arXiv:2603.08010v1 [math.LO] 9 Mar 2026

函数结构的原始递归范畴性谱

Nikolay Bazhenov、Heer Tern Koh 和 Keng Meng Ng

Abstract. 关于范畴性度这一概念，我们研究了准时结构中的类似概念。我们证明，对于非Δ^0_1范畴的单射结构，这些概念相同；并构造了一个 Δ^0_1范畴的单射结构，使得这些概念有所不同。此外，我们还证明，在每个非零可计算可枚举图灵度中，都存在一个对准时同构为低的原始递归度（定义如下），也存在一个作为准时范畴性度的原始递归度。

1. 引言

可计算结构理论中的一个关键研究方向，是考察可计算结构之间同构的算法内容（最早由 [Rab60、Mal61]中定义）。更具体地说，给定某个可计算结构 $\mathcal{A}$，研究者试图找到一个图灵度$\mathbf{d}$，使得对于任意两个可计算呈现 $B, C \cong \mathcal{A}$，$\mathbf{d}$ 都能计算出它们之间的同构B 和 C。对于这样的度$\mathbf{d}$和结构 $\mathcal{A}$，我们称 $\mathcal{A}$是$\mathbf{d}$-可计算范畴的。直观而言，这衡量了要以算法方式生成 $\mathcal{A}$各个副本之间的同构所需的非可计算信息量。在这一框架下，人们研究了各种结构类中同构的算法内容（例如参见[GD80、Rem81a、Rem81b、McC03、CCHM06、CCHM09、CHR14、Fro15、Baz17]）。

反过来，给定一个图灵度$\mathbf{d}$，我们也可以问，这样的度能否计算某些结构之间的同构。要使这个问题有意义，实际上只应考虑这样的结构：$\mathcal{A}$ $\mathbf{d}$ 是能够生成$\mathbf{d}$ 的同构的最低度。否则，答案总是显然为是，因为存在可计算范畴的结构；这类结构的任意两个表示之间都存在可计算同构。如果存在一个结构 $\mathcal{A}$，使得$\mathbf{d}$ 是计算该结构$\mathbf{d}$ 的任意两个给定表示之间同构的最低度，那么我们称$\mathbf{d}$ 为一个范畴性度 [FKM10, Gon11]。关于范畴化度的已知结果，可参见例如 [FKM10, CFS13, BKY18, CS19, CDHTM20, Baz21, CN22, CR24] 。另一方面，如果$\mathbf{d}$具有这样的性质：任何$\mathbf{d}$-可计算范畴的结构也是可计算范畴的，那么我们称$\mathbf{d}$ 为可计算同构低度[FS11]。直观地说，这意味着$\mathbf{d}$在计算能力上较弱，因为用它来计算同构时不会提供任何额外信息。

与可计算结构理论密切相关的是对准时结构的研究。这些结构的定义域为 ω，其运算和关系均为一致的原始递归

Date：2026年3月10日。Ng 获得新加坡教育部学术研究基金第二级（MOE- T2EP20222-0018）和学术研究基金第一级（RG104/24）的支持。我们也感谢 David Belanger 与我们进行了许多有益的讨论。

[KMN17a]。对这类结构的研究源于这样一种现象：只需消除无界搜索的使用，就可以从可计算呈现中提取出“可行”的呈现[Gri90, CR91, CR92, CDRU09]。因此，孤立出极小化算子有助于深入理解“可行”呈现与可计算呈现之间的差距。这种方法引起了相当多的关注，并被证明能从不同于可计算结构理论的视角进行研究（关于准时结构的综述，参见 [BDK$^+$19、DMN21] ）。沿着这一思路，本文研究范畴化度的对应概念。

1.1. **预备知识**。 回顾一下，可计算结构的范畴性度 是这样一个最小图灵度$\mathbf{d}$： 它能够计算出该结构任意两个可计算呈现之间的同构。显然，要证明某个结构的范畴性度为$\mathbf{d}$，首先必须证明$\mathbf{d}$ 足以产生该结构任意两个可计算呈现之间的同构。其次，要证明这样的度是“精确的”，通常需要构造两个可计算呈现，使得它们之间的任意同构 f 都满足 $f \geq_T \mathbf{d}$。粗略地说，可计算结构的范畴性度衡量了该结构的可计算呈现之间同构的算法复杂度。为了研究这些概念的原始递归类比，我们需要以下定义。

