arXiv:2603.08006v1 [math.LO] 9 Mar 2026

原始递归范畴性谱

NIKOLAY BAZHENOV、HEER TERN KOH 和 KENG MENG NG

Abstract. 我们研究各种自然结构类的可计算范畴性谱的原始递归类比。我们证明，对于所有相对 Δ^0_2-范畴的等价结构和线性序、相对 Δ^0_3-范畴的布尔代数，以及作为偏序的可计算范畴树，这些概念是一致的。

1. Introduction

可计算性理论在离散数学结构研究中的应用取得了巨大成功。研究的主要对象是可计算结构，它们最初由 [Rab60、Mal61] 定义为具有有限多个关系和函数，且每个关系和函数均可计算的结构。此类结构也常被称为具有可计算表示。可计算结构研究中的一个研究方向是探究范畴性 （例如参见 [Gon80、GD80、Rem81a、Rem81b、McC03、CCHM06、CCHM09、CHR14、Fro15、Baz21]）。粗略而言，这类研究有助于了解（经典意义上）同构的可计算结构之间的同构在“算法复杂度”上有多高。例如，如果一个结构的任意两个可计算表示之间都存在可计算同构，我们就称该结构可计算范畴。直观地说，这意味着我们可以通过算法求得该结构两个给定副本之间的同构，因此这类结构的同构相对“简单”。

在 [KMN17] 中观察到，对于数学结构的自然类，仅仅具有可计算表示也保证存在一个“高效”表示 [Gri90, CR91, CR92, CDRU09]。此外，从可计算表示中提取“高效”表示的一个关键步骤在于消除无界搜索的使用。因此，为了更好地理解这一现象，有人提议从原始递归函数的角度研究数学结构，这类算法不使用无界搜索。在此设定下，研究者研究准时结构，即定义域为 ω 且其所有函数和关系都是一致原始递归的结构。与可计算结构相比，准时结构应“无延迟”地揭示其点或元素，这反映了准时表示比可计算表示“更快”或更可行的直觉。关于准时结构的最早定理之一如下。

定理 1.1 ([KMN17])。 在以下每个类中，每个可计算结构都有一个准时表示：等价结构、线性序、布尔代数、无挠阿贝尔群以及阿贝尔 p群。

Date：2026年3月10日。Ng得到新加坡教育部通过其学术研究基金第二层级（MOE- T2EP20222-0018）和学术研究基金第一层级（RG104/24）的资助。我们也感谢David Belanger的诸多有益讨论。

从某种意义上说，这反映了这样一种现象：自然类中的可计算结构也拥有高效呈现。沿着可计算结构理论的思路，我们可以探讨准时结构的范畴性问题。要研究这类问题，我们必须首先确定一种恰当的同构概念。在可计算结构理论中，可计算结构是按照可计算同构来研究的。因此，准时结构应按照无延迟可计算的同构来研究。然而，由于原始递归函数的逆不一定是原始递归的，研究者转而考虑及时同构：其本身及其逆都是原始递归的同构。与可计算范畴结构类似，如果一个结构的任意两个准时表示之间都存在准时同构，那么该结构就是准时范畴的。和之前一样，这意味着这类结构上的同构在“算法上很简单”。

定理 1.2（[KMN17]）。

(1) 等价结构 S 是准时范畴的，当且仅当它具有以下形式之一：$F \cup E$，其中 F 是有限的，且 E 只有大小为 1 的等价类；或者 S 只有有限多个等价类，其中至多一个是无限的。*(2)* 线性序是准时范畴的，当且仅当它是有限的。*(3)* 布尔代数是准时范畴的，当且仅当它是有限的。

事实证明，（自然类中的）准时范畴的结构只有那些在某种意义上是有限的结构。这表明，对于无端点的可数稠密线性序或随机图等无限结构，范畴性的各种来回论证在算法上的实现离不开无界搜索。因此，使用原始递归函数研究数学结构提供了一种新颖而有趣的视角。（关于准时结构的若干研究方向，参见综述 [BDK+19、DMN21] 。）

1.1. **预备知识**。回顾一下，可计算结构的范畴度是最小的图灵度$\mathbf{d}$，它能够计算出该结构任意两个可计算表示之间的同构 [FKM10, Gon11]。显然，要证明某个结构的范畴度为$\mathbf{d}$，首先必须证明 $\mathbf{d}$ 足以产生该结构任意两个可计算表示之间的同构。其次，要证明这样的度是“精确的”，通常会构造两个可计算表示，使得这两个表示之间的任意同构 f 都满足 $f \geq_T \mathbf{d}$。粗略地说，可计算结构的范畴度衡量了该结构的可计算表示之间的同构在算法上的复杂程度。为研究这类概念的原始递归类比，我们需要以下定义。

定义1.3 ([KM21])。设 $f, g\colon \omega \to \omega$ 为全函数。f 可约化为 g，记作 $f \leq_{PR} g$，若存在某个原始递归方案 Ψ 使得 $\Psi^g = f$。若进一步有 $g \leq_{PR} f$，则记作 $f \equiv_{PR} g$。由此得到的度结构称为原始递归度。

正如图灵度衡量不可计算性，PR度类似地衡量各种函数的原始递归内容。直观地说，如果 $f \leq_{PR} g$，那么 g 的增长速度就快于 f，因此其“原始递归复杂度”也高于 f。在这一设定下，遵循可计算结构理论中的思想和术语，我们定义：

定义 1.4 ([BK21])。对于给定的标点结构 A，我们用$\mathtt{PRCatSpec}(A)$ 来表示包含所有原始递归度 $\mathbf{d}$ 的集合，使得对于任意标点结构 $B \cong A$，存在一个同构$f\colon\ A \to B$并且 $\mathbf{d} \geq_{PR} f$，f^{-1}。

如前所述，由于原始递归函数的逆不一定是原始递归的，因此对于给定的函数 f， f与 f^{-1} 可能属于不同的原始递归度。因此，在如上定义一个结构的原始递归范畴性谱时，我们要求每个 PR度 $\mathbf{d}$ ∈PRCatSpec(A) 原始递归地计算一个同构及其逆。

在可计算性理论中，图灵度$\mathbf{0}$， $\mathbf{0}'$， $\mathbf{0}''$，... 构成一条"主干"，用于对各种对象或过程的算法内容进行分类和排序。类似地，我们定义以下原始递归度集合：

定义 1.5 ([BK21])。 对于每个可计算序数 $\alpha > 0$，锥(Δ^0_α) 是由所有满足以下条件的原始递归度$\mathbf{d}$组成的集合：对于任意全定义的 Δ^0_α-函数 f，都有$\mathbf{d} \geq_{PR} f$。

由定义 1.5 和 1.4，不难得到以下结论：

事实 1.6。 如果 A 是 Δ^0_α-范畴的，那么锥$(\Delta^0_\alpha) \subseteq \mathtt{PRCatSpec}(A)$。

从某种意义上说，这相当于准时结构的 Δ^0_α-范畴性，也就是可计算结构的 Δ^0_α-范畴性。为了证明这个界是紧的，即证明 Δ^0_α 是 A的最小原始递归范畴度，我们证明 PRCatSpec(A) ⊆Cone(Δ^0_α)，因而 PRCatSpec(A) =Cone(Δ^0_α)。这意味着，能够原始递归地计算 A的同构的原始递归度，恰好等同于能够原始递归地计算 Δ^0_α-函数的原始递归度，因此这与可计算结构的范畴度概念类似。

我们回顾一下，若对任意可数副本 A，存在一个同构*relatively* Δ^0_α-范畴的$B \cong A$ f: $B \cong A$ 使得 $f \in \Delta^0_\alpha(B)$，则称可计算结构为相对 Δ^0_α-范畴的。相对 Δ^0_α-范畴性总是蕴含 Δ^0_α-范畴性，但反之则不然 [Gon77, GHK+05, CFG+09]。

本文拓展了 [KM21、BK21、BK24], 开创的工作，研究准时结构之间同构的原始递归复杂度。我们证明，在等价结构、线性序和布尔代数这些类中，相对 Δ^0_n-范畴性通常与 PRCatSpec(A) = Cone(Δ^0_n)相一致。更具体地说，我们证明，相应的概念在以下情形中很好地对应：相对 Δ^0_2-范畴的等价结构；相对 Δ^0_2-范畴的线性序；相对 Δ^0_3-范畴的布尔代数。我们还研究了一些相对 Δ^0_3-范畴的线性序，以及作为偏序的可计算范畴树。人们或许会认为这些概念总是一致的；然而，在配套论文[BKN], 中，我们给出了一些反例。

2. Equivalence Structures

在 [CCHM06], 中，研究表明，可计算范畴的等价结构与相对可计算范畴的等价结构一致，并且它们恰好属于以下几种等价结构类型之一：

- E 只有有限多个有限等价类（并且可能有余有限多个无限等价类）；
- E 只有有限多个无限等价类，并且至多有一个有限等价类 k，使得大小为 k 的等价类有无限多个。

应用事实 1.6，这类等价结构 E 显然具有如下性质：Cone(Δ^0_1) ⊆PRCatSpec(E)。不难看出，如果 E 是准时范畴的，那么 PRCatSpec(E) ⊈Cone(Δ^0_1)，因为存在不是原始递归的全可计算函数。因此，在以下定理中，我们只考虑不是准时范畴的等价结构。

定理 2.1。 如果 E 是相对 Δ_1^0-范畴的等价结构，且不是准时范畴的，那么 $\mathtt{PRCatSpec}(E) = \mathtt{Cone}(\Delta_1^0)$。

证明。 由定理 1.2 可知，一个等价结构是准时范畴的，当且仅当它至多有一个无限等价类且其余等价类有限多个，或者它只有有限等价类且其中余有限多个大小为 1。要使等价结构 E 是相对 Δ_1^0-范畴的且不是准时范畴的，它必须属于以下类型之一。

(i) E 有余有限多个大小为 1 的等价类。为使 E 不是准时范畴的， E还必须至少有一个无限等价类。(ii) 不是前一类型； E 有余有限多个大小同为 > 1 的等价类。(iii) 有限多个等价类，且至少有两个无限等价类。

粗略地说，对于给定的全定义 g，为了定义 h 使得 $g \leq_{PR} h$，我们将$g(x)$的停机时间编码到 $h(x)$中。然后，为了从 $h(x)$原始递归地恢复 $g(x)$，我们只需计算 $g(x)$直到第 $h(x)$ 阶段并返回相应的值。为了证明 PRCatSpec(E) ⊆Cone(Δ_1^0)，给定任意全可计算函数 g，我们构造等价结构 A, $B \cong E$ 使得$g \leq_{PR} h \oplus h^{-1}$ 对任意同构 $h\colon\ A \to B$。

首先考虑类型（i）的等价结构。我们按如下方式构造 A, $B \cong E$ 。在阶段 0，将所有有限大小的等价类枚举到 A 和 B 中，并非一致地固定 E 中无限等价类的数量。在每个阶段 s，执行以下操作。

(1) 将一个新元素枚举到 A 和 B 中的每个无限等价类。这确保 A 和 B 保持准时。(2) 将一个大小为 1 的新等价类枚举到 A 中。(3) 如果对某个 x, $g(y)[s]\downarrow$ 对所有 $y < x$ 都成立，则将第 x 个大小为 1 的等价类枚举到 B 中（如果它尚未被枚举）。

这里的直观想法显然是让 A 保持“标准”，同时延迟将大小为 1 的等价类枚举到 B 中，从而编码 g。设 $h : A \to B$ 是一个同构。要恢复 $g(x)$，就在 A 中大小为 1 的前 $x+1$ 个等价类上计算 h 。注意，这些元素的指标可以通过将 A 枚举到阶段 $x+1$，以原始递归的方式恢复。由于 h 是一个同构，这必定会产生 B 中 $x+1$ 个互不相同、大小为 1 的等价类的指标。根据构造，只有在见证了对所有 $y < x+1$ 都有 $g(y)[s]\downarrow$ 之后， B 中第 $x+1$ 个大小为 1 的等价类才会被枚举。特别地，从 h 得到的 $x+1$ 个互不相同的等价类中，至少有一个的指标不小于 $g(x)\downarrow$ 成立时所处的阶段。

现在考虑类型 (ii) 的等价结构。我们再次构造 A, $B \cong E$。令 $N > 1$ 为在 E 中重复出现（可能是无限次）的大小。与之前一样，我们以一种“标准”的方式枚举 N 中所有不具有此大小的等价类，包括 A 和 B 。在阶段 s，执行以下操作。

(1) 如果 N 是有限的，则将一个大小为 N 的等价类枚举到 A 中。否则，将一个新的等价类枚举到 A 中，并确保每个不属于“标准”部分的等价类都包含 $s+2$ 个元素。在极限处，显然 $A \cong E$。(2) 将一个新的等价类枚举到 B 中，暂时使其大小保持为 1。这确保了 B 仍然是准时的。(3) 如果存在某个 x ，使得对所有 $y < x$, $g(y)[s]\downarrow$，那么，如果 N 是有限的，就确保 B 的前 x 个等价类包含 N 个元素；否则，确保它们包含 $s+2$ 个元素。

这里的论证与前面的类似。 A 是“快速”副本，会生成元素，我们以原始递归的方式在这些元素上编码 g 。另一方面， B 是“延迟”副本，只有当 $g\downarrow$时才枚举元素。我们不再像策略中那样，通过只在 B 中增大一个无限等价类来“延迟”，

对于类型（i）等价结构，我们通过枚举新的等价类并让其大小保持为 1，来“延迟” B。一旦 $g(x)\downarrow$，就将这些等价类增大到大小为 N。

令 $h\colon A\to B$ 为一个同构。要计算 $g(x)$，首先计算 h 在前 $x+1$ 个大小为 N 的等价类的前两个元素上的值。这显然会得出 B 中两个元素的指标，这两个元素分别属于 $x+1$ 个不同的大小为 N 的等价类。由于 B 中第 $x+1$ 个等价类里指标第二小的元素，其指标至少为 $g(y)\downarrow$ 对所有 $y<x+1$ 成立时所处的阶段，因此，取计算 h 所得元素指标的最大值，就可以恢复 $g(x)$。

最后，我们考虑类型 (iii) 的等价结构。由于有限等价类只有有限多个，我们可以非一致地固定它们，并在阶段 0 将它们枚举到 A 和 B 中。令 $M\geq 2$ 为无限等价类的数量。在阶段 s，执行以下操作。

(1) 在 A 中枚举 M 个新元素，向 A 的每个无限等价类添加一个元素。(2) 在 B 中，只枚举 1 个新元素，并将其添加到 B 的第一个无限等价类中。对于 B 中其余的 $M-1$ 个无限等价类，我们将其保持在大小 x，并且在阶段 s，对所有 $y<x$，$g(y)[s]\downarrow$。

前面的类似论证仍然适用。设 $h:A\to B$ 是一个同构。要找出 $g(x)$，只需计算 h 在 A中两个无限等价类的前 $x+1$ 个元素上的取值。根据鸽巢原理，这样的等价类中至少有一个会被 h 映射到 B中的一个“缓慢”无限等价类。此外，至少有一个这样的像，其指标不小于 $g(x)\downarrow$所处的阶段。定理 2.1 得证。□

定理 2.2。若 E 是一个相对Δ^0_2范畴的等价结构，但不是相对Δ^0_1范畴的，则 $\mathtt{PRCatSpec}(E)$ =锥(Δ^0_2)。

应用 [CCHM06 中的刻画，推论 4.8], 相对 Δ^0_2范畴的等价结构要么具有有界特征（这意味着该等价结构只有有限多个不同的有限等价类大小），要么只有有限多个无限等价类。显然，我们可以假设该等价结构有无限多个等价类，否则它将是可计算范畴的。我们将定理 2.2 的证明分为引理 2.3 和 2.4，分别讨论这两种可能性。

引理 2.3。如果 E 是一个具有有界特征且有无限多个等价类的等价结构，那么 $\mathtt{PRCatSpec}(E)$ =锥(Δ^0_2)。

证明。如果 E 有余有限多个无限等价类，那么 E 是可计算范畴的。因此，我们可以假设 E 有无限多个有限等价类。由于 E 具有有界特征，令 $M\in\omega$ 为最小的大小，使得 E 有无限多个大小为 M 的等价类。基于与前面相同的理由，M 不可能余有限次出现。对于给定的全定义 Δ^0_2-可计算函数 g^*，我们考虑原始递归逼近 $g(x,s)$，使得 $\lim_s g(x,s)=g^*(x)$。再次，为了原始递归地恢复 $g^*(x)$ 的值，我们编码稳定阶段 s_x，使得对每个 $s\geq s_x$，$g(x,s)=g(x,s_x)$。只要我们有办法得到 s_x，就可以原始递归地恢复 $g^*(x)=\lim_s g(x,s)=g(x,s_x)$ 的值。

编码 s_x：给定一个具有有界特征且含有无穷多个等价类的可计算等价结构 E，我们构造 A，$B\cong E$ 具有如下性质的定时等价结构。A 将“快速”枚举大小为 M 的等价类。A 的每一个偶数编号的等价类都将是大小为M的等价类，同时我们将 E “复制”到 A的奇数编号的等价类中。由于 E 由无穷多个大小为 M的等价类组成，所得结构显然仍然与 E同构。

相比之下， B 将极其稀疏地产生大小为 M 的等价类。对每个 x，每当 $g(x,\ s) \neq g(x,\ s-1)$时，我们确保在 B的前 s 个等价类中，大小为 M的等价类至多有 x 个。根据对 M的选取，我们事实上还可以假定它是 E中最小的类的大小，因为较小大小的等价类至多只有有限多个，并且可以非一致地加以固定。也就是说，我们可以通过把大小为 M 的等价类增大到某个更大的大小，来减少前 s 个等价类中大小为 M 的等价类的个数。通过对 A中前 $x+1$个大小为 M 的等价类计算给定的同构，不难看出可以恢复稳定阶段 s_x 。唯一剩下的问题是，如何在确保 $B \cong E$的同时执行这一策略。

确保 $B \cong E$：在构造 B 时，除了可能有限多个较小规模的类之外，我们交替将规模为 M 和 $M+1$ 的类枚举进 B。我们将构造一个可计算（但非全定义）的函数 $f : B \to E$，使得 f 的定义域和值域分别恰好是 B和 E 中规模不是 M的那些类。令 e_i 表示枚举进 E的 i^{th} 类。每当我们需要将 B 中的某个类 b 扩充到规模 $> M$ （由编码 s_x的策略决定）时，先将该类扩充到规模 $M+1$。然后，寻找最小的 i，使得 e_i 当前规模为 $> M$ 且不在 f的值域中。找到后，将这样的 e_i 定义为 b的 f 像。在此后的所有阶段，让 b 的规模与 e_i的规模相同。只要稍加留意，就可以轻易地安排在 B 中所有增长到规模 $> M$的类上定义 f。类似地，若 B中有无穷多个规模为 $> M$的类，那么 E 中所有规模为 $> M$ 的类最终都必须进入 f的值域。也就是说， f是 B 与 E 中规模为 $> M$的类之间的一个同构。由假设可知，这样的类有无穷多个；否则 E 将是可计算范畴。

构造：在第 0 阶段，将大小为 $< M$ 的有限多个等价类枚举到 A 和 B中。 A和 B中的所有后续等价类分别记为 $a_0, a_1, \ldots$和 $b_0, b_1, \ldots$。在第 s阶段，将等价类 a_s 和 b_s 分别枚举到 A和 B 中。如果 s 是偶数，那么令 a_s 和 b_s 的大小都为 M。否则，令 a_s 的大小等于 $e_{(s-1)/2}$ 的大小，并令 b_s 的大小为$M+1$。令 $x < s$ 为满足 $g(x, s) \neq g(x, s-1)$ 的最小值。如果不存在这样的 x，则进入第 $s+1$ 阶段。否则，令 b_i 表示 B中大小为 M的第 x^{th} 个等价类，并将每个大小为 M 的 $i \leq j < s$ 的大小增加到 $M+1$。

在每个第 s阶段，还要选取 B 中大小为 $M+1$ 且指标最小的等价类 b，使得 $f(b) \uparrow$。寻找最小的 i，使得 e_i 当前大小为 $> M$ 且尚未处于 f的值域中。找到后，定义 $f(b) = e_i$，并且在所有后续阶段，令 b 的大小与 e_i的大小相同。如果找不到这样的 e_i，则进入第 $s+1$ 阶段（注意，此搜索是原始递归的）。

