta^{-\beta}\Delta^2$ 的正方形 B 的不交并（边长相等的矩形），并定义

$$\widehat{g_1}(\xi) := \widehat{f}_{\tau_1}(G_\tau(\xi)) \quad \text{and} \quad \widehat{g_2}(\xi) := \widehat{f}_{\tau_2}(G_\tau(\xi)).$$

由此可得 $\operatorname{supp}\widehat{g_1}$，$\operatorname{supp}\widehat{g_2}\subset G_\tau^{-1}(\widetilde{\tau})$，且 $\operatorname{dist}(\operatorname{supp}\widehat{g_1},\operatorname{supp}\widehat{g_2})>K^{-1}\gtrsim 1$。此外，对于 $i=1,2$，$|f_{\tau_i}(x)| = |\det(L_\tau)|\,|g_i(L_\tau^\top x)|$。于是，我们得到如下估计：

$$\begin{aligned}\Big\||f_{\tau_1}f_{\tau_2}|^{\frac12}\Big\|_{L^p(T)} &= \Delta^{3\left(1-\frac1p\right)}\Big\||g_1g_2|^{\frac12}\Big\|_{L^p(L_\tau^\top(T))} \\ &\lesssim \Delta^{3\left(1-\frac1p\right)}\Bigg(\sum_{B\subset L_\tau^\top(T)}\Big\||g_1g_2|^{\frac12}\Big\|_{L^p(B)}^p\Bigg)^{\frac1p}.\end{aligned} \tag{16}$$

当 $2\leqslant p\leqslant 4$ 时，我们对每个 B 应用双线性限制估计，得到

$$\Big\||g_1g_2|^{\frac12}\Big\|_{L^p(B)} \lesssim \left(\Delta^2\delta^{-\beta}\right)^{\frac2p-1}\left(\|g_1\|_{L^2(w_B)}\|g_2\|_{L^2(w_B)}\right)^{\frac12}. \tag{17}$$

结合估计式（16）、（17）以及包含关系 $\ell^1\subset\ell^p_2$，可推出 -

$$\begin{aligned}\Big\||f_{\tau_1}f_{\tau_2}|^{\frac12}\Big\|_{L^p(T)} &\lesssim \Delta^{3\left(1-\frac1p\right)}\left(\Delta^2\delta^{-\beta}\right)^{\frac2p-1}\Bigg(\sum_{B\subset L_\tau^\top(T)}\left(\|g_1\|_{L^2(w_B)}\|g_2\|_{L^2(w_B)}\right)^{\frac p2}\Bigg)^{\frac1p} \\ &\lesssim \Delta^{3\left(1-\frac1p\right)}\left(\Delta^2\delta^{-\beta}\right)^{\frac2p-1}\Bigg(\sum_{B\subset L_\tau^\top(T)}\|g_1\|_{L^2(w_B)}\|g_2\|_{L^2(w_B)}\Bigg)^{\frac12}.\end{aligned}$$

此外，根据柯西-施瓦茨不等式，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{B\subset L_\tau^\top(T)}\|g_1\|_{L^2(w_B)}\|g_2\|_{L^2(w_B)} &\leqslant \Bigg(\sum_{B\subset L_\tau^\top(T)}\|g_1\|^2_{L^2(w_B)}\Bigg)^{\frac12}\Bigg(\sum_{B\subset L_\tau^\top(T)}\|g_2\|^2_{L^2(w_B)}\Bigg)^{\frac12} \\ &\lesssim \|g_1\|_{L^2(w_{L_\tau^\top(T)})}\|g_2\|_{L^2(w_{L_\tau^\top(T)})} \\ &\lesssim \Delta^{-3}\|f_{\tau_1}\|_{L^2(w_T)}\|f_{\tau_2}\|_{L^2(w_T)}.\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\Big\||f_{\tau_1}f_{\tau_2}|^{\frac12}\Big\|_{L^p(T)} &\lesssim \Delta^{3\left(1-\frac1p\right)}\left(\Delta^2\delta^{-\beta}\right)^{\frac2p-1}\Delta^{-\frac32}\|f_{\tau_1}\|^{\frac12}_{L^2(w_T)}\|f_{\tau_2}\|^{\frac12}_{L^2(w_T)} \\ &= \left(\Delta^{-1}\delta^{2\beta}\right)^{\frac12-\frac1p}\|f_{\tau_1}\|^{\frac12}_{L^2(w_T)}\|f_{\tau_2}\|^{\frac12}_{L^2(w_T)}.\end{aligned} \tag{18}$$