定义 1.1 ([KM21])。 设 $f, g\colon\ \omega \to \omega$ 是全函数。 f 可归约到 g，记作 $f \leq_{PR} g$，若存在某个原始递归方案 Ψ 使得 $\Psi^g = f$。若进一步有 $g \leq_{PR} f$，则记作 $f \equiv_{PR} g$。由此诱导的度结构称为原始递归度。

正如图灵度衡量不可计算性，原始递归度类似地衡量各种函数的原始递归内容。直观地说，如果 $f \leq_{PR} g$，那么 g 的增长速度比 f 快，因此其“原始递归复杂度”比 f更高。在这一框架下，遵循可计算结构理论中的思想和术语，我们定义：

定义 1.2 ([BK21])。 对于给定的准时结构 A，我们用$\mathtt{PRCatSpec}(A)$ 表示由所有原始递归度$\mathbf{d}$ 组成的集合，使得对于任意准时结构 $B \cong A$，都存在一个同构$f\colon A \to B$，且$\mathbf{d} \geq_{PR} f, f^{-1}$。

由于原始递归函数的逆函数不一定是原始递归函数，因此对于给定函数 f， f和 f^{-1}可能属于不同的原始递归度。因此，在如上所述定义结构的原始递归范畴化谱时，我们要求每个原始递归度$\mathbf{d} \in$PRCatSpec(A)都能原始递归地计算出一个同构及其逆同构。

在可计算性理论中，图灵度$\mathbf{0}$， $\mathbf{0}'$， $\mathbf{0}''$，.....充当“脊柱”，用于分类和排列各种对象或过程的算法内容。类似地，我们定义以下原始递归度集合：

定义 1.3 ([BK21])。 对于每个可计算序数 $\alpha > 0$，锥(Δ^0_α) 是由所有原始递归度组成的集合，其中$\mathbf{d}$满足 $\mathbf{d} \geq_{PR} f$，对于任意全定义的 Δ^0_α-函数 f均成立。

根据定义 1.3 和 1.2，不难得到以下结论：

事实 1.4。 如果 A 是 Δ^0_α-可分类的，那么锥$(\Delta^0_\alpha) \subseteq \mathtt{PRCatSpec}(A)$。

从某种意义上说，这相当于准时结构的可计算结构的 Δ^0_α-范畴性。为了证明这个界是紧的，也就是说， Δ^0_α 是 A 的最小原始递归范畴性度，我们证明 PRCatSpec(A) $\subseteq$Cone(Δ^0_α)，因此 PRCatSpec(A) $=$Cone(Δ^0_α)。这意味着，原始递归地计算

A 的同构的原始递归度，恰好与原始递归地计算 Δ^0_α-函数的原始递归度完全一致，因此这与可计算结构的范畴性度概念类似。

最后，我们称原始递归度$\mathbf{d}$ 具有对准时同构为低，如果对于任意结构 $A \cong B$满足 $f\colon\ A \to B$ 是一个同构，且 $f \oplus f^{-1} \leq_{PR} \mathbf{d}$，那么 A和 B逐点同构。我们称原始递归度$\mathbf{d}$ 是一个准时范畴性度，**如果存在一个准时结构，使得**$\mathtt{PRCatSpec}(A)$谱中的最小度为$\mathbf{d}$ 。据我们所知，目前唯一已知的准时范畴性度的例子由以下结果给出：若全函数 $f(x)$ 的图是原始递归的，那么$\deg(f)$ 是一个准时范畴性度（ [KMN17b]中的命题 *2.7*）。我们还引用 [KM21,KK24] 中的相关结果。

本文研究单射结构的原始递归范畴性谱，证明它们通常与相应的 Δ^0_n-范畴性概念一致。尽管如此，在第3节中，我们给出了一个可计算范畴的单射结构 A ，使得 PRCatSpec(A) $\not\subseteq$ 锥，这与第2节及配套论文 [BKN]中的结果形成对照。在本文最后一节中，我们还证明，在每个非零可计算可枚举图灵度中，都存在表现出「对照性」行为的原始递归度：每个非零可计算可枚举图灵度中，都有一个对准时同构为低的原始递归度，也有一个准时范畴性度。

