arXiv:2603.07945v1 [math.AC] 9 Mar 2026

逆变无限消解子范畴

GEN TANIGAWA

Abstract. 设 R 为交换诺特环。用 $\operatorname{mod} R$ 表示有限生成R-模范畴。本文将 $\operatorname{mod} R$ 的一个逆变无限子范畴定义为 $\operatorname{mod} R$ 的一个全子范畴$\mathscr{X}$，使得不属于 $\mathscr{X}$的任何模都不存在右 $\mathscr{X}$-逼近。本文针对 R 为局部完全交的情形，给出了若干判定逆变无限性的准则。

1. Introduction

Auslander 和 Smalø[8] 系统地引入了逆变有限子范畴的概念，用于研究存在几乎分裂序列的子范畴。Auslander 和 Reiten [7]将其应用于 Artin代数上的倾斜理论；这一应用至今仍是一个活跃的研究课题，参见[1, 17, 18]。对于交换环，逆变有限子范畴的概念最初是在 Auslander 和 Buchweitz [5]提出的 Cohen–Macaulay 逼近理论中讨论的。设 R 为具有典范模的 Cohen–Macaulay 局部环。用 $\operatorname{mod} R$ 表示有限生成 R-模范畴，并用 $\operatorname{CM} R$ 表示 $\operatorname{mod} R$ 中由极大 Cohen–Macaulay R-模组成的全子范畴。Auslander 和 Buchweitz 证明了 $\operatorname{CM} R$ 是逆变有限的。Auslander 和 Bridger [4] 引入了解消子范畴的概念，以证明全反射模构成一个解消子范畴。Takahashi[20] 证明，每个完全 Gorenstein 局部环 R 仅有三个逆变有限的解消子范畴：$\operatorname{mod} R$、$\operatorname{CM} R$和 $\operatorname{add} R$，其中 $\operatorname{add} R$是由自由 R-模构成的全子范畴。本文旨在引入并研究逆变有限子范畴的相反概念，我们称之为逆变无限子范畴。具体而言，若加性范畴$\mathscr{C}$ 的一个全子范畴 $\mathscr{X}$ 满足：$\mathscr{C}$ 中不属于 $\mathscr{X}$ 的任何对象都不存在右 $\mathscr{X}$-逼近，则称其为逆变无限 子范畴。这一概念曾由 Takahashi [21]隐含地研究过。他证明，若 R 是 Huneke 和 Jorgensen[15] 意义下的 AB 环，且 $\mathscr{X}$ 是 $\operatorname{mod} R$ 的一个解消子范畴，其中包含一个非极大 Cohen–Macaulay 模，则 $\mathscr{X}$ 是逆变无限的。

Dao 和 Takahashi [12] 引入了模范畴 $\operatorname{mod} R$ 的全子范畴的半径这一概念，并证明，对于具有完美系数域的完全局部完全交环，模范畴 $\operatorname{mod} R$ 的全子范畴 $\mathscr{X}$ 具有有限半径，当且仅当 $\mathscr{X}$ 中的任意模都是极大 Cohen–Macaulay。Dey、Lank 和 Takahashi [14]证明，条件“ R 是具有完美系数域的完全环”可以替换为条件“ R 是拟优的”。结合这些结果，我们将证明以下定理，这是本文的主要结果。

定理 1.1。设 R 是一个正维数的亨泽尔局部完全交环。设 $\mathscr{X}$ 是 模范畴 R 的一个解消子范畴。那么以下条件等价。

(1) $\mathscr{X}$ 是反变无限的。(2) $\mathscr{X}$ 含有一个投射维数有限且为正的模。

(3) $\mathscr{X}$ 含有一个非极大 *Cohen–Macaulay* 模。

此外，若 R 是拟优的，则上述三个条件也等价于以下条件。

(4) $\mathscr{X}$ 的半径是无限的。

该定理将在第3节中证明；随后，我们将在第2节介绍基本概念及其基本性质。现在自然会提出以下两个问题。

(i) 能否从定理 1.1 中去掉 R 具有正维数这一假设? (ii) 能否将定理 1.1 推广到 Gorenstein 情形?

对于 (i)，我们得到了完整的答案，即正维数这一假设不可或缺；见注记3.5和例 3.6。至于 (ii)，我们将在第4节中深入讨论，并引入 $\operatorname{mod} R$ 的子范畴，其中包含满足以下条件的模 M：函子范畴中的函子 $\operatorname{Hom}_R(-, M)|_{\mathscr{X}}$ 是有限表示的

$\mathscr{X}$。我们没有得到关于 (ii) 本身的完整答案，而是得到了关于完全交的另一项结果。

定理 1.2。设 R 是一个亨泽尔局部完全交。设 $\mathscr{X}$ 是$\operatorname{mod} R$的一个解消子范畴，其中所有对象都是极大 *Cohen–Macaulay*。设 M 是一个有限生成的 R-模。若函子$\operatorname{Hom}_R(-, M)|_{\mathscr{X}}$在 $\mathscr{X}$的函子范畴中是有限生成的，则它是有限表示的。

2. Basic definitions and properties

本节旨在陈述若干供后文使用的记号和性质。我们先介绍约定。

约定 2.1。在本文中，所有环均为含幺交换诺特环，所有模均为有限生成的，所有子范畴均为严格满子范畴。对于一个 R-模 M，我们用 pd M表示 M的投射维数。我们记

(R, $\mathfrak{m}$, k) 为一个（交换诺特）局部环，$\operatorname{mod} R$ 为（有限生成） R-模范畴，CM R为 $\operatorname{mod} R$中由极大 Cohen–Macaulay R-模构成的（满）子范畴，fpd R为 $\operatorname{mod} R$中由有限投射维数 R-模构成的（满）子范畴。

为简便起见，在不会引起混淆时省略下标。

我们回顾关于子范畴闭性的若干精确定义。

定义 2.2。设 $\mathscr{A}$ 是一个加性范畴， $\mathscr{X}$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个子范畴。

(1) 如果对于有限个对象 X_1, ..., $X_n \in \mathscr{X}$，它们的直和 $X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$ 属于 $\mathscr{X}$，则称 $\mathscr{X}$ 对有限直和封闭。(2) 如果对于 $\mathscr{A}$ 中的对象 A 和 B，满足 $A \oplus B \in \mathscr{X}$ 时， A 和 B 均属于 $\mathscr{X}$，则称 $\mathscr{X}$ 对直和项封闭。

我们用 $\operatorname{add}_{\mathscr{A}} \mathscr{X}$ 表示 $\mathscr{X}$ 的加性闭包，也就是包含 $\mathscr{X}$ 且对有限直和和直和项封闭的 $\mathscr{A}$ 的最小子范畴。当 $\mathscr{X}$ 由单个模 X 构成时，我们简单记作 $\operatorname{add}_{\mathscr{A}} X$。

