arXiv:2603.07986v1 [math.RT] 9 Mar 2026

与有限群的所有不可约表示相关的向量值不变量

A. K. M. Selim Reza*、Manabu Oura、Masashi Kosuda

摘要。 我们研究了与八面体群相关的复反射群 $\mathfrak{G}$，该群在 Shephard-Todd 分类中被列为第九个群。我们确定了 $\mathfrak{G}$ 的所有不可约表示，并计算了其特征标表。此外，对于每个表示，我们计算了向量值不变量模，并将其与八面体群的基本不变量联系起来。最后，我们推导出了相应不变量环的显式维数公式。

2020 年数学主题分类： 20F55, 20C30, 13A50。

关键词： 反射群、向量值不变量、不变量环。

1 引言

设 G 是 GL($n,\mathbb{C}$) 的一个有限子群。记

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathsf{T}}, \qquad \mathbb{C}[\mathbf{x}] = \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n].$$

群 G 对 $\mathbb{C}[\mathbf{x}]$ 的作用定义为

$$g.f(\mathbf{x}) = f(g\mathbf{x}), \quad g \in G$$

其中 $g\mathbf{x}$ 表示矩阵 g 与列向量 $\mathbf{x}$ 的通常乘积。若多项式 $f \in \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ 满足

$$g \cdot f = f \quad \text{for all } g \in G,$$

等价地，若对所有 $g \in G$，都有 $f(g\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$。所有不变量构成一个子环

$$\mathbb{C}[\mathbf{x}]^G := \{f \in \mathbb{C}[\mathbf{x}] : g \cdot f = f \text{ for all } g \in G\},$$

称为 G 的不变量环。

在 Shephard-Todd 分类的表 II 中列出的、由八面体群导出的八个群里，我们关注第 9 号群。因此，本文中 $\mathfrak{G}$ 表示由以下元素生成的 Shephard-Todd 群 G_9:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

群 $\mathfrak{G}$的阶为 192。由于 $\mathfrak{G}$ 作用于 $\mathbb{C}^2$，我们写成

$$\mathbf{x} = (x, y)^{\mathsf{T}}, \qquad \mathfrak{R} := \mathbb{C}[x, y]^{\mathfrak{G}}.$$

*通讯作者

不变量环 $\mathfrak{R}$ 是一个由两个代数独立的齐次不变量生成的多项式代数，其次数分别为 8 和 24。生成元的一种方便选择是

$$\theta := x^8 + 14x^4y^4 + y^8, \qquad \varphi := x^{24} + 759x^{16}y^8 + 2576x^{12}y^{12} + 759x^8y^{16} + y^{24}.$$

由于 $\mathfrak{G}$ 与八面体群密切相关，我们还记录下 Blichfeldt [5]的工作中出现的经典八面体不变量：

$$\Gamma := -x^5y + xy^5, \qquad \theta := x^8 + 14x^4y^4 + y^8, \qquad \Delta := x^{12} - 33x^8y^4 - 33x^4y^8 + y^{12}.$$

用这些术语表示，

$$\varphi = \Delta^2 + 66\Gamma^4.$$

多项式 θ 和 φ 在编码理论中也有自然的解释：它们分别是扩展二元汉明码 H_8 和扩展二元戈莱码 G_{24}的齐次重量枚举式 [8]。根据 Gleason 定理 [3], ，它们是 $\mathfrak{G}$-不变量，并生成 $\mathfrak{R}$。因此， $\mathfrak{R}$ 的 Hilbert–Poincar´e 级数为

$$\frac{1}{(1-t^8)(1-t^{24})}.$$

阶为 96 的（Shephard–Todd）群的不可约表示的构造始于 [4], ，其中分析了其中心化子环的结构及相应的表示。随后， [6]计算了某些表示的向量值不变量。在本文中，我们将这一研究方向扩展至 $\mathfrak{G} = G_9$ ，并确定 $\mathfrak{G}$的所有不可约表示，以及与之相关的向量值不变量。

本文结构如下。第 2 节确定 $\mathfrak{G}$ 的所有不可约表示。第 3 节介绍向量值不变量的预备知识。第 4 节计算每个表示对应的向量值不变量，并建立不同次数的不变量之间的关系，其中基本不变量 Γ 和 Δ 发挥着核心作用。所有计算均使用 SageMath [11] 完成。

2 $\mathfrak{G}$ 的不可约表示

由于 $\mathfrak{G}$ 有 32 个共轭类，因此在等价意义下，它有 32 个不可约复表示。设 (ρ_i, V_i) $(i = 1, .., 32)$ 是一组完整的代表元。按照惯例，

$$|\mathfrak{G}| = \sum_{i=1}^{32} (\dim \rho_i)^2, \qquad |\mathfrak{G}| = 192.$$

此外，不可约表示的次数应当整除 $\mathfrak{G}$ 的大小。由于 $|\mathfrak{G}| = 3 \times 2^6$；因此可能的次数为

$$\dim \rho \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}.$$

我们首先确定 $\mathfrak{G}$ 的线性特征（等价地说，其阿贝尔化），由此得到恰好 8 个一维不可约表示。接下来，我们构造 8 个两两不等价的 2 阶不可约表示和 8 个两两不等价的 3 阶不可约表示。因此，我们已经列出了 $8 + 8 + 8 = 24$ 个不可约表示，所以还剩下 $32 - 24 = 8$ 个

不可约表示，记作 σ_1、.....、 σ_8。从平方和恒等式中减去已知的贡献，得到

$$80 = 192 - \left(8\cdot 1^2 + 8\cdot 2^2 + 8\cdot 3^2\right) = \sum_{j=1}^{8} (\dim \sigma_j)^2.$$

由于没有更多的一维不可约表示，因此 $\dim\ \sigma_j \in \{2,3,4,6,8,12\}$。事实上，$\dim\ \sigma_j \neq 12$ 且 $\dim\ \sigma_j \neq 8$, 因为 $12^2 > 80$ 且 $8^2+7\cdot 2^2 = 92 > 80$; 类似地，$\dim\ \sigma_j \neq 6$, 因为 $6^2 + 7\cdot 2^2 = 64$ 会迫使剩下的 44 成为 $\{4,9,16\}$中的七个平方数之和，这是不可能的。因此，对于所有 j，都有 $\dim \sigma_j \in \{2,3,4\}$。