2. Injection Structures

单射结构是一种仅含单个一元函数符号的结构，且该函数是单射。显然，这类结构可以根据其中轨道的数量和类型来刻画。具体而言，每个轨道要么是有限的，要么是一个 ω-链，要么是一个 ζ-链。我们首先证明，这类结构也具有准时呈现。

定理 2.1 (众所周知的结果)。 设 A 是一个至少有一个无穷轨道的可计算单射结构。那么 A 有一个准时呈现。

证明。 设 A 是一个至少有一个无穷轨道的可计算单射结构。非一致地固定 N_0，$N_1 \in \omega \cup \{\infty\}$ 分别为 A 中类型为 ω 和 ζ 的轨道数。 P 的 A 的一个准时呈现可按如下方式构造。在每个阶段 s，将 $n_0 + n_1$ 个元素枚举进 P，其中 $n_i = \min\{s, N_i\}$，并以显然的方式延伸无穷轨道。由于 N_0，N_1 中至少有一个非零，这保证了 P 始终保持准时。对于任何有限大小的轨道，我们只需等待其大小在 A 中显现（这是一个可计算枚举等待）；一旦显现，就将一个大小相同的有限圈枚举进 P。□

回顾一下，可计算单射结构 A 是相对 Δ^0_1-范畴的，当且仅当 A 是 Δ^0_1-范畴的，当且仅当 A 只有有限多个无穷轨道 [CHR14，推论 2.5]。

定理 2.2。如果 A 是一个相对 Δ^0_1-范畴的单射结构，且至少有一个无穷轨道和无限多个有限轨道，那么 $\mathtt{PRCatSpec}(A) =$ 锥(Δ^0_1)。

证明。根据事实 1.4，我们有 Cone(Δ^0_1) $\subseteq$PRCatSpec(A)。为了证明剩下的包含关系，对于任意全可计算的 g，我们构造准时单射结构 A 和 B，使得任意同构 $h\colon A \to B$ 都满足 $g \leq_{pr} h \oplus h^{-1}$。

编码 g(0)：由于 g 是一个全可计算函数，我们只需对 s 的阶段进行编码，即 g(0)$[s]\downarrow$的阶段。我们将通过把有限轨道“快速地”枚举到一个结构 A 中，同时将它们延迟到 s 阶段之后再枚举到 B 中，来实现这一点。这里的主要张力在于，我们

必须让 A 和 B 都准时；我们不能任意延迟枚举元素。由于我们假设 A 至少有一个无穷轨道，因此在等待 $g(0)\downarrow$期间，我们将元素枚举到该无穷轨道中，以使 A 和 B 保持准时。最终， A 必然会揭示出某个有限轨道。一旦找到这个有限轨道，并且 $g(0)$已经收敛，我们就将同一个有限轨道枚举到结构 B中。如果 $h:\ A \to B$ 是一个同构，那么通过计算有限轨道内元素上的 h ，我们便可以恢复 $g(0)$收敛的阶段。

编码 $g(x)$：上述策略的显然推广，是在 A 中揭示的前 x 个有限轨道上计算h ，然后论证这些像中至少有一个的指标大于 $g(x)$ 收敛时所处的阶段。不过，我们在此指出，这一过程未必能关于 $h \oplus h^{-1}$ 和 x 原始递归地完成。特别是，任意准时单射结构 A 都可能只在极其稀疏的阶段枚举有限轨道，这意味着无法以原始递归的方式获得 A 中第 x^{th} 个有限轨道的指标。

为解决这个问题，除了对 $g(x)$ 收敛时所处的阶段进行编码外，我们还对 A 枚举第 $x+1$ 个有限轨道时所处的阶段 $G(x+1)$ 进行编码。更具体地说，只有在第 $x+1$ 个有限轨道已被枚举进 A 之后，我们才将第 x 个有限轨道枚举进 B。