定义 2.3。设 $\mathscr{A}$ 是一个阿贝尔范畴， $\mathscr{X}$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个子范畴。

(1) 如果对于 $\mathscr{A}$中所有满足 $B \in \mathscr{X}$的正合列 $0 \to A \to B$（分别地， $0 \leftarrow A \leftarrow B$），都有 $A \in \mathscr{X}$，我们就称 $\mathscr{X}$对子对象封闭（对商对象封闭）。（2）如果对于 $\mathscr{A}$中所有满足 B， $C \in \mathscr{X}$的正合列 $0 \to A \to B \to C$（分别地， $0 \leftarrow A \leftarrow B \leftarrow C$），都有 $A \in \mathscr{X}$，我们就称 $\mathscr{X}$对核封闭（对余核封闭）。（3）如果对于 $\mathscr{A}$中所有满足 B， $C \in \mathscr{X}$的正合列 $0 \to A \to B \to C \to 0$（分别地，$0 \leftarrow A \leftarrow B \leftarrow C \leftarrow 0$），都有 $A \in \mathscr{X}$，我们就称 $\mathscr{X}$对满态射的核封闭（对单态射的余核封闭）。（4）如果对于 $\mathscr{A}$中所有满足 A， $C \in \mathscr{X}$的正合列 $0 \to A \to B \to C \to 0$，都有 $B \in \mathscr{X}$，我们就称 $\mathscr{X}$对扩张封闭。

定义2.4. 设 $\mathscr{A}$是一个具有足够的投射对象的阿贝尔范畴。

(1) 我们用proj $\mathscr{A}$表示 $\mathscr{A}$中由投射对象构成的子范畴。(2) 设 M是 $\mathscr{A}$的一个对象。对每个正整数 n，我们用$\Omega^n_{\mathscr{A}} M$表示 M的第 n个上同调核，即出现在 $\mathscr{A}$中的正合列 $0 \to N \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$里、且对所有 $0 \leq i \leq n-1$满足 $P_i \in$ proj $\mathscr{A}$的 $\mathscr{A}$的对象 N。对象$\Omega^n_{\mathscr{A}} M$在不计投射直和项的意义下是唯一确定的。我们规定$\Omega^0_{\mathscr{A}} M = M$以及$\Omega_{\mathscr{A}} M = \Omega^1_{\mathscr{A}} M$。对每个 $n \geqslant 0$，我们用$\Omega^n \mathscr{A}$表示 $\mathscr{A}$中由第 n个上同调核构成的子范畴。(3) 若 $\mathscr{X}$包含proj $\mathscr{A}$，且对所有 $X \in \mathscr{X}$都包含$\Omega_{\mathscr{A}} X \in \mathscr{X}$，则称 $\mathscr{A}$的子范畴 $\mathscr{X}$是对合冲封闭的。

注 2.5。设 $\mathscr{A}$ 是一个阿贝尔范畴， $\mathscr{X}$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个子范畴。考虑 $\mathscr{X}$ 满足封闭于以下运算的条件

(1) 子对象，(2) 核，(3) 满
态射的核,

(4) 商对象，(5) 余核，(6) 单态射的余核，(7) 直和项以及 (8) 扩张。

于是，蕴含关系 (1) ⇒(2) ⇒ (3)、(4) ⇒(5) ⇒(6) 以及 (2) ⇒ (7) ⇐(5) 均成立。此外，假设 $\mathscr{A}$ 有足够的投射对象。考虑 $\mathscr{X}$ 关于下列运算封闭这一条件：

(9) 上同调核。

如果 $\mathscr{X}$ 包含 $\operatorname{proj}\mathscr{A}$，且满足 (7) 和 (8)，那么 (3) 和 (9) 等价。

现在，我们准备回顾由 Auslander 和 Bridger [4] 引入的解消子范畴的定义。本文大多数情况下讨论的是 $\operatorname{mod} R$ 的解消子范畴。

定义 2.6. 设 $\mathscr{A}$ 是一个有足够投射对象的阿贝尔范畴。若 $\mathscr{X}$ 是 $\mathscr{A}$的一个子范畴，且 $\mathscr{X}$ 包含 $\operatorname{proj}\mathscr{A}$，并且关于直和项、扩张和满态射的核封闭，则称其为解消子范畴。我们用 $\operatorname{res}_{\mathscr{A}}\mathscr{X}$ 表示 $\mathscr{X}$的凝聚闭包，即包含 $\mathscr{X}$的 $\mathscr{A}$ 的最小解消子范畴。

我们回顾 Auslander 和 Smalø [8]提出的右逼近和反变有限子范畴的定义。Takahashi [20] 证明，在 Hensel Gorenstein 局部环 R 上，$\operatorname{mod} R$ 的所有反变有限解消子范畴都是 $\operatorname{add} R$、Cohen–Macaulay R 和 $\operatorname{mod} R$。

定义 2.7。 设 $\mathscr{A}$ 是一个加性范畴，$\mathscr{X}$ 是 $\mathscr{A}$的一个子范畴。

(1) 若 $f\colon X \to M$ (分别. $f\colon X \leftarrow M$) 是 $\mathscr{A}$ 中的态射，且满足 $X \in \mathscr{X}$，则称其为右(分别。左)$\mathscr{X}$-逼近（ $\mathscr{A}$的逼近）；如果对于任意满足 $X' \in \mathscr{X}$的态射 $f'\colon X' \to M$(分别. $f'\colon X' \leftarrow M$)，都存在态射 $g\colon X' \to X$(分别. $g\colon X' \leftarrow X$)，使得 $f' = fg$(分别. $f' = gf$)。(2) 我们用 $\operatorname{rap}_{\mathscr{A}}\mathscr{X}$ 表示 $\mathscr{A}$ 中由存在右 $\mathscr{X}$-逼近的对象组成的子范畴。对于每个对象 $X \in \mathscr{X}$，X 的恒等态射是一个右 $\mathscr{X}$-逼近，因此有 (3) 若 $\mathscr{X}$ 中的每个对象都存在右 $\mathscr{X}$-逼近，即等式 $\operatorname{rap}\mathscr{X} = \mathscr{A}$成立，则称 $\mathscr{X}$ 是反变有限的。

$$\mathscr{X} \subseteq \operatorname{rap}\mathscr{X} \subseteq \mathscr{A}.$$

对于 $\operatorname{mod} R$ 的解消子范畴 $\mathscr{X}$，$\operatorname{mod} R$ 的子范畴 $\operatorname{rap}\mathscr{X}$ 在直和项与扩张下封闭，见 [21,命题 23(1)]。我们自由地使用这一事实。