令 a、b、c 分别表示次数为 2、3、4 的 σ_j 的数目。于是

$$a+b+c = 8, \qquad 4a+9b+16c = 80.$$

从第二个方程中减去 $4(a+b+c) = 32$，得到

$$5b + 12c = 48.$$

模 5 化简得到 $2c \equiv 3$ (模 5)，从而 $c \equiv 4$ (模 5)。由于 $0 \le c \le 8$，我们必须有$c = 4$，于是 $5b = 0$, 所以 $b = 0$ 和 $a = 4$。因此，剩下的不可约表示由四个次数为 2 的表示和四个次数为 4 的表示组成。

总之， $\mathfrak{G}$有 8 个一维、12 个二维、8 个三维和 4 个四维不可约表示。我们明确构造了它们的所有代表元。

一维表示

一维表示是一个同态 $\rho:\ \mathfrak{G} \to \mathbb{C}^\times$; 由于 $\mathfrak{G}$ 是有限的，其像由单位根组成。记

$$\rho(T) = t, \qquad \rho(D) = d \qquad (t, d \in \mathbb{C}^\times),$$

定义关系 $T^2 = I$ 和 $D^4 = I$ 迫使

$$t^2 = 1 \ \Rightarrow\ t = \pm 1, \qquad d^4 = 1 \ \Rightarrow\ d \in \{1, i, -1, -i\}.$$

这些选择给出 $2\cdot 4 = 8$ 个互不相同的一维表示。列举如下:

$\mathbf{i}$	$\rho_i(T)$	$\rho_i(D)$
1	1	1
2	1	-1
3	1	i
4	1	$-i$
5	-1	1
6	-1	-1
7	-1	i
8	-1	$-i$

表 1: $\mathfrak{G}$的所有一维表示

这里 ρ_1 是平凡表示， ρ_6 是将两个生成元都映到–1的表示，而 ρ_7 与行列式表示一致，因为$\det(T) = -1$ 且$\det(D) = i$。此外，其余表示可以用 ρ_6 和 ρ_7来表示:

$$\rho_2 = \rho_7^{\otimes 2}, \quad \rho_3 = \rho_6 \otimes \rho_7^{\otimes 3}, \quad \rho_4 = \rho_6 \otimes \rho_7, \quad \rho_5 = \rho_6 \otimes \rho_7^{\otimes 2}, \quad \rho_8 = \rho_7^{\otimes 3}.$$

二维表示

设(ρ_9, V_9)为自然表示，即嵌入 $\mathfrak{G} \hookrightarrow \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$，其中 T和 D如第1节所述。该表示是不可约的：由于 $\rho_9(D)$具有不同的特征值，任一1维的 $\rho_9(D)$-稳定子空间都由一个特征向量张成，并且可以验证没有这样的直线被 $\rho_9(T)$保持。

将 ρ_9 与 8 个一维表示进行张量化，可得到 8 个维数为 2 的忠实不可约表示：

$$\rho_{8+k} := \rho_k \otimes \rho_9 \qquad (k = 1, \dots, 8).$$

等价地，对于 $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ 和 $\eta \in \{1, i, -1, -i\}$，定义

$$\psi_{\varepsilon,\eta}(T) = \varepsilon\, T, \qquad \psi_{\varepsilon,\eta}(D) = \eta\, D.$$

将这些表示列为 ρ_9、…、ρ_{16}，即可得到表2。

i	(ε, η)	ρ_i	$\rho_i(T)$	$\rho_i(D)$
9	$(+1,\ 1)$	$\psi_{+1,1}$	T	$\mathrm{diag}(1,\ i)$
10	$(+1,\ i)$	$\psi_{+1,i}$	T	$\mathrm{diag}(i,\ -1)$
11	$(+1,\ -1)$	$\psi_{+1,-1}$	T	$\mathrm{diag}(-1,\ -i)$
12	$(+1,\ -i)$	$\psi_{+1,-i}$	T	$\mathrm{diag}(-i,\ 1)$
13	$(-1,\ 1)$	$\psi_{-1,1}$	$-T$	$\mathrm{diag}(1,\ i)$
14	$(-1,\ i)$	$\psi_{-1,i}$	$-T$	$\mathrm{diag}(i,\ -1)$
15	$(-1,\ -1)$	$\psi_{-1,-1}$	$-T$	$\mathrm{diag}(-1,\ -i)$
16	$(-1,\ -i)$	$\psi_{-1,-i}$	$-T$	$\mathrm{diag}(-i,\ 1)$

表2：忠实二维表示

其余四个二维不可约表示将在下文构造，作为适当张量积的成分。

三维表示

根据 [4],，我们在 $\rho_9 \otimes \rho_9$ 中实现一个三维不可约表示。令 $\langle \alpha_1,\ \alpha_2 \rangle$为 V_9的一组基。则

$$\langle \alpha_1 \otimes \alpha_1,\, \alpha_1 \otimes \alpha_2,\, \alpha_2 \otimes \alpha_1,\, \alpha_2 \otimes \alpha_2 \rangle$$

是 $V_9 \otimes V_9$ 的一组基，并且相对于这组基

$$\rho_9^{\otimes 2}(T) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \rho_9^{\otimes 2}(D) = \mathrm{diag}(1, i, i, -1).$$

考虑这些向量

$$\alpha_1' = \alpha_1 \otimes \alpha_1, \quad \alpha_2' = \alpha_1 \otimes \alpha_2 + \alpha_2 \otimes \alpha_1, \quad \alpha_3' = \alpha_2 \otimes \alpha_2.$$

它们张成的空间是 D-不变的，直接验证可知它也是 T-不变的。因此，它给出一个三维表示（ρ_{21}, V_{21}）。相对于（α'_1, α'_2, α'_3），可得

$$\rho_{21}(T) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \rho_{21}(D) = \mathrm{diag}(1, i, -1).$$

由于 $\rho_{21}(D)$ 有三个不同的特征值，任意非零真 D-不变子空间都由 $\{\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3\}$ 的一个非空真子集张成；检查 $\rho_{21}(T)$ 的各列可知，不存在这样的 T-不变子空间。因此 ρ_{21} 不可约。

与一维表示张量化后，可得到其余的三维不可约表示:

$$\rho_{21+k} := \rho_{k+1} \otimes \rho_{21} \qquad (k = 1, \ldots, 7),$$

i.e.

$$\rho_{22} = \rho_2 \otimes \rho_{21},\ \rho_{23} = \rho_3 \otimes \rho_{21},\ \ldots,\ \rho_{28} = \rho_8 \otimes \rho_{21}.$$