验证：根据构造可直接得到 $A \cong E$。现在我们断言， f 是 B中所有大小为 $> M$的等价类与 E中所有大小为 $> M$的等价类之间的同构。 f显然是单射；一旦 $f(b) \downarrow$，就会保持b与 $f(b)$大小相同。对于任意给定的大小为 $> M$的 b，显然它最终必定成为 B 中指标最低的等价类；构造将在下一个可能的时机尝试定义 $f(b)$。由于 E 有无穷多个大小为 $> M$的等价类，因此总能为 b 找到合适的 f 像。此外，由于我们总是选择指标尽可能小的等价类作为像， f 在 E 中大小为 $> M$ 的等价类上也是满射。因此， f 是 B 中所有大小为 $> M$ 的等价类与 E中相应等价类之间的同构。

现在我们通过归纳法证明：在 B 中，存在无限多个大小为 M 的等价类，并且第 x^{th} 个这样的等价类存在，其指标为 $\geq s_x$，也就是 x 的稳定阶段。由于假设 g^* 是全定义的，s_0， s_1，$\ldots$都存在。我们进一步假设， s_x 是使 $g(x,\ s)$ 稳定的最小可能阶段。

对于任意 $i < s_0$，在阶段 s_0，我们必定已经发现 $g(0,\ s_0) \neq g(0,\ s_0-1)$，因此将大小仍为 M 的 b_i 的大小改为 $M+1$。对于此后的所有阶段，请注意，构造永远不会改变 b_{2k} 的大小，其中 k 是满足 $2k \geq s_0$ 的最小值。对于 $x > 0$，$g(x,\ s)$ 的任何变化，都只会影响 $y \geq x$ 中大小为 M 的 y^{th} 类。

现在归纳地假设，对于每个 $y < x$，都存在大小为 M 的 y^{th} 等价类，且其指标为 $\geq s_y$。将这些等价类依次编号为 b_{i_0}、b_{i_1}、……、$b_{i_{x-1}}$。在阶段 $s > s_{x-1}$，我们可能只能发现 $g(z,s) \neq g(z,s-1)$，其中某个 $z \geq x$。根据构造，每当发现这样的 z 和 s 时，我们只会更改指标至少与当前大小为 M 的 z^{th} 等价类的指标一样大的等价类。换言之，这种动作不会改变任何 $y < x$ 对应的等价类 b_{i_y} 的大小。根据构造，在阶段 s_x，注意，任何大小为 M、指标为 i 且满足 $i_{x-1} < i < s_x$ 的等价类，都会被改为大小为 $M+1$，因为我们发现了 $g(x, s_x) \neq g(x, s_x - 1)$。在这样的阶段 s_x 之后，b_{2k} 的大小将永远保持为 M，其中 k 是满足 $2k \geq s_x$ 的最小值。

应用该断言，我们可以得出：B 有无穷多个大小为 M 的等价类，因此与 E 同构；并且对于每个 x，B 中大小为 M 的 x^{th} 等价类的指标为 $\geq s_x$。利用后一个结论，我们可以如下恢复 g^*。设 $h: A \to B$ 是一个同构。给定 x，对每个 $i < 2x$ 计算 $h(a_i)$。回忆一下，a_i 对偶数 i 的大小为 M，而对奇数 i，它们是来自给定可计算表示 E 的等价类。也就是说，至少有 $x+1$ 个大小为 M 的等价类，在这些等价类上我们计算 h。根据鸽巢原理，这些 h 的像中至少有一个必定落在 B 的某个指标为 $\geq s_x$ 的等价类上。通过计算 $g(x,\ s)$，其中 s 是对于每个 $i < 2x$ 的所有 $h(a_i)$ 的指标的最大值，我们得到 $g^*(x)$。引理 2.3 得证。□

引理 2.4　。若 E 是一个具有有限多个无限等价类且特征无界的等价结构，

特征，

英语 PRCatSpec(E) = 锥(Δ_2^0)。

证明。设 E 是一个具有有限多个无限等价类且特征无界的可计算等价结构。通过非一致地固定 E 中的无限等价类数量以及若干代表元的指标，我们可以假设 E 只有有限大小的等价类。照常，我们构造定时等价结构 $A,\ B \cong E$，使得给定的全定义函数 Δ_2^0 可从任意同构 $h: A \to B$中原始递归地计算出来。设 g^* 是一个全定义函数，且 $g(x,\ s)$ 是 g^*的原始递归逼近。对于每个 x，稳定 阶段是指满足对所有 $s \geq s_x$，$g(x,\ s) = g(x,\ s_x)$ 的阶段s_x。目标是对每个 x，将稳定阶段 s_x 编码进结构 $A,\ B$ 中。

编码 s_0：我们将 $A,\ B$ 的等价类按其被枚举的顺序分别记为 a_i和 b_i。类似地，将可计算副本 E的等价类记为 $e_0,\ e_1,$ ……。在构造过程中，A 将复制 E；在每个阶段 $s \geq i$，a_i 的大小要么为1，要么为 e_i的当前大小，取二者中较大者。注意到，即使 E 既不扩大其任何现有等价类，也不枚举新的等价类，A 仍然保持准时。

给定任意同构 $h: A \to B$，我们希望 $h(a_0)$的指标至少与 s_0一样大。我们称 a_0 为见证，对应于 R_0（我们稍后会引入相关需求）。为确保这一性质成立，每当 $g(0,s) \neq g(0,s-1)$时，我们就为所有满足 0 的 $i < s$ 将每个等价类 b_i 标记为标记。这意味着这些等价类的大小都应始终严格大于 a_0。这里的想法是，由于E 具有无界特征，我们最终能够在 E 中找到这样大小更大的等价类，并保留$B \cong E$。为此，我们定义一个 Δ_2^0 映射 p: $B \to A$，以帮助构造 B。对于每个标记为 0 的等价类 b_i，定义 $p(b_i) = a_j$，其中 j 是满足以下条件的最小值：a_j 尚未位于 p 的值域中，且其当前大小大于 a_0 的大小，并且至少与 b_i的大小一样大。对于每个

后续阶段，我们将 b_i 的大小保持为与 $p(b_i)$相同。同样，定义 $p(b_s) = a_0$，并使 b_s 保持与 a_0相同的大小。显然， b_s 将是 B 中第一个大小与 a_0相同的等价类；任意同构 $h: A \to B$ 都必须将 a_0 映射到指标至少与 b_s一样大的等价类。为便于簿记，我们还将用特殊特征 $0^\dagger$标记这类等价类，或者更一般地，用$x^\dagger$标记。

由于假设 g^* 是全定义的，因此标记为 0 的等价类数量必定有限，因为 s_0 恰好是 B 中标记为 0 的等价类数量。对于每个标记为 0 的等价类 b_i，由于我们希望它们的大小严格大于 a_0 的大小，因此每当 a_0 的大小增加时，我们可能需要重新定义 $p(b_i)$。然而，由于假设 E 只有有限等价类， e_0 的大小最终必定停止增加。也就是说， a_0 的大小也会在某个有限阶段稳定下来。在此阶段之后，对于每个标记为 0 的 b_i， $p(b_i)$ 都不会再发生变化。

编码 s_x: 由于这里的构造要复杂得多，我们采用一个简单的优先论证来满足以下要求。

$$P: B \cong ER_x: \text{存在 } a \in A, \text{使得对于任意同构 } h: A \to B, \ h(a) \text{ 的指标至少与 } s_x \text{ 一样大,}$$

此外，我们将满足 R_x 的 $a \in A$ 称为 R_x 的见证。假设对于每个 $y < x$，我们都已找到 R_y 的见证 a_{i_y}。回想一下，该策略是使各种 a_{i_y} 的可能像的指标至少与 s_y 一样大；为此，我们把标记为 y 的等价类扩增到大于 a_{i_y} 的大小。这意味着，我们在为 R_x 选择见证时必须格外谨慎。如果我们选择的等价类 a_i 最终与某个针对某个 $y < x$ 而标记为 y 的等价类大小相同，那么对于某个同构 $h: A \to B$，计算 $h(a_i)$ 可能无法提供关于 s_x 的任何信息，因为与 s_x 相比，这些等价类的指标可能相对较小。

因此，我们不去寻找 R_x 的确切见证，而是给出一个合适的潜在见证值域，并运用鸽巢论证证明其中至少有一个是真正的见证。更准确地说，我们希望见证的像不映到任何指标“较小”的等价类；也就是那些针对某个 $y < x$ 而标记为 y 或 $y^\dagger$ 的等价类。显然，这类等价类的数量（记作 n_x）可以针对每个 $y < x$，由 s_y 原始递归地计算得出（目前我们至少有 $n_1 = s_0 + 1$）。通过在前 n_x 个不是 R_y 的潜在见证、且满足 $y < x$ 的等价类上计算给定的同构 h: $A \to B$，其中至少有一个必须映到 B 中一个未针对任何 $y < x$ 标记为 y 或 $y^\dagger$ 的等价类。我们将这 n_x 个等价类称为 R_x 的潜在见证。显然， A 中的每个等价类都是某个唯一要求 R_x 的潜在见证。

每当 $g(x, s) \neq g(x, s-1)$ 时，对于每个类 b_i，若 $i < s$ 且 b_i 未因任何 $y < x$ 而被标记为 y 或 $y^\dagger$，则将 b_i 标记为 x。按照约定，我们可以通过移除因较低优先级 R_z 而添加的所有 z 或 $z^\dagger$ 标记（对于任何 $z > x$），并令 $p(b) \uparrow$ 任何未标记的 b，来“撤销”所执行的动作。请回想这一思想：带有 x 标记的类应避免与 R_x 的见证大小相同。由于现在有多个潜在见证，每个带有 x 标记的类的大小都需要大于 R_x 的所有潜在见证的大小。对于每个带有 x 标记的类 b_i，将这些类中的 p 定义为 a_j，其中 j 是满足以下所有条件的最小值。

- a_j 的大小大于 R_x 的所有潜在见证。
- a_j 的大小至少与 b_i 的当前大小相同。
- a_j 目前不在 p的值域中。

对于满足 $i \geq s$ 的类 b_i，令 $p(b_i) = a_j$，其中 j 是使得 a_j 当前不在 p 的值域中的最小指标，而 j 是 R_x 当前某个潜在见证的指标。根据鸽巢原理，至少有一个这样的 $i \geq s$，能够找到这样的一个 a_j。将每个能够找到 a_j 的 b_i 标记为 $x^\dagger$。与之前一样，对于每个后续阶段，令 b 的大小与 $p(b)$ 相同。

再一次，由于假设 g^* 是全定义的，s_x 必定存在；在这样的阶段之后，将不再有新的类被标记为 x。对于每个被标记为 x的类 b_i，每当某个 R_x 的潜在见证的大小增加时，可能需要重新定义 $p(b_i)$。然而，由于潜在见证的数量是固定的（对每个 $y < x$而言仅取决于 R_y），因此存在某个有限阶段，此后这些潜在见证都不再发生变化。这意味着每个 $p(b_i)$最终也都会稳定。

确保 A，$B \cong E$：从上述描述可以明显看出，A 与 E同构；一旦 e_i 被枚举，a_i就复制 e_i。稍后我们将正式验证：p：$B \to A$ 是一个同构。目前，我们简要说明这为何可能成立。回想一下，每个 a_i 都是某个 R_x的潜在见证。显然，这些类中没有任何一个会是 B 中被标记为 x的某个类的 p 像。虽然其中一些类可能是 B 中被标记为 y 、对应某个$y < x$的类的 p 像，但这些潜在见证中至少有一个的原像未被标记为 y。对于这样的类 a，请注意，我们总会从 B 中选取指标最小的潜在原像。一旦找到这样的类，$p(b)$就已被定义为 a 并被标记为$x^\dagger$。假设所有标记都已稳定，a 将永远处于 p的值域中。

构造：在阶段 s，将新等价类 a_s 枚举到 A，并将 b_s 枚举到 B，暂时令它们的大小为 1。步骤 1：选取最小的 $x < s$，使得 $g(x, s) \neq g(x, s-1)$。如果不存在这样的 x，则进入下一步骤。否则，对于每个满足以下条件的 $i < s$：对于任意$y < x$，b_i 都没有标记为 y 或 $y^\dagger$，将 b_i 标记为 x。步骤 2：定义 a_0 为 R_0的（潜在）见证。递归地假设，对于每个 $j < i$，a_j 都已定义为某个 R_y的潜在见证。令 x 为使得 R_x 的潜在见证尚未定义的最小值。对于每个 $k < n_x + 1$，其中 n_x 是当前在 B 中标记为 y 或 $y^\dagger$ 的等价类数量（对于某个 $y < x$），定义 a_{i+k} 为 R_x的潜在见证。注意，我们在每个阶段 s都会重新定义潜在见证。步骤 3：按 $i \leq s$的顺序进行，将 $p_s(b_i)$ 定义为满足以下所有条件的最小 j 所对应的 a_j。

- a_j 尚未处于 p_s 的值域中，且其大小至少与 b_i当前的大小一样。
- 如果 b_i 带有 y标记，那么 a_j 的大小必须大于 R_y的任何潜在见证。
- 如果 b_i 被标记为 $y^\dagger$，那么令 $p_s(b_i) = p_{s-1}(b_i)$。此外，如果将 $p_s(b_i)$定义为 R_x 的一个潜在见证，且对于任意 $y < x$，它都没有被标记为 y，那么我们就将 b_i 标记为 $x^\dagger$。如果存在某个 b_i，使得无法定义 $p_s(b_i)$，那么对于每个 $j \geq i$，我们都将 $p_s(b_j)$ 留作未定义，并继续下一步。**步骤 4：** 对于每个类 a_i，令 a_i 的大小与 e_i的大小相同。对于每个类 b_i，如果 b_i (b_i)有定义，就令 b_i 的大小与其相同；否则，在此阶段不改变 b_i 的大小。步骤 4 完成后，继续阶段 $s + 1$。

验证：首先，我们证明每个 b_i 的标记最终都会稳定。显然，每个类 b_i 都必定会被标记。此外，一旦被标记，就不会再变成未标记状态。仔细分析这一构造即可得出结论：对于固定的类 b_i，其标记可能经历以下变化。

- 如果 b_i 当前被标记为 $x^\dagger$，则其标记之后可能会变为 x、 y 或 $y^\dagger$ （对于某个 $y < x$）。
- 如果 b_i 当前被标记为 x，则其标记之后可能会变为 y 或 $y^\dagger$ （对于某个$y < x$）。

由此立即可知，每个 b_i 的标记最终都会稳定。

由于每个 b_i 的标记最终都会稳定， A 中每个 R_x的潜在见证数目也会稳定（定义见构造的步骤 2）。回想一下，对每个 i， a_i 与 e_i 具有相同的（有限）大小，因此必定存在某个有限阶段，在此之后 R_x 的所有潜在见证的大小不再发生变化。根据 E 具有无界特征这一假设， E 最终必定会产生一些等价类，其大小严格大于 R_x的所有这些潜在见证。一旦发现这样的等价类，构造的步骤 3 就会将它们定义为带有 x标记的等价类b_i 的 p_s 像。此外，由于潜在见证的大小以及 b_i 的标记不再变化，在此阶段之后 $p_s(b_i)$也将保持不变。对于标记为 $x^\dagger$的等价类 b_i ，我们还有：只要其标记不发生变化， $p_s(b_i)$就始终被定义为 $p_{s-1}(b_i)$。

现在我们可以证明 $p = \lim_s p_s$ 是一个同构。由于每个 b_i 一旦定义，就会复制一次 $p_s(b_i)$，因此我们总有 $p(b_i)$和 b_i 大小相同。此外，对于任何 $j < i$， $p_s(b_i)$都不会被定义为 $p_s(b_j)$，因此 p 是单射。剩下要证明的是 p 是满射。

设给定 $a_j \in A$ 。另假设 a_j 是 R_x的潜在见证，并且对于任何带有某个 $y < x$ 标记的 b_i ，都有 $a_j \neq p(b_i)$。我们还可以进一步假设，当前处于某个阶段，以下条件均成立。

对于所有带有某个 $y \leq x$ 或者为某个 $y < x$ 带有 $y^\dagger$ 标记的 b_i ， • $p_s(b_i)$ 都已稳定。

- a_j 当前是尚未落在 p_s值域中的、指标最小的类。

在这样的阶段，令 b_i 为 B 中指标最小的类，使得 $p_s(b_i)\uparrow$ ，且 b_i 的大小不超过 a_j当前的大小。若不存在满足 $k < i$ 且使得 $p_s(b_k)\uparrow$的 b_k ，那么我们必定已经定义了 $p_s(b_i) = a_j$。一旦定义了 $p_s(b_i)$，它就不会再改变。这是因为 b_i 要么带有标记$y \leq x$ ，要么对于某个 $y < x$ 带有 $y^\dagger$ ，而后者被假定已经稳定；要么 b_i 将带有 $x^\dagger$ 标记，而在这样的阶段，这个标记无法被任何其他标记取代。另一方面，如果存在某个 b_k，使得 $k < i$ 且 $p_s(b_k)\uparrow$，那么根据构造，在 $p_s(b_k)\downarrow$之前， b_i 的大小绝不会增加。换言之， b_i 的大小始终小于 a_j当前的大小。一旦对每个 $k < i$， $p_s(b_k)$ 都已稳定，那么 $p_s(b_i)$就必须定义为 a_j ，并且此后不再改变。

最后，为了对每个 x恢复 $g^*(x)$，定义

$$\Psi^h(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x = 0, \\ \max\{h(a_i) \mid i \leq \Psi^h(x-1)\} + \Psi^h(x-1) + 1, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

显然， Ψ 是一个原始递归方案。给定 x，计算 $g(x,\max\{h(a_i) \mid i \leq \Psi^h(x)\})$。我们断言这必定等于 $g^*(x)$。其思想是， $\Psi^h(x)$是 R_y 的潜在见证的指标的一个上界，其中 $y \leq x$，并且至少有一个潜在见证必须被映射到一个足够大的指标，以便同时恢复稳定阶段 s_x 以及 R_{x+1}的潜在见证的数量。形式上，我们证明以下陈述成立。

(i) 至少存在一个带有标记 $x^\dagger$的类，并且在 $h(a)$中至少有一个——其中 a 是 R_x的一个潜在见证——具有一个指标，该指标界定了任何带有标记 $x^\dagger$的类的指标。(ii) 若 a_i 对某个 $y \leq x$而言是 R_y 的一个潜在见证，则 $i \leq \Psi^h(x)$。

对于任意关于 R_x 的潜在见证 a，显然不能用 x 标记 $h(a)$，因为所有这类等价类的大小都大于 a 的大小。要证明用 $x^\dagger$ 标记的等价类数量（记作 n）恰好等于 R_x 的潜在见证数量，或许有些繁琐，但并不困难；其中，对于任意给定的从 $A \to B$ 出发的同构，至少有 n 个关于 R_x 的潜在见证不会被映射到某个用 y 标记的等价类，或者对某个 $y < x$ 而言，不会被映射到用 $y^\dagger$ 标记的等价类。结合关于 R_x 的潜在见证多于对某个 $y < x$ 用 y 或 $y^\dagger$ 标记的等价类这一事实，可得出结论：$n \geq 1$。也就是说，B 中至少有一个用 $x^\dagger$ 标记的等价类。根据构造，我们还知道 p^{-1} 是一个"极小"同构，具体而言，对于每个 a_i，$p^{-1}(a_i)$ 的指标 k 尽可能小，且满足：对于任意 $j < i$，$p^{-1}(a_j) \neq b_k$，并且 b_k 与 a_i 大小相同。此外，如果某个这样的等价类 b_k 对任何 $y < x$ 都没有用 y 或 $y^\dagger$ 标记，那么它必定用 $x^\dagger$ 标记。换言之，要使 $h : A \to B$ 成为同构，至少有一个 $h(a)$ 的指标必须是所有带有标记 $x^\dagger$ 的等价类的指标的上界。