对于 $\operatorname{mod} R$ 的子范畴 $\mathscr{X}$，我们用 $\mathscr{X}^{\perp}$（分别. ${}^{\perp}\mathscr{X}$）表示 $\operatorname{mod} R$ 中由 R-模 M 组成的子范畴，这些模满足 $\operatorname{Ext}^{\geqslant 0}_R(X,\ M) = 0$（分别. $\operatorname{Ext}^{\geqslant 0}_R(M,\ X) = 0$）对所有 $X \in \mathscr{X}$ 成立。当 $\mathscr{X}$ 仅由单个模 X 组成时，我们简记为 $X^{\perp}$（分别. ${}^{\perp}X$）。设 $\mathscr{Y}$ 是 $\operatorname{mod} R$ 的满足 $\mathscr{Y} \subseteq \mathscr{X}$ 的子范畴。则易见 $\mathscr{X}^{\perp}$（分别. ${}^{\perp}\mathscr{X}$）包含于 $\mathscr{Y}^{\perp}$（分别. ${}^{\perp}\mathscr{Y}$）。下面的引理用于确保：若 $\mathscr{X} \neq \operatorname{rap}\mathscr{X}$，则 $\mathscr{X}^{\perp}$ 中存在某个非零的 R-模。

引理 2.8 [21, 引理 14]. 设 R 为亨泽尔局部环，$\mathscr{X}$ 为 $\operatorname{mod} R$ 的解消子范畴。则 R-模 M 属于 $\operatorname{rap}\mathscr{X}$，当且仅当存在 R-模的正合列 $0 \to Y \to X \to M \to 0$，且满足 $X \in \mathscr{X}$ 与 $Y \in \mathscr{X}^{\perp}$。

现在我们回顾 $\operatorname{mod} R$ 的子范畴半径的定义，该定义由 Dao 与 Takahashi [12] 引入。半径表示由单个 R-模出发、构造出 $\mathscr{X}$ 中所有 R-模所需的最少扩张次数。

定义 2.9. 设 $\mathscr{X}$ 与 $\mathscr{Y}$ 为 $\operatorname{mod} R$ 的子范畴。

(1) 我们用 $[\mathscr{X}]$ 表示由 $\operatorname{mod} R$ 中由 R 和对所有 $i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 及 $X \in \mathscr{X}$ 的 $\Omega^i X$ 所组成的子范畴的加性闭包。(2) 我们用 $\mathscr{X} \circ \mathscr{Y}$ 表示 $\operatorname{mod} R$ 中由 R-模 M 组成的子范畴，其中这些模出现在以 $X \in \mathscr{X}$ 和 $Y \in \mathscr{Y}$ 为端项的正合列 $0 \to X \to M \to Y \to 0$ 中。我们令 $\mathscr{X} \bullet \mathscr{Y} = [[\mathscr{X}] \circ [\mathscr{Y}]]$。(3) 我们将以 $\mathscr{X}$ 为中心的半径为 r 的球定义为

$$[\mathscr{X}]_r = \begin{cases} [\mathscr{X}] & (r = 1), \\ [\mathscr{X}]_{r-1} \bullet \mathscr{X} & (r > 1). \end{cases}$$

当 $\mathscr{X}$ 仅由一个模 X 组成时，我们简单地用 $[X]_r$ 代替 $[\mathscr{X}]_r$，并称之为以 X 为中心、半径为 r 的球。(4) 我们将 $\mathscr{X}$ 的半径（记作 radius $\mathscr{X}$）定义为满足以下条件的整数 $n \geqslant 0$ 的下确界：对于某个 R-模 C，$\mathscr{X}$ 包含于 $[C]_{n+1}$ 中。

最后，我们介绍若干在主定理证明中起关键作用的重要结果。AB 环的概念由 Huneke 和 Jorgensen [15]提出。设 R 为 Gorenstein 环。若存在一个非负整数 n，使得对所有满足 $\operatorname{Ext}_R^{\geqslant 0}(M,N) = 0$的 $M, N \in$ 模 R，都有 $\operatorname{Ext}_R^{\geqslant n}(M,N) = 0$，则称 R 为一个AB 环。完全交是 AB 环的一个典型例子；见 [15, 推论 3.4]。下面的定理给出了解消子范畴为反变无限的一个充分条件。

定理 2。10 [21, 命题 29(2)]。设 R 为 ***Hensel AB*** 环，$\mathscr{X}$ 为模R的一个解消子范畴。若 $\mathscr{X}$不是反变无限的，则 $\mathscr{X}$包含于Cohen–Macaulay R中。

下面的定理有力地刻画了 $\operatorname{mod} R$ 的解消子范畴，这也是本文主定理要求 R 为完全交环这一假设的原因之一。

定理 2.11 [13, 定理 7.4]**.** 设 R 为完全交环。存在一个一一对应

$$\left\{\begin{array}{c} Resolving \\ subcategories \\ of\ \operatorname{mod} R \end{array}\right\} \underset{\Psi}{\overset{\Phi}{\rightleftarrows}} \left\{\begin{array}{c} Resolving \\ subcategories \\ of\ \operatorname{fpd} R \end{array}\right\} \times \left\{\begin{array}{c} Resolving \\ subcategories \\ of\ \operatorname{CM} R \end{array}\right\}.$$

这里，互逆双射 Φ、Ψ 由 $\Phi(\mathscr{X}) = (\mathscr{X} \cap$有限投射维数 R、$\mathscr{X} \cap$Cohen–Macaulay $R)$与 $\Psi(\mathscr{Y}$、$\mathscr{Z}) = \operatorname{res}(\mathscr{Y} \cup \mathscr{Z})$定义。

借助于以下两个定理，我们观察到，$\operatorname{mod} R$ 的解消子范畴 $\mathscr{X}$ 具有有限半径，当且仅当在具有完美系数域的完备完全交环 R 上，$\mathscr{X}$ 包含于 Cohen–Macaulay R 中。

定理 2.12 [12, 定理 I].设 R 为完全交环，$\mathscr{X}$ 为$\operatorname{mod} R$的解消子范畴。若 $\mathscr{X}$具有有限半径，则 $\mathscr{X}$包含于 Cohen–Macaulay R。

定理 2.13 [12, 定理 II].设 R 为具有完美系数域的 ***Cohen–Macaulay*** 完备环。则 Cohen–Macaulay R 具有有限半径。