四维表示

接下来，我们从 $\rho_9 \otimes \rho_{21}$ 中提取一个四维不可约子表示。相对于 $V_9 \otimes V_{21}$ 的字典序基 $\{\alpha_i \otimes \alpha'_j \mid i = 1, 2;\ j = 1,2,3\}$，有

$$(\rho_9 \otimes \rho_{21})(T) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (\rho_9 \otimes \rho_{21})(D) = \mathrm{diag}(1, i, -1, i, -1, -i).$$

定义

$$\alpha''_1 = \alpha_1 \otimes \alpha'_1, \quad \alpha''_2 = \alpha_1 \otimes \alpha'_2 + \alpha_2 \otimes \alpha'_1, \quad \alpha''_3 = \alpha_1 \otimes \alpha'_3 + \alpha_2 \otimes \alpha'_2, \quad \alpha''_4 = \alpha_2 \otimes \alpha'_3.$$

$\{\alpha''_1, \alpha''_2, \alpha''_3, \alpha''_4\}$ 的张成空间是 D-不变的，并且容易验证它也是 T-不变的。由此得到一个四维表示（ρ_{29}, V_{29}），其矩阵为

$$\rho_{29}(T) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \rho_{29}(D) = \mathrm{diag}(1, i, -1, -i).$$

与三维情形一样，$\rho_{29}(D)$ 的特征值互不相同，因此每个 D-稳定子空间都是 D-特征子空间的直和。考察基向量在 $\rho_{29}(T)$ 作用下的像可知，不存在非平凡真 D-稳定子空间同时也是 T-稳定的。因此，ρ_{29} 是不可约的。

将 ρ_{29} 与一维表示张量化，会得到四个不同的四维不可约表示（其余扭曲彼此等价；这一等价关系已在 SageMath 中验证）：

$$\rho_{30} := \rho_2 \otimes \rho_{29}, \qquad \rho_{31} := \rho_3 \otimes \rho_{29}, \qquad \rho_{32} := \rho_4 \otimes \rho_{29}.$$

其余二维不可约表示

Fin此外，我们确定了 $(\rho_9 \otimes \rho_{29},\, V_9 \otimes V_{29})$ 中其余的不可约表示。令

$$\left\{\alpha_i \otimes \alpha_j'' \;\middle|\; i=1,2,\; j=1,2,3,4\right\}$$

$V_9 \otimes V_{29}$的一组按字典序排列的基。相对于这组有序基， T 和 D 的表示矩阵为:

$$(\rho_9 \otimes \rho_{29})(T) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 & 1 & -3 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & -1 & -3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 & -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(\rho_9 \otimes \rho_{29})(D) = \mathrm{diag}(1, i, -1, -i, i, i, -1, -i, 1).$$

Set

$$\alpha_1''' = \alpha_1 \otimes \alpha_1'' + \alpha_2 \otimes \alpha_4'', \qquad \alpha_2''' = \alpha_1 \otimes \alpha_3'' + \alpha_2 \otimes \alpha_2''.$$

那么， $\langle \alpha_1''',\ \alpha_2''' \rangle$ 在 T 和 D的作用下均保持不变，因此给出一个二维表示（ρ_{17}， V_{17}），其中

$$\rho_{17}(T) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \rho_{17}(D) = \mathrm{diag}(1, -1).$$

由于 $\rho_{17}(D)$有两个不同的特征值，且两个特征线都不在 T作用下保持不变，因此 ρ_{17} 是不可约的。将 ρ_{17} 与一维表示进行张量化，便得到其余的二维不可约表示（同样，关于扭曲之间所述的等价性已在 SageMath 中验证）。

$$\rho_{18} := \rho_2 \otimes \rho_{17}, \qquad \rho_{19} := \rho_3 \otimes \rho_{17}, \qquad \rho_{20} := \rho_4 \otimes \rho_{17}.$$

至此，我们构造了 32 个不可约表示:

$$\underbrace{\rho_1, \ldots, \rho_8}_{\text{1-dim}},\quad \underbrace{\rho_9, \ldots, \rho_{20}}_{\text{2-dim}},\quad \underbrace{\rho_{21}, \ldots, \rho_{28}}_{\text{3-dim}},\quad \underbrace{\rho_{29}, \ldots, \rho_{32}}_{\text{4-dim}}.$$

由于其数量与共轭类的数量相同，这构成了 $\mathfrak{G}$的一组完备不可约表示。相应的特征标表见附录（含 $\zeta = e^{i\pi/4}$）。为展示该表，我们将共轭类分为五个自然族，分别由以下形式的元素代表

$$\zeta^k I, \qquad \zeta^k D^2, \qquad \zeta^k D, \qquad \zeta^k T, \qquad \zeta^k T D.$$

因此，我们重新排列特征标表的列，使共轭类按以下顺序出现

$$\{\zeta^k I\}_{k=0}^{7},\quad \{\zeta^k D^2\}_{k=0}^{3},\quad \{\zeta^k D\}_{k=0}^{7},\quad \{\zeta^k T\}_{k=0}^{3},\quad \{\zeta^k T D\}_{k=0}^{7}.$$

对于每个类，我们记录一个代表元，以及该代表元的阶和共轭类的大小。

3 向量值不变量

设 G 是 $GL(n,\ \mathbb{C})$ 的有限子群。令 $V = \mathbb{C}^n$ 的坐标为 $\mathbf{x} = (x_1,\ \ldots,\ x_n)$，并令 $S = \mathbb{C}[\mathbf{x}]$ 为坐标环。G 在 V 上的自然作用通过代换诱导出 S 上的作用：

$$\sigma \cdot f(\mathbf{x}) \ := \ f(\sigma\mathbf{x}), \qquad f \in S,\ \sigma \in G.$$

按照这一约定，有 $(\sigma\tau) \cdot f = \tau \cdot (\sigma \cdot f)$。

固定一个复表示 $\rho\colon\ G \to GL(m,\mathbb{C})$。我们将列向量 $F(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}) \ldots, f_m(\mathbf{x}))^{\mathsf{T}} \in S^m$ 视为一个 m 元多项式组。G 在 S 上的作用逐分量延拓为在 S^m 上的作用，定义如下：

$$\sigma \cdot F(\mathbf{x}) \ := \ \begin{pmatrix} \sigma \cdot f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \sigma \cdot f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\sigma\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\sigma\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