最后，我们通过归纳法证明 (ii) 也成立。基础情形显然；R_0 的唯一（潜在）见证是 a_0。归纳地假设 (ii) 对所有 $y < x$都成立。应用 (i)，可得 $\max\{h(a_i) \mid i \leq \Psi^h(x-1)\}$ 是一个足够大的指标 k，使得任何带有标记 $y^\dagger$ 且属于 B 的类（其中 $y < x$）都具有指标 $\leq k$。此外，由于任何带有标记 y 的类，其指标都小于任何带有标记 $y^\dagger$的类，因此 R_x至多有 $k+1$ 个潜在见证。根据关于 $x-1$的归纳假设，我们还知道，若对于某个 $y \leq x-1$，a_i 是 R_y 的一个潜在见证，则 $i \leq \Psi^h(x-1)$。因此，$\Psi^h(x) = k+1+\Psi^h(x-1)$满足 (ii)。引理 2.4 和定理 2.2 得证。□

3. Linear Orders

可计算结构理论中另一个研究颇多的类是线性序。本节研究可计算范畴线性序、相对 Δ^0_2-范畴的线性序，以及一些 Δ^0_3-范畴的线性序。在讨论结果和证明之前，我们先引入一些将在后文使用的记号。

记号 3.1。对于线性序 L_0, L_1:

- 线性序 $L_0 + L_1$ 满足：$a < b$ 当且仅当 $-$ $a, b \in L_0$ 或 $a, b \in L_1$，且 $a < b$ 分别属于 L_0 或 L_1；$-$ 或者 $a \in L_0$ 且 $b \in L_1$。
- 线性序 $L_0 * L_1$ 满足：每个点 $a \in L_1$ 都被替换为 L_0的一个副本。
- L_0^* 由 L_0的反向序给出。

最后，对于一个线性序族 F，$\mathtt{Shuffle}(F)$ 的构造方式是：将 η 中的每个点替换为 F 中的一个成员的副本，使得在 $\mathtt{Shuffle}(F)$中的任意两个成员之间，都存在 F中每个成员的一个副本。

定理 3.2 ([BK21]中的定理 2)**.** 如果 L 是相对 Δ^0_1-范畴的线性序，且不是准时范畴的，那么 $\mathtt{PRCatSpec}(L)$ =锥(Δ^0_1)。

证明。要使线性序 L可计算范畴而非准时范畴的，L必须是 η 与有限线性序的有限和 [GD80, Rem81b]。设给定了一个全可计算函数 g。在我们的策略中，我们只会利用 η 的一个副本来编码 g。其余的线性

序 L 可以按标准方式枚举。因此，在证明余下部分中，我们假设 L 就只是 η 。

A将是 η的标准表示；存在一个原始递归函数，对于任意给定的 a_i、 a_j和 i、 j，都能计算a_k。对于 B的枚举，我们在阶段 s进行以下操作。

(1) 将 b_s 枚举到 B中。此外，如果 $s > 0$，则定义 $b_{s-1} < b_s$。也就是说，我们有一个一致原始递归序列 $b_0 < b_1 < b_2 < \ldots$，将用于编码 g。同时，在 b_0左侧枚举一个 η 的标准副本。(2) 如果 $x \leq s$ 满足 $g(x)[s]\downarrow$，那么我们就对区间（b_x， b_{x+1}）进行“稠密化”。也就是说，在阶段s之后，我们在 b_x 和 b_{x+1}之间构造一个 η 的标准副本。

由于假设 g 是全定义的，对于每个 x，必定存在某个阶段 s ，使得对所有 $s' \geq s$、 g，都有$x([s']\downarrow)$。因此，对于每个 x， b_x 和 b_{x+1} 之间的区间都同构于 η。因此， B 的序型将是 $\eta + 1 + \eta + 1 + \eta + \ldots \cong \eta$。此外，注意， b_x 和 b_{x+1} 之间所有元素的指标都大于满足 $g(x)[s]\downarrow$的阶段 s 。

令 $h : A \to B$ 为一个同构。给定 x，计算 $h^{-1}(b_x)$ 和 $h^{-1}(b_{x+1})$。由于 A 是 η的标准副本，我们可以原始递归地生成 a_k ，使得 $h^{-1}(b_x) < a_k < h^{-1}(b_{x+1})$。最后，通过计算 $h(a_k)$，我们得到 $b_x < h(a_k) < b_{x+1}$，因此， $h(a_k)$的指标至少与 $g(x)$首次收敛时所在的阶段一样大，从而使我们能够恢复 $g(x)$。□

定理 3.3。 如果 L 是相对 Δ^0_2范畴的、但不是相对 Δ^0_1范畴的线性序，那么 $\mathtt{PRCatSpec}(L)$ =锥(Δ^0_2)。

证明。 设 g^* 是一个全定义的 Δ^0_2 函数，具有原始递归逼近 $g(x, s)$。应用 [McC03，定理 2.7]中给出的分类， L必定包含某个 $n > 1$ 对应的 ω， ω^*， ζ或 $n * \eta$作为子区间。

首先，假设对于某个 $n > 1$， L 包含 $n * \eta$ 作为一个子区间。为了构造 L，我们以标准方式枚举 L 中除恰好包含 $n * \eta$ 的那个子区间以外的所有部分。我们只专注于构造这个子区间 $n * \eta$ 的准时表示。每 n 个连续元素称为一个 n-块。 A 将是“标准”副本；有一个原始递归过程可以计算 a_i 的后继，前提是它不是一个 n-块的最右元素。 A 中的 n-块也以标准方式生成。在每个阶段，在当前相邻的两个 n-块之间枚举一个新块。此外，分别在 A 中当前最左和最右 n-块的左侧和右侧，也枚举新的 n-块。容易看出， $A \cong n * \eta$。与往常一样， B 将是一个“延迟”副本，用于为每个 x编码稳定阶段 s_x 。

为每个 $x \in \omega$ 固定“标准”元素 b_x 。我们的意图是用 b_x 的后继来编码 s_x。在每个满足 $g(x, s) \neq g(x, s-1)$ 的阶段 s，枚举 $n-1$ 个新元素，并暂时将它们定义为与 b_x 位于同一个 n- 块中。更具体地说，我们将当前包含 b_x 的 n-块分成两个相继的 n-块。第一个以 b_x 为最左元素，并包含 $n-1$ 个新元素；第二个则包含与 b_x 位于同一个 n-块中的旧 $n-1$ 个元素，并加入一个新元素，使其成为一个 n-块。为确保 $B \cong n * \eta$，我们按照标准方式进行“稠密化”。由于假设 g^* 是全定义的，因此必定存在一个最终阶段，在该阶段包含 b_x 的 n-块被分开。此外，显然 b_x 的真正后继的指标是 $> s_x$。给定任意同构 $h : A \to B$，计算 $g(x, h(a))$，其中 a 是 $h^{-1}(b_x)$ 的后继（回想一下， a 可以原始递归地求得）。

构造可以安排如下。在阶段 s，在 A 和 B中，于当前相邻的任意两个 n-块之间枚举一个新的n-块。同时枚举新的最左侧和最右侧

n-块到 A和 B中。此外，如果 $g(x,\ s) \neq g(x,\ s-1)$，则分割包含 b_x的 n-块。显然，该构造是可行的，并且如前所述，给定任意同构 $h\colon A \to B$, $h \oplus h^{-1} \geq_{PR} g^*$。

现在假设 L不包含 $n * \eta$作为子区间。那么它必须包含 $\omega,\ \omega^*$ 或 ζ中的至少一个。和之前一样，我们按标准方式枚举 L 的其余部分，并着手构造仅包含 $\omega,\ \omega^*$ 或 L的子区间。我们只说明 $L = \omega$ 的证明，因为将其修改为 ω^* 或 ζ 的情况是显然的。

令 A为标准副本； $a_0 < a_1 < a_2 \ldots$。在 B中，我们再次固定一条标准递增链 $b_0 < b_1 < \ldots$。每当 $g(x,\ s) \neq g(x,\ s-1)$ 时，就枚举一个与b_x直接相邻的新元素。给定任意同构 $h\colon A \to B$以及任意 $x \in \omega$，计算 $g(x,\ h(a))$，其中 a 是 $h^{-1}(b_x)$的后继。这个值显然等于 $g^*(x)$。□

定理 3.4. $\mathtt{PRCatSpec}(\omega * \eta)$ = 锥(Δ^0_3)。

证明。 众所周知， $\omega * \eta$ 作为线性序是相对 Δ^0_3-范畴的。由事实 1.6，我们得到 $\mathsf{Cone}(\Delta^0_3) \subseteq \mathsf{PRCatSpec}(\omega * \eta)$。总体思路如下。给定一个全定义函数 g^*的原始递归逼近 $g(x,s,t)$，我们必须对每个 x 和 s编码阶段 s_x 和$t_{x,s}$ ，使其满足以下性质。

- For all $t \geq t_{x,s}$, $g(x,s,t) = g(x,s,t_{x,s})$.
- For all $s \geq s_x$, $\lim_t g(x,s_x,t) = \lim_t g(x,s,t)$.

照例，我们构造准时的 $A, B \cong \omega * \eta$ ，使得任意同构 $h\colon A \to B$ 都满足$h \oplus h^{-1} \geq_{PR} g^*$；为此，我们确保能够对每个 x利用$h \oplus h^{-1}$原始递归地恢复 s_x和t_{x,s_x}。

A 将构造为“标准”副本。每个 ω-链都将通过$a_{i,0} < a_{i,1} < a_{i,2} < \ldots$来编码。我们将此 ω-链称为 i^{th} ω-链。此外，有一个原始递归过程，给定任意两个 i, j，便会生成一个 k ，使得 k^{th} ω-链位于 i^{th}-链与 j^{th} ω-链之间。 B 将构造为可数多个子区间，对每个$i \in \omega$记作 B_i 。 B_0将与 $\omega * \eta$同构，而每个后续的 B_i都将与 $\omega + \omega * \eta$同构。于是所得结构 $B = B_0 + B_1 + \ldots$也将与 $\omega * \eta$同构。我们用 B_0表示编码$t_{x,s}$ 的策略，对每个 x, s；用 B_{x+1} 表示编码 s_x的策略。

编码 $t_{x,s}$：在 B_0 中，为每个 x, s 固定元素 $b^0_{x,s}$ 。在构造开始时，这些元素各自都是相应 ω-链的最小元素。每当发现 $g(x,s,t) \neq g(x,s,t-1)$ 时，我们就为 $b^0_{x,s}$ 枚举一个新的后继。由于假设对每个 x, s，$\lim_t g(x,s,t)$ 都存在，因此必定存在某个有限阶段，此后 $g(x,s,t)$ 的值不再改变。也就是说，我们只会有限次改变 $b^0_{x,s}$ 的后继；只要始终向右延伸这条链，这个过程就会构造出一条 ω-链。此外，$b^0_{x,s}$ 的最终后继显然具有指标$\geq t_{x,s}$。要恢复这个指标，只需计算给定同构 h : $A \to B$ 在元素 a_i,1 上的值，其中 i 满足 $h^{-1}(b^0_{x,s}) = a_i$,0（注意，$b^0_{x,s}$ 是 B 中一条 ω-链的最左元素）。由于 A 是标准副本，且根据假设 h 是同构， $h(a_i$,1) 必定是 $b^0_{x,s}$ 的后继。

编码 s_x: 令 $P(x,s)$ 表示谓词“对于所有 $s' \geq s$, $\lim_t g(x,s,t) = \lim_t g(x,s',t)$”。由于 g 是原始递归的，这是一个 Π^0_2 谓词。与之前一样，我们也可以假设，对于每个 x，都存在唯一的 s 使得 $P(x,s)$ 成立。在 $P(x,s)$ 看起来为真的阶段，

我们称 $P(x,s)$触发。由于 $P(x,s)$ 是 Π^0_2，它无限次触发当且仅当 $P(x,s)$ 为真。我们通过枚举元素 $b^{x+1}_{i\,0}$，来开始构造 B_{x+1}，每个 $i\in\omega$ 对应一组元素。我们按照其指标 i 的次序，将这些元素排成一条 ω-链，并称它们为 i^{th} 链。

每当 $P(x,\ s)$ 触发时，对每个 $n\geq s$，扩展 n^{th} 链，使其至少包含 s 个元素。此外，将第 n^{th} 条链与第 $n+1$ 条链之间的子区间扩展到阶段 s，并按 $\omega*\eta$ 的标准枚举进行扩展。这里的意图是：如果 $P(x,\ s)$ 无限次触发，那么对每个 $n<s$，b^{x+1}_n 与 b^{x+1}_{n+1} 之间只有有限多个元素；同时，对每个 $n\geq s$，第 n^{th} 条链与第 $n+1$ 条链之间的子区间将与 $\omega*\eta$ 同构。

最后，为了恢复 s_x，在 $h^{-1}(b^{x+1}_0)$ 和 $h^{-1}(b^{x+2}_0)$ 之间某条 ω-链的最小元素 $a\in A$ 上计算给定的同构 $h\colon A\to B$。如果 h 是同构，那么 $h(a)$ 必须严格位于 b^{x+1}_0 和 b^{x+2}_0 之间。事实上，$h(a)$ 甚至不可能与 b^{x+1}_0 位于同一条 ω-链上。但这样的元素的指标应为 $\geq s_x$，因为第一个在 b^{x+1}_s 和 b^{x+1}_0 之间有无限多个元素的 b^{x+1}_s 必须满足 $s\geq s_x$。

构造：由于 A 是标准枚举，我们只关注 B。在每个阶段 n，执行以下操作。

步骤 1： 对于每个 $\langle x,\ s\rangle\leq n$，若 $P(x,\ s)$ 触发，则针对每个 $s\leq m\leq n$，在 B_{x+1} 中的 m^{th} 链与第 $m+1$ 条链之间，枚举 $\omega*\eta$ 的一个标准副本，直至阶段 n。此外，对每个 $s\leq m\leq n$，向 m^{th} 链添加一个新的最右元素。

步骤 2： 对于每个 $\langle x,\ s\rangle\leq n$，若 $g(x,\ s,\ n)\neq g(x,\ s,\ n-1)$，则枚举一个新元素，并将其定义为 $b^0_{x,\ s}$ 的新后继。

步骤 3： 对于每个 $\langle x,\ s\rangle\leq n$，向当前包含 $b^0_{x,\ s}$ 的链添加一个新的最右元素。

验证：我们证明以下命题。

(i) 对每个 $x\in\omega$、$B_{x+1}\cong\omega+\omega*\eta$。此外，若 $P(x,\ s)$ 无限次触发，则 B_{x+1} 中前 $s+1$ 条链的和构成一条单独的 ω-链。

(ii) $B_0\cong\omega*\eta$，且对每个 x、s，包含 b^0_{x}、$_s$ 的链的最小元素的指标为 $\geq t_{x}$、$_{s}$。给定 $x\in\omega$，令 s_x 为使 $P(x,s_x)$ 无限次触发的唯一值。根据构造的步骤 1，我们由此得到，对每个 $m\geq s_x$，存在无限多个阶段 n，在这些阶段中，我们向 m^{th} 链引入一个新的最右元素。因此，对每个 $m\geq s_x$，m^{th} 链都是一条 ω-链。类似地，我们还得到，存在无限多个阶段n，在这些阶段中，我们在 B_{x+1} 中的第 m^{th} 条链与第 $m+1$ 条链之间，枚举 $\omega*\eta$ 的一个标准副本，直至阶段 n，对每个 $m\geq s_x$ 均如此。反过来，对每个 $m<s_x$，存在某个有限阶段，此后我们不再延长 m^{th} 链的长度；而在第 m^{th} 条链与第 $m+1$ 条链之间，$\omega*\eta$ 只有有限部分被枚举。也就是说，B_{x+1} 中位于 s^{th}_x 链左侧的元素只有有限个，并且所有后续链都是 ω-链，它们之间各有一个 $\omega*\eta$ 的副本。由此我们得到 $B_{x+1}\cong\omega+\omega*\eta+\omega+\omega*\eta+\ldots\cong\omega+\omega*\eta$。按照约定，包含在 B_{x+1} 的 $\omega*\eta$ 部分中的任何元素，其指标均为 $>s_x$，因为 B_{x+1} 的 s^{th}_x 链是 B_{x+1} 中第一条 ω-链的尾部。

对于(ii)，固定某个 $x,s\in\omega$。根据构造的步骤 2，每当 $g(x,s,n)\neq g(x,s,n-1)$ 时，$b^0_{x,s}$都会得到一个新的后继。由于假设 $\lim_t g(x,s,t)$ 存在，因此经过某个有限阶段后，我们将不再为$b^0_{x,s}$枚举新的后继。另一方面，根据构造的步骤 3，有无穷多个阶段会将包含 $b^0_{x,s}$ 的链向右延伸。因此，在构造结束时，每条这样的链都会成为一条 ω-链。通过谨慎安排这些链，我们可以得到 $B_0\cong\omega*\eta$。此外，我们还有最终后继

$b^0_{x,s}$ 的指标为 $\geq t_{x,s}$，因为每当逼近 $g(x,s,n)$ 发生变化时，我们总会枚举一个新的后继。

最后，给定 $h: A \to B$ 一个同构。对于任意 $x \in \omega$，首先计算 $h^{-1}(b_0^{x+1})$ 和 $h^{-1}(b_0^{x+2})$。由于 b_0^{x+1} 和 b_0^{x+2} 分别是 B_{x+1} 和 B_{x+2} 的最左元素，因此它们位于 B 中不同的 ω-链内。利用 A 是标准枚举这一事实，我们可以原始递归地获得某个元素 a，它严格位于 $h^{-1}(b_0^{x+1})$ 和 $h^{-1}(b_0^{x+2})$ 之间。现在，计算 $h(a)$，即可获得某个指标 $s^* \geq s_x$，因为 $h(a)$ 必须包含在 B_{x+1} 中 $\omega * \eta$ 的副本内。一旦获得这样的 s^*，就计算 $h(a')$，其中 a' 是 $h^{-1}(b^0_{x,s^*})$ 的后继。如前所述，由于 A 是标准的，因此可以从 $h^{-1}(b^0_{x,s^*})$ 原始递归地找到这样的 a'。根据上述论证，$h(a')$ 必须具有指标 $t^* \geq t_{x,s^*}$。由此可得，$g(x,s^*,t^*) = \lim_t g(x,s^*,t) = \lim_s \lim_t g(x,s,t) = g^*(x)$。定理 3.4 得证。□

注 3.5. 注意，如果 $L = \mathtt{Shuffle}(\{\omega\} \cup F)$，那么 $L \cong L + \omega + L + \omega + \ldots$。换言之，在假设 L 可计算呈现（因此根据定理 *1.1* 逐点可呈现）的情况下，我们可以在定理 *3.4* 的证明中用 L 替换 $\omega * \eta$，从而得到 $\mathtt{PRCatSpec}(L) \subseteq$锥$(\Delta^0_3)$。

推论 3.6. 设 F 是一个线性序的可计算族。如果 $L = \mathtt{Shuffle}(\{\omega\} \cup F)$ 是 Δ^0_3-范畴的，那么 $\mathtt{PRCatSpec}(L) =$锥(Δ^0_3)。

注意，定理 3.4 证明中所用线性序的一个关键性质是，我们可以在单个 ω 链中“隐藏”无穷多个指标“较小”的元素。这确保我们能够构造只包含指标足够大的元素的子区间。例如，定理 3.4 的证明中每个 B_{x+1} 里的 $\omega * \eta$ 副本，只包含指标大于某个稳定阶段 s_x 的元素。因此，在考虑某个线性序族 F 的 Shuffle(F) 形式的线性序时，我们猜想，对于 F 包含某个无限线性序（其中至少有两个相邻元素）的情况，其证明将与前面给出的证明类似。为此，我们转而关注 F 不包含任何无限线性序的情况。

定理 3.7。设 L 是形如 $\mathtt{Shuffle}(F)$ 的线性序，其中 $|F| > 1$ 和 F 是有限线性序的一个可计算族，则 $\mathtt{PRCatSpec}(L) =$锥(Δ^0_3)。

证明。固定有限线性序的一个可计算族 F，并令 $M < N$ 为 F 中所含线性序的两个最小大小。我们将它们称为 M-链和 N-链。再次地，给定一个全定义的 Δ^0_3 函数 g^*，目标是编码阶段 s_x、t_x、s，使得对于每个 $s \geq s_x$，$\lim_t g(x,s_x,t) = \lim_t g(x,s,t)$，并且对于每个 $t \geq t_x$，$s(g,x,s)\ t(g,x,s,t_x)$，其中 s 是 g 的一个给定原始递归逼近。令 g^* 为 Shuffle(A) 的“标准”枚举；存在原始递归过程可以完成以下操作。