由引理 2.3，可得

$$\|f_{\tau_1}\|_{L^2(w_T)}\|f_{\tau_2}\|_{L^2(w_T)} \lesssim \Big\|\Big(\sum_{\substack{\gamma\subset\widetilde{\tau}\\ \gamma\in\mathcal{P}(\delta)}}|f_\gamma|^2\Big)^{\frac12}\Big\|^2_{L^2(w_T)}, \tag{19}$$

并由H¨older不等式,

$$\begin{aligned}\Big\|\Big(\sum_{\substack{\gamma\subset\widetilde{\tau}\\ \gamma\in\mathcal{P}(\delta)}}|f_\gamma|^2\Big)^{\frac12}\Big\|_{L^2(w_T)} &\lesssim |T|^{\frac12-\frac1p}\Big\|\Big(\sum_{\substack{\gamma\subset\widetilde{\tau}\\ \gamma\in\mathcal{P}(\delta)}}|f_\gamma|^2\Big)^{\frac12}\Big\|_{L^p(w_T)}\\ &\lesssim \delta^{-(1+\beta)(\frac12-\frac1p)}\Big\|\Big(\sum_{\substack{\gamma\subset\widetilde{\tau}\\ \gamma\in\mathcal{P}(\delta)}}|f_\gamma|^2\Big)^{\frac12}\Big\|_{L^p(w_T)}. \end{aligned}\tag{20}$$

因此，结合估计（18）、（19）和（20），我们可得

$$\begin{aligned}\big\||f_{\tau_1}f_{\tau_2}|^{\frac12}\big\|_{L^p(T)} &\lesssim \Big(\Delta^{-1}\delta^{2\beta}\Big)^{\frac12-\frac1p}\delta^{-(1+\beta)\left(\frac12-\frac1p\right)}\Big\|\Big(\sum_{\substack{\gamma\subset\widetilde{\tau}\\ \gamma\in\mathcal{P}(\delta)}}|f_\gamma|^2\Big)^{\frac12}\Big\|_{L^p(w_T)}\\ &= \Big(\Delta^{-1}\delta^{\beta-1}\Big)^{\frac12-\frac1p}\Big\|\Big(\sum_{\substack{\gamma\subset\widetilde{\tau}\\ \gamma\in\mathcal{P}(\delta)}}|f_\gamma|^2\Big)^{\frac12}\Big\|_{L^p(w_T)}\\ &\lesssim \delta^{-\left(1-\frac{\beta}{2}\right)\left(\frac12-\frac1p\right)}\Big\|\Big(\sum_{\substack{\gamma\subset\widetilde{\tau}\\ \gamma\in\mathcal{P}(\delta)}}|f_\gamma|^2\Big)^{\frac12}\Big\|_{L^p(w_T)}, \end{aligned}\tag{21}$$