现在，我们可以如下定义 Ψ^h。非一致地固定 $G(0)$，即 A 揭示第一个有限轨道时所处的阶段。从这个阶段开始，我们可以原始递归地恢复该有限轨道中各元素的指标，然后在这些元素上计算 h。所得像必须产生足够大的指标，使得 A 已经枚举了下一个有限轨道，且 $g(0)$ 已收敛。递归地，我们可以假设 $\Psi^h(x) = g(x) \oplus G(x+1)$。为定义 $\Psi^h(x+1)$，使用 $G(x+1)$ 恢复 A 中第 $x+1$ 个有限轨道的指标，并在 A 中前 $x+1$ 个有限轨道的所有元素上计算 h。由于在 A 枚举第 $x+2$ 个有限轨道且 $g(x+1)$ 收敛之前， B 绝不会枚举第 $x+1$ 个有限轨道，因此这些 h 个像中的一个必定会产生指标 $\geq G(x+2)\ g(x+1)$。也就是说， $h \geq_{pr} g \oplus G \geq_{pr} g$。□

注意到， A 中无穷轨道的存在，使我们能够任意“虚耗时间”，并延迟将有限轨道枚举进 B。因此，可以轻易修改上述证明，使其适用于存在某种“虚耗时间”机制的情形。例如，如果A 相对 Δ^0_1范畴且某个有限大小出现无穷多次，那么该结果也应成立。回想一下，对于 Δ^0_1范畴的单射结构，剩下的情形是没有无穷轨道，且每种有限大小的轨道都只有有限个。有些特殊情形下，我们可以修改上述证明，得到 PRCatSpec(A) $\subseteq$ Cone(Δ^0_1)，但令人惊讶的是，这一结论并非普遍成立（详情见定理 3.1）。

可计算单射结构 A 相对 Δ^0_2范畴，当且仅当 A 是 Δ^0_2范畴，当且仅当 A有有限多个 ζ 链，或有限多个 ω 链 [CHR14，推论 3.3]。

定理 2.3。 如果 A 是相对 Δ^0_2-范畴的单射结构，但不是相对 Δ^0_1-范畴的单射结构，那么 $\mathtt{PRCatSpec}(A) = \text{锥}(\Delta^0_2)$。

证明。 如果单射结构 A 是相对 Δ^0_2-范畴的，但不是相对 Δ^0_1-范畴的，那么其无穷轨道必属于以下类型之一：

(i) 有限多个 ζ 链和无限多个 ω 链。(ii) 仅有有限多个 ω 链和无限多个 ζ 链。

应用事实 1.4，我们显然有锥(Δ^0_2) $\subseteq$ PRCatSpec(A)。尚需证明 PRCatSpec(A) $\subseteq$ 锥(Δ^0_2)。也就是说，给定 g，一个全 Δ^0_2 函数，我们定义两个尖点注入结构 A 和 B，使得 $g \leq_{pr} h \oplus h^{-1}$ 对任意同构 $h:\ A \to B$。

固定一个原始递归近似 g^*，使得对所有 x有 $\lim_s g^*(x,s) = g(x)$，并固定某个具有准时呈现的类型（i）单射结构。在 A 和 B中，在观察到有限轨道于给定的准时（或可计算）单射结构中闭合之前，我们从不枚举任何有限轨道。更具体地说，在等待有限轨道被枚举进给定的准时单射结构时，我们只枚举 ω 链。类似地，我们可以非一致地固定有限多个 ζ 链，并在构造过程中以标准方式枚举它们。这确保 A 和 B 与给定的准时单射结构具有相同的同构类型。显然，我们将用 ω 链来编码稳定阶段 s_x； $g^*(x,s_x) = g^*(x,s)$对所有$s \geq s_x$。

编码 s_x：如上所述，我们构造准时结构 $A = (\omega, f_A)$ 和 $B = (\omega, f_B)$，使得从 A 到 B 的任意同构都编码了 g。在 A中，所有 ω 链都是标准的；这使我们能够以原始递归的方式访问每条 ω 链的最左元素。我们将这些元素记为 $a_0,0,a_1,0,a_2,0,\ldots$. 在每个阶段 s，枚举 $a_s,0$；对于当前位于 A中的每个 $a_{i,j}$，若 $f_A(a_{i,j})$ 尚未定义，则枚举 $a_{i,j+1} := f_A(a_{i,j})$。这确保了 f_A 是原始递归的，且 A是准时的。

在 B 中，我们将使用 B 中每条 ω 链的最左元素来编码 $g^*(x, s)$ 对各种 x 的稳定阶段 s。在阶段 0，枚举元素 b_0，并令 $b^l_{0,0} = b^r_{0,0} = b_0$。其思路是，$b^l_{i,s}$ 和 $b^r_{i,s}$ 分别表示阶段 s 时 i^{th} ω 链当前的最左元素和最右元素。在每个阶段 s，递归地假设已为 $i < s$ 定义了 $b^l_{i,s-1}$ 和 $b^r_{i,s-1}$。若 $g^*(x, s) \neq g^*(x, s-1)$，则执行以下操作。