定义 1. ρ-协变式（或称 ρ 的向量值不变量）是满足下式的向量 $F \in S^m$

$$\sigma \cdot F \ = \ \rho(\sigma)\, F \qquad \textit{for all } \sigma \in G, \tag{1}$$

其中 $\rho(\sigma)F$ 表示 $\mathbb{C}^m$ 中通常的矩阵乘法（参见 *[1]*）。

等价地，(1) 可以写成

$$F(\sigma\mathbf{x}) \ = \ \rho(\sigma)\, F(\mathbf{x}) \qquad (\sigma \in G).$$

所有 ρ-协变式的集合是一个分次 S^G-模：

$$M(\rho) \ := \ \big\{\, F \in S^m \ \big|\ F(\sigma\mathbf{x}) = \rho(\sigma)F(\mathbf{x}) \text{ for all } \sigma \in G \,\big\}.$$

若 $M(\rho)_k$ 表示总次数为 k 的齐次协变式子空间，则每个 $M(\rho)_k$ 在 $\mathbb{C}$ 上都是有限维的。分次维数由希尔伯特级数编码：

$$\Phi_{M(\rho)}(t) \ := \ \sum_{k \geq 0} \dim_{\mathbb{C}}\big(M(\rho)_k\big)\, t^k.$$

希尔伯特级数由等变 Molien 公式给出（见 [2, 9]）：

$$\Phi_{M(\rho)}(t) \ = \ \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \frac{\operatorname{tr}\big(\rho(\sigma^{-1})\big)}{\det\big(I - t\,\sigma\big)}. \tag{2}$$

这里，$\det(I - t\,\sigma)$ 是在 V 上的 G 的自然 n 维表示中计算的，而分子中的迹则是在表示 ρ 中取的。

在我们的设定中 $n = 2$，因此 (2) 中的分母由 $\mathfrak{G}$ 在 (x, y) 上的自然 2×2 作用计算得出。此外，我们有 $\mathfrak{R} = S^{\mathfrak{G}} = \mathbb{C}[\theta, \phi]$，其中 $\deg\ \theta = 8$ 且 $\deg\ \phi = 24$。因此，每个 $\Phi_{M(\rho)}(t)$ 都是分母为

$$(1 - t^8)(1 - t^{24}).$$

4 结果

本节中，我们考虑一个带有待定系数的一般函数 $F(\mathbf{x})$，从而显式计算所有向量值不变量。随后，对于第 2 节讨论的每个表示 $\rho_i (i = 1, 2, \ldots 32)$，我们施加方程 (1) 给出的条件。求解所得方程组后，得到一个包含于 $M(\rho_i)$ 中的自由 $\mathfrak{R}$-模。根据这些向量值不变量的显式描述，我们推导出各个表示所满足的关系，并在下列定理中陈述。

定理 1. 八个一维表示由数对 (a, b) 索引，其中 $a \in \{0, 1, 2, 3\}$ 和 $b \in \{0, 1\}$，且模 $M(\rho_{a,b})$ 是一个秩为 1 的自由 $\mathfrak{R}$-模，其生成元为 $\Gamma^a \Delta^b$:

$$M(\rho_{a,b}) = \mathfrak{R}\, \Gamma^a \Delta^b.$$

特别地，对于每个满足 $i = 1$ 的 ρ_i，2、3、.....、8，生成元为

$$1, \quad \Gamma^2, \quad \Gamma, \quad \Gamma^3, \quad \Delta, \quad \Gamma^2\Delta, \quad \Gamma\Delta, \quad \Gamma^3\Delta$$

相应的维数公式具有如下形式

$$\frac{t^k}{(1 - t^8)(1 - t^{24})}, \qquad k \in \{0, 12, 6, 18, 12, 24, 18, 30\}.$$

定理 2. 设 ρ_i $(9 \leq i \leq 20)$ 是一个二维不可约表示。对于每个$i = 9$，.....，20，分次 $\mathfrak{R}$-模 $M(\rho_i)$ 是秩为 2 的自由模。此外，存在齐次元素 $\mathbf{u}_i^{(1)}$、$\mathbf{u}_i^{(2)} \in M(\rho_i)$ 使得

$$M(\rho_i) = \mathfrak{R}\, \mathbf{u}_i^{(1)} \oplus \mathfrak{R}\, \mathbf{u}_i^{(2)}.$$

对于 *[10]*，中如 $(\mathbf{u}_i^{(1)}, \mathbf{u}_i^{(2)})$ 所示的一组齐次生成元，存在 $c_i \in \mathbb{C}^\times$ 和 $k_i \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\det\big([\mathbf{u}_i^{(1)}\ \mathbf{u}_i^{(2)}]\big) = c_i\, \Delta\, \Gamma^{k_i}.$$

(c_i, k_i) 的对应值以及次数$\deg(\mathbf{u}_i^{(1)})$、$\deg(\mathbf{u}_i^{(2)})$ 列于表*3*。特别地，

$$\deg(\mathbf{u}_i^{(1)}) + \deg(\mathbf{u}_i^{(2)}) = \deg(\Delta) + k_i \deg(\Gamma) = 12 + 6k_i.$$

ρ_i	c_i	k_i	u的次数 (1) i	u的次数 (2) i	维数公式（级数）
9	-1	1	1	17	$t + t^9 + 2t^{17} + 3t^{25} + 3t^{33} + \dots$
10	9	3	7	23	$t^7 + t^{15} + 2t^{23} + 3t^{31} + 3t^{39} + \dots$
11	-1	5	13	29	$t^{13} + t^{21} + 2t^{29} + 3t^{37} + 3t^{45} + \dots$
12	176	3	11	19	$t^{11} + 2t^{19} + 2t^{27} + 3t^{35} + 4t^{43} + \dots$
13	4	1	5	13	$t^5 + 2t^{13} + 2t^{21} + 3t^{29} + 4t^{37} + \dots$
14	6	3	11	19	$t^{11} + 2t^{19} + 2t^{27} + 3t^{35} + 4t^{43} + \dots$
15	-1	5	17	25	$t^{17} + 2t^{25} + 2t^{33} + 3t^{41} + 4t^{49} + \dots$
16	1773	3	7	23	$t^7 + t^{15} + 2t^{23} + 3t^{31} + 3t^{39} + \dots$
17	-411	2	8	16	$t^8 + 2t^{16} + 2t^{24} + 3t^{32} + 4t^{40} + \dots$
18	-10	4	10	26	$t^{10} + t^{18} + 2t^{26} + 3t^{34} + 3t^{42} + \dots$
19	1	2	4	20	$t^4 + t^{12} + 2t^{20} + 3t^{28} + 3t^{36} + \dots$
20	-1	4	14	22	$t^{14} + 2t^{22} + 2t^{30} + 3t^{38} + 4t^{46} + \dots$