其中，最后一个不等式由 $\Delta\geqslant\delta^{\frac{\beta}{2}}$ 得出。

对于 $4\leqslant p\leqslant\infty$，我们类似地应用引理 2.5 和引理 2.3，得到以下估计：

$$\begin{aligned}\big\||f_{\tau_1}f_{\tau_2}|^{\frac12}\big\|_{L^p(T)} &\lesssim \Delta^{3\left(1-\frac1p\right)}\left(\Delta^2\delta^{-\beta}\right)^{-\frac12}\Delta^{-\frac32}\Big\|\Big(\sum_{\substack{\gamma\subset\widetilde{\tau}\\ \gamma\in\mathcal{P}(\delta)}}|f_\gamma|^2\Big)^{\frac12}\Big\|_{L^2(w_T)}\\ &\lesssim \Delta^{\left(\frac12-\frac3p\right)}\delta^{\frac{\beta}{2}}\delta^{-(1+\beta)\left(\frac12-\frac1p\right)}\Big\|\Big(\sum_{\substack{\gamma\subset\widetilde{\tau}\\ \gamma\in\mathcal{P}(\delta)}}|f_\gamma|^2\Big)^{\frac12}\Big\|_{L^p(w_T)}\\ &\lesssim \Delta^{\left(\frac12-\frac3p\right)}\delta^{\frac{1+\beta}{p}-\frac12}\Big\|\Big(\sum_{\substack{\gamma\subset\widetilde{\tau}\\ \gamma\in\mathcal{P}(\delta)}}|f_\gamma|^2\Big)^{\frac12}\Big\|_{L^p(w_T)}\\ &\lesssim \left(\delta^{-\left(1-\frac{\beta}{2}\right)\left(\frac12-\frac1p\right)}+\delta^{-\left(\frac12-\frac{1+\beta}{p}\right)}\right)\Big\|\Big(\sum_{\substack{\gamma\subset\widetilde{\tau}\\ \gamma\in\mathcal{P}(\delta)}}|f_\gamma|^2\Big)^{\frac12}\Big\|_{L^p(w_T)}, \end{aligned}\tag{22}$$

其中，最后一个不等式由条件 $\delta^{\frac{\beta}{2}}\leqslant\Delta\leqslant 1$ 得出。结合估计（21）和（22），即可得到所需结论。□

2.3. **定理 1.1 的证明。** 现在我们完成定理 1.1的证明。

设 T 是一个尺寸为 $\delta^{-1}\times\delta^{-\beta}$ 的轴平行矩形。根据不等式（2）、（3）和（4），我们有

$$\|f\|_{L^p(T)}\leqslant C_p|\log\delta|\Bigg(\sum_{\theta\in\mathcal{P}\left(\delta^{\frac{\beta}{2}}\right)}\|f_\theta\|^p_{L^p(T)}+\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{\tau\in\mathcal{P}(K^{-i})}\sum_{\substack{\tau_1,\tau_2\in\mathcal{P}(K^{-i-1})\\ \tau_1,\tau_2\subset\widetilde{\tau}\\ \operatorname{dist}(\tau_1,\tau_2)\geqslant K^{-i-1}}}\left\||f_{\tau_1}f_{\tau_2}|^{\frac12}\right\|^p_{L^p(T)}\Bigg)^{\frac1p}.$$

首先，应用引理2.4，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{\theta\in\mathcal{P}\left(\delta^{\frac{\beta}{2}}\right)}\|f_\theta\|^p_{L^p(T)}&\lesssim\delta^{-\left(1-\frac{\beta}{2}\right)\left(\frac{p}{2}-1\right)}\sum_{\theta\in\mathcal{P}\left(\delta^{\frac{\beta}{2}}\right)}\left\|\left(\sum_{\substack{\gamma\in\mathcal{P}(\delta)\\ \gamma\subset\theta}}|f_\gamma|^2\right)^{\frac12}\right\|^p_{L^p(w_T)}\\&\leqslant\delta^{-\left(1-\frac{\beta}{2}\right)\left(\frac{p}{2}-1\right)}\left\|\left(\sum_{\gamma\in\mathcal{P}(\delta)}|f_\gamma|^2\right)^{\frac12}\right\|^p_{L^p(w_T)},\end{aligned}$$