- 给定任意元素 a，我们可以判断 a 是否属于一条 M-链或 N-链（如果两者都不成立，则输出某个特殊符号）。
- 给定任意两个元素 a，a'，我们可以给出严格位于 a 和 a'之间的 M-链（类似地，也可以给出 N-链）中元素的指标。

B将以与之前类似的方式构造。令 $B = B_0 + B_1 + \ldots$，其中 $B_0 \cong$Shuffle(F)，而每个后续的 $B_x \cong M +$Shuffle(F)。我们使用 B_0对每个 $t_{x,s}$进行编码，其中 $x,s \in \omega$，并使用 B_{x+1}对每个 s_x 进行编码，其中 $x \in \omega$。

编码 $t_{x,s}$：在 B_0 中，固定元素 $b_{x,s}$，并始终将它们保留为某个 N-链的最左元素。注意，由于 $N > M \geq 1$，N 至少为 2；也就是说，包含 $b_{x,s}$ 的 N-链中至少还会有另一个元素。显然，与 $b_{x,s}$ 位于同一 N-链中的元素将用于编码 $t_{x,s}$。每当 $g(x,s,t) \neq g(x,s,t-1)$ 时，我们就将当前的 N-链分成两个新的 N-链：一个包含 $b_{x,s}$ 以及 $N-1$ 个新元素（其指标为 $\geq t$），另一个包含一个新元素以及剩余的 $N-1$ 个元素。由于 $t_{x,s}$ 必须存在，$b_{x,s}$ 将是某个 N-链的最左元素，而其他 $N-1$ 个元素的指标都至少为 $t_{x,s}$。给定任意同构 $h: A \to B$，通过计算 $h(a)$ 可以轻松恢复这一点，其中 a 是 $h^{-1}(b_{x,s})$ 的后继。

编码 s_x：令 $P(x,s)$ 表示谓词“对所有 $s' \geq s$，$\lim_t g(x,s,t) = \lim_t g(x,s',t)$”，并假设对于每个 x，恰好存在一个 s，使得 $P(x,s)$ 无限次触发（看起来在无限多个阶段都为真）。这里的想法是确保 B_{x+1} 中除最左边一条之外的所有 M-链，其指标都为 $\geq s_x$。固定对 Shuffle(F) 的某个枚举。凡是原本要枚举一条 M-链的地方，我们改为枚举一条 N-链，并将其前 M 个元素标记为 $P(x,s)$，其中 $s \in \omega$ 取不同的值。每当 $P(x,s)$ 触发时，对于每个 $s' \geq s$，将每条包含带有标记 $P(x,s')$ 的 M-链的 N-链，拆分为 $N-M+1$ 条新链，其中一条是带标记的 M-链，其余都是单点链。拆分后，将所有单点链延伸为新的 N-链，并将带标记的 M-链延伸为新的 N-链。在构造结束时，这些带标记的 M-链各自将呈现以下某一种形式。

- 如果 $P(x,s)$ 无限次触发，那么任何带有 $P(x,s')$ 标记的 M-链都会无限次地被移除其“尾部”。因此，在构造的极限中，它们会变成 M-链。此外，移除这些“尾部”所产生的所有“无用部分”都会变成N-链。
- 反之，如果对于所有 $s' \leq s$，$P(x,s')$ 只触发有限次，那么经过某个有限阶段后，带有 $P(x,s)$ 标记的 M-链的“尾部”将不再被移除。因此，在构造结束之前，它会一直保持为一个 N-链。

这里的想法是，这些带标签链中只有有限多个是 N-链，其余的都会变成 M-链。特别是，只要谨慎安排这些带标签链的枚举，所得的同构类型仍应为 Shuffle(F)。最后，由于这一过程形成的 M-链恰好是那些带有 $P(x,s')$ 标记、且对于某个 $s \leq s'$，$P(x,s)$ 无限次触发的链，因此，B_{x+1} 中除最左边那条以外的所有 M-链的指标都必须是 $\geq s_x$。要恢复这一阶段，令 b_{x+1}, b_{x+2} 分别为 B_{x+1} 和 B_{x+2} 中最左边的元素。那么，对于任意给定的同构 $h: A \to B$，我们计算 $h(a)$，其中 a 是严格位于 $h^{-1}(b_{x+1})$ 和 $h^{-1}(b_{x+2})$ 之间某条 M-链中的一个元素。也就是说，$h(a)$ 是一条严格位于 b_{x+1} 和 b_{x+2} 之间的 M-链，因此其指标应为 $\geq s_x$。

构造：在构造过程中，我们维护队列 Q_x，以决定各种 B_x 的枚举。在每个阶段 n，执行以下操作。

步骤 1： 对于当前位于 B_0 中的每一对链，以及当前缺失于这两条链之间的 F 的每个成员，将一个枚举缺失链的动作加入队列 Q_0。然后选取队列中的第一个动作，并枚举 F 中所需的成员。如果我们还知道被枚举的是一条 N-链，那么就用 $b_{x,\ s}$ 标记这条 N-链的最左元素，其中 $\langle x,\ s\rangle$ 是尚未使用过的最小标签。

步骤 2： 如果 $g(x,\ s,\ n) \neq g(x,\ s,\ n-1)$，则按照编码 $t_{x,\ s}$ 的策略中描述的过程执行。

步骤 3： 枚举 B_{n+1} 中最左侧的 M-链，并指定一个元素 b_{n+1}。**步骤 4：** 对于每个 $x \leq n$，对于 B_{x+1} 中的每对链，以及对于当前缺失于这些链之间的每个 $F \setminus \{M\text{-链}\}$，添加一个动作，将缺失的链枚举到队列 Q_{x+1} 中。类似地，对于 B_{x+1} 中尚未包含任何标记为 $P(x,\ s)$ 的链（其中 $s \in \omega$ 位于它们之间）的每对链，我们也添加一个动作，将缺失的链枚举到 Q_{x+1} 中。从 Q_{x+1} 中选取第一个动作，并将所需的链枚举到相应的子区间中。

步骤 5： 若 $P(x,\ s)$ 触发，则按照前文所述的过程，对每个满足 $s \leq s' \leq n$ 的 s'，处理标记为 $P(x,\ s')$ 的链。

验证：我们验证 $B \cong \mathrm{Shuffle}(F)$，并且每个 B_x 都具有策略中所述的期望性质。从构造的步骤 1 可明显看出，$B_0 \cong \mathrm{Shuffle}(F)$。对于任意两条链，在某个阶段，它们之间必定会枚举出 F 中每个成员的至少一个。此外，显然，对于每个 $x,\ s \in \omega$，在 B_0 中存在一条 N- 链，其最左元素为 $b_{x,\ s}$，且 $b_{x,\ s}$ 的后继指标为 $\geq t_{x,\ s}$。

还需证明，对于每个 $x \in \omega$，$B_{x+1} \cong M + \mathrm{Shuffle}(F)$。按照编码 s_x 的策略描述，在构造的极限中，只有有限多条带标签链会成为 N-链；这些链恰好是标记为 $P(x, s')$ 的链，其中某个 $s' < s$ 满足 s 是使 $P(x, s)$ 成立的唯一值。我们依次将这些链记为 $C_0, C_1, \ldots, C_{s-2}$。由于所有其他带标签链在构造的极限中都会成为 M-链，根据构造的步骤 4，C_i 与 C_{i+1} 之间的子区间同构于 $\mathrm{Shuffle}(F)$。对于 B_{x+1} 中位于 C_0 左侧或 C_{s-2} 右侧的子区间，也应有类似性质。换言之，连同 B_{x+1} 中最左边的 M-链，我们有：$B_{x+1} \cong M\text{-链} + \mathrm{Shuffle}(F) + N\text{-链} + \mathrm{Shuffle}(F) + N\text{-链} + \cdots + \mathrm{Shuffle}(F)$。由于 N-链是族 F 的一个成员，$B_{x+1} \cong M + \mathrm{Shuffle}(F)$。

为了恢复 $g^*(x)$，对于给定的任意同构 $h : A \to B$，应用以下过程。计算 $h(a)$，其中 a 是介于 $h^{-1}(b_{x+1})$ 与 $h^{-1}(b_{x+2})$ 之间的某条 M-链中的一个元素。于是 $h(a)$ 必须包含在介于 b_{x+1} 与 b_{x+2} 之间的某条 M-链中，这保证它具有某个指标 $s^* \geq s_x$。对于此指标 s^*，通过计算 $h(a')$ 找出 b_x 的后继 $_{s^*}$，其中 a' 是 $h^{-1}(b_{x,s})$ 的后继。这样我们就能得到指标 $t^* \geq t_{x,s^*}$。最后，计算 $g(x, s^*, t^*)$，它必定等于 $g^*(x)$。定理 3.7 得证。□

定理 3.8. $\mathtt{PRCatSpec}(\omega + \eta) = \text{锥}(\Delta^0_3)$。

证明。与之前一样，我们用 s_x 和 $t_{x,s}$ 表示满足 $\lim_t g(x, s_x, t) = \lim_s \lim_t g(x, s, t)$ 且 $g(x, s, t_{x,s}) = \lim_t g(x, s, t)$ 的阶段，其中给定了一个指向全定义 Δ^0_3 函数 g^* 的原始递归逼近 g。令 A 为 $\omega + \eta$ 的标准副本；ω 部分和 η 部分都按标准方式枚举。与定理 3.4 和 3.7 的证明不同，我们不再有用于编码各个稳定阶段的唯一位置。我们需要能够将用于编码各个 t_x、s 和 s_x 的位置“嵌套”起来。因此，我们采用了与之前略有不同的方法。

编码 $g^*(0)$：我们需要编码两件主要的事情。首先，我们必须编码 s_0；其次，对于每个 $s \in \omega$，我们必须编码 $t_{0,\ s}$。B 一开始将是一条 ω-链，由元素 $b_0 < b_1 < \ldots$ 组成。每当 $g(0,\ s,\ t) \neq g(0,\ s,\ t-1)$ 时，我们就为元素 b_s 枚举一个新的后继。显然，这里的意图是确保 b_s 的后继具有指标 $\geq t_{0,\ s}$。

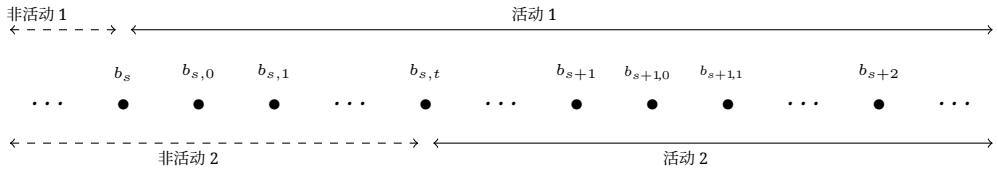


FIGURE 1. 若 $P(0,\ s)$ 和 $P(1,\ t)$ 触发，则为活动区间。

令 $P(x,s)$表示 Π^0_2 谓词“对于所有 $s' \geq s$，$\lim_t g(x,s,t) = \lim_t g(x,s',t)$”，并假设对于每个 x，都存在唯一一个 s 使得 $P(x,s)$成立。每当 $P(0,s)$触发时，对于每个 $s' > s$，都对$b_{s'}$与 $b_{s'+1}$之间的区间进行“稠密化”。由于 $P(0,s)$成立，当且仅当 $P(0,s)$无限次触发，因此显然，对于 $s > s_0$，b_s 与 b_{s+1} 之间的每个区间都同构于 η。其想法是，b_{s_0}应当始终处于 B的 ω 部分。

要恢复 $g^*(0)$ 的值，对于给定的同构 $h : A \to B$，计算 h 在 A 的 η 部分中某个元素上的值。由于 h 是同构，它应映射到 B的 η 部分。这应当具有指标 $s^* \geq s_0$。得到这样的指标后，我们对每个 $s \leq s^*$计算 $h^{-1}(b_s)$。由于A 是标准的，我们可以用原始递归的方法发现 $h^{-1}(b_s)$ 是否属于 A的 ω 部分或 η 部分。根据上文所述的策略，至少有一个 $h^{-1}(b_s)$ 应包含在 A的 η 部分中。对于使 $h^{-1}(b_s)$ 包含在 A的 ω 部分中的最后一个s，其指标必定恰好为 s_0。找到 s_0 后，我们再次使用 h^{-1} 和 h 来求出 b_{s_0}的后继，其指标应为$\geq t_{0,\ s_0}$，从而使我们能够计算 $g^*(0)$。

元素标记：在解释如何嵌套策略来编码各种$g^*(x)$之前，我们先为 B的元素引入一个标签系统。每个标签都是一个字符串 $\sigma \in \omega^{<\omega}$；如果其长度为 $x+1$，那么为了编码 $g^*(x)$，我们会对它进行枚举。如前所述，元素 b_0、b_1，..... 是为了编码 $g^*(0)$。我们通过规定 $\sigma \leq \tau$ 当且仅当 σ 是 τ 的前缀，或 σ 按字典序排在 τ之前，在这些标签（从而也在这些元素）上诱导出一个良序。

编码 $g^*(x)$：为了嵌套策略，我们递归地定义活动区间。每当 $P(0,\ s)$触发时，b_s 左侧的所有区间都被声明为对 $x = 1$非活动，而 b_s右侧的所有区间都将被声明为对 $x = 1$活动。这些定义一直保持有效，直到下一个 $P(0,\ s')$触发，之后我们会重新定义活动和非活动区间（针对 $x = 1$）。这里的思路是，我们只在已被声明为对 x活动的区间中应用 $g^*(x)$的策略。

令 σ 满足：b_σ 左侧的区间已声明为对 x 非活动，而 b_σ 右侧的区间已声明为对 x 活动。对于每个 $\tau \geq \sigma$（回想一下先前定义的标签顺序），我们开始枚举元素 $b_{\tau^\frown 0}$、$b_{\tau^\frown 1}$，.....，以便对 $g^*(x)$ 进行编码。每当 $g(x、\ s、\ t) \neq g(x、\ s、\ t-1)$ 时，就枚举一个新的后继元素，使其成为指标为 $\geq t$ 的元素 $b_{\tau^\frown s}$ 的后继。如果 $P(x、\ s)$ 触发，则对每个 $s' > s$，将 $b_{\tau^\frown s'}$ 与 $b_{\tau^\frown (s'+1)}$ 之间的区间“稠密化”。此外，将 $b_{\sigma^\frown s}$ 左侧的区间声明为对 $x+1$ 非活动，并将 $b_{\sigma^\frown s}$ 右侧的区间声明为对 $x+1$ 活动（示例见图 1）。

这里的粗略思路是，对于每个 y，$b_{s_0,s_1,\ldots,s_y}$左侧只有有限多个元素，并且$b_{s_0,s_1,\ldots,s_y+1}$ 右侧的区间与 η同构。此外，$b_{s_0,s_1,\ldots,s_y}$ 包含在 B的 ω 部分中，而$b_{s_0,s_1,\ldots,s_y+1}$ 包含在 B的 η 部分中。为了恢复 $g^*(x)$，递归地假设 $s_0, s_1, \ldots, s_{x-1}$ 都已找到。给定任意一个同构$h : A \to B$，计算 $h(a)$，其中 a 位于 A的 η 部分中，且在 $h^{-1}(b_{s_0,s_1,\ldots,s_{x-1}+1})$左侧，

这为指标 s^*提供了一个上界，使得$b_{s_0,s_1,\ldots,s_{x-1},s^*}$ 包含在B的 ω 部分中。对每个 $s \leq s^*$计算 $h^{-1}(b_{s_0,s_1,\ldots,s_{x-1},s})$，我们便能准确找到最大的 s ，使得$b_{s_0,s_1,\ldots,s_{x-1},s}$ 包含在 B的 ω 部分中。根据构造，这个 s 应恰好是s_x。找到 s_x 后，我们可以通过使用 h, h^{-1}计算$b_{s_0,s_1,\ldots,s_x}$ 的后继，轻松恢复一个指标 $t^* \geq t_{x,s_x}$ 。

上述想法与一个 $\emptyset''$-优先论证非常相似，这或许并不令人意外。在某些方面，“真实路径”计算出我们的结构 B中 ω 部分与 η 部分之间的分界点，这与寻找 $\omega + \eta$的两个表示之间的同构时遇到的主要困难相吻合。

构造： 在构造过程中，我们为每个 $x \leq n$ 维护参数$s_{x,n}$ ，其定义为满足 $P(x, s)$已触发的最新值 s 。显然，$\liminf_n s_{x,n} = s_x$是使$\lim_t g(x, s_x, t) = g^*(x)$成立的值。为方便记号，令$\delta_{0,n} = \langle\rangle$ 和$\delta_{x,n} := \langle s_{0,n}, s_{1,n}, \ldots, s_{x-1,n}\rangle$。在构造的阶段 n，执行以下操作。

步骤 1： 对每个 $x \leq n$，将$b_{\delta_{x,n}{}^\frown(s_{x,n}+1)}$右侧的区间稠密化；对于区间中当前相邻的每一对元素，在它们之间枚举一个新元素。按照约定，我们可以假设该元素的指标大于此前相邻的那对元素的指标。

步骤 2： 对于每个 $i, x \leq n$ 以及每个 $\tau \geq \delta_{x,n}$，其中 $|\tau| = x$，若元素 $b_{\tau^\frown i}$ 尚未被枚举，则将它们枚举到 B 中。对于给定的 σ 和 x，枚举标签为 $\sigma^\frown x^\frown 0$ 的元素时，确保在区间$b_{\sigma^\frown x}$ 和 $b_{\sigma^\frown(x+1)}$内由步骤 1 枚举的所有更早元素都位于 $b_{\sigma^\frown x^\frown 0}$ 的左侧。这样做是为了使 $b_{\sigma^\frown x^\frown 0}$ 和$b_{\sigma^\frown(x+1)}$ 之间元素的指标保持（相对）较大。

步骤 3： 如果 $g(x, s, n) \neq g(x, s, n-1)$，那么对于每个满足 $|\tau| = x$ 的 $\tau \geq \delta_{x,n}$，若元素 $b_{\tau^\frown s}$ 当前位于该结构中，则为其枚举一个新的后继。**步骤 4：** 如果 $P(x, s)$ 触发，则更新 $s_{x,n+1} = s$。

验证： 令 δ_x 定义为 $\langle s_0, s_1, \ldots, s_{x-1}\rangle$，其中 s_y是满足 $\lim_t g(y, s_y, t) = g^*(y)$ 的值。我们证明，对于每个 $x \in \omega$，在 $b_{\delta_x{}^\frown s_x}$ 左侧曾被枚举的元素只有有限多个，并且 $b_{\delta_x{}^\frown(s_x+1)}$ 右侧的区间与 η同构。

令 n^* 为一个足够大的阶段，使得对于任何 $s < s_0$， $P(0, s)$ 都不再触发。这样的阶段必定存在，因为我们假设恰有一个 s 使得 $P(0, s)$ 无限次触发。根据构造，在每个阶段 n，我们只会出于以下原因枚举元素。

- 首先，所枚举的元素是为了步骤 1。这些元素被枚举出来，是为了将 $b_{\delta_{y,\,n}{}^\frown(s_{y,\,n}+1)}$右侧的区间稠密化。根据标签上的序关系，对于任意 y，对于任何 $n \geq n^*$，我们总有 $\delta_{y,\,n}{}^\frown(s_{y,\,n}+1) \geq s_{0,\,n} \geq s_0$ （作为标签）。因此，这些元素只会在 b_{s_0}右侧被枚举。
- 其次，所枚举的元素具有 $b_{\tau^\frown i}$ 的形式，其中$\tau \geq \delta_{y,\,n}$ 并且 $|\tau| = y$ （为步骤 2 考虑）。我们可以假设 $y > 0$，因为左侧必然只有有限个具有$b_{\delta_{0,\,n}{}^\frown i}$ 形式的元素位于 b_{s_0}的左边。与之前一样，对于 $y > 0$，我们始终有$\delta_{y,\,n} \geq s_{0,\,n} \geq s_0$，对于任意 $n \geq n^*$均如此，因此， $b_{\tau^\frown i}$ 必定位于 b_{s_0}的右侧。
- 最后，步骤 3 可能会为结构中当前的每个带标签元素再添加有限多个元素。因此，经过某个有限阶段后，这不再影响步骤 2 在 b_{s_0} 左侧添加的有限多个带标签元素。