(1) 对每个 j，其中 $x < j < s$，定义 $f_B(b^r_{j-1,s-1}) = b^l_{j,s-1}$。(2) 对每个 $j < x$，令 $b^l_{j,s} = b^l_{j,s-1}$，以及 $b^r_{j,s} = b^r_{j,s-1}$。(3) 令 $b^l_{x,s} = b^l_{x,s-1}$ 和 $b^r_{x,s} = b^r_{s-1,s-1}$。(4) 选取新指标 $i_{x+1}, i_{x+2}, \ldots, i_s$，并枚举元素 $b_{i_{x+1}}, b_{i_{x+2}}, \ldots, b_{i_s}$，为每个 $x < j \leq s$ 定义$b^l_{j,s} = b^r_{j,s} = b_{i_j}$。

直观地说，如果 $g^*(x, s) \neq g^*(x, s-1)$，那么我们将 $x < j < s$ 的 j^{th} 链在阶段 s 接到 x^{th} 链上，同时保持前 x 条链不变。这确保后续链中的任何元素都具有指标 $> s$。最后，为了使 f_B 保持原始递归，对于在阶段 $s-1$ 枚举的每个元素 $b \in B$，枚举一个新元素 b'，并令 $f_B(b) = b'$，前提是 $f_B(b)$ 尚未定义。此外，如果 b 满足：对于某个 i，$b = b^r_{i,s}$，则重新定义 $b^r_{i,s}$，使其等于 b'。

验证：回想一下，任意有限圈或任意 ζ 链都会通过“复制”给定的准时单射结构而被枚举。因此，要验证该构造能产生正确的同构类型，只需证明上述过程会产生无限多条 ω 链，除此之外不产生任何东西。首先，注意对于上述过程所枚举的任意 b， $f_B(b)$都存在；如果 b 是在阶段 s枚举的，那么到阶段 $s+1$时，必定已定义 $f_B(b)$。因此，上述过程不会产生最右元素。接下来，为证明每条链都有一个最左元素，我们论证：对于每个 $i \in \omega$，都存在 $s \in \omega$，使得对于所有 $t \geq s$， $b^l_{i,s} = b^l_{it}$。根据描述可直接得到，对于所有 $t \geq 0$，$b^l_{0t} = b^l_0$，0。对于 $i > 0$，考虑阶段 s^*，使得对于所有 $t \geq s^*$ 和所有 $x < i$，$g^*(x, s^*) = g^*(x, t)$。由于 g 是一个全定义的 Δ^0_2 函数，这样的阶段 s^*必定存在。按照构造，只有当某个 $x < i$满足 $g^*(x, s) \neq g^*(x, s-1)$时，才会定义 $f_B^{-1}(b^l_{i,s})$。特别地，对于所有阶段 $t \geq s^* + 1$，都有 $g^*(x, t) = g^*(x, t-1)$，因此，$b^l_{it} = b^l_{is^*+1}$。

最后，令 h： $A \to B$ 为一个同构。定义 Ψ^h为如下原始递归方案。给定 x，计算 $g^*(x, \max\{h(a_i, 0) \mid i \le x+1\})$。根据鸽巢原理，至少有一个 $h(a_i,0) = b^l_{js}$，其中某个 $j \ge x+1$ 和某个 $s \in \omega$满足条件。由此可知，$\max\{h(a_i,0) \mid i \le x+1\}$ 至少与 $x+1$中第 ω条 B链的最左元素的指标一样大；它编码了一个足够大的阶段，使得对于所有 $y \le x$， g^* 都已稳定。特别地， $g^*(x, \max\{h(a_i,0) \mid i \le x+1\}) = g(x)$。

对于类型 (ii) 的单射结构，我们采用类似的策略。唯一的区别在于，在编码 g 时，我们必须产生无穷多个 ζ 链，且除此之外别无其他。也就是说，除了上面定义的过程之外，在每个阶段 s，对于每个当前被定义为 $b^l_{i,s}$ （对某个 i）的 b，枚举一个新元素 b'，定义 $f_B(b') = b$，并重新定义 $b^l_{i,s} = b'$。在 A 中，我们采取类似的做法，在每个阶段通过添加 $a_{i,j}$ （对 $j < 0$），并如之前那样令 $f_A(a_{i,j}) = a_{i,j+1}$，从而向左延伸这些链。