注 2.14. 在定理 2.13 中，R 完备且具有完美系数域这一条件可以替换为 R 拟优且具有典范模 ω这一条件。下面我们来证明这一点。对于 $\operatorname{mod} R$ 的子范畴 $\mathscr{X}$，我们令 $|\mathscr{X}| = \operatorname{add}\mathscr{X}$。子范畴的大小 是通过在半径的定义中将“[-]”替换为“|-|”来定义的。由于对所有 $n > 0$，$|\mathscr{X}|_n$ 都包含于 $[\mathscr{X}]_n$，我们有半径 $\mathscr{X} \leqslant$大小 $\mathscr{X}$。设 R是具有典范模 ω的拟优 Cohen–Macaulay 环。根据 [14, 推论 3.12], ，存在一个 R-模 G，使得对某个 s，$n \geqslant 0$，$\Omega^s(\operatorname{mod} R)$包含于 $|G|_{n+1}$。在 [12, 推论 5.9], 的证明中，将“d”替换为“s”，我们得到大小 Cohen–Macaulay $R < \infty$。因此 Cohen–Macaulay R 具有有限半径。

3. Proof of the main theorem

本节将逐步证明主定理。在本节中，我们令 $\mathscr{X}$ 为 $\operatorname{mod} R$ 的一个解消子范畴。我们将证明三个引理。

引理 3.1。设 R 为一个亨塞尔环。假设 $\mathscr{X}$ 不是反变无限的。那么等式$\mathscr{X} \cap$有限投射维数 $R = \operatorname{add} R$ 成立。

证明。根据假设，存在一个 R-模 M，它属于 $\operatorname{rap}\mathscr{X}$，但不属于 $\mathscr{X}$。由引理 2.8，我们得到一个短正合列 $0 \to Y \to X \to M \to 0$，其中 $X \in \mathscr{X}$、$Y \in \mathscr{X}^{\perp}$ 和 $Y \neq 0$。假设 $\mathscr{X} \cap \operatorname{fpd} R$ 严格包含 $\operatorname{add} R$。那么存在一个 R-模 $Z \in \mathscr{X}$，其投射维数有限且为正，记为 n。因此我们得到一个短正合列 $0 \to R^{\oplus p} \xrightarrow{A} R^{\oplus q} \to \Omega^{n-1}Z \to 0$，使得$p$、$q \in \mathbb{Z}_{>0}$，且矩阵 A 的任意元素都属于 $\mathfrak{m}$。对其应用 $\operatorname{Hom}_R(-,Y)$，得到正合列$Y^{\oplus q}\,\mathrm{t}\xrightarrow{A} Y^{\oplus p} \to \operatorname{Ext}_R^1(\Omega^{n-1}Z, Y)$，其中 t A 表示矩阵 A 的转置。由于 $\Omega^{n-1}Z$ 属于 $\mathscr{X}$，且 Y属于 $\mathscr{X}^{\perp}$，Ext 模为零。因此我们有 $Y^{\oplus p} = \mathfrak{m}Y^{\oplus q}$。Nakayama 引理推出$Y = 0$, 矛盾。■

引理 3.2。假设 R 是 *Gorenstein* 环，且其 $d = \text{维数}\, R > 0$。如果 $\mathscr{X}$ 中的所有模都是极大 *Cohen–Macaulay* 模，那么 $\mathscr{X}$ 不是反变无限的。

证明。只需证明 $\operatorname{rap}\mathscr{X}$包含一个不属于 $\mathscr{X}$ 的 R-模。由于 R 是 Cohen–Macaulay，故 $\operatorname{depth} R = d > 0$。因此，存在一个 $\mathfrak{m}$中的 R-正则元 x。存在一个短正合列

$$0 \to R \xrightarrow{x} R \to R/(x) \to 0. \tag{3.2.1}$$

由于 $\operatorname{depth} R/(x) = d-1$， $R/(x)$ 这个 R-模不是极大 Cohen–Macaulay。根据假设， $R/(x)$ 不属于 $\mathscr{X}$。由于 $\mathscr{X}$包含于 $\operatorname{CM} R$ 且是解消子范畴，模 R 同时属于 $\mathscr{X}^{\perp}$ 和 $\mathscr{X}$。引理 2.8 表明， $R/(x)$ 存在一个右 $\mathscr{X}$-逼近，也就是说， $R/(x)$ 属于 $\operatorname{rap}\mathscr{X}$。■

引理 3.3。设 R是一个维数为 维数 $R > 0$ 的 ***Hensel AB*** 环。那么， $\mathscr{X}$包含于 Cohen–Macaulay R，当且仅当 $\mathscr{X}$ 不是反变无限的。

证明。“仅当”部分由引理 3.2 得出，而“当”部分由定理 2.10 证明。 ■

现在我们可以证明主要结果了。

定理 3.4. 设 R 是一个亨泽尔完全交环，且 维数 $R > 0$。则以下条件等价。

(1) 子范畴 $\mathscr{X}$ 不是反变无限的。(2) 子范畴 $\mathscr{X}$ 不含正有限投射维数的模。(3) $\mathscr{X}$ 中的所有模都是极大 *Cohen–Macaulay*。

此外，若 R 是拟优的，则上述三个条件也等价于以下条件。

(4) 子范畴 $\mathscr{X}$ 的半径有限。

证明. 蕴含关系 (1) $\Rightarrow$(2) 由引理 3.1 得出。若 $\mathscr{X} \cap \operatorname{fpd} R = \operatorname{add} R$ 成立，则由定理 2.11 可得以下等式。

$$\begin{aligned}\mathscr{X} &= \Psi\Phi(\mathscr{X}) = \Psi(\mathscr{X} \cap \operatorname{fpd} R, \mathscr{X} \cap \operatorname{CM} R) = \Psi(\operatorname{add} R, \mathscr{X} \cap \operatorname{CM} R) \\ &= \operatorname{res}(\operatorname{add} R \cup (\mathscr{X} \cap \operatorname{CM} R)) = \operatorname{res}(\mathscr{X} \cap \operatorname{CM} R) \subseteq \operatorname{res} \operatorname{CM} R = \operatorname{CM} R.\end{aligned}$$

因此蕴含 (2) $\Rightarrow$(3) 成立。等价 (1) $\Leftrightarrow$ (3)（分别，(3) $\Leftrightarrow$ (4)）是引理 3.3（分别，定理 2.12 与注 2.14）的推论。
■

注记3.5. Auslander、Ding 与 Solberg [6] 证明了完全交环满足下述条件，该条件称为*Auslander–Reiten* 条件。

$$(\mathbf{ARC}) \quad \text{For every } R\text{-module } M, \text{ if } \operatorname{Ext}_R^{\gg 0}(M, M \oplus R) = 0, \text{ then } M \text{ is free.}$$

我们称一个 R-模 M 具有复杂度 c，如果 c 是最小的非负整数 n，使得存在实数 α，对所有 $i \gg 0$， M 的第 i 个贝蒂数以 αi^{n-1} 为上界。我们用 $\operatorname{cx}_R M$ 表示 M 的复杂度。设 R 为阿廷完全交叉环。则定理 3.4 中的陈述 (2) 与 (3) 显然成立，而 (4) 由 [12, 定理 5.7] 的证明得到。然而下面的例子表明，定理 3.4 中 $\dim R$ 为正这一假设是必要的。