因此，经过某个有限阶段后，不会再有新元素被枚举到 b_{s_0}左侧。也很容易看出，由于 $P(0,\ s_0)$ 会无限次触发，我们会在无限多个阶段对 b_{s_0+1}右侧的区间进行稠密化。因此， b_{s_0+1} 右侧的区间与 η同构。

现给定 $x>0$ 。由归纳法，我们有：在 $b_{\delta_x}=b_{\delta_{x-1}{}^\frown s_{x-1}}$ 左侧曾被枚举的元素只有有限多个，且 $b_{\delta_{x-1}{}^\frown(s_{x-1}+1)}$ 右侧的区间同构于 η。固定一个足够大的阶段 n^*，使得在阶段 n^* 之后，对任意 $y\le x$， $P(y,s)$ 对任意 $s<s_y$ 都不再触发，并且不再有元素被枚举到 b_{δ_x} 的左侧。我们再次分析在这样一个阶段之后，构造将元素枚举到何处。

- 构造的步骤 1 可能会稠密化$b_{\delta_{y,n}{}^\frown(s_{y,n}+1)}$ 右侧的区间，对每个$y\le n$。注意 y 可能大于 x。由 n^* 的选取，我们有：对每个$n\ge n^*$ 以及对每个 $z\le x,\ s_z\le s_{z,n}<s_{z,n}+1$。因此，由区间上定义的序，$\delta_{y,n}{}^\frown(s_{y,n}+1)\ge\langle s_0,s_1,\dots,s_y,\dots,s_x\rangle=\delta_x{}^\frown s_x$。在阶段 n^* 之后，该动作只会使元素被枚举到 $b_{\delta_x{}^\frown s_x}$ 的右侧。
- 对于构造的步骤 2，我们枚举形如 $b_{\tau^\frown i}$ 的元素：对每个 $i,\ y\le n$以及每个 $\tau\ge\delta_{y,\ n}$ ，其中 $|\tau|=y$。根据 n^*的选取，所有这类元素都位于 b_{δ_x}的右侧。反设其中一个元素严格位于 b_{δ_x} 和$b_{\delta_x{}^\frown s_x}$之间。若 $|\tau|=x$，那么要使 $b_{\tau^\frown i}$ 严格位于 b_{δ_x} 和 $b_{\delta_x{}^\frown s_x}$之间，就必须有 $i<s_x$。然而，这样的元素显然只有有限个，我们只需选取一个足够大的阶段，使它们都已被枚举。因此，我们可以假设 $|\tau|>x$。

  如果 $|\tau|>x$ 和 $b_{\tau^\frown i}$ 严格位于 b_{δ_x} 和 $b_{\delta_x{}^\frown s_x}$之间，那么必定存在某个 $n\ge n^*$，使得 $\delta_x\le\delta_{y,\ n}\le\tau<\tau^\frown i\le\delta_x{}^\frown s_x$。根据标签上的序的定义，$\delta_x$ 必须是 $\delta_{y,\ n}$的前缀。此外，由于$|\delta_{y,\ n}|=y=|\tau|\ge x+1$， $\delta_{y,\ n}$ 实际上包含$\delta_x{}^\frown s_{x,\ n}$ 作为前缀。根据 n^*的选取，我们知道对于任意 $n\ge n^*$， $s_{x,\ n}\ge s_x$，也就是说 $\delta_{y,\ n}\ge\delta_x{}^\frown s_x$，从而导出矛盾。
- 基于与之前相同的理由，由于步骤 2 只会在 $b_{\delta_x{}^\frown s_x}$ 左侧枚举有限个带标签的元素，因此步骤 3 可能只会在 $b_{\delta_x{}^\frown s_x}$ 左侧再增加有限个元素。

因此，曾在 $b_{\delta_x{}^\frown s_x}$ 左侧被枚举的元素总共只能有有限个。容易看出，由于对每个 $y\le x$， $P(y,\ s_y)$ 都会无限次触发，因此 $b_{\delta_x{}^\frown(s_x+1)}$ 右侧的区间会被无限次稠密化，从而得到一个与 η 同构的区间。

注意，根据标签上的序，我们得到 I_{x+1} 始终是 I_x 的真子区间，其中 I_x 定义为由 $b_{\delta_x{}^\frown s_x}$ 和 $b_{\delta_x{}^\frown(s_x+1)}$ 界定的区间。结合以下事实应用这一点： I_x 左侧始终只有有限个元素，而 I_x 右侧的元素集合与 η 同构。由此我们得到 $B\cong\omega+\eta$。此外，通过在构造的步骤 2 中对元素进行谨慎枚举，我们还可得出， I_x 的 η 部分中的任何元素，其指标都是 $>s_{x+1}$。

设 $h:A\to B$ 是一个同构，并设 $x\in\omega$ 已给定。要计算 $g^*(0)$，首先对 η 中 A 的部分里的任意元素 a，计算 $h(a)$。显然， $h(a)$ 也应包含在 A 的 η 部分中。也就是说， $h(a)$ 应位于形如 $b_{\delta_y{}^\frown(s_y+1)}$ 的元素右侧，其中某个 $y\ge0$ 满足条件。任何这样的元素都必定位于 b_{s_0} 右侧； $h(a)$ 的指标必须是 $s^*>s_0$。对每个 $s\le s^*$ 计算 $h^{-1}(b_s)$，即可找出 s_0，它是使 $h^{-1}(b_s)$ 仍包含在 A 的 ω 部分中的最后一个指标。找到 s_0 后，计算 $h(a^*)$，其中 a^* 是 $h^{-1}(b_{s_0})$ 的后继。根据构造的步骤 2，这样的元素的指标必须是 $t^*\ge t_{0,s_0}$。最后，通过计算 $g(0,s_0,t^*)$，即可得到 $g^*(0)$。显然，这一过程是原始递归的。

递归地假设我们已对每个 $y < x$ 计算出 s_y。要计算 $g^*(x)$，我们采用以下步骤。首先，对位于 A 的 η 部分中、且在 $h^{-1}(b_{\delta_{x-1}^\frown(s_{x-1}+1)})$ 左侧的某个 a，计算 $h(a)$。也就是说，$h(a)$ 必须包含在 I_{x-1} 的 η 部分中，因此其指标为 $> s_x$。重复之前的类似步骤，即可得到 s_x 以及某个指标 $t^* \geq t_{x,\, s_x}$。因此，$h \oplus h^{-1} \geq_{PR} g^*$。定理 3.8 得证。□

4. Boolean Algebras

回顾一下，布尔代数是一种（函数型）结构，在并（记作 $\vee$）、交（记作 $\wedge$）这两种二元运算，以及补（记作 $\neg$）这一元运算下封闭，并包含两个通常称为顶元和底元的"特殊"元素。本文中，我们考虑的每个布尔代数都具有某个线性序 L 上的 $\mathrm{Int}(L)$ 形式，其定义如下。布尔代数 $\mathrm{Int}(L)$ 是 L 的子集构成的最小集合，它包含 L、对每个 $x, y \in L$ 都包含区间 $[x, y)$，并且在（有限）并集、交集和补集运算下封闭。显然，L 和 $\emptyset$ 分别是 $\mathrm{Int}(L)$ 的顶元和底元，而并集、交集和补集运算分别对应于并、交和补运算。

注 4.1. 可以看出，$\subseteq$ 关系在 $\mathrm{Int}(L)$ 的元素上诱导出一个自然的偏序。利用这一序关系，我们称元素 a 低于 b，意指 $a \vee b = b$（等价地说，$a \wedge b = a$）。如果还满足 $a \neq b$，那么我们称 a 严格低于 b。

处理布尔代数时，我们将使用生成元树来安排它们的枚举（详情见 [Gon97]）。简而言之，我们只"控制"布尔代数某个生成集的枚举。由于这些结构旨在成为准时结构，我们默认在每个阶段都按需将相应并与交的新元素加入结构。

定理 4.2。如果 B 是一个无限的相对可计算范畴布尔代数，那么我们有 $\mathtt{PRCatSpec}(B) = \text{锥}(\Delta^0_1)$。

证明。可计算范畴布尔代数是有限布尔代数与可数无原子布尔代数的有限和 [GD80, Rem81a]。（此外，对于可计算布尔代数，Δ^0_1-范畴性与相对 Δ^0_1-范畴性的概念相同。）构造准时副本 A, B 时，我们在构造的第一个阶段就枚举所有有限部分，因此可以假设我们只需构造 $A, B \cong \mathrm{Int}(\eta)$。照例，给定一个全可计算函数 g，我们对每个 x 编码满足 $g(x)\downarrow$ 的阶段。

令 A 为 $\mathrm{Int}(\eta)$ 的标准枚举。在 B 中，我们保留特殊元素 $b_0, b_1, \ldots,$，并暂时将它们留作原子，直到 $g\downarrow$。更具体地说，在等待 $g(x)\downarrow$ 期间，b_x 将保持为原子。一旦 $g(x)\downarrow$，我们就开始拆分 b_x。这确保任何严格小于 b_x 的元素，其指标都大于计算 $g(x)$ 停机时所处的阶段。

构造：在阶段 0，将 B 的最大元拆分为 b_0 和 $c_0 := \neg b_0$。在后续阶段 s，将 c_{s-1} 拆分为 b_s 和 $c_s := c_{s-1} \wedge \neg b_s$。此外，如果 $g(x)[s]\downarrow$，则开始在 b_x 以下枚举 $\mathrm{Int}(\eta)$ 的一个标准副本。

计算 $g(x)$：设 $h : A \to B$ 是一个同构。首先，计算 $h^{-1}(b_x)$。由于 A 是标准的，我们可以原始递归地得到 a，a'，使得 $a \vee a' = h^{-1}(b_x)$ 且 $a \wedge a' = \emptyset$。因此，$h(a)$ 的指标应大于 $g(x)\downarrow$ 所在的阶段，因为 $h(a) \vee h(a') = b_x$，而这类元素只有在 $g(x)\downarrow$ 之后才会被枚举到 B 中。□

定理 4.3. 如果 B 是一个相对Δ_2^0-范畴的布尔代数，但不是相对 Δ_1^0- 范畴的，那么 PRCatSpec(B) =锥(Δ_2^0)。

证明。 众所周知，相对 Δ_2^0范畴的布尔代数是可计算范畴布尔代数的有限和，其中包含有限多个 Int(ω) 的副本 [McC03]。此外，布尔代数的 Δ_2^0范畴性与相对 Δ_2^0范畴性是一致的 [Baz14]。）给定任意一个相对 Δ_2^0范畴的布尔代数，我们可以按标准方式枚举除一个 Int(ω) 副本之外的所有部分。因此，我们只需专注于构造 A， $B \cong$ Int(ω)。设 g^* 是一个具有原始递归逼近 $g(x,\ s)$ 的全定义函数。与定理 4.2 的证明一样，我们只说明如何枚举 A， B 的生成元。照例，我们用 s_x 表示满足以下条件的值：对于所有 $s \geq s_x$，$g(x,\ s_x) = g(x,\ s)$。

编码 s_x： A 将按“标准”方式枚举； a_0 是最大元，并且对于每个$i \in \omega$， a_i 恰好是一个原子与 a_{i+1}的并。在 B中，我们预留特殊元素 b_0，b_1，.....，意图是用它们编码 s_x ，每个 b_x对应一个元素。每个 b_x 都会分裂成有限多个原子以及另一个 Int(ω) 的副本。每当 $g(x,\ s) \neq g(x,\ s-1)$ 时，我们就把 $\neg b_x$ 中的一个原子分裂成 s 个原子。注意，由于假定 g^* 是全定义的，这一过程必定会终止，因此 $\neg b_x$必定只由有限多个原子组成。显然，构成 $\neg b_x$的原子数量编码了 s_x。

构造：在阶段 0，枚举 a_0 和 b ，其中 b 是 b_0 与一个原子的并，并分别将它们作为 A 和 B 的顶元。在每个后续阶段 s，将 a_{s-1} 分裂为 a_s 与一个原子。对 b_{s-1} 也做同样的处理。为方便起见，我们还定义 $c_0 = \neg b_0$ 和 $c_x = b_{x-1} \wedge \neg b_x$。如果还发现 $g(x,\ s) \neq g(x,\ s-1)$，那么就继续分裂当前构成 c_x 的原子，直到 c_x 成为 s 个原子的并。

计算 $g^*(x)$：容易看出， $B \cong$ Int(ω)，并且对每个 $x \in \omega$， c_x 恰好是 s_x 个原子的并。从构造可以明显看出， $\neg b_x$ 应当是$s_0 + s_1 + \cdots + s_x$个原子的并。给定一个同构 $h\colon A \to B$，计算 $h^{-1}(\neg b_x)$ 因而应能让我们取回构成 $\neg b_x$ 的原子数。特别是，由于 A 是标准的，我们可以原始递归地取回构成 $h^{-1}(\neg b_x)$ 的原子数。令 i 为这个数。因此，我们可以通过计算 $g(x,\ i)$ 得到 $g^*(x)$。□

定理 4.4。 如果 B 是相对 Δ_3^0-范畴的布尔代数，但不是相对 Δ_2^0-范畴的，那么 PRCatSpec(B) =锥(Δ_3^0)。

McCoy [McC02, 定理 3.14] 证明了，相对 Δ_3^0-范畴的布尔代数是相对 Δ_2^0-范畴的布尔代数的有限和，其中 Int($\omega * \eta$) 和 Int($\omega + \eta$) 各有有限多个副本。因此，与定理 4.3 的证明类似，这里只需考察两种情形： $B =$ Int($\omega * \eta$)（见下文引理 4.6）和 $B =$ Int($\omega + \eta$)（引理 4.7）。

ˆ**记号 4.5.** 设 b 为布尔代数的一个元素。我们用 b 表示位于 b之下的布尔代数。

引理 4.6。 PRCatSpec(Int($\omega * \eta$)) = 锥(Δ_3^0)。

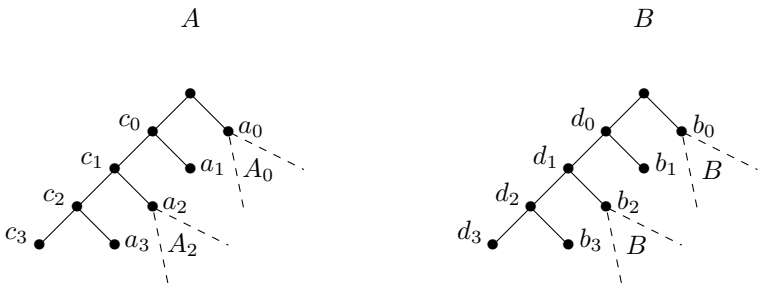


FIGURE 2. $A \cong B \cong \mathrm{Int}(\omega * \eta)$ 的生成元树。

证明。设 g^* 为一个全定义的 Δ^0_3 函数，并设 s^*_x 与 $t^*_{x,\ s}$ 满足：对所有 $s \geq s^*_x$，$\lim_t g(x,s,t) = \lim_t g(x,s^*_x,t)$，且 $\lim_t g(x,s,t) = g(x,s,t^*_{x,s})$，其中 g 是g^*的原始递归逼近。我们构造准时结构 A、$B \cong \mathrm{Int}(\omega * \eta)$，使得任一同构 $h:\ A \to B$ 都满足 $h \oplus h^{-1} \geq_{PR} g^*$。照例，只需对每个 x、s编码值 s^*_x 以及 $t^*_{x,\ s}$。

编码 $t^*_{x,\ s}$：我们使用通常的生成元树来安排 A 和 B 的枚举。我们的想法是让 B 中原子的指标保持"较大"，同时在 A 中维护一个"标准"的原子列表。通过计算给定同构在 A 中"标准"原子上的像，我们便能够通过计算给定同构在 A 中足够多个"标准"原子上的像，找回这些大于 $t^*_{x,\ s}$ 的指标。

对每个 $n \in \omega$，令元素 a_{2n+1} 表示"标准"原子。特别地，这些元素一经枚举，在整个构造过程中都将保持为原子。这些未必是 A 中唯一的原子，但它们仍提供了一个无限的原子列表，我们可以借此尝试找回值 $t^*_{x,\ s}$。在 B 中，我们维护一个列表，列出所有暂时预定将成为原子的元素。每当 $g(x,\ s,\ t) \neq g(x,\ s,\ t-1)$，就对列表中每个 $n \geq \langle x,\ s\rangle$ 拆分该 n^{th} 元素。这确保列表中只有 $\langle x,\ s\rangle$ 个元素的指标为 $< t$。因此，可以通过计算给定同构在 A 中 $\langle x,\ s\rangle + 1$ 个"标准"原子上的像，找回值 $t^*_{x,\ s}$。由于任何同构都必须将原子映射为原子，因此至少有一个像的指标必为 $> t^*_{x,\ s}$。

编码 s^*_x：令 $P(x,s)$ 为谓词："对于所有 $s' \geq s$，$\lim_t g(x,s,t) = \lim_t g(x,s',t)$"。参见图 2，在 A 中，每个 $n \in \omega$ 对应的元素 a_{2n+1} 在整个构造过程中都将保持为原子。这些就是先前提到的 A 的"标准"原子。我们还为每个 $n \in \omega$ 构造A_{2n}，使其在且仅在 $P(x,s)$ 时与 A 同构，其中 $\langle x,s\rangle = n$ 无限次触发。如图 2 所示，在 B 中，每个标记为 b_{2n} 的元素下方（对每个 $n \in \omega$ 而言），都有 B 本身的一个副本。这里的意图是，这些副本应具有原像 a_{2m}（对于从 A 到 B 的某个给定同构），其中 $\hat{}a_{2m} \cong A$，从而使我们能够得到某个 x 对应的 s，且 $P(x,s)$ 无限次触发。

具体而言，给定一个同构 h: $A \to B$，计算 $h^{-1}(b_0)$。参照图 2，这应映射到某个元素 $a \in A$，使得$\hat{a}$ 与 $\mathrm{Int}(\omega * \eta)$ 同构。令 $n \in \omega$ 为满足 $\hat{}a_{2n} \cong \mathrm{Int}(\omega * \eta)$ 的最小值。根据上文所述的策略，这样的 n 至少应与 s_0 一样大。由于 h 是一个同构，a 应由"深度"至少为 $2n$ 的生成元构成，因为 c_{2n-1} 是 A 中第一个分裂为两个不相交的 $\mathrm{Int}(\omega * \eta)$ 副本的生成元。（注意，$\neg b_0$ 包含一个 $\mathrm{Int}(\omega * \eta)$ 的副本。）因此，$h^{-1}(b_0)$ 的指标至少应与 $2s_0$ 一样大。

更一般地，为了恢复 s^*_x，我们在 B 中足够多个（具体数量稍后说明）互不相交的 Int($\omega * \eta$) 副本上计算 h^{-1}。核心思路是确保这些像中至少有一个包含一个生成元，且该生成元在其表示中的“深度”足够大。然而，由于我们有 $\hat{a}_{2s_0} \cong$Int($\omega * \eta$)，危险之处在于，这些 h^{-1} 个像可能分散在由 a_{2s_0} 以下的生成元生成的那些元素中。因此，定义各个 a_{2n} 以下的生成元时，也必须谨慎处理具体的定义方式。令 $n = \langle x,\ s\rangle$，并假设 $P(x,\ s)$ 无限次触发。在 a_{2n} 以下，我们构造一个与 Int($\omega * \eta$) 同构的布尔代数，方法与构造 A 类似。我们完全按照图 2 所示定义生成元树，但以 a_{2n} 为其顶元。将 a_{2n} 以下的 c_i 和 a_i 分别记作 c^n_i 和 a^n_i。对于每个 $j \leq n$，我们将 a^n_{2j} 保留为原子。具体而言，如果 $n = \langle x,\ s\rangle$ 且 $P(x,\ s)$ 无限次触发，那么 a_{2n} 以下某个生成元首次分裂成两个互不相交的 Int($\omega * \eta$) 副本的位置，其深度应至少为 s_{x+1}。在每个“嵌套”的 Int($\omega * \eta$) 副本中递归重复这一过程。为了便于这种“嵌套”，我们在下文引入一个标签系统。