使用修改后的构造，不难看出，我们现在产生的不是 ω 链，而是无穷多个 ζ 链，且除此之外别无其他。此外，对每个 x， B 中的第 $x+1$ 条 ζ 链具有如下性质：其中所有元素的指标为 $\ge s$，其中 s 满足：对所有 $t \ge s$ 以及对所有 $y \le x$， $g^*(y,t) = g^*(y,s)$。出于与之前相同的理由， $g(x) = g^*(x, \max\{h(a_{i,0}) \mid i \le x+1\})$，从而 $g \le_{pr} h$。定理 2.3 得证。□

注意，每个可计算单射结构都是相对 Δ^0_3-范畴的 [CHR14，定理 3.6]。

定理 2.4. 若 A 是相对 Δ^0_3-范畴的单射结构，但不是相对 Δ^0_2-范畴的单射结构，则 $\mathtt{PRCatSpec}(A) =$ 锥 (Δ^0_3)。

证明。设 A 是一个相对 Δ^0_3-范畴、但非Δ^0_2-范畴的单射结构，并具有准时呈现。与之前一样，我们只关注 ω 链和 ζ 链；仅当有限轨道被证明会在给定的精确副本中闭合时，才将它们枚举进我们的结构 $A = (\omega, f_A)$ 和 $B = (\omega, f_B)$。设 g是函数 Δ^0_3，且设 $g^*(x,s,t)$ 是对g的原始递归近似；$\lim_s \lim_t g^*(x,s,t) = g(x)$。编码 g的策略分为两部分。第一部分是针对每一对 (x,s)，编码阶段 $t_{x,s}$，使得对所有 $t \ge t_{x,s}$，都有 $g^*(x,s,t) = g^*(x,s,t_{x,s})$。第二部分是编码满足 $\lim_t g^*(x,s_x,t) = g(x)$ 的阶段 s_x。然后利用同构h：$A \to B$ 和 h^{-1}：$B \to A$，我们分别恢复 s_x 和 t_{x,s_x}，并计算 $g^*(x, s_x, t_{x,s_x})$。

编码 $t_{x,s}$：在 A 中，对于每个 (x,s)，我们保留最左元素为 $a_{\langle x,s\rangle,0}$ 的标准 ω 链。其思路是使用 $h(a_{\langle x,s\rangle,0})$ 对 $t_{x,s}$ 进行编码。直观地说，这意味着我们应在 B 中保留每条 ω 链的最左元素的指标，并使其“足够大”。在 B 中，我们分别从最左元素为 $b_{0,0}$、$b_{1,0}$、$b_{2,0}$、.....的 ω 链开始。在构造的每个阶段 t，我们在 B 中跟踪这些 ω 链各自的最左元素，记为 $b^l_{0,t}$。对于每个 i，令 $b^l_{i,0} = b_{i,0}$。在阶段 t，如果 $g^*(x,s,t) \ne g^*(x,s,t-1)$，那么对于每个 $i \ge \langle x,s\rangle$，枚举某个元素 b^*，赋予它某个指标 $\ge t$，并定义 $f_B(b^*) = b^l_{i,t-1}$，再令 $b^l_{i,t} = b^*$。由于对于每个 (x,s)，$\lim_t g^*(x,s,t)$ 都存在，因此必有某个阶段 t^*，使得对于每个 $x' \le x$ 和 $s' \le s$，$\lim_t g^*(x',s',t) = g^*(x',s',t^*)$。在这样的阶段 t^* 之后，对于每个 $i \le \langle x,s\rangle$， $b^l_{i,t}$ 此后不再改变。此外，$b^l_{\langle x,s\rangle,t^*}$ 的指标必为 $\ge t^*$。

编码 s_x：令 $P(x,s)$ 为谓词“$\lim_t g^*(x,s,t) = g(x)$”。由于这等价于“对所有 $s' \ge s$，$\lim_t g^*(x,s,t) = \lim_t g^*(x,s',t)$”，因此 $P(x,s)$ 是一个 Π^0_2 谓词。我们还可以要求 $s \ge x$ 取最小值，从而进一步假设存在唯一的 s 使得 $P(x,s)$ 成立；并且对于任意 $x < y$,