例 3.6. 设 R 是一个阿廷完全交， c 是 R 的余维数，而 $\mathscr{E}$ 是由复杂度小于 c 的 R-模组成的 $\operatorname{mod} R$ 的子范畴。那么 $\mathscr{E}$ 是解消子范畴，见 [9, 命题 4.2.4]。现在我们考虑 $c \geqslant 2$ 的情形。假设 $\mathscr{E}$ 不是反变无限的。那么存在一个正合列

$$0 \to M \to E \to L \to 0$$

R模的，其中有 $L \notin \mathscr{E}$、 $E \in \mathscr{E}$和 $M \in \mathscr{E}^{\perp}$。假设 $\operatorname{cx}_R M$小于 c。那么 M属于 $\mathscr{E}$。由于 R 满足（**ARC**）， M 是自由模。由于 R 是阿廷-戈伦斯坦，上述正合列分裂，因此我们得到一个同构 $E \cong M \oplus L$。这意味着 L 属于 $\mathscr{E}$，矛盾。因此， $\operatorname{cx}_R M = c$。于是，根据 [11, 命题 2.7]， M 是一个检验模，也就是说，所有满足 $\operatorname{Tor}_{\gg 0}^R(M,N) = 0$的 R模 N（这等价于 $\operatorname{Ext}_R^{\gg 0}(N,M) = 0$，见 [10, 定理 III]）都具有有限投射维数。因此 $\mathscr{E} = \operatorname{add} R$，从而 $c = 1$。这与 $c \geqslant 2$这一事实矛盾。由此， $\mathscr{E}$ 是反变无限的。

4. A question related to the main theorem

本节讨论由定理 1.1 引出的以下问题。

问题 4.1。 定理 1.1 对所有 Gorenstein 环都成立吗?

在本节中，我们固定使用以下记号。

记号 4.2。设 $(R, \mathfrak{m}, k)$ 是一个 Hensel Gorenstein 局部环，且 $\mathscr{X}$ 是 mod R 的一个解消子范畴 .

众所周知，(CM R，有限投射维数 R) 是一个余挠对，也就是说，(CM $R)^{\perp}$ = 有限投射维数 R，且 CM $R = {}^{\perp}$(有限投射维数 R)，这是由于 [16]。命题 4.13 的证明中用到了这一事实。

首先，我们回顾加性范畴的函子范畴、有限生成对象和有限表示对象的定义，这些定义由 Auslander 引入 [3]。

定义 4.3. 设 $\mathscr{A}$ 是一个加性范畴。

(1) 我们用 Mod $\mathscr{A}$ 表示 $\mathscr{A}$ 的函子范畴 。Mod $\mathscr{A}$ 的对象是从 $\mathscr{A}$ 到阿贝尔群范畴的加性反变函子。Mod $\mathscr{A}$ 的态射是自然变换。(2) 若存在一个正合列 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, A_0) \to F \to 0$，其中所有项均属于 Mod $\mathscr{A}$ 且满足 $A_0 \in \mathscr{A}$，则称对象 $F \in$ 属于 Mod $\mathscr{A}$ 且有限生成；若存在一个正合列 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, A_1) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, A_0) \to F \to 0$，其中所有项均属于 Mod $\mathscr{A}$ 且满足 $A_0, A_1 \in \mathscr{A}$，则称 F 有限表示 。(3) 我们用 mod $\mathscr{A}$ 表示 Mod $\mathscr{A}$ 的子范畴，它由 Mod $\mathscr{A}$ 中的有限表示对象构成。

将下面的引理应用于 mod R，可得：对于 mod R 的加性子范畴 $\mathscr{X}$，一个 R-模 M 属于 rap $\mathscr{X}$，当且仅当 $\mathrm{Hom}_R(-, M)|_{\mathscr{X}}$ 属于 mod $\mathscr{X}$。

引理 4。**4** [21, 引理 16]。 设 $\mathscr{A}$ 是一个加性范畴， $\mathscr{A}$ 是其加性子范畴。对象$A \in \mathscr{A}$存在一个右 $\mathscr{X}$-逼近，当且仅当函子 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(-, A)|_{\mathscr{X}}$有限生成。

设 $\mathscr{C}$ 是 mod R 的一个子范畴，由满足 $\mathrm{Hom}_R(-, C)|_{\mathscr{X}}$ 属于 mod $\mathscr{X}$ 的 R-模 C 构成；也就是说，$\mathrm{Hom}_R(-, C)|_{\mathscr{X}}$ 有限表示。显然，以下包含关系

$$\mathscr{X} \subseteq \mathscr{C} \subseteq \mathrm{rap}\, \mathscr{X}$$

成立。从现在起，我们将考察子范畴 $\mathscr{C}$ 满足哪些性质，以及这两个包含关系何时成为等式。我们先回顾以下引理。

引理 4。**5** [21, 引理 24]。 设 $0 \to L \to M \to N \to 0$ 是一个 R-模的正合列。若 $L \in \mathscr{X}^{\perp} \cap \mathscr{C}$ 和 $M \in \mathscr{C}$，则 $N \in \mathscr{C}$。

该正合 列 (3.2.1) 表明 $R/(x) \in \mathscr{C}$。因此，引理 3.2 可细化为如下形式 .

引理 4.6. 设 R 是一个 *Gorenstein* 环，且 $\dim R > 0$。若 $\mathscr{X}$ 包含于 Cohen–Macaulay R，则 $\mathscr{C}$ 包含一个位于 $\mathscr{X}$ 之外的 R-模。

现在我们有如下观察。

命题 4.7. 设 C 是 $\mathscr{C}$ 中的一个 R-模。则存在 R-模的正合列 $0 \to K \to X \to C \to 0$，满足 $X \in \mathscr{X}$ 且 $K \in \mathrm{rap}\, \mathscr{X}$。

证明. 存在一个正合列

$$\mathrm{Hom}_R(-, X_1)|_{\mathscr{X}} \to \mathrm{Hom}_R(-, X_0)|_{\mathscr{X}} \xrightarrow{\phi} \mathrm{Hom}_R(-, C)|_{\mathscr{X}} \to 0$$

在 mod $\mathscr{X}$ 中，带有 X_0， $X_1 \in \mathscr{X}$。根据 Yoneda 引理，存在一个 R-同态 $f\colon\ X_0 \to C$，使得$\phi = \mathrm{Hom}_R(-, f)|_{\mathscr{X}}$。分解该序列后，我们得到正合列