为生成元添加标签：为了便于描述 A 的生成元树，我们为生成元引入一个标记系统。每个生成元都将通过 $\omega^{<\omega}$ 中的一个字符串来标记。对于每个$n \in \omega$，按图 2 所示定义生成元 c_n 和 a_n。假设 $a_{\sigma^\frown 2n}$ 已定义。那么我们将 $c_{\sigma^\frown 2n^\frown m}$ 和 $a_{\sigma^\frown 2n^\frown m}$ 定义为 $a_{\sigma^\frown 2n}$ 下方的生成元，并满足以下性质。

- 按图 2 所示排列生成元 $c_{\sigma^\frown 2n^\frown m}$ 和 $a_{\sigma^\frown 2n^\frown m}$，将每个 c_i 替换为 $c_{\sigma^\frown 2n^\frown i}$，将每个 a_i 替换为 $a_{\sigma^\frown 2n^\frown i}$，同时保持它们之间相应的关系。此外，将最大元定义为 $a_{\sigma^\frown 2n}$。

- $\hat{a}_{\sigma^\frown 2n^\frown 2m} \cong$ Int($\omega * \eta$) 当且仅当以下条件全部成立：$n = \langle x,\ s\rangle$, $m = \langle y,\ t\rangle$, $P(y,\ t)$ 无限次触发，$y > x$，且 $\hat{a}_{\sigma^\frown 2n} \cong$ Int($\omega * \eta$)。

更具体地说，我们将确保：$\hat{a}_\sigma \cong$ Int($\omega * \eta$) 当且仅当对于每个 $i < |\sigma|$, $\sigma(i) = 2\langle x_i, s_i\rangle$ 其中$P(x_i, s_i)$ 无限次触发，且 $x_{i+1} > x_i$。

采用约定 $s_0 < s_1 < s_2 < \ldots$后，对于每个 x，满足$\hat{a}_\sigma \cong$Int($\omega * \eta$) 且 $\sigma(i) < 2s^*_x$ 对每个 $i < |\sigma|$都成立的标签 σ，根据上述所需性质，其长度至多为 x。此外，采用约定 s^*_i 是使 $P(i, s^*_i)$ 无限次触发的唯一值后，我们还可得到 $\sigma(i) \leq 2s^*_{x-1}$ 对每个 $i < x$ 都成立。因此，所有条目均为 $< 2s^*_x$ 的标签总数是关于 x 和 s^*_{x-1} 的原始递归函数（其中 s^*_{x-1} 可由 $x - 1$ 和给定的同构 h 通过归纳原始递归地得到）。将这个数记为 $f(x)$。通过在 B 中的 Int($\omega * \eta$) 的 $f(x) + 1$ 个互不相交副本上计算 h^{-1}，我们必定能得到一个元素，其某个生成元的标签至少为 $2s^*_x$。这些互不相交的 Int($\omega * \eta$) 副本的指标可利用各种 b_{2i} 得到。

构造的预备工作：设 σ 为一个标签，使得对所有 $i < |\sigma|$，$\sigma(i) = 2\langle x_i,\ s_i\rangle$ 对某个 x_i、$s_i \in \omega$成立。当我们在a_σ之下枚举新的生成元 $a_{\sigma^\frown n}$ 与 $c_{\sigma^\frown n}$ 时，我们称生长 σ。在构造过程中，仅当 σ 已从每个 $P(x_i, s_i)$获得许可时，我们才生长它，定义如下。设 s 为迄今 σ 生长过的最后一个阶段。在阶段 $s' > s$，若它已在某个阶段 s'' 触发且满足 $s < s'' \leq s'$，则 σ 从 $P(x_i, s_i)$获得许可。这一安排保证 a_σ 之下的生成元树为无限，当且仅当对每个$i < |\sigma|$ 以及 $\sigma(i) = 2\langle x_i,\ s_i\rangle$，$P(x_i, s_i)$无限次触发。根据定义，空串在每个阶段都获得许可，因此 a_s 与 c_s 将在构造的阶段 s 被枚举，从而使 A 保持准时。

在构造过程中，我们还维护一个（有序）列表 L，用于追踪 B中当前拟作为原子的所有生成元。正如编码 $t^*_{x\text{的策略}s}$中所解释的，每当

$g(x,\ s,\ t) \neq g(x,\ s,\ t-1)$，我们将包含在 L 中的生成元 n^{th}（其中 $n \geq \langle x,\ s\rangle$）拆分为一个新的原子和 B 的一个副本。稍后将验证这一过程生成了可数多个原子，并确保 $B \cong \mathrm{Int}(\omega * \eta)$。

构造：在阶段 0，枚举生成元 $a_{\langle\rangle}$，并将其定义为 A 的最大元，同时将生成元 a_0、c_0 枚举进 A。类似地，我们枚举 B 中的前三个生成元；顶元以及生成元 b_0、d_0，如图 2 所示。将 L 定义为当前为空的列表。在阶段 $n > 0$，执行以下操作。

步骤 1：在 B 中，将生成元 d_{n-1} 分裂为 d_n 和 b_n。如果 n 为奇数，则将 b_n 加入列表 L。类似地，将 A 中的生成元 c_{n-1} 分裂为 a_n 和 c_n。这确保 A 和 B 都保持准时。步骤 2：令 $\langle x,\ s\rangle \leq n$ 为满足条件的最小值，使得 $g(x,s,n) \neq g(x,s,n-1)$。如果不存在这样的 x、s，则直接继续步骤 3。否则，令 l_0、l_1、...、l_N 为 L 中按指标顺序排列的当前元素。对于每个 $m \geq \langle x,\ s\rangle$，将生成元 l_m 分裂为 b 和 b^*，把 b^* 加入列表 L，并从 L 中移除 l_m。˄ 步骤 3：对于每个 $b \in B$ 和 $b \notin L$，通过放入 B_{n-1} 的生成元副本（B 在前一阶段）来扩展 b，并以 b 作为最大元。对于每个 $b' \in B_{n-1} \cap L$，将 b' 的副本 b'' 放在 b 之下并放入 L。结合步骤 2，这确保 L 恰好包含 B 中的所有原子。步骤 4：假设 a_σ 已枚举进 A。另外，假设对于每个 $i \lhd |\sigma|$，$\sigma(i) = 2\langle x_i, s_i\rangle$，存在某个 x_i、$s_i \in \omega$，使得 $x_i < x_{i+1}$。如果 σ 在阶段 n 获得来自每个 $P(x_i, s_i)$ 的许可，那么我们通过枚举生成元 $a_{\sigma^\frown m}$ 和 $c_{\sigma^\frown m}$ 来扩展 $\hat{a}_\sigma$，对每个 $m \leq n$，若它们尚未被枚举，就将其枚举。注意，如果 σ 不满足我们的假设，那么我们就不会扩展 σ；a_σ 仍是一个原子。

验证：我们将证明分为以下步骤。

(i) 首先，我们证明对于每个 $\sigma \in \omega^{<\omega}$，$\hat{a}_\sigma \cong \mathrm{Int}(\omega * \eta)$ 当且仅当对于每个 $i < |\sigma|$，$\sigma(i) = 2\langle x_i, s_i\rangle$，其中 $P(x_i,\ s_i)$ 无限次触发，且 $x_i < x_{i+1}$。˄ (ii) 其次，我们证明 $b \in B$ 是一个原子当且仅当 $b \in L$；如果 $b \notin L$，那么 $b \cong \mathrm{Int}(\omega * \eta)$。此外，$L$ 中的第 $\langle x,\ s\rangle$ 个元素（按指标顺序）具有至少与 $t^*_{x,\ s}$ 一样大的指标。（回想一下，这是满足 $\lim_t g(x,\ s,\ t) = g(x,\ s,\ t^*_{x,\ s})$ 的值。）

由于对于每个 $x \in \omega$ 恰好存在一个 $s^*_x \in \omega$，使得 $P(x,\ s^*_x)$ 无限次触发，因此 (i) 确保 $A \cong \mathrm{Int}(\omega * \eta)$。类似地，(ii) 也确保 $B \cong \mathrm{Int}(\omega * \eta)$。

为证明 (i)，我们对 $|\sigma|$ 使用归纳法，并证明：若 σ 无限次增长，则存在无穷多个 m，使得 $\sigma^\frown m$ 无限次增长。基础情形是平凡的；长度为 0 的唯一标签是空串，并且所有形如 $2\langle x$的标签，$s^*_x\rangle$ 无限次增长，因为根据对 s^*_x的选取，$P(x, s^*_x)$ 必须无限次触发。假设 $\sigma = 2\langle x_0,\ s_0\rangle^\frown 2\langle x_1,\ s_1\rangle^\frown \ldots^\frown 2\langle x_k,\ s_k\rangle$。回顾可知，为使 σ 增长，必须有 $x_0 < x_1 < \ldots < x_k$，并且对每个 $i \leq k$，$P(x_i, s_i)$ 都无限次触发。也就是说，对任意 $m \in \omega$，形如 $\sigma^\frown m$ 的标签都会从 $P(x_i, s_i)$ 无限次获得许可。若 m还满足 $m = 2\langle x,\ s\rangle$，其中 $x > x_k$，且 $P(x, s)$ 无限次触发，则 $\sigma^\frown m$ 无限次增长。容易看出，这样的 m有无穷多个。此外，这些也恰好是无限次增长的标签。

要完成 (i) 的证明，只需注意到$\hat{a}_\sigma$ 与 A 同构，但有有限多个原子除外。不过，由于 A 具有可数多个原子，这实际上给出了从$\hat{a}_\sigma$ 到 A [Rem81a] 的同构。换言之，A 的每个生成元要么分裂成两个不相交的副本

A，要么分裂成 A 的一个副本和一个有限布尔代数，而这两种情况都无限多地发生，因此， $A \cong \mathrm{Int}(\omega * \eta)$。

对构造的步骤 1、2 和 3 进行快速分析后可以得出， $b \in B$ 是一个原子当且仅当 $b \in L$。此外，若 $b \notin L$，则根据构造的步骤 3，在每个阶段 n，$\hat{}\hat{}b \cong B_{n-1}$。因此，对于每个 $b \notin L$，我们都有 $b \cong B$ 在极限中。显然， B 中有无穷多个生成元不属于 L。接下来需要论证 $|L| = \infty$。根据构造的步骤 1，每经过两个阶段，至少有一个新的生成元被加入 L。设给定 x， $s \in \omega$。在一个足够大的阶段 n^*，使得 $n^* > \max\{t^*_{y,m} \mid \langle y, m\rangle \leq \langle x, s\rangle\}$，按指标顺序排列的 L 中当前最初的$\langle x,\ s\rangle$ 个元素，在阶段 n^* 之后将不会再通过构造的步骤 2 从 L 中移除。由此立即可得 $|L| = \infty$，因此， $B \cong \mathrm{Int}(\omega * \eta)$。

计算 $g^*(x)$：最后，利用 (i) 和 (ii)，给定一个同构 h： $A \to B$ 和 $x \in \omega$，我们按如下方式恢复 $g^*(x)$。首先，对每个 $i \leq f(x) + 1$ 计算 $h^{-1}(b_{2i})$（回顾一下，这个数量比无限增长且其条目全部被 s^*_x 所界的不同标签数多一）。根据性质 (i) 以及之前的论证，至少有一个 $h^{-1}(b_i)$ 的指标必须为 $\geq s^*_x$。令通过这一计算得到的最大指标为 $s' \geq s^*_x$。利用这个 s'，对每个 $i \leq \langle x、\ s'\rangle$计算 $h(a_{2i+1})$。由于 a_{2i+1} 必须是一个原子，因此这些元素必须映射到 B 的原子上。特别地，它们必须映射到 L 中 $\langle x、\ s'\rangle + 1$ 个彼此不同的元素。根据鸽巢原理， a_{2i+1} 的 h 个像中至少有一个应具有指标 $t' \geq t^*_{x、\ s'}$。因此我们得到 $g(x, s', t') = \lim_t g(x, s', t) = \lim_s \lim_t g(x, s, t) = g^*(x)$。引理 4.6 得证。□

引理 4.7。 $\mathrm{PRCatSpec}(\mathrm{Int}(\omega + \eta)) = \mathrm{Cone}(\Delta^0_3)$。

证明。 我们采用通常的证明策略，目标是对每个 x， $s \in \omega$编码取值 s^*_x 和 $t^*_{x,\ s}$，以便计算一个全定义的 Δ^0_3 函数； $g^*(x) = \lim_s \lim_t g(x,\ s,\ t) = \lim_t g(x,\ s^*_x,\ t) = g(x,\ s^*_x,\ t^*_{x,\ s^*_x})$。

编码 s^*_x：和之前一样，令 $P(x, s)$ 表示如下谓词：“对所有 $s' \geq s$， $\lim_t g(x, s', t) = \lim_t g(x, s, t)$”。显然， $P(x, s)$ 是 Π^0_2；如果它暂时看起来为真，我们就说它在某个阶段 n 触发。我们进一步假设，对每个 x，使 $P(x, s^*_x)$ 无限多次触发的唯一 $s = s^*_x$，满足：对任何 $s < s^*_x$， $P(x, s)$ 在阶段 s^*_x 之后都不再触发（这是众所周知的事实）。这一性质将成为稍后讨论的编码 $t^*_{x,s}$ 策略中的关键。众所周知，$\mathrm{Int}(\omega + \eta)$ 的生成元要么分裂为自身的一个副本和一个有限布尔代数，要么分裂为自身的一个副本和 $\mathrm{Int}(\eta)$ 的一个副本。这里的想法是将 $P(x, s)$ 的真值与一对生成元关联起来。如果 $P(x, s)$ 无限多次触发，那么与 $P(x, s)$ 为真相关联的生成元将同构于 $\mathrm{Int}(\omega + \eta)$；若 $P(x, s)$ 仅触发有限次，情况也相应类似。

我们首先考虑 $P(0, s)$的各个生成元可以如何排列。我们通过元组为生成元加标签， $\langle s, i\rangle$ 对应于每个 $i < 3$，并具有以下关系。对于每个 $s \in \omega$, $a_{\langle s,0\rangle} = \bigvee_{i<3} a_{\langle s+1,i\rangle}$，以及$a_{\langle s,i\rangle} \wedge a_{\langle s,j\rangle} = \emptyset$ 对于任意 $i \neq j$。同时定义$\bigvee_{i<3} a_{\langle 0,i\rangle}$ 为 A的最大元。每当$P(0, s)$触发时，我们“生长”（稍后定义）$a_{\langle s,1\rangle}$下方的布尔代数，并且对于每个 $s' \geq s$，分裂当前位于$a_{\langle s',2\rangle}$ 下方的每个原子，并“生长”当前位于$a_{\langle s',0\rangle}$下方的每个生成元。设 s^*_0为使 $P(0, s^*_0)$无限次触发的唯一值。那么对于每个 $s \in \omega$，该构造应确保以下所有性质成立。

- 如果 $s < s^*_0$，那么 $\hat{}a_{\langle s,\ 0\rangle} \cong \mathrm{Int}(\omega + \eta)$，并且 $\hat{}a_{\langle s,\ 2\rangle}$ 和 $\hat{}a_{\langle s,\ 1\rangle}$ 都是有限的。
- 如果 $s > s^*_0$，那么 $\hat{}a_{\langle s,\ 0\rangle} \cong \hat{}a_{\langle s,\ 1\rangle} \cong \hat{}a_{\langle s,\ 2\rangle} \cong \mathrm{Int}(\eta)$。
- 若 $s = s^*_0$， 则 $\hat{}a_{\langle s,\ 0\rangle} \cong \hat{}a_{\langle s,\ 2\rangle} \cong \mathrm{Int}(\eta)$ 且 $\hat{}a_{\langle s,\ 1\rangle} \cong \mathrm{Int}(\omega + \eta)$。

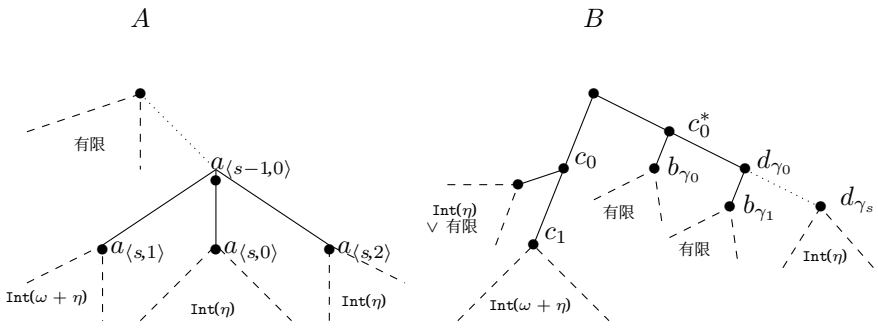


FIGURE 3. A和 B，如果 $P(0,s)$无限次触发。

为了取回 s_0^*，我们在 B 内维护生成元的原始递归列表 c，使得$\hat{c} \cong \mathrm{Int}(\omega+\eta)$。对于任意给定的同构 h： $A \to B$，其思路是使 $h^{-1}(c)$ 映射到 A 内某个指标至少与 s_0^* 一样大的元素。然而，由于布尔代数的同构可能会'Shuffle'这些生成元，因此需要做一些额外工作，以确保该策略有效。

在 B中，我们有以下几类生成元： c_n、 c_n^*、 b_γ ，以及针对每个 $n \in \omega$ 和每个$\gamma \in \omega^{<\omega}$的 d_γ 。我们稍后将具体说明这些生成元之间的关系，但目前只需直观理解： c_i 将具有性质$\hat{c}_i \cong \mathrm{Int}(\omega+\eta)$。我们重新将注意力转回检索某个指标 $\geq s_0^*$；对于给定的同构 h： $A \to B$，我们希望具有如下性质： $h^{-1}(c_0)$在其表示中包含生成元$a_{\langle s_0^*,\ 1\rangle}$ 。为此，我们将确保$\hat{c}_0 \cong \mathrm{Int}(\omega+\eta)$，并且 $\neg \hat{c}_0$比 $\neg \hat{} a_{\langle s_0^*,\ 1\rangle}$包含更多原子。我们在图3中对此加以说明。在 B内，每当 $P(0,s)$触发时，我们对每个 $s' \geq s$增长$b_{\gamma_{s'}}$下方的布尔代数。因此，显然，如果 $P(0,s)$无限次触发（$s = s_0^*$），则$\hat{} d_{\gamma_s} \cong \mathrm{Int}(\eta)$，并且对每个 $s' < s$，$\hat{}\ b_{\gamma_{s'}}$都是有限的。[1]关于每个 b_γ 一般如何增长的细节可在后文找到。该策略将被迭代，以编码各个 s_x^*。在描述这一迭代策略之前，我们为 A的生成元引入一个标记系统。

.....的标签 A： 这些标签将是有限字符串， σ，其中 x^{th} 项是一个元组 $\langle s,\ i\rangle$ 并具有以下性质。

- $s \in \omega$ 和 $i \in \{0,1,2\}$。
- 如果 σ 的最后一项是 $\langle s,\ 0\rangle$，那么$a_\sigma = \bigvee_{i<3} a_{(\sigma \restriction |\sigma|-1)\ ^\frown \langle s+1,\ i\rangle}$。这里的直观理解是，如果$\sigma$ 的最后一项是 $\langle s,\ 0\rangle$，那么这个节点对应于 $P(|\sigma|,\ s)$不成立的情况。因此，我们用编码谓词 $P(|\sigma|,\ s+1)$的节点来扩展它。
- 如果 σ 的最后一项是 $\langle s,\ 1\rangle$，那么$a_\sigma = \bigvee_{i<3} a_{\sigma ^\frown \langle 0,\ i\rangle}$。这里的直观理解与此类似。如果 σ 的最后一项是 $\langle s,\ 1\rangle$，那么 σ 对应于 $P(|\sigma|,\ s)$成立的情况，因此，我们用开始编码 $P(|\sigma|+1,\ 0)$这一过程的节点来扩展它。
- 注意，仅当标签的所有条目都具有形式 $\langle x,1\rangle$ 时，这些标签才会被扩展。此外，若 σ 是一个标签，则 $\sigma(x+1)$ 的第一个条目恰好比$\sigma(x)$ 的第一个条目大 1。等价地，只有标签 σ 的最后一个条目本身才可能具有第二个条目，且该条目为 0 或 2。