表3：c_i， k_i的常数及 ρ_i $(9 \le i \le 20)$ 的维数公式。

定理3. 对每个 $i \in \{21, \dots, 28\}$，令 $M(\rho_i) \subset \mathbb{C}[x,y]^3$ 为给出3维不可约表示 ρ_i的协变模，由显式齐次三元组生成

$$\mathbf{v}_i^{(1)},\ \mathbf{v}_i^{(2)},\ \mathbf{v}_i^{(3)}$$

列于 *[10]*中。于是：

1. 每个 $M(\rho_i)$ 都是一个自由的 $\mathfrak{R}$–模，其秩为 3，齐次基为 $\{\mathbf{v}_i^{(1)}$、$\mathbf{v}_i^{(2)}$、$\mathbf{v}_i^{(3)}\}$。记$\deg \mathbf{v}_i^{(j)}$ 为其各分量的共同总次数，则这些次数构成公差为 8 的等差数列：

$$\deg \mathbf{v}_i^{(1)} = d_i, \qquad \deg \mathbf{v}_i^{(2)} = d_i + 8, \qquad \deg \mathbf{v}_i^{(3)} = d_i + 16,$$

其中

i	21	22	23	24	25	26	27	28
d_i	2	6	8	4	6	10	12	8

2. $M(\rho_i)$ 的分次希尔伯特–庞加莱级数为

$$H_{M(\rho_i)}(t) = \frac{t^{d_i} + t^{d_i+8} + t^{d_i+16}}{(1-t^8)(1-t^{24})}.$$

等价地，对于每个次数 $d \ge d_i$，齐次分量 $(M(\rho_i))_d$ 由以下向量张成

$$\theta^\alpha \varphi^\beta \, \mathbf{v}_{i,j}^{(k)}, \qquad d = \deg \mathbf{v}_i^{(j)} + 8\alpha + 24\beta.$$

3. 令

$$D_i := \det[\mathbf{v}_{i,1}\ \mathbf{v}_{i,2}\ \mathbf{v}_{i,3}]$$

（列为$\mathbf{v}_{i,1}$、$\mathbf{v}_{i,2}$、$\mathbf{v}_{i,3}$的矩阵的行列式）。然后

$$D_i \ = \ c_i \, \Delta^{e_i} \, \Gamma^{k_i} \qquad (c_i \in \mathbb{C}^\times,\ e_i \in \{1,2\},\ k_i \in \mathbb{Z}),$$

其中（c_i、 e_i、 k_i）见表*4*。特别地，

$$\deg D_i = \deg(\mathbf{v}_{i,1}) + \deg(\mathbf{v}_{i,2}) + \deg(\mathbf{v}_{i,3}) = 12e_i + 6k_i.$$

ρ_i	c_i	e_i	k_i	维数公式（级数）
21	-2	1	3	$t^2 + 2t^{10} + 3t^{18} + 4t^{26} + 5t^{34} + \dots$
22	4	1	5	$t^6 + 2t^{14} + 3t^{22} + 4t^{30} + 5t^{38} + \dots$
23	-67	1	6	$t^8 + 2t^{16} + 3t^{24} + 4t^{32} + 5t^{40} + \dots$
24	1600	1	4	$t^4 + 2t^{12} + 3t^{20} + 4t^{28} + 5t^{36} + \dots$
25	-19228	2	3	$t^6 + 2t^{14} + 3t^{22} + 4t^{30} + 5t^{38} + \dots$
26	2580	2	5	$t^{10} + 2t^{18} + 3t^{26} + 4t^{34} + 5t^{42} + \dots$
27	80	2	6	$t^{12} + 2t^{20} + 3t^{28} + 4t^{36} + 5t^{44} + \dots$
28	-894	2	4	$t^8 + 2t^{16} + 3t^{24} + 4t^{32} + 5t^{40} + \dots$

表4：c_i、 e_i、 k_i的常数及 ρ_i $(21 \le i \le 28)$的维数公式。

4. 令 τ表示 $\mathbb{C}[x,y]$ 上的对合，其定义为（x， y）$\mapsto$（y， x），并将其逐分量扩展到 $\mathbb{C}[x,y]^3$。于是，每个齐次生成元$\mathbf{v}_i^{(j)}$ 的三个分量之间以一种统一的方式τ 相关：

- 对于 $i \in \{21, 22, 25, 26\}$，每个齐次生成元都可以写成以下形式

$$\mathbf{v}_i^{(j)}(x,y) = \big(f_i^{(j)}(x,y),\ g_i^{(j)}(x,y),\ f_i^{(j)}(y,x)\big)^{\mathsf{T}},$$

  其中 $f_i^{(j)}$、 $g_i^{(j)} \in \mathbb{C}[x,y]$ 是齐次的，而 $g_i^{(j)}$ 是对称的，即 $g_i^{(j)}$（y， x）$=g_i^{(j)}$（x， y）。

- 对于 $i \in \{23, 24, 27, 28\}$，每个齐次生成元都可以写成以下形式

$$\mathbf{v}_i^{(j)}(x,y) = \big(f_i^{(j)}(x,y),\ g_i^{(j)}(x,y),\ -f_i^{(j)}(y,x)\big)^{\mathsf{T}},$$

  where $g_i^{(j)}$ *is skew–symmetric, i.e.* $g_i^{(j)}(y,x) = -\,g_i^{(j)}(x,y)$.