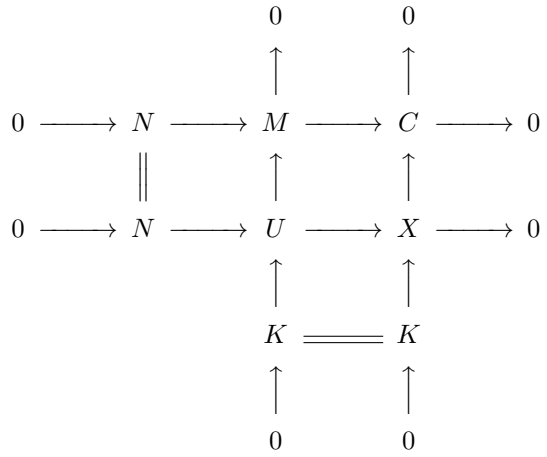
$$\mathrm{Hom}_R(-, X_1)|_{\mathscr{X}} \to \mathrm{Hom}_R(-, K)|_{\mathscr{X}} \to 0,$$
$$0 \to \mathrm{Hom}_R(-, K)|_{\mathscr{X}} \to \mathrm{Hom}_R(-, X_0)|_{\mathscr{X}} \to \mathrm{Hom}_R(-, C)|_{\mathscr{X}} \to 0$$

在 Mod $\mathscr{X}$ 中，其中 $K =$ Ker f。引理 4.4 蕴含 $K \in$ rap $\mathscr{X}$。存在一个由 R-模构成的诱导正合列 $0 \to K \to X_0 \xrightarrow{f} C \to 0$ 。■

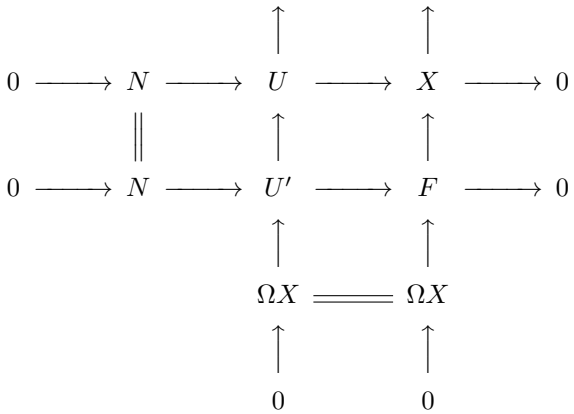
我们将利用以下命题得出 $\mathscr{C}$ 的若干性质。

命题 4.8. 如果存在一个由 R-模构成的正合列 $0 \to N \to M \to C \to 0$，满足 $M \in \operatorname{rap}\mathscr{X}$ 和 $C \in \mathscr{C}$，那么 $N \in \operatorname{rap}\mathscr{X}$。

证明。由命题 4.7，我们有一个正合列 $0 \to K \to X \to C \to 0$，其各项为 R-模，且 $X \in \mathscr{X}$ 和 $K \in$ 属于 rap $\mathscr{X}$。存在一个拉回图。



由于 R-模 M 和 K 属于 rap $\mathscr{X}$，根据上图的中间一列，U 也属于 rap $\mathscr{X}$。我们有一个正合列 $0 \to \Omega$ $X \to F \to X \to 0$，其各项为 R-模，且 $F \in$ 属于 add R。得到如下拉回图。0 0



由于 F 是自由模，第二个图中的中间一行分裂。因此，N 是 U' 的一个直和项。由于 U 和 ΩX 这两个 R-模属于 rap $\mathscr{X}$，根据第二个图的中间一列，U' 也属于 rap $\mathscr{X}$。因此，N 属于 rap $\mathscr{X}$。■

下面的推论与引理 2.8 类似；如果在 $\mathscr{X}$ 之外的 $\mathscr{C}$ 中存在一个 R-模，那么该推论将用于确保存在某个非零的 R-模，同时属于 $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{X}^{\perp}$。

推论 4.9. </style}一个 -模 属于，当且仅当存在一个由 -模组成的正合列，使得 属于，且 同时属于 rap $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{X}^{\perp}$。当这些等价条件成立时，存在一个由 R-模组成的正合列 $X_1 \to X_0 \to C \to 0$，其中 $X_0 \in \mathscr{X}$ 和 $X_1 \in \mathscr{X} \cap \mathscr{X}^{\perp}$，它诱导出一个正合列

$$\operatorname{Hom}_R(-, X_1)|_{\mathscr{X}} \to \operatorname{Hom}_R(-, X_0)|_{\mathscr{X}} \to \operatorname{Hom}_R(-, C)|_{\mathscr{X}} \to 0$$

在 模 $\mathscr{X}$ 中。

证明。“仅当”部分由引理 2.8 和命题 4.8 得出。只需证明“当”部分。由于 Y属于 rap $\mathscr{X}$，存在 R-模的正合列 $0 \to Y' \to X' \to Y \to 0$，使得 $X' \in \mathscr{X}$且 $Y \in \mathscr{X}^{\perp}$。于是 X'属于 $\mathscr{X} \cap \mathscr{X}^{\perp}$，并且诱导序列 $\operatorname{Hom}_R(-, X')|_{\mathscr{X}} \to \operatorname{Hom}_R(-, Y)|_{\mathscr{X}} \to 0$ 在 Mod $\mathscr{X}$ 中是正合的。另一方面，我们有诱导正合列 $0 \to \operatorname{Hom}_R(-, Y)|_{\mathscr{X}} \to \operatorname{Hom}_R(-, X)|_{\mathscr{X}} \to \operatorname{Hom}_R(-, C)|_{\mathscr{X}} \to 0$ 在 Mod $\mathscr{X}$ 中。将这两个序列结合起来，我们

得到 mod $\mathscr{X}$ 中的正合列 $\mathrm{Hom}_R(-,X')|_{\mathscr{X}} \to \mathrm{Hom}_R(-,X)|_{\mathscr{X}} \to \mathrm{Hom}_R(-,C)|_{\mathscr{X}} \to 0$。因此 C属于 $\mathscr{C}$。■

注 4.10. 如果存在正合列 $\cdots \to \mathrm{Hom}_R(-,Y_2)|_{\mathscr{X}} \to \mathrm{Hom}_R(-,Y_1)|_{\mathscr{X}} \to \mathrm{Hom}_R(-,Y_0)|_{\mathscr{X}} \to \mathrm{Hom}_R(-,C)|_{\mathscr{X}} \to 0$ 在 mod $\mathscr{X}$中，且对所有 i都有 $Y_i \in \mathscr{X}$，那么我们同样得到一个正合列

$$\cdots \to \mathrm{Hom}_R(-,X_2)|_{\mathscr{X}} \to \mathrm{Hom}_R(-,X_1)|_{\mathscr{X}} \to \mathrm{Hom}_R(-,X_0)|_{\mathscr{X}} \to \mathrm{Hom}_R(-,C)|_{\mathscr{X}} \to 0$$