[1]基因 的一般描述（见"控制 B 中原子数量"）与简单设置略有不同在这里，尽管直觉相似。

显然，其思想是：每个标签 σ 的 x^{th} 条目编码了 $P(\sigma(x))$ 的结果，而σ “相信”该结果。更具体地说，$\hat{a}_\sigma \cong \mathrm{Int}(\omega+\eta)$ 当且仅当对每个 $x < |\sigma|-1$，$\sigma(x) = \langle s^*_x, 1\rangle$，且$\sigma(|\sigma|-1) = \langle s, i\rangle$ 对某个 $s < s^*_x$ 和 $i = 0$成立，或者 $s = s^*_x$ 和 $i = 1$ （这一点稍后将正式验证）。

在构造开始时，将最大元$a_{\langle\rangle}$ 枚举到 A中。在构造的每个阶段n ，都会指示$a_{\langle\rangle}$ 增长；对每个 $i < 3$ 枚举生成元$a_{\langle n,i\rangle}$（回忆一下，$\bigvee_{i<3} a_{\langle 0,i\rangle} = a_{\langle\rangle}$）。更一般地，带有标签 $\sigma = \langle s_0, i_0\rangle^\frown\langle s_1, i_1\rangle^\frown\ldots^\frown\langle s_x, i_x\rangle$ 的生成元在阶段 n 增长，当且仅当满足以下条件。设 m 是 a_σ 最近一次增长的阶段。如果在阶段 m之后，存在$a_{\sigma\restriction|\sigma|-1}$ 增长的阶段，并且 $P(x, s_x)$ 触发（不必发生在同一阶段），那么我们就增长 a_σ。根据 σ的最后一个条目，我们以不同的方式增长 a_σ 以下的布尔代数。

- 如果 $i_x = 0$，那么枚举深度不超过 n 的 a_σ 以下所有生成元 a_τ。还要确保对于每个 τ，其中 τ 的最后一项本身的最后一项为 2，目前都在阶段 n与 $\mathrm{Int}(\eta)$ 的标准表示同构。换句话说，如果 a_σ 无限次增长，那么$\hat{a}_\sigma \cong \mathrm{Int}(\eta)$；否则它是有限的。
- 如果 $i_x = 1$，那么对每个 $s \le n$ 和每个 $i < 3$，枚举生成元 $a_{\sigma^\frown\langle s,\ i\rangle}$。直观地说，我们只枚举 a_σ 以下的一条“脊柱”。显然，如果 a_σ 仅有限次增长，那么 $\hat{a}_\sigma$ 是有限的。我们断言，如果 a_σ 无限次增长，那么 $\hat{a}_\sigma \cong \mathrm{Int}(\omega+\eta)$。
- 如果 $i_x = 2$，那么将当前位于 a_σ 以下的每个原子拆分。然后，如果 a_σ 无限次增长，则 $\hat{a}_\sigma \cong \mathrm{Int}(\eta)$；否则它是有限的。

有了这个标签系统，给定一个同构 $h : A \to B$，检索 s^*_x 的策略是先对每个 $i \le x$ 计算 $h^{-1}(c_i)$。这里的思路是，这些元素中的每一个都应映射到 A 中的某个元素，而 A 是由生成元并成的，其中至少有一个生成元的指标为 $\ge s^*_i$。回想一下，要确保这一点成立，方法是让 $\neg c_i$ 中原子的数量大于对于任意“较小的” σ， $\neg a_\sigma$ 中原子的数量。

控制 B 中原子的数量：对于每个 $x \in \omega$，令 $\gamma_{x,\ 0}$， $\gamma_{x,\ 1}$，..... 表示长度为 $x+1$ 的标签，其排列顺序与生成元 $a_{\gamma_{x,\ i}}$ 被枚举到 A 中的顺序一致。（注意，如果 a_σ 从未被枚举到 A 中，那么此过程不会列出 σ。）在 B 中，最大元将由 $d_{\gamma_{0,\ 0}} \vee c_0$ 给出。对于每个 x， $n \in \omega$，我们有如下结论。

- $c_x = c_{x+1} \vee c^*_{x+1}$.
- $c^*_x = d_{\gamma_{x,0}} \vee b_{\gamma_{x,0}}$.
- $d_{\gamma_{x,n}} = d_{\gamma_{x,n+1}} \vee b_{\gamma_{x,n+1}}$.

这里的意图是使$b_{\gamma_{x,\ n}}$ 下方的原子数大于 $a_{\gamma_{x,\ n}}$下方的原子数。每当 $\hat{}a_{\gamma_{x,\ n}}$ 下方的原子数增加时，我们总是拆分其下方当前的所有原子$b_{\gamma_{x,\ n}}$，以此确保 $b_{\gamma_{x,\ n}}$ 要么是有限的且大于 $\hat{}a_{\gamma_{x,\ n}}$，要么是 $\mathrm{Int}(\eta)$。事实上，我们确保 $b_{\gamma_{x,\ n}}$ 是有限的，当且仅当 $\hat{}a_{\gamma_{x,\ n}}$ 也是有限的。稍后我们将验证，对于每个 x，都余有限多个生成元 $b_{\gamma_{x,\ n}}$，使得其下方的布尔代数同构于 $\mathrm{Int}(\eta)$。显然，对于任意不包含任何指标$\ge s^*_x$的 σ， $\neg\hat{c}_x$ 的原子数也会因此多于 $\neg\hat{a}_\sigma$。通过将 $h^{-1}(c_i)$ 计算到 $i = x+1$，我们可以得到一个至少与 s^*_x 一样大的指标。

编码 $t^*_{x,\ s}$：总结迄今为止的策略，在 B内，我们有由$\hat{c}_i$给出的 $\mathrm{Int}(\omega+\eta)$ 的“标准”副本，并且需要能够控制每个 $i \in \omega$下方的原子数量$c_{\gamma_{i,\ 0}}$。在 A内，我们有带有“较大”指标的 $\mathrm{Int}(\omega+\eta)$ 的“非标准”副本，用于编码s^*_x。与引理 4.6 的证明策略不同，我们似乎无法放置“标准”

原子于我们的任一结构 A 或 B 中，以编码$t^*_{x,\ s}$。为了解决这个问题，我们将采用一种与定理 3.8 证明中所使用的策略类似的策略。

回忆一下这个假设：s^*_x 足够大，使得对于每个 $s < s^*_x$，$P(x,\ s)$ 在阶段 s^*_x 之后不再触发。特别地，对于每个 $s < s^*_0$，各个 $a_{\langle s,\ 2\rangle}$ 以下的原子在阶段 s^*_0 之后不再变化，因为 $a_{\langle s,\ 2\rangle}$ 在阶段 s^*_0 之后不再增长。按照约定，$P(0,\ s)$ 各自至少触发一次，到阶段 s^*_0 时，$a_{\langle s^*_0-1,\ 2\rangle}$ 以下应当至少有 $2^{s^*_0-1}$ 个原子。我们可以假设这个数量大于 $\langle 0,\ s^*_0\rangle$，因为存在关于输入为多项式的配对函数。通过在这 $2^{s^*_0-1}$ 个原子上计算给定的同构，我们希望得到一个值 $\geq t^*_{0,\ s^*_0}$。类似的想法可用于原始递归地求出相对于 $\langle x,\ s^*_x\rangle$ 的“大量”原子的指标，这些指标可由 x 和给定的同构原始递归地求得。

现在可以运用前一个引理证明中的技巧。我们在每个阶段都维护一个列表L，其中记录 B中的原子。每当逼近 $g(x,\ s,\ t) \neq g(x,\ s,\ t-1)$时，对于每个 $i \geq \langle x,\ s\rangle$，我们便拆分 L 中（按指标排序的）i^{th} 个原子，从而确保 B 中指标小于当前阶段编号的原子有$< \langle x,\ s\rangle$ 多个。由于需要仔细控制 B 中每个生成元 b_σ 以下的原子数量，因此，为了编码$t^*_{x,\ s}$而拆分 B 中的原子时，我们会确保不改变 B中当前原子的总数。具体做法是将一个原子拆分为一个新的原子，并为其附上 Int(η) 的一个副本（注意，这不会改变 B的同构类型）。

构造：在构造的阶段 n，执行以下操作。

步骤 1：对于每个 $i < 3$，将生成元 $a_{\langle n,i\rangle}$ 枚举进 A（$a_{\langle\rangle}$ 在每个阶段都会增长）。类似地，对于每个 $i \leq n$，将生成元 c^*_i 和 c_i 枚举进 B。这确保了 A 和 B 都是准时的。步骤 2：对于每个 $x, s \in \omega$，若 $\langle x, s\rangle \leq n$，则检查 $P(x, s)$ 是否触发。令 $m < n$ 为 a_σ 最近一次增长的阶段，其中 $\sigma(x) = \langle s, i\rangle$，对某个 $i < 3$ 成立（这些生成元都在相同的阶段增长）。若在 m 和 n 之间存在某个阶段，使得 $a_{\sigma\restriction|\sigma|-1}$ 增长，则增长 a_σ。否则，在此阶段不增长 a_σ。这确保了：如果 a_τ 无限次增长，那么对于 τ 的任意前缀 γ，a_γ 也必须无限次增长。步骤 3：在 B 中，对于每个 $x \leq n$，以及每个长度为 $x+1$、且 a_σ 当前属于 A 的标签 σ，将生成元 b_σ 枚举进 B。还要确保对于当前属于 B 的每个 b_σ，其下方的原子数多于当前 a_σ 下方原子的总数。每当我们增加 b_σ 下方原子的数量时，总是分裂 b_σ 下方当前指标最小的原子 $\hat{}$。这样一来，如果 a_σ 下方原子的数量趋于无穷，那么在极限处，$b_\sigma \cong$Int(η)。步骤 4：令 $L = \{d_0, d_1, \ldots, d_N\}$ 为当前属于 B 且目前意图作为原子的所有生成元构成的列表，并按其指标排序。对于每个 $x, s \in \omega$，如果 $g(x, s, n) \neq g(x, s, n-1)$，则对每个 $i \geq \langle x, s\rangle$，将 d_i 分裂为一个具有新指标的原子和一个 Int(η) 的副本。按指标顺序分裂原子；先前的第 $\langle x, s\rangle$ 个原子分裂为新的第 $\langle x, s\rangle$ 个原子和一个 Int(η) 的副本。

验证：首先，我们证明对于每个 x，标签 $\sigma_x = \langle s^*_0,\ 1\rangle^\frown\langle s^*_1,\ 1\rangle^\frown \ldots ^\frown \langle s^*_{x-1},\ 1\rangle$ 是唯一满足以下所有条件的标签。

- 对于任意 $i < 3$, $a_{\sigma_x{}^\frown\langle s,\ i\rangle}$ 无限次增长当且仅当 $s = s^*_x$。
- 对于每个 $s < s^*_x$ 和每个 $i \in \{1, 2\}$，$\hat{}a_{\sigma_x{}^\frown\langle s,\ i\rangle}$ 是有限的。
- 对于每个 $s > s^*_x$ 和每个 $i < 3$，$\hat{}a_{\sigma_x{}^\frown\langle s,\ i\rangle} \cong$ Int(η)。

对于基础情形 $x = 0$，由于 s_0^* 是使 $P(0, s_0^*)$ 无限次触发的唯一值，而对于每个 s，生成元 $a_{\langle s,i\rangle}$ 只会在 $P(0, s)$ 触发时增长，因此 $a_{\langle s,i\rangle}$ 无限次增长当且仅当$s = s_0^*$。对于每个 $s < s_0^*$，由于 $a_{\langle s,i\rangle}$ 只会有限次增长，根据构造的步骤 2，任何低于 $a_{\langle s,1\rangle}$ 的生成元也只会有限次增长，因此 $\hat{}a_{\langle s,1\rangle}$ 是有限的。类似地，由于只有当某个 $s' \le s$ 使 $P(0, s')$ 触发时，才会在 $a_{\langle s,2\rangle}$ 以下枚举新的生成元，因此我们也可以得出，对于每个 $s < s_0^*$，$\hat{}a_{\langle s,2\rangle}$ 是有限的。最后，对于任意 $s > s_0^*$ 和任意 $i < 3$，生成元 $a_{\langle s,i\rangle}$ 都低于 $a_{\langle s_0^*,0\rangle}$，而后者无限次增长，因此 $\hat{}a_{\langle s,i\rangle} \cong \mathrm{Int}(\eta)$。$\sigma_0 = \langle\rangle$ 的唯一性显而易见，因为它是唯一长度为 0 的字符串。

归纳地假设该命题对所有 $y < x$ 都成立。根据归纳假设，a_{σ_x}无限次增长，因此，$a_{\sigma_x{}^\frown\langle s,i\rangle}$ 以下是否存在生成元，其增长与谓词 $P(x, s)$ 有关。和之前一样，由于 s_x^* 是使 $P(x, s_x^*)$ 无限次触发的唯一值，我们再次得到：对每个 $i < 3$，$a_{\sigma_x{}^\frown\langle s,i\rangle}$ 无限次增长，当且仅当 $s = s_x^*$。出于与之前相同的原因，对每个 $s < s_x^*$，$\hat{}a_{\sigma_x{}^\frown\langle s,1\rangle}$ 和 $\hat{}a_{\sigma_x{}^\frown\langle s,2\rangle}$ 都是有限的；并且对每个 $s > s_x^*$，对于任意 $i < 3$，$\hat{}a_{\sigma_x{}^\frown\langle s,i\rangle} \cong \mathrm{Int}(\eta)$。剩下要验证的是 σ_x 是唯一的。

假设 $\sigma \neq \sigma_x$ 也具有所需的性质。令 $y < x$ 为满足 $\sigma_x(y) \neq \sigma(y)$ 的最小值。要使 $\sigma{}^\frown\langle s_x^*, 1\rangle$ 成为一个标签，必须有 $|\sigma| = x$ 且对每个满足$s_y \in \omega$的 $y < x$，$\sigma(y) = \langle s_y, 1\rangle$。根据 σ_x的定义，我们得到 $s_y \neq s_y^*$；否则，$\sigma(y) = \sigma_x(y)$。此外，$\sigma \restriction y+1 = (\sigma_x \restriction y){}^\frown\langle s_y, 1\rangle = \sigma_y{}^\frown\langle s_y, 1\rangle$。应用归纳假设可知，$a_{\sigma\restriction(y+1)} = a_{\sigma_y{}^\frown\langle s_y,1\rangle}$仅有限次增长。这进一步意味着，对于任何延伸 $\sigma \restriction y+1$的 τ，生成元 a_τ 也仅有限次增长（参见构造的步骤 2）。因此，不可能出现 $a_{\sigma{}^\frown\langle s_x^*,1\rangle}$无限次增长的情况。因此，$\sigma_x$ 必定唯一。

由上述结果可知，对于每个 $x \in \omega$以及每个 $s < s_x^*$，生成元$a_{\sigma_x{}^\frown\langle s,\ 0\rangle}$ 可分解为

- $a_{\sigma_x{}^\frown\langle s+1,\ 1\rangle} \vee a_{\sigma_x{}^\frown\langle s+1,\ 2\rangle}$ 其为有限集，并且$a_{\sigma_x{}^\frown\langle s+1,\ 0\rangle}$ 若 $s \neq s_x^* - 1$，或
- $a_{\sigma_x{}^\frown\langle s_x^*,\ 0\rangle} \cong a_{\sigma_x{}^\frown\langle s_x^*,\ 2\rangle}$ 其与 $\mathrm{Int}(\eta)$ 同构，并且$a_{\sigma_x{}^\frown\langle s_x^*,\ 1\rangle}$ 若 $s = s_x^* - 1$。

因此，$A \cong \mathrm{Int}(\omega + \eta)$，其中当且仅当 σ 满足：x^{th} 项为 $\langle s_x^*,\ 1\rangle$ 但最后一项可能为 $\langle s,\ 0\rangle$ 对于某个 $s < s^*_{|\sigma|-1}$。

$\hat{}$ 现在我们断言，对于每个 $x \in \omega$，以及每个长度为 $x+1$ 的标签 σ，b_σ 要么是 $\mathrm{Int}(\eta)$，要么是有限的，并且包含比 $\hat{a}_\sigma$ 更多的原子（回忆记号 4.5）。显然，B 中的原子只受构造的步骤 3 或 4 影响。设给定一个长度为 $x+1$ 的 σ，并考虑布尔代数 b_σ。如果 $\hat{a}_\sigma \cong$ 是 $\mathrm{Int}(\omega + \eta)$，或者 $\hat{a}_\sigma \cong$ 是 $\mathrm{Int}(\eta)$，那么根据构造的步骤 3，$\hat{}b_\sigma \cong$是 $\mathrm{Int}(\eta)$，因为 b_σ 下方的每个原子最终都会被分裂。因此，我们可以假设 $\hat{a}_\sigma$ 是有限的，因为这是 $\hat{a}_\sigma$ 同构类型仅剩的可能性。在 $\hat{a}_\sigma$ 下方的原子数稳定之后，由于步骤 3，b_σ 下方的原子数不再变化。然而，这不足以说明极限中 b_σ 下方确实存在原子；如果新引入的原子总是被分裂，那么 $b_\sigma \cong$ 就是 $\mathrm{Int}(\eta)$。我们现在还将证明，构造的步骤 4 只会有限次地分裂 b_σ 下方的原子，从而确保在极限中 b_σ 包含的原子多于 $\hat{a}_\sigma$。

在构造的步骤 4 中，只有当对于某些 x, s 满足 $\langle x, s\rangle \le i$ 时，指标为 B 中的原子 i 才会在阶段 n 于 $g(x, s, n) \neq g(x, s, n-1)$ 处分裂。令 $L[n]$ 表示阶段 n 期间的列表 L。再令 $l_i[n]$ 表示 $L[n]$ 的 i^{th} 元素。由于 $g(x, s, n)$ 最终会稳定，我们也可得出 $l_i[n]$ 最终会稳定。还需证明这些原子的位置最终也会稳定。更具体地，令 $e_0[n], e_1[n], \ldots, e_m[n]$ 表示在阶段 n、其下方原子数量已稳定后，目前位于 b_σ 下方的原子。我们证明，对于每个 i，都存在 j 和 n^*，使得对于所有 $n' \ge n^*$, $e_i[n'] = l_j[n']$。结合每个 l_j 都会稳定这一事实，我们得到

b_σ 下方原子的指标也会稳定。设定 i 。显然，对于某个 j，有 $e_i[n] = l_j[n]$ ，因为 $e_i[n]$ 目前是位于 b_σ 下方的一个原子。在此后的每个阶段 $n' > n$，都可能发生以下情况之一。

- $l_k[n'-1]$ 由于某个 $k \neq j$的构造中的步骤 3，发生了分裂。显然，如果 $k > j$，那么 $l_j[n'] = l_j[n'-1]$，因为新枚举的原子具有全新的指标。因此， $e_i[n'] = e_i[n'-1] = l_j[n'-1] = l_j[n']$。另一方面，如果 $k < j$，那么 $l_j[n'-1] = l_{j-1}[n']$，因为原先具有 k^{th} 最小指标的原子已分裂成两个具有较大指标的新原子。由此可得 $e_i[n'] = l_{j-1}[n']$。
- 存在某个 k ，使得 $l_k[n'-1]$ 由于构造中的步骤 4 而发生了分裂。回想一下，在步骤 4 中分裂原子时， B 中的原子总数不会改变；每个原子都分裂成一个新原子和 Int(η) 的一个副本。后者中的临时原子会被忽略，因为构造在极限时会将其转变为无原子布尔代数。此外，由于原子是按照其在 L中的位置进行分裂的，尽管 $l_k[n'] \neq l_k[n'-1]$， $l_k[n'-1]$ 下方的新原子仍具有 B中最小的指标。特别地，如果 $e_i[n'-1] = l_j[n'-1]$ ，并且 $l_j[n'-1]$ 在 n' 阶段由构造中的步骤 4 分裂，那么 $e_i[n'] = l_j[n']$。

因此，在每个阶段 $n' > n$, $e_i[n'] = l_j[n']$ 或 $e_i[n'] = l_{j-1}[n']$。所以，必定存在 n^* 和j ，使得对于所有 $n' \geq n^*$，都有 $e_i[n'] = l_j[n']$ ；并且由于构造的步骤 4 最终会停止对每个 j 的 l_j 进行分裂，因此每个 b_σ 以下原子的指标最终都会稳定。