因为 $\ell^1\subset\ell^{\frac{p}{2}}$ 当 $p\geqslant2$。接下来，由引理2.6，我们推出

$$\begin{aligned}&\sum_{\tau\in\mathcal{P}(K^{-i})}\sum_{\substack{\tau_1,\tau_2\in\mathcal{P}(K^{-i-1})\\ \tau_1,\tau_2\subset\widetilde{\tau}\\ \operatorname{dist}(\tau_1,\tau_2)\geqslant K^{-i-1}}}\left\||f_{\tau_1}f_{\tau_2}|^{\frac12}\right\|^p_{L^p(T)}\\&\lesssim\left(\delta^{-\left(1-\frac{\beta}{2}\right)\left(\frac{p}{2}-1\right)}+\delta^{-\left(\frac{p}{2}-1-\beta\right)}\right)\sum_{\tau\in\mathcal{P}(K^{-i})}\sum_{\substack{\tau_1,\tau_2\in\mathcal{P}(K^{-i-1})\\ \tau_1,\tau_2\subset\widetilde{\tau}\\ \operatorname{dist}(\tau_1,\tau_2)\geqslant K^{-i-1}}}\left\|\left(\sum_{\substack{\gamma\subset\widetilde{\tau}\\ \gamma\in\mathcal{P}(\delta)}}|f_\gamma|^2\right)^{\frac12}\right\|^p_{L^p(w_T)}\\&\lesssim\left(\delta^{-\left(1-\frac{\beta}{2}\right)\left(\frac{p}{2}-1\right)}+\delta^{-\left(\frac{p}{2}-1-\beta\right)}\right)\sum_{\tau\in\mathcal{P}(K^{-i})}\left\|\left(\sum_{\substack{\gamma\subset\widetilde{\tau}\\ \gamma\in\mathcal{P}(\delta)}}|f_\gamma|^2\right)^{\frac12}\right\|^p_{L^p(w_T)}.\end{aligned}$$

这里，最后一个不等式利用了至多有 ~1 对 $\tau_1,\ \tau_2\subset\widetilde{\tau}$ 这一事实。利用 $\ell^1\subset\ell^{\frac{p}{2}}$ 当 $p\geqslant2$，我们得到

$$\sum_{\tau\in\mathcal{P}(K^{-i})}\left\|\left(\sum_{\substack{\gamma\subset\widetilde{\tau}\\ \gamma\in\mathcal{P}(\delta)}}|f_\gamma|^2\right)^{\frac12}\right\|^p_{L^p(w_T)}\lesssim\left\|\left(\sum_{\gamma\in\mathcal{P}(\delta)}|f_\gamma|^2\right)^{\frac12}\right\|^p_{L^p(w_T)}.$$

结合上述估计以及 $m<|\log\delta|$ 这一事实，我们得出

$$\|f\|^p_{L^p(T)}\leqslant C_p|\log\delta|^{p+1}\left(\delta^{-\left(1-\frac{\beta}{2}\right)\left(\frac{p}{2}-1\right)}+\delta^{-\left(\frac{p}{2}-1-\beta\right)}\right)\left\|\left(\sum_{\gamma\in\mathcal{P}(\delta)}|f_\gamma|^2\right)^{\frac12}\right\|^p_{L^p(w_T)},$$

这就验证了局部估计（1），其中 $c=1+\frac1p$。

3. The proof of Theorem 1.2 and Corollary 1.3

3.1. **定理 1.2 的证明。** 回顾一下，我们的目标是证明对于 $\beta \in [0,\ 1]$ 和$p \geqslant 2$，以下不等式成立：

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leqslant C_p|\log\delta|^c\left(\delta^{-(2-\beta)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}+\delta^{-(1-\frac{2+\beta}{p})}\right)\left(\sum_{\gamma\in\mathcal{P}(\delta)}\|f_\gamma\|^p_{L^p(\mathbb{R}^2)}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{23}$$

我们将通过对 L^2、 L^4 和 L^∞ 估计进行插值来验证这一点（参见例如 [10, 备注 3.4]）。更准确地说，我们使用等价的小帽解耦估计的插值论证，其中 f_γ 使用光滑频率截断定义。

由 Plancherel 定理和三角不等式，我们首先有

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \lesssim \left(\sum_{\gamma\in\mathcal{P}(\delta)}\|f_\gamma\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

and

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leqslant \delta^{-1}\sup_{\gamma\in\mathcal{P}(\delta)}\|f_\gamma\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}.$$

因此，通过插值，只需证明

$$\|f\|_{L^4(\mathbb{R}^2)} \lesssim |\log\delta|^c\delta^{-\frac{2-\beta}{4}}\left(\sum_{\gamma\in\mathcal{P}(\delta)}\|f_\gamma\|^4_{L^4(\mathbb{R}^2)}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