在 mod $\mathscr{X}$中，且 $X_0 \in \mathscr{X}$，对所有 $i>0$都有 $X_i \in \mathscr{X} \cap \mathscr{X}^{\perp}$。

以下推论说明了 $\mathscr{C}$ 与 rap $\mathscr{X}$ 有多么接近。

推论 4.11. 设 $0 \to N \to C \to M \to 0$ 是一个 R-模的正合列。若 $C \in \mathscr{C}$ 且 $M, N \in \mathrm{rap}\,\mathscr{X}$，则 $M \in \mathscr{C}$。

证明。由引理 2.8，我们有一个 R-模的正合列 $0 \to Y \to X \to M \to 0$，其中 $X \in \mathscr{X}$ 且 $Y \in \mathscr{X}^{\perp}$。存在一个拉回图。

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & N & = & N & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & V & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & X & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

由于 R-模 N和 X 属于 rap $\mathscr{X}$，根据图中的中间列，V也属于 rap $\mathscr{X}$。由于R-模 C属于 $\mathscr{C}$，命题 4.8 表明，根据图中的中间行，Y属于 rap $\mathscr{X}$。因此，根据推论 4.9，M 属于 $\mathscr{C}$。■

事实证明，$\mathscr{C}$具有以下闭性性质，rap $\mathscr{X}$也如此。

推论 4.12. 子范畴 $\mathscr{C}$ *of* 模 R 对直和项和扩张封闭 .

证明。若 $M \oplus N$属于 $\mathscr{C}$，则 M和 N属于 rap $\mathscr{X}$，因为 $\mathscr{C}$包含于 rap $\mathscr{X}$。推论 4.11 表明，M 和 N 属于 $\mathscr{C}$。因此，$\mathscr{C}$ 对直和项封闭。根据推论 4.9 以及命题 23(1)的证明中相同的论证，我们注意到 $\mathscr{C}$ 对扩张封闭。■

现在我们来考虑广义 *Auslander–Reiten* 条件。

> **(广义 Auslander–Reiten 猜想)** 如果对每个 R-模 M，都存在一个非负整数 n，使得 $\mathrm{Ext}_R^{\geq n}(M,\ M \oplus R) = 0$，那么 M 的投射维数至多为 n。

AB 环满足（**广义 Auslander–Reiten 猜想**），见 [2, 推论 2.8]。下面的命题可以看作定理 2.10 的推广。

命题 4.13。设 R 是一个维数为 $\dim R > 0$ 的 *Gorenstein* 环。假设 R 满足 (**广义 Auslander–Reiten 猜想**)。那么，当且仅当 $\mathscr{X}$ 包含于 Cohen–Macaulay R 时，$\mathscr{X}$ 严格包含于 $\mathscr{C}$。

证明。“若”部分是引理 4.6 的推论。下面我们证明“仅当”部分。由推论 4.9，存在一个非零的 R-模 X，它同时属于 $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{X}^{\perp}$。条件（**广义 Auslander–Reiten 猜想**）与引理 3.1 表明 X 属于 add R。由于 R 是局部的，且 $\mathscr{X}^{\perp}$ 对直和项封闭，故 R 是 X 的直和项，并且属于 $\mathscr{X}^{\perp}$。此外，$\mathscr{X}^{\perp}$ 对扩张以及单态射的余核封闭，因此有限投射维数 R 包含于 $\mathscr{X}^{\perp}$。我们注意到 $^{\perp}$(有限投射维数 R) 包含 $^{\perp}(\mathscr{X}^{\perp})$。显然 $\mathscr{X}$ 包含于 $^{\perp}(\mathscr{X}^{\perp})$。由于 Cohen–Macaulay R 与 $^{\perp}$(有限投射维数 R) 一致，故 $\mathscr{X}$ 包含于 Cohen–Macaulay R。■

最后，我们考虑条件 $\mathscr{C} = \operatorname{rap}\mathscr{X}$。一个解消子范畴 $\mathscr{X}$ 满足该条件，当且仅当对每个 R-模 M，函子 $\operatorname{Hom}_R(-, M)|_{\mathscr{X}}$ 在有限生成时都是有限表示的。因此，我们将这样的解消子范畴命名如下。

定义 4.14. 我们称 $\mathscr{X}$ 是相干的，如果 $\mathscr{C}$ 与 $\operatorname{rap}\mathscr{X}$ 重合。

我们不知道任何非相干解消子范畴的例子。我们可以如下将解消子范畴的相干性与若干其他条件联系起来。

命题 4.15. 考虑以下三个条件。

(1) 解消子范畴 $\mathscr{X}$ 是相干的。(2) $\mathscr{X}^{\perp}$ 中的每个模都容许一个右 $\mathscr{X}$-逼近。(3) 子范畴 $\mathscr{X}^{\perp}$ 对合冲封闭。(4) 子范畴$\operatorname{rap}\mathscr{X}$ 对满态射的核封闭。

则蕴含关系(4) $\Leftrightarrow$ (1) $\Leftarrow$(2) $\Leftarrow$ (3) 成立。

证明. (1) $\Leftrightarrow$(4)：“仅当”部分由 [21, 命题 23(5)], 得出，而“如果”部分由命题 4.8 证明。

(2) $\Rightarrow$ (1)：设 M 是 $\operatorname{rap}\mathscr{X}$ 中的一个 R-模。由引理 2.8 可得正合列 $0 \to Y \to X \to M \to 0$，其中 $X \in \mathscr{X}$ 且 $Y \in \mathscr{X}^{\perp}$。根据假设，$R$-模 Y 属于 $\operatorname{rap}\mathscr{X}$。因此，由推论 4.9 可知 M 属于 $\mathscr{C}$。

(3) $\Rightarrow$ (2)：设 Y 是 $\mathscr{X}^{\perp}$ 中的一个 R-模。考虑正合列 $0 \to \Omega Y \to F \to Y \to 0$，其中$F \in$加上 R。根据假设，R-模 ΩY 属于 $\mathscr{X}^{\perp}$。因此，由引理 2.8 可知 Y 属于 $\operatorname{rap}\mathscr{X}$。■

推论 命题 4.15 中的蕴含 (4) $\Rightarrow$ (1) 立即得到以下结果。

推论 4.16. 设 $\mathscr{X}$ 是 模 R 的一个解消子范畴。假设 $\mathscr{X}$ 是反变有限或反变无限的。则 $\mathscr{X}$ 是相干的。

我们回顾 Mifune 意义下的条件 **(A)** [19, 定义 3.8]。设 $\mathscr{A}$ 为阿贝尔范畴，$\mathscr{E}$ 为 $\mathscr{A}$的子范畴。