最后，我们证明 $B \cong$ Int($\omega + \eta$)。对于每个 $x \in \omega$，回想一下，长度为 $x+1$ 且使$\hat{a}_\sigma$ 有限的标签 σ 只有有限多个；这些恰好是末项为 $\langle s,\ i\rangle$ 的标签，其中 $\hat{}$ 某个 $s < s_x^*$ 且 $i = 1$ 或为 2。这些有限多个标签也恰好是使 b_σ 有限的标签。这意味着，对于每个 $i \in \omega$, c_{i-1} （令 c_{-1} 为 B 的最大元），它会分裂为 c_i 、 Int(η) 的一个副本以及某个有限布尔代数。此外，根据构造的步骤 3，我们还可以得到， c_i^* 以下原子的总数有限，且大于 $a_{\langle s_0^*,\ 1\rangle,\ \langle s_1^*,\ 1\rangle,\ ...,\ \langle s_{i-1}^*,\ 1\rangle} \wedge \neg a_{\langle s_0^*,\ 1\rangle,\ \langle s_1^*,\ 1\rangle,\ ...,\ \langle s_i^*,\ 1\rangle}$ 以下原子的数量。

计算 $g^*(x)$：给定一个同构 $h: A \to B$ 和 $x \in \omega$，对每个$i \leq x$计算 $h^{-1}(c_i)$。这些像中至少有一个应包含一个标签为 σ 、前缀为$\langle s_0^*, 1\rangle^\frown \ldots ^\frown \langle s_x^*, 1\rangle$的生成元。我们通过归纳法进行证明。若 $h^{-1}(c_0)$ 不包含 $a_{\langle s_0^*,1\rangle}$，则 $h^{-1}(c_0^*)$ 必须包含于$\neg a_{\langle s_0^*,1\rangle}$。然而，根据构造， c_0^* 以下的原子数多于 $\neg\hat{}a_{\langle s_0^*,1\rangle}$中的原子数。归纳地，假设 $h^{-1}(c_i)$ 包含 $a_{\langle s_0^*,1\rangle,...,\langle s_i^*,1\rangle}$。由于 c_{i+1}^* 以下的原子数多于$a_{\langle s_0^*,1\rangle,\langle s_1^*,1\rangle,...,\langle s_i^*,1\rangle} \wedge \neg a_{\langle s_0^*,1\rangle,\langle s_1^*,1\rangle,...,\langle s_{i+1}^*,1\rangle}$以下的原子数，因此$h^{-1}(c_{i+1})$ 必须包含 $a_{\langle s_0^*,1\rangle,...,\langle s_{i+1}^*,1\rangle}$。因此，对于 $i \leq x$， $h^{-1}(c_i)$ 中有一个包含指标为$s \geq s_x^*$的标签。对于这样的指标 s，将 A 的枚举运行至阶段 s，便可得到至少 $2^{s_x^*-1}$ 个原子的指标。这里需要注意，并非所有在阶段 s 看起来是原子的生成元，在极限时仍会保持为原子；不过，只要其中至少有 $2^{s_x^*-1}$ 个最终确实是原子就足够了。我们还可以假设 x 是满足 $s_x^* \leq s$的最大值；否则，我们就能相应地得到 A 中至少 $2^{s_y^*-1}$ 个原子的指标，其中 y 是满足 $s_y^* \leq s$的最大值。我们所需的性质是，能够保证的原子数大于 $\langle x, s\rangle$。得到这些原子的指标后，对它们全部计算 h 。根据鸽巢原理，其中至少有一个会映射到 B 中的一个原子，其指标为 $t \geq t_{x,s}^*$ （ B中从小到大第 $\langle x, s\rangle$ 个原子的指标）。利用 s 和 t的这些值，接着通过计算 $g(x, s, t)$，即可计算 $g^*(x)$。引理 4.7 得证。□

定理 4.4 已得到证明。

5. Trees as Partial Orders

定理 5.1. 每个至少有一个节点具有无限多个后继的可计算树都有一个准时表示。

证明。设 T 是一棵可计算树。非一致地固定一个有无限多个后继的节点 t^*。在构造过程中，我们同时构造及时副本 A，并维护从 T 到 A 的可计算同构 f。构造及时副本的主要挑战在于，我们需要能够"快速"枚举元素。因此，在等待"缓慢"的可计算副本揭示其结构时，结构中必须有一部分专门用于"填充"。为此，我们使用有无限多个后继的节点作为"填充"部分。在 A 中，令 a^* 为一个有无限多个后继的节点。然后我们定义 $f(t^*) = a^*$。在每个阶段 s，我们枚举一个新节点 a_s 并声明 $a^* < a_s$。现在的策略是确保 $f(T[s])$ 始终是 $A[s]$ 的子结构，并且 $A[s] \setminus (f(T[s]))$ 仅由当前是 a^* 的后继的节点组成。

归纳假设上述结论对所有阶段 $< s$都成立。如果在阶段 s没有新的元素枚举进 T，那么只需将 a_s 枚举进 A，然后进入下一阶段。很容易看出，若发生这种情况，归纳假设仍然成立。因此，我们可以假设有某个元素 t 在阶段 s被枚举进 T。按照约定，我们进一步假设，每个阶段至多有一个这样的t进入 T。分情况讨论如下。

- 如果 t 当前是 t^* 的后继，并且不存在任何 $t' \in T[s-1]$ 使得$t^* < t < t'$，那么对于满足 a_i 尚未在 f 的值域中的最小 i，定义 $f(t) = a_i$。如果这样的元素不存在，只需枚举一个新的 a_i，并将其定义为 t的 f 像。
- 如果 t 当前是 t^* 的后继，并且存在某个 $t' \in T[s-1]$ 使得 $t^* < t < t'$，那么将一个新元素 a 枚举进 A，并定义 $f(t) = a$。此外，对于当前位于 f值域中的任意 a'， a，a'之间的关系可以直接继承自 t与 $f^{-1}(a')$之间的关系。对于任何其他的 $a' \in A[s-1] \setminus (f(T[s-1]))$，定义 a和 a'为不可比。这确保了 A 上的关系是原始递归的。
- 如果 t当前不是 t^*的后继，那么就将一个新元素 a枚举到 A中，并定义$f(t) = a$。和之前一样，对于任意 $a' \in f(T[s-1])$， a, a'之间的关系继承自 $t, f^{-1}(a')$之间的关系。对于任意 $a' \in A[s-1] \setminus (f(T[s-1]))$，若 $t < t^*$，则定义$a < a'$。否则，定义 a 与 a'不可比。

根据 f的定义，显然它是单射。接下来需要说明 f 是满射且保序。设给定 $a \in A$。根据构造，只有在以下两种情况下才会枚举一个节点 a。第一，某个 i满足 $a = a_i$；第二，枚举 a 是为了将其用作某个 t的 f 像。在后一种情况下，显然 a 属于 f的值域。另一方面，对于 $a = a_i$，到 t^* 至少有 $i+1$ 个不同的后继的阶段时， a_i 必定已进入f的值域。因此， $f\colon\ T \to A$ 是一个双射。从上述构造也容易看出， f 是保序的，因此我们得到$A \cong T$。□

我们注意到，存在一棵可计算树（视为偏序），它没有准时副本（ [BKW25]中的定理 8）。

Theo注记 5.2. 设 T 为一棵有限高度的准时树，且下列情形之一成立 .

- T 至少有两个节点，且每个节点都有无限多个后继。
- T 恰好有一个具有无限多个后继的节点，且这些后继各自都拥有自己的后继。

那么 $\mathsf{PRCatSpec}(T) \subseteq \mathsf{Cone}(\Delta_1^0)$。

证明。设 T 是一棵非准时范畴的可计算树。在构造准时呈示 A, $B \cong T$ 时，我们采用定理 5.1 的证明中所述的策略。回想一下，唯一需要做的，就是对于具有无限多个后继的节点，快速枚举其后继。在构造 A, B 时，我们将确保这一性质成立。设 g 是一个全定义可计算函数。回想一下，只需将 $g(x)\downarrow$ 所在的阶段编码进任意同构$h: A \to B$，即可证明 PRCatSpec(T) $\subseteq$ Cone(Δ^0_1)。

构造 A, B 具有（至少）两个拥有无限多个后继的节点：固定 A 中的两个节点 a^* 和 a^{**}，使它们成为拥有无限多个后继的节点。如前所述，在构造的每个阶段，a^* 和 a^{**} 都会获得新的后继。注意，由于我们确保 $A \cong T$ 的方式（见定理 5.1），枚举为 a^* 或 a^{**} 的后继的节点未必会一直是后继。不过，至少这些元素始终彼此不可比。此外，对于任意 x，都可以用原始递归方法获得 x 个不可比后代的指标，分别对应 a^* 和 a^{**}。

在 B 中，固定一个节点 b^*，使其成为拥有无限多个后继的节点。为使 B 准时，在构造的每个阶段，都为 b^* 枚举一个新的后继。显然，这里的意图是利用所有其他拥有无限多个后继的节点的后代，对 $g\downarrow$所在的阶段进行编码。更具体地说，对于每个其他节点 $b \neq b^*$，只要 $g(x)\uparrow$，我们就确保 b 至多有 x 个不可比后代。由于假设 g 是全定义的，这种延迟只有有限长，而且很容易看出，它与确保 $B \cong T$ 的策略兼容（如定理 5.1 中所述）。特别地，对于任何其他拥有无限多个后继的节点 $b \neq b^*$，只有在对所有 $y \leq x$ 都有 $g(y)\downarrow$ 之后，b 上方的子树才具有宽度 x。

给定任意同构 $h: A \to B$ 以及 $x \in \omega$，我们可通过以下过程恢复 $g(x)$。分别在 a^* 与 a^{**} 的 x 个不可比较后代上计算 h。由于 h 是同构，要么 $h(a^*) \neq b^*$，要么 $h(a^{**}) \neq b^*$。由于对任意 $b \neq b^*$，$b \in B$ 上方的子树仅在对所有 $y \leq x$ 均满足 $g(y)\downarrow$ 之后才增长到宽度 x，根据鸽巢原理，a^* 或 a^{**} 的这 x 个不可比较后代中至少有一个必须映射到在 $g(x)\downarrow$之后被枚举进入 B 的某个节点。按照约定，B 中这样的节点的指标至少与发生 $g(x)\downarrow$的阶段一样大，从而使我们能够恢复 $g(x)$。

构造 A, B 恰好有一个节点具有无限多个后继，其中无限多个后继各自拥有自己的后继：将节点 a^*, b^* 分别固定为 A 与 B 中具有无限多个后继的唯一节点。在构造的每个偶阶段 s，枚举节点$a_{s,\,0}$，$a_{s,\,1}$，使得 $a^* \leq a_{s,\,0} \leq a_{s,\,1}$，并在构造的每个奇阶段为 a^* 枚举一个新的后继。这里的想法是，我们“迅速”生成 a^* 的那些各自拥有自己后继的后继，同时利用在奇阶段枚举的后继来保持 $A \cong T$。由于假设 a^* 有无限多个各自拥有自己后继的后继，因此对 a^* 上方子树的这一枚举仍然与定理 5.1 中所述保持 $A \cong T$ 的策略相容。

在 B 中，我们在每个阶段为 b^* 枚举一个新的后继，以使 B 准时。这里的想法是，延迟增加以 b^* 的后继为根的每棵子树的高度，直到 $g\downarrow$。令 b_x 表示被枚举为 b^* 的临时后继的 x^{th} 节点。确保 $B \cong T$ 的策略可能要求我们枚举某个新元素 b，使得 $b^* \leq b \leq b_x$ 或 $b_x \leq b$。令这样的 b 为最先被要求枚举的元素。对于所有 $y \leq x$，我们将延迟此类枚举，直到 $g(y)\downarrow$。特别地，对于任意 $x \in \omega$，如果 $g(x)$ 尚未停机，那么 b_x 暂时是 b^* 的后继，

并且 b_x 没有后代。与之前一样，由于 g 是全定义的，为编码 g 而进行的所有此类延迟都只是有限的，因此与保持 $B \cong T$ 的策略相一致。

给定一个同构 $h : A \to B$ 和 $x \in \omega$，对每个 $y \leq x$，计算 $h(a_{2y},0)$ 和 $h(a_{2y},1)$。由于 h 是一个同构，且 $a^* \leq a_{2y,0} \leq a_{2y,1}$，因此必有 $b^* \leq h(a_{2y},0) \leq h(a_{2y},1)$（注意，$h(a^*) = b^*$）。此外，由于 $y \neq y'$ 意味着，对于任意 $i, j \in \{0,1\}$，$a_{2y,i}$ 和 $a_{2y',j}$ 不可比，因此 $h(a_{2y},0)$ 和 $h(a_{2y},1)$ 的像必须映射到 b^*之上的 $x+1$ 个互不可比的“分支”。根据 B的构造，$h(a_{2y},0)$ 和 $h(a_{2y},1)$ 中至少有一个必须映射到在 $g(x)\downarrow$之后枚举的某个元素，因为在 b^* 和 b_z之间，或作为b_z 的后代，对所有 $z \geq x$而言，直到 $g(x)\downarrow$ 之后，都不会枚举任何节点。定理 5.2 得证。□

结合 [LMMS05 中对可计算范畴树的刻画与 Mil05] 的定理 5.2，可得如下结论。

推论5.3。设 T 是一个可计算范畴但非准时范畴的树，则$\mathtt{PRCatSpec}(T) = 锥(\Delta^0_1)$。

由于 PRCatSpec(T) $\subseteq$ 锥(Δ^0_1) 蕴含 T不是准时范畴的，我们也可以得到如下结论。

推论5.4。设 T是一个有限高度的准时树。T是准时范畴的，当且仅当 $T = S \sqcup F$，其中 S 是一个无穷星，且 F 是一个有限集，或者 T 是有限的。

References

[Baz14] Nikolay A. Bazhenov. 布尔代数的 Δ^0_2-范畴性。 *Journal of Mathematical Sciences*, 203(4):444– 454, 2014.[Baz21] Nikolay A. Bazhenov. 可计算结构的范畴谱。 *Journal of Mathematical Sciences*, 256 1 34( ): –50, 2021. [BDK+19] Nikolay Bazhenov, Rod Downey, Iskander Kalimullin, Alexander Melnikov, and Keng Meng Ng. 在线结构理论基础。 *Bulletin of Symbolic Logic*, 25(2):141–181, 2019. [BK21] Nikolay Bazhenov and Iskander Kalimullin. 可计算范畴结构的准时范畴谱。 *Algebra and Logic*, 60(3):223–228, 2021. [BK24] Nikolay Bazhenov and Iskander Kalimullin. 代数结构的准时谱与同构。*Algebra and Logic*, 63(3):228–231, 2024. [BKN] Nikolay Bazhenov, Heer Tern Koh, and Keng Meng Ng. 函数结构的原始递归范畴谱。已提交。[BKW25] Nikolay Bazhenov, Dariusz Kaloci´nski, and Micha-l Wroc-lawski. 在线与可行可表示性：从树到模态代数，2025。预印本 arXiv:2504.16663。[CCHM06] Wesley Calvert, Douglas Cenzer, Valentina Harizanov, and Andrei Morozov. 等价结构的有效范畴性。 *Annals of Pure and Applied Logic*, 141(1–2):61–78, 2006. [CCHM09] Wesley Calvert, Douglas Cenzer, Valentina S. Harizanov, and Andrey Morozov. 阿贝尔 p-群的有效范畴性。 *Annals of Pure and Applied Logic*, 159(1–2):187–197, 2009. [CDRU09] Douglas Cenzer, Rod Downey, Jeffrey B. Remmel, and Zia Uddin. 阿贝尔群的空间复杂度。 *Archive for Mathematical Logic*, 48(1):115–140, 2009. [CFG+09] John Chisholm, Ekaterina B. Fokina, Sergey S. Goncharov, Valentina S. Harizanov, Julia F. Knight, and Sara Quinn. 极限层级上复杂性与可定义性的内在界。 *Journal of Symbolic Logic*, 74 3 1047( ): –1060, 2009. [CHR14] Douglas Cenzer, Valentina Harizanov, and Jeffrey B. Remmel. 单射结构的可计算性理论性质。 *Algebra and Logic*, 53(1):39–69, 2014. [CR91] Douglas Cenzer and J effrey B. Remmel. 多项式时间模型与递归模型。 *Annals of Pure and Applied Logic* 54 1 17 58, 1991 , ( ): – . [CR92] Douglas Cenzer and Jeffrey B. Remmel. 多项式时间阿贝尔群。 *Annals of Pure and Applied Logic* 56 1 3 313 363, 1992 , (–): – .

[DMN21] Rod Downey, Alexander Melnikov, and Keng Meng Ng. 在线结构理论基础 II：算子方法。 *Logical Methods in Computer Science*, 17(3):6:1–6:35, 2021. [FKM10] Ekaterina Fokina, Iskander Kalimullin, and Russell Miller. 可计算结构的范畴性度。 *Archive for Mathematical Logic*, 49(1):51–67, 2010. [Fro15] Andrey N. Frolov. 可计算线性序的有效范畴性。 *Algebra and Logic* 54 5 415 417, , ( ): – .[GD80] Sergei S. Goncharov and Valeriy D. Dzgoev. 模型的自稳定性。 *Algebra and Logic* 19 1 28 37, , ( ): – .[GHK+05] Sergey Goncharov, Valentina Harizanov, Julia Knight, Charles McCoy, Russell Miller, and Reed Solomon. 可计算结构理论中的枚举。 *Annals of Pure and Applied Logic*, 136(3):219–246, 2005. [Gon77] Sergei S. Goncharov. 非自同构构造化的数量。 *Algebra and Logic*, 16 3 169( ): –185, 1977. [Gon80] Sergei S. Goncharov. 模型与阿贝尔群的自稳定性。 *Algebra and Logic*, 19(1):13–27, 1980. [Gon97] Sergei S. Goncharov. *Countable Boolean algebras and decidability*。西伯利亚代数与逻辑学派。 Consultants Bureau, 1997。[Gon11] Sergei S. Goncharov. 相对于强构造化的自稳定性度。 *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* 274 1 105 115, 2011 , ( ): – . [Gri90] Sergei Grigorieff. 每个递归线性序都有一个属于 DTIME-SPACE(n n *Journal of* , log( )) 的副本。[, ( ): – . *Symbolic Logic* 55 1 260 276, 1990 21] KM*Lobachevskii Journal of Mathematics*Iskander Kalimullin and Alexander Melnikov. 相对于可计算预言机的准时范畴性。[, 42(4):735–742, 2021. 17] KMN *Theoretical Computer Science*Iskander Kalimullin, Alexander Melnikov, and Keng Meng Ng. 无延迟可计算的代数结构。[, 674:73–98, 2017. 05] LMMS *Journal of Symbolic Logic*Steffen Lempp, Charles McCoy, Russell Miller, and Reed Solomon. 有限高度树的可计算范畴性。[, 70(1):151–215, 2005. 61] Mal *Russian Mathematical Surveys*Anatoly I. Mal' tsev. 构造代数 I。[, 16(3):77–129, 1961. 02] McC Δ^0_3 *Algebra* Charles F. D. McCoy. 线 *and Logic* 41 5 295 305, 2002 性序和布尔代数的[-范畴性的部分结果。03] , ( ): – . Δ^0_2 *Annals of Pure and* McC[Charles F. D. *Applied Logic* 119 1 3 85 120, 2003 McCoy. 布尔代数和线性序的 05] -范畴性。 *Journal of Symbolic Logic*, (–): – . [Mil60] Russell Miller. 无限高度树的可计算维数。 *Transactions of the American Mathematical Society* 95 2 341 360, 1960 , 70(1):111– 141, 2005.[Rab] Michael O. Rabin. 可计算代数、一般理论与可计算域理论。 *Journal of Symbolic Logic* 46 3 572 594, 1981 , ( ): – . [Rem81a] J effrey B. Remmel. 递归布尔代数的递归同构类型。 *Proceedings of the American Mathematical Society* 83 2 387 391, 1981 , ( ): – . Rem81bJeffrey B. Remmel. 递归范畴线性序。, ( ): – .

Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan
Email address: nickbazh@yandex.ru

Nanyang Technological University, Singapore
Email address: heertern001@e.ntu.edu.sg

Nanyang Technological University, Singapore
Email address: kmng@ntu.edu.sg