为此，我们将 $\beta = 1$ [9,定理 1.1]，情形下的小帽解耦不等式与平坦解耦不等式（参见例如 [3, 命题 2.4]）结合使用。这得到如下推论。

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^4(\mathbb{R}^2)} &\lesssim |\log\delta|^c\delta^{-\frac{\beta}{4}}\left(\sum_{\theta\in\mathcal{P}(\delta^\beta)}\|f_\theta\|^4_{L^4(\mathbb{R}^2)}\right)^{\frac{1}{4}}\\
&\lesssim |\log\delta|^c\delta^{-\frac{\beta}{4}}\delta^{\frac{\beta-1}{2}}\left(\sum_{\theta\in\mathcal{P}(\delta^\beta)}\sum_{\substack{\gamma\subset\theta\\ \gamma\in\mathcal{P}(\delta)}}\|f_\gamma\|^4_{L^4(\mathbb{R}^2)}\right)^{\frac{1}{4}}\\
&\lesssim |\log\delta|^c\delta^{-\frac{2-\beta}{4}}\left(\sum_{\gamma\in\mathcal{P}(\delta)}\|f_\gamma\|^4_{L^4(\mathbb{R}^2)}\right)^{\frac{1}{4}}.
\end{aligned}$$

3.2. **推论 1.3 的证明。** 进行变量替换可得

$$N^3\int_{[0,1]\times[0,\frac{1}{N^\sigma}]}\left|\sum_{k=1}^N a_k e\big(x_1k+x_2k^2\big)\right|^p dx = \int_{[0,N]\times[0,N^{2-\sigma}]}\left|\sum_{k=1}^N a_k e\Big(x_1\cdot\frac{k}{N}+x_2\cdot\frac{k^2}{N^2}\Big)\right|^p dx. \tag{24}$$

设 ϕ是定义在 $\mathbb{R}^2$上的 Schwartz函数，满足 $|\phi| \sim 1$在 $[0$上， $N] \times [0,\ N^{2-\sigma}]$且 $\operatorname{supp}\widehat{\phi} \subset [0,\ N^{-1}] \times [0,\ N^{\sigma-2}]$。将定理 1.2应用于 $\delta = N^{-1}$和 $\beta = 2-\sigma$，可得

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,N]\times[0,N^{2-\sigma}]} \Big| \sum_{k=1}^{N} a_k e\big(x_1 \cdot \frac{k}{N} + x_2 \cdot \frac{k^2}{N^2}\big) \Big|^p dx \\
&\lesssim \int_{\mathbb{R}^2} \Big| \sum_{k=1}^{N} \phi(x) a_k e\big(x_1 \cdot \frac{k}{N} + x_2 \cdot \frac{k^2}{N^2}\big) \Big|^p dx \\
&\leqslant C_p (\log N)^{pc} \Big(N^{\frac{\sigma}{2}(p-2)} + N^{p-4+\sigma} \Big) \Big(\sum_{k=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^2} \Big| \phi(x) a_k e\big(x_1 \cdot \frac{k}{N} + x_2 \cdot \frac{k^2}{N^2}\big) \Big|^p dx \Big) \\
&\leqslant C_p (\log N)^{pc} \Big(N^{\frac{\sigma}{2}(p-2)} + N^{p-4+\sigma} \Big) \Big(\sum_{k=1}^{N} |a_k|^p \int_{\mathbb{R}^2} |\phi(x)|^p dx \Big) \\
&\leqslant C_p (\log N)^{pc} N^{3-\sigma} \Big(N^{\frac{\sigma}{2}(p-2)} + N^{p-4+\sigma} \Big) \Big(\sum_{k=1}^{N} |a_k|^p \Big). \qquad (25)
\end{aligned}$$

结合不等式（24）和（25，我们得出

$$\int_{[0,1]\times[0,\frac{1}{N^\sigma}]} \Big| \sum_{k=1}^{N} a_k e\big(x_1 k + x_2 k^2\big) \Big|^p dx \leqslant C_p (\log N)^{pc} \Big(N^{\frac{\sigma}{2}(p-4)} + N^{p-4} \Big) \Big(\sum_{k=1}^{N} |a_k|^p \Big). \qquad (26)$$