定理4。对于每个 $i \in \{29, 30, 31, 32\}$，令 $M(\rho_i) \subset \mathbb{C}[x,y]^4$ 为赋予 ρ_i的 *4* 维不可约表示的协变模，由以下显式齐次 *4* 元组生成

$$\mathbf{w}_i^{(1)},\ \mathbf{w}_i^{(2)},\ \mathbf{w}_i^{(3)},\ \mathbf{w}_i^{(4)}$$

见 *[10]*。则：

1. 每个 $M(\rho_i)$ 都是一个秩为 4 的自由 $\mathfrak{R}$–模，其齐次基为 $\{\mathbf{w}_i^{(1)}$、$\mathbf{w}_i^{(2)}$、$\mathbf{w}_i^{(3)}$、$\mathbf{w}_i^{(4)}\}$。设 $\deg\mathbf{w}_i^{(k)}$ 表示其各分量的共同总次数，则其次数和维数公式如下：

ρ_i	$\deg(\mathbf{w}_i^{(1)},\ \mathbf{w}_i^{(2)},\ \mathbf{w}_i^{(3)},\ \mathbf{w}_i^{(4)})$	维数公式（级数）
29	(3, 11, 19, 27)	$t^3+2t^{11}+3t^{19}+5t^{27}+6t^{35}+\dots$
30	(7, 15, 15, 23)	$t^7+3t^{15}+4t^{23}+5t^{31}+7t^{39}+\dots$
31	(9, 9, 17, 25)	$2t^9+3t^{17}+4t^{25}+6t^{33}+7t^{41}+\dots$
32	(5, 13, 21, 21)	$t^5+2t^{13}+4t^{21}+5t^{29}+6t^{37}+\dots$

表 5： ρ_i ($29 \le i \le 32$) 的维数公式。

2. 设 $J := \Delta\,\Gamma^3$ （因此 次数 $J = 30$）。对于每个 i，设

$$D_i := \det[\mathbf{w}_i^{(1)}, \mathbf{w}_i^{(2)}, \mathbf{w}_i^{(3)}, \mathbf{w}_i^{(4)}],$$

以显示顺序排列的列向量 $\mathbf{w}_i^{(1)}, ,\dots, \mathbf{w}_i^{(4)}$ 构成的 4×4 矩阵的行列式。则

$$D_i \;=\; c_i\, J^2 \;=\; c_i\, \Delta^2\, \Gamma^6$$

with

$$c_{29} = 3276, \qquad c_{30} = -11780, \qquad c_{31} = 344960, \qquad c_{32} = 437400.$$

特别地，

$$\deg D_i = \deg(\mathbf{w}_i^{(1)}) + \deg(\mathbf{w}_i^{(2)}) + \deg(\mathbf{w}_i^{(3)}) + \deg(\mathbf{w}_i^{(4)}) = 60.$$

3. 设 τ 表示作用于 $\mathbb{C}[x,y]$ 上的对合，其定义为 $(x,y) \mapsto (y,x)$，并将其逐分量扩展到 $\mathbb{C}[x,y]^4$。则每个齐次生成元 $\mathbf{w}_i^{(k)}$ 的分量之间以统一的方式满足以下关系：τ

- 对于 $i = 29,30$，每个齐次生成元都可以写成以下形式

$$\mathbf{w}_i^{(k)}(x,y) = \big(f_i^{(k)}(x,y),\ g_i^{(k)}(x,y),\ g_i^{(k)}(y,x),\ f_i^{(k)}(y,x)\big)^{\mathsf{T}}$$

  其中 $f_i^{(k)}, g_i^{(k)} \in \mathbb{C}[x,y]$ 为适当的齐次多项式。

- 对于 $i = 31,\ 32$，每个齐次生成元都可以写成如下形式

$$\mathbf{w}_i^{(k)}(x,y) = \big(f_i^{(k)}(x,y),\ g_i^{(k)}(x,y),\ -g_i^{(k)}(y,x),\ -f_i^{(k)}(y,x)\big)^{\mathsf{T}}.$$

致谢。第一作者部分得到日本文部科学省（MEXT）经费的资助，第二作者和第三作者分别得到 JSPS KAKENHI 资助项目编号 24K06827 和 24K06644 的支持。

参考文献

[1] Freitag, E.，关于 Siegel 模群的向量值 theta 函数的变换形式体系，《印度数学会杂志》（新辑）52（1987），185–207。[2] Gatermann, K.，半不变量、等变不变量与算法，《工程、通信与计算中的应用代数》7（1996），105–124。[3] Gleason, A. M.，自对偶码的权重多项式与 MacWilliams 恒等式，《国际数学家大会论文集》3（1970），211–215。[4] Kosuda, M.，Oura, M.，阶为 96 的本原酉反射群的中心化子代数，《东京数学杂志》39（2016），第2期，469–482。[5] Miller, G. A.，Blichfeldt, H. F.，Dickson, L. E.，《有限群理论与应用》，约翰·威立父子出版公司，1916。[6] Reza, A.K.M. Selim，Oura, M.，Kosuda, M. 与 Nagaoka, S.，有限复反射群的向量值不变量计算，arXiv:2505.07217 [math.RA], 2025 （v2, 2025年8月21日）。[7] Shephard, G. C.，Todd, J. A.，有限酉反射群，《加拿大数学杂志》6（1954），274–304。[8] Sloane, N. J. A.，纠错码与不变量理论：十九世纪技术的新应用，《美国数学月刊》84（1977），第2期，82–107。[9] Worfolk, P. A.，等变向量场的零点：不变量方法的算法，《符号计算杂志》17（1994），487–511。[10]Reza, A. K. M. Selim，阶为 192 的群的向量值不变量，Google Sites https://sites.google.com/math.kuet.ac.bd/selim/group-of-order-192（2026年1月15日访问）。[11] Sage 开发者，“Sagemath，Sage 数学软件系统（版本 9.5）”，（2022），可于以下网址获取：http://www.sagemath.org。库尔纳工程与技术大学数学系，库尔纳-9203，孟加拉国，以及金泽大学自然科学与技术研究生院，石川县 920-1192，日本电子邮件地址：selim 1992@math.kuet.ac.bd 金泽大学科学与工程研究所数学与物理学院，角间町，石川县 920-1192，日本电子邮件地址：oura@se.kanazawa-u.ac.jp 山梨大学工学部，400-8511，日本电子邮件地址：mkosuda@yamanashi.ac.jp