> **(A)** 对于 $X \in \mathscr{E}$的每个对象，都存在 $\mathscr{A}$ 中的正合列 $0 \to X \to Y \to X' \to 0$，使得 X' 属于 $\mathscr{E}$，且 Y 同时属于 $\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{E}^{\perp}$。

定理 4.17. 假设 R 是 *Gorenstein* 的并满足$(\mathbf{ARC})$。设 $\mathscr{X}$ 包含于Cohen–Macaulay R中且满足$(\mathbf{A})$。则 $\mathscr{X}$ 是相干的。

证明。根据命题 4.15，只需证明 $\mathscr{X}^{\perp}$ 对合冲封闭。设 M 是 $\mathscr{X}^{\perp}$中的一个R-模，并取一个 R-模的正合列 $0 \to \Omega M \to F \to M \to 0$，其中 F 是自由模。任取 $\mathscr{X}$中的一个 R-模 X。由于 $\operatorname{Ext}^{\geq 0}_R(X, R) = 0$，可知对所有 $i > 1$，$\operatorname{Ext}^i_R(X, \Omega M) \cong \operatorname{Ext}^{i-1}_R(X, M) = 0$。由于 $\mathscr{X}$ 满足 (A)，存在一个 R-模的正合列 $0 \to X \to Y \to X' \to 0$，其中 $X' \in \mathscr{X}$ 且$Y \in \mathscr{X} \cap \mathscr{X}^{\perp}$。于是 $\operatorname{Ext}^{\geq 0}_R(Y, Y \oplus R) = 0$。由于 R 满足 (ARC)，R-模 Y是自由模。可以看出，$\operatorname{Ext}^1_R(X, \Omega M) \cong \operatorname{Ext}^2_R(X', M) = 0$。因此 ΩM属于 $\mathscr{X}^{\perp}$，证毕。■

应用 上述定理，我们得到以下足以保证 $\mathscr{X}$ 相干的条件 .

推论 4.18. 假设 R 是完全交，且 $\mathscr{X}$ 包含于 $\operatorname{CM} R$中。那么 $\mathscr{X}$ 是相干的。

证明. 若 R 是完全交，则 R 是 Gorenstein 的，并满足（$\mathbf{ARC}$）。由于 $\mathscr{X}$ 包含于 $\operatorname{CM} R$中，由 [12, 推论 4.16] 可知, 每个 R-模 $X \in \mathscr{X}$ 都有一个正合列 $0 \to X \to F \to X' \to 0$，其各项为 R-模，其中 F是自由模，且 X' 属于 $\mathscr{X}$。由于任意自由 R-模都属于 $\mathscr{X} \cap \mathscr{X}^{\perp}$，解消子范畴 $\mathscr{X}$满足条件（$\mathbf{A}$）。现在由定理 4.17 可知，$\mathscr{X}$ 是相干的。■

Acknowledgments

作者谨此感谢导师 Ryo Takahashi 仔细审阅本稿，并提出许多深思熟虑的建议。他还感谢 Kaito Kimura、Shinnosuke Kosaka、Yuki Mifune 和 Yuya Otake 提供宝贵意见。

References

[1] T. Adachi、O. Iyama 和 I. Reiten。 τ-倾斜理论。 *Compos. Math.*，150(3)：415–452，2014。[2] T. Araya。与 AB 环相关的同调维数。 *Beitr. Algebra Geom.*，60(2)：225–231，2019。[3] M. Auslander。相容函子。载于 *Proc. Conf. Categorical Algebra (La Jolla, Calif., 1965)*，第189–231页。Springer-Verlag New York, Inc.，纽约，1966年。[4] M. Auslander 和 M. Bridger。 *Stable module theory*，第94卷（ *Memoirs of the American Mathematical Society*）。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1969年。[5] M. Auslander 和 R.-O. Buchweitz。极大Cohen–Macaulay逼近的同调理论。*Mém. Soc. Math. France (N.S.)* 38 5 37, 1989 1987 ，（）：–。

纪念 Pierre Samuel 的研讨会（奥赛，）。[6] M. Auslander、S. Ding 和 Ø. Solberg。模的提升与弱提升。 *J. Algebra*，156(2)：273–317，1993。[7] M. Auslander 和 I. Reiten。逆变有限子范畴的应用。 *Adv. Math.*，86(1)：111–152，1991。[8] M. Auslander 和 S. O. Smalø。Artin代数上的拟射影模。 *J. Algebra*，66(1)：61–122，1980。[9] L. L. Avramov。无限自由分解。载于 *Six lectures on commutative algebra (Bellaterra, 1996)* 166 *Progr.*，第卷（），*Math.* 1 118 ¨ 1998
第–页。Birkhauser，巴塞尔，。[10] L. L. Avramov 和 R.-O. Buchweitz。完全交上的支撑簇与上同调。 *Invent. Math.*，142 2 285( )：–318，2000。[11] O. Celikbas、H. Dao 和 R. Takahashi。检测有限同调维数的模。 *Kyoto J. Math.* 54 2 295 310, ，（）：–。
2014
[12] H. Dao 和 R. Takahashi。模子范畴的半径。 *Algebra Number Theory*，8(1)：141–172，2014。[13] H. Dao 和 R. Takahashi。解消子范畴与等级相容函数的分类。 *Int. Math. Res. Not. IMRN* 1 119 149, 2015 ，（）：–。

[14] S. Dey、P. Lank 和 R. Takahashi。模范畴的强生成。 *J. Pure Appl. Algebra*，229(10)：论文编号108070，16页，2025年。[15] C. Huneke 和 D. A. Jorgensen。Gorenstein 环上 Ext 消失的对称性。 *Math. Scand.* 93 2 161 184, ，（）：–。
2003
[16] F. Ischebeck。函子 Ext 与 Tor 之间的一种对偶¨关系。 *J. Algebra*，11：510–531，1969年。[17] O. Iyama。极大正交子范畴上的高维 Auslander–Reiten理论。 *Adv. Math.* 210 1 22 50, ，（）：–。
2007
[18] O. Iyama 和 Y. Yoshino。三角范畴中的突变与刚性Cohen–Macaulay模。 *Invent. Math.*，172 1 117( )：–168，2008。[19] Y. Mifune。由分解维数给出的复形层级下界。 *Preprint*， *posted at arXiv:2501.12109*，2025年。[20] R. Takahashi。交换环上的逆变有限解消子范畴。 *Amer. J. Math.*，133(2)：417–436，2011。[21] R. Takahashi。其有限表示模范畴为阿贝尔范畴的解消子范畴。 *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*，359 577：–592，2021。

Graduate School of Mathematics, Nagoya University, Furocho, Chikusaku, Nagoya 464-8602, Japan
Email address: tanigawa.gen.y4@s.mail.nagoya-u.ac.jp