4. Sharpness

现在我们证明定理1.1 和定理1.2的尖锐性。我们考虑两个标准示例：相长干涉示例和块示例（例如参见 [5]）。

示例 1. 对于每个 $\gamma \in \mathcal{P}(\delta)$，令 f_γ 为一个支集包含于 γ 上的隆起函数，并定义 ne

$$f = \sum_{\gamma \in \mathcal{P}(\delta)} f_\gamma.$$

On 另一方面，注意到当 x 接近原点时， $|f(x)| \gtrsim \delta^\beta$，这意味着

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \gtrsim \delta^\beta \cdot |B(0,1)| = \delta^\beta. \qquad (27)$$

另一方面，通过直接计算可得，在对偶矩形 γ^* 上， $|f_\gamma| \sim |\gamma| = \delta^{1+\beta}$，该矩形可识别为 $\gamma^* = [-\delta^{-1},\ \delta^{-1}] \times [-\delta^{-\beta},\ \delta^{-\beta}]$ 对所有 γ 均成立，且 $|f_\gamma|$ 在 γ^* 之外快速衰减。因此，我们有

$$\begin{aligned}
&\Big(\sum_{\gamma \in \mathcal{P}(\delta)} \|f_\gamma\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^p \Big)^{\frac{1}{p}} \lesssim \Big(\delta^{-1} \cdot \delta^{(1+\beta)(p-1)} \Big)^{\frac{1}{p}} = \delta^{-\frac{1}{p} + (1+\beta)\left(1-\frac{1}{p}\right)}, \\
&\Big\| \Big(\sum_{\gamma \in \mathcal{P}(\delta)} |f_\gamma|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \lesssim |\gamma| \cdot \Big\| \Big(\sum_{\gamma \in \mathcal{P}(\delta)} 1 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{L^p(\gamma^*)} \lesssim \delta^{1+\beta-\frac{1}{2}} \cdot \delta^{-\frac{1+\beta}{p}} = \delta^{\frac{1}{2}+\beta-\frac{1+\beta}{p}}.
\end{aligned}$$

因此，我们推得

$$\frac{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}}{\left(\sum_{\gamma\in\mathcal{P}(\delta)}\|f_\gamma\|^p_{L^p(\mathbb{R}^2)}\right)^{\frac{1}{p}}}\gtrsim\frac{\delta^\beta}{\delta^{1+\beta-\frac{2+\beta}{p}}}=\delta^{-\left(1-\frac{2+\beta}{p}\right)},$$

and

$$\frac{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}}{\left\|\left(\sum_{\gamma\in\mathcal{P}(\delta)}|f_\gamma|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}}\gtrsim\frac{\delta^\beta}{\delta^{\frac{1}{2}+\beta-\frac{1+\beta}{p}}}=\delta^{-\left(\frac{1}{2}-\frac{1+\beta}{p}\right)}.$$

例2. 固定一个典范帽 $\theta\in\mathcal{P}(\delta^{\frac{\beta}{2}})$。对于每个 $\gamma\in\mathcal{P}(\delta)$，令 $\widehat{f_\gamma}$ 为一个凸起函数，其支集为 γ（若 $\gamma\subset\theta$），否则令 $f_\gamma=0$。于是我们定义

$$f=\sum_{\gamma\in\mathcal{P}(\delta)}f_\gamma.$$

于是，我们有 $|f_\gamma|\sim|\gamma|=\delta^{1+\beta}$ 在 γ^* 上成立，并且在对偶矩形 γ^* 外快速衰减；此外，$|f|\sim|\theta|=\delta^{\frac{3\beta}{2}}$ 在 θ^* 上成立，并且在对偶矩形 θ^* 外快速衰减。现在我们有