-

	$\mathfrak{C}_{01}$	$\mathfrak{C}_{02}$	$\mathfrak{C}_{03}$	$\mathfrak{C}_{04}$	$\mathfrak{C}_{05}$	$\mathfrak{C}_{06}$	$\mathfrak{C}_{07}$	$\mathfrak{C}_{08}$	$\mathfrak{C}_{09}$	$\mathfrak{C}_{10}$	$\mathfrak{C}_{11}$	$\mathfrak{C}_{12}$	$\mathfrak{C}_{13}$	$\mathfrak{C}_{14}$	$\mathfrak{C}_{15}$	$\mathfrak{C}_{16}$
Rep.	I	ζI	$\zeta^2 I$	$\zeta^3 I$	$\zeta^4 I$	$\zeta^5 I$	$\zeta^6 I$	$\zeta^7 I$	D^2	ζD^2	$\zeta^2 D^2$	$\zeta^3 D^2$	D	ζD	$\zeta^2 D$	$\zeta^3 D$
ord	1	8	4	8	2	8	4	8	2	8	4	8	4	8	4	8
$\lvert\mathcal{C}\rvert$	1	1	1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6	6	6	6
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
χ_3	1	$-\zeta^2$	-1	ζ^2	1	$-\zeta^2$	-1	ζ^2	-1	ζ^2	1	$-\zeta^2$	ζ^2	1	$-\zeta^2$	-1
χ_4	1	ζ^2	-1	$-\zeta^2$	1	ζ^2	-1	$-\zeta^2$	-1	$-\zeta^2$	1	ζ^2	$-\zeta^2$	1	ζ^2	-1
χ_5	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
χ_6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
χ_7	1	ζ^2	-1	$-\zeta^2$	1	ζ^2	-1	$-\zeta^2$	-1	$-\zeta^2$	1	ζ^2	ζ^2	-1	$-\zeta^2$	1
χ_8	1	$-\zeta^2$	-1	ζ^2	1	$-\zeta^2$	-1	ζ^2	-1	ζ^2	1	$-\zeta^2$	$-\zeta^2$	-1	ζ^2	1
χ_9	2	2ζ	$2\zeta^2$	$2\zeta^3$	-2	-2ζ	$-2\zeta^2$	$-2\zeta^3$	0	0	0	0	ζ^2+1	$\zeta^3+\zeta$	ζ^2-1	$\zeta^3-\zeta$
χ_{10}	2	$-2\zeta^3$	$-2\zeta^2$	-2ζ	-2	$2\zeta^3$	$2\zeta^2$	2ζ	0	0	0	0	ζ^2-1	$\zeta^3+\zeta$	ζ^2+1	$-\zeta^3+\zeta$
χ_{11}	2	-2ζ	$2\zeta^2$	$-2\zeta^3$	-2	2ζ	$-2\zeta^2$	$2\zeta^3$	0	0	0	0	$-\zeta^2-1$	$\zeta^3+\zeta$	$-\zeta^2+1$	$\zeta^3-\zeta$
χ_{12}	2	$2\zeta^3$	$-2\zeta^2$	2ζ	-2	$-2\zeta^3$	$2\zeta^2$	-2ζ	0	0	0	0	$-\zeta^2+1$	$\zeta^3+\zeta$	$-\zeta^2-1$	$-\zeta^3+\zeta$
χ_{13}	2	-2ζ	$2\zeta^2$	$-2\zeta^3$	-2	2ζ	$-2\zeta^2$	$2\zeta^3$	0	0	0	0	ζ^2+1	$-\zeta^3-\zeta$	ζ^2-1	$-\zeta^3+\zeta$
χ_{14}	2	$2\zeta^3$	$-2\zeta^2$	2ζ	-2	$-2\zeta^3$	$2\zeta^2$	-2ζ	0	0	0	0	ζ^2-1	$-\zeta^3-\zeta$	ζ^2+1	$\zeta^3-\zeta$
χ_{15}	2	2ζ	$2\zeta^2$	$2\zeta^3$	-2	-2ζ	$-2\zeta^2$	$-2\zeta^3$	0	0	0	0	$-\zeta^2-1$	$-\zeta^3-\zeta$	$-\zeta^2+1$	$-\zeta^3+\zeta$
χ_{16}	2	$-2\zeta^3$	$-2\zeta^2$	-2ζ	-2	$2\zeta^3$	$2\zeta^2$	2ζ	0	0	0	0	$-\zeta^2+1$	$-\zeta^3-\zeta$	$-\zeta^2-1$	$\zeta^3-\zeta$
χ_{17}	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0	0	0
χ_{18}	2	$2\zeta^2$	-2	$-2\zeta^2$	2	$2\zeta^2$	-2	$-2\zeta^2$	-2	$-2\zeta^2$	2	$2\zeta^2$	0	0	0	0
χ_{19}	2	-2	2	-2	2	-2	2	-2	2	-2	2	-2	0	0	0	0
χ_{20}	2	$-2\zeta^2$	-2	$2\zeta^2$	2	$-2\zeta^2$	-2	$2\zeta^2$	-2	$2\zeta^2$	2	$-2\zeta^2$	0	0	0	0
χ_{21}	3	$3\zeta^2$	-3	$-3\zeta^2$	3	$3\zeta^2$	-3	$-3\zeta^2$	1	ζ^2	-1	$-\zeta^2$	ζ^2	-1	$-\zeta^2$	1
χ_{22}	3	$-3\zeta^2$	-3	$3\zeta^2$	3	$-3\zeta^2$	-3	$3\zeta^2$	1	$-\zeta^2$	-1	ζ^2	$-\zeta^2$	-1	ζ^2	1
χ_{23}	3	3	3	3	3	3	3	3	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
χ_{24}	3	-3	3	-3	3	-3	3	-3	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
χ_{25}	3	$-3\zeta^2$	-3	$3\zeta^2$	3	$-3\zeta^2$	-3	$3\zeta^2$	1	$-\zeta^2$	-1	ζ^2	ζ^2	1	$-\zeta^2$	-1
χ_{26}	3	$3\zeta^2$	-3	$-3\zeta^2$	3	$3\zeta^2$	-3	$-3\zeta^2$	1	ζ^2	-1	$-\zeta^2$	$-\zeta^2$	1	ζ^2	-1
χ_{27}	3	-3	3	-3	3	-3	3	-3	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
χ_{28}	3	3	3	3	3	3	3	3	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
χ_{29}	4	$-4\zeta^3$	$-4\zeta^2$	-4ζ	-4	$4\zeta^3$	$4\zeta^2$	4ζ	0	0	0	0	0	0	0	0
χ_{30}	4	4ζ	$4\zeta^2$	$4\zeta^3$	-4	-4ζ	$-4\zeta^2$	$-4\zeta^3$	0	0	0	0	0	0	0	0
χ_{31}	4	$4\zeta^3$	$-4\zeta^2$	4ζ	-4	$-4\zeta^3$	$4\zeta^2$	-4ζ	0	0	0	0	0	0	0	0
χ_{32}	4	-4ζ	$4\zeta^2$	$-4\zeta^3$	-4	4ζ	$-4\zeta^2$	$4\zeta^3$	0	0	0	0	0	0	0	0

	$\mathfrak{C}_{17}$	$\mathfrak{C}_{18}$	$\mathfrak{C}_{19}$	$\mathfrak{C}_{20}$	$\mathfrak{C}_{21}$	$\mathfrak{C}_{22}$	$\mathfrak{C}_{23}$	$\mathfrak{C}_{24}$	$\mathfrak{C}_{25}$	$\mathfrak{C}_{26}$	$\mathfrak{C}_{27}$	$\mathfrak{C}_{28}$	$\mathfrak{C}_{29}$	$\mathfrak{C}_{30}$	$\mathfrak{C}_{31}$	$\mathfrak{C}_{32}$
Rep.	$\zeta^4 D$	$\zeta^5 D$	$\zeta^6 D$	$\zeta^7 D$	T	ζT	$\zeta^2 T$	$\zeta^3 T$	TD	ζTD	$\zeta^2 TD$	$\zeta^3 TD$	$\zeta^4 TD$	$\zeta^5 TD$	$\zeta^6 TD$	$\zeta^7 TD$
ord	4	8	4	8	2	8	4	8	24	6	24	12	24	3	24	12
$\lvert\mathcal{C}\rvert$	6	6	6	6	12	12	12	12	8	8	8	8	8	8	8	8
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
χ_3	ζ^2	1	$-\zeta^2$	-1	1	$-\zeta^2$	-1	ζ^2	ζ^2	1	$-\zeta^2$	-1	ζ^2	1	$-\zeta^2$	-1
χ_4	$-\zeta^2$	1	ζ^2	-1	1	ζ^2	-1	$-\zeta^2$	$-\zeta^2$	1	ζ^2	-1	$-\zeta^2$	1	ζ^2	-1
χ_5	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
χ_6	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_7	ζ^2	-1	$-\zeta^2$	1	-1	$-\zeta^2$	1	ζ^2	$-\zeta^2$	1	ζ^2	-1	$-\zeta^2$	1	ζ^2	-1
χ_8	$-\zeta^2$	-1	ζ^2	1	-1	ζ^2	1	$-\zeta^2$	ζ^2	1	$-\zeta^2$	-1	ζ^2	1	$-\zeta^2$	-1
χ_9	$-\zeta^2-1$	$-\zeta^3-\zeta$	$-\zeta^2+1$	$-\zeta^3+\zeta$	0	0	0	0	$-\zeta^3$	1	ζ	ζ^2	ζ^3	-1	$-\zeta$	$-\zeta^2$
χ_{10}	$-\zeta^2+1$	$-\zeta^3-\zeta$	$-\zeta^2-1$	$\zeta^3-\zeta$	0	0	0	0	ζ	1	$-\zeta^3$	$-\zeta^2$	$-\zeta$	-1	ζ^3	ζ^2
χ_{11}	ζ^2+1	$-\zeta^3-\zeta$	ζ^2-1	$-\zeta^3+\zeta$	0	0	0	0	ζ^3	1	$-\zeta$	ζ^2	$-\zeta^3$	-1	ζ	$-\zeta^2$
χ_{12}	ζ^2-1	$-\zeta^3-\zeta$	ζ^2+1	$\zeta^3-\zeta$	0	0	0	0	$-\zeta$	1	ζ^3	$-\zeta^2$	ζ	-1	$-\zeta^3$	ζ^2
χ_{13}	$-\zeta^2-1$	$\zeta^3+\zeta$	$-\zeta^2+1$	$\zeta^3-\zeta$	0	0	0	0	ζ^3	1	$-\zeta$	ζ^2	$-\zeta^3$	-1	ζ	$-\zeta^2$
χ_{14}	$-\zeta^2+1$	$\zeta^3+\zeta$	$-\zeta^2-1$	$-\zeta^3+\zeta$	0	0	0	0	$-\zeta$	1	ζ^3	$-\zeta^2$	ζ	-1	$-\zeta^3$	ζ^2
χ_{15}	ζ^2+1	$\zeta^3+\zeta$	ζ^2-1	$\zeta^3-\zeta$	0	0	0	0	$-\zeta^3$	1	ζ	ζ^2	ζ^3	-1	$-\zeta$	$-\zeta^2$
χ_{16}	ζ^2-1	$\zeta^3+\zeta$	ζ^2+1	$-\zeta^3+\zeta$	0	0	0	0	ζ	1	$-\zeta^3$	$-\zeta^2$	$-\zeta$	-1	ζ^3	ζ^2
χ_{17}	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
χ_{18}	0	0	0	0	0	0	0	0	ζ^2	-1	$-\zeta^2$	1	ζ^2	-1	$-\zeta^2$	1
χ_{19}	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
χ_{20}	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\zeta^2$	-1	ζ^2	1	$-\zeta^2$	-1	ζ^2	1
χ_{21}	ζ^2	-1	$-\zeta^2$	1	1	ζ^2	-1	$-\zeta^2$	0	0	0	0	0	0	0	0
χ_{22}	$-\zeta^2$	-1	ζ^2	1	1	$-\zeta^2$	-1	ζ^2	0	0	0	0	0	0	0	0
χ_{23}	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
χ_{24}	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
χ_{25}	ζ^2	1	$-\zeta^2$	-1	-1	ζ^2	1	$-\zeta^2$	0	0	0	0	0	0	0	0
χ_{26}	$-\zeta^2$	1	ζ^2	-1	-1	$-\zeta^2$	1	ζ^2	0	0	0	0	0	0	0	0
χ_{27}	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
χ_{28}	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
χ_{29}	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\zeta$	-1	ζ^3	ζ^2	ζ	1	$-\zeta^3$	$-\zeta^2$
χ_{30}	0	0	0	0	0	0	0	0	ζ^3	-1	$-\zeta$	$-\zeta^2$	$-\zeta^3$	1	ζ	ζ^2
χ_{31}	0	0	0	0	0	0	0	0	ζ	-1	$-\zeta^3$	ζ^2	$-\zeta$	1	ζ^3	$-\zeta^2$
χ_{32}	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\zeta^3$	-1	ζ	$-\zeta^2$	ζ^3	1	$-\zeta$	ζ^2