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\gtrsim|\theta|\cdot|\theta^*|^{\frac{1}{p}}=\delta^{\frac{3\beta}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)},$$

$$\left(\sum_{\gamma\in\mathcal{P}(\delta)}\|f_\gamma\|^p_{L^p(\mathbb{R}^2)}\right)^{\frac{1}{p}}\lesssim\left(\delta^{\frac{\beta}{2}-1}\cdot\delta^{(1+\beta)(p-1)}\right)^{\frac{1}{p}}=\delta^{\beta\left(1-\frac{1}{2p}\right)+1-\frac{2}{p}},$$

and

$$\left\|\left(\sum_{\gamma\in\mathcal{P}(\delta)}|f_\gamma|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\lesssim|\gamma|\cdot\left\|\left(\sum_{\gamma\subset\theta}1\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\gamma^*)}=\delta^{\frac{1}{2}+\frac{5\beta}{4}-\frac{1+\beta}{p}}.$$

因此，我们推得

$$\frac{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}}{\left(\sum_{\gamma\in\mathcal{P}(\delta)}\|f_\gamma\|^p_{L^p(\mathbb{R}^2)}\right)^{\frac{1}{p}}}\gtrsim\frac{\delta^{\frac{3\beta}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}}{\delta^{\beta\left(1-\frac{1}{2p}\right)+1-\frac{2}{p}}}=\delta^{-(2-\beta)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)},$$

and

$$\frac{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}}{\left\|\left(\sum_{\gamma\in\mathcal{P}(\delta)}|f_\gamma|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}}\gtrsim\frac{\delta^{\frac{3\beta}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}}{\delta^{\frac{1}{2}+\frac{5\beta}{4}-\frac{1+\beta}{p}}}=\delta^{-(1-\frac{\beta}{2})\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}.$$

致谢。作者获得了中国香港特别行政区研究资助局项目（项目编号 CityU 21309222 和 CityU 11308924）的部分资助。

References

1. J. Bourgain、C. Demeter、 *The proof of the ℓ^2 decoupling conjecture*, 《数学年刊》（2）**182**（2016），第 1 期，351–389。2. A. C´ordoba、 *A note on Bochner-Riesz operators*, 《杜克数学杂志》**46**（1979），第 3 期，501–511。3. C. Demeter、L. Guth 和 H. Wang、 *Small cap decouplings. With an appendix by D. R. Heath-Brown*, 《几何与泛函分析》**30**（2020），第 4 期，989–1062。4. C. Fefferman、 *A note on spherical summation multipliers*、《以色列数学杂志》**15**（1973），44–52。5. Y. Fu、L. Guth 和 D. Maldague、 *Sharp superlevel set estimates for small cap decouplings of the parabola* **39** 2023 3, 975 1004 ，《伊比利亚美洲数学评论》（），第 – 期。6. S. Gan、 *Small cap square function estimates*、《傅里叶分析及其应用杂志》**30**（2024），第 3 期。7. L. Guth、D. Maldague、 *Small cap decouplings for the moment curve in $\mathbb{R}^3$*、《分析与偏微分方程》**17**（2024），第 10 期，3551–3588。8. L. Guth、D. Maldague 和 H. Wang、 *Improved decoupling for the parabola*、《欧洲数学会杂志》（JEMS）**26**（2024），第 3 期，875–917。9. B. Johnsrude、 *Small cap decoupling for the parabola with logarithmic constant*、arXiv 预印本 arXiv:2305.00125。10. J. Lee、 *A trilinear approach to square function and local smoothing estimates for the wave operator*、《印第安纳大学数学杂志》**69**（2020），第 6 期，2005–2033。11. S. Lee、 *Improved bounds for Bochner-Riesz and maximal Bochner-Riesz operators*、《杜克数学杂志》**122**（2004），第 1 期，205–232。12. D. Maldague、C. Oh、 *On the small cap decoupling for the moment curve in $\mathbb{R}^3$*、arXiv 预印本 arXiv:2411.18016。

Department of Mathematics, City University of Hong Kong, Hong Kong SAR
Email address: jongckim@cityu.hkDepartment of Mathematics,
City University of Hong Kong, Hong Kong SAR*Email address*:
L.Wang@cityu.edu.hkDepartment of Mathematics,
City University of Hong Kong, Hong Kong SAR*Email address*:
ckyeung222-c@my.cityu.edu.hk