如果 $P(x, s_x)$ 和 $P(y, s_y)$ 都为真，那么 $s_x < s_y$。为了使策略彼此不相交，我们使用无穷多个 ζ 链来编码各种 s_x。在 B 中，我们枚举 ζ 链的标准副本，以 $c_{i,j}$ 为指标，其中 $i, j \in \omega$，定义 $f_B(c_{i,1}) = c_{i,0}$，$f_B(c_{i,2j}) = c_{i,2(j+1)}$ 以及 $f_B(c_{i,2j+3}) = c_{i,2j+1}$。在 A 内，令可能的 ζ 链由 $d_{i,j}$ 编码，其中 $i, j \in \omega$。通过仔细定义 f_A，对于固定的 s，当且仅当 $P(0, s) \vee P(1, s) \vee \cdots \vee P(s, s)$ 成立时，$d_{s,j}$ 的集合才构成一条 ζ 链。直观来说，我们只在某个 $P(x, s)$ 当前对某个 $x \leq s$ 成立的阶段，才将 $d_{s,j}$ 的链向左“延伸”。由于 $P(x, s)$ 是 Π^0_2，若它成立，那么它必定会在无穷多个阶段看起来成立。这意味着，在无穷多个阶段，我们会将链向左延伸，从而得到一条 ζ 链。反过来，如果我们在无穷多个阶段将包含 $d_{s,0}$ 的链向左延伸，那么 $P(0, s)$ $P(1, s) \ldots, P(s, s)$ 中至少有一个必定会在无穷多个阶段看起来成立。也就是说，对于 $x \leq s$，$P(x, s)$ 中有一个为真。为了还原 s_x，我们计算足够多个 i 对应的 $h^{-1}(c_{i,0})$，并且知道这样的像必定映射到某个包含在 ζ 链中的 $d_{s,j}$。根据鸽巢原理，我们由此得出，存在这样一组 $d_{s,j}$，使得它具有 $s \geq s_x$。

构造：我们在下文总结 A 与 B 中的各类元素。

元素类型	目的
$a_{i,j} \in A$，对所有 $i, j \in \omega$。	标准 ω 链；编码 $t_{x,s}$，其中 $i = \langle x, s\rangle$。
$b_{i,j} \in B$，对所有 $i \in \omega$ 以及所有 $j \geq i$。	非标准 ω 链作为 $h(a_{i,0})$ 的像。
$c_{i,j} \in B$，对所有 $i, j \in \omega$ 都成立。	标准 ζ 链；编码 s_x，其中 $i = \langle x, s\rangle$。
$d_{i,j} \in A$，对所有 $i, j \in \omega$ 都成立。	ζ 链当且仅当存在 $x \leq i$ 使得 $P(x, i)$ 成立。

在阶段 0，将 $a_{0,0}, d_{0,0}$ 枚举到 A 中，将 $b_{0,0}, c_{0,0}$ 枚举到 B 中。定义 $b^l_{0,0} = b^r_{0,0} = b_{0,0}$ 和 $d^l_{0,0} = d^r_{0,0} = d_{0,0}$。在阶段 s，假设我们已经为每个 $i < s$，$b^l_{i,s-1}, b^r_{i,s-1}, d^l_{i,s-1}$ 以及 $d^r_{i,s-1}$ 定义了。

步骤 1： 对每个 $j < s$ 和 $a_{i,s}$，将对每个 $i \leq s$ 的 $a_{s,j}$ 枚举到 A 中。然后对每个 $j < s$ 定义 $f_A(a_{s,j}) = a_{s,j+1}$，并对每个 $i \leq s$ 定义 $f_A(a_{i,s-1}) = a_{i,s}$。这确保在每个阶段 s，$a_{i,j}$ 对所有 $i, j \leq s$ 都已被枚举，并且 f_A 在所有此类元素上是原始递归的。

步骤 2：将 $b_{s,s}$ 枚举到 B 中，并定义 $b^l_{s,s} = b^r_{s,s} = b_{s,s}$。对每个 $i < s$，令 j_i 为最小指标，使得对任何当前已枚举到 B 中的 $b_{i,j}$，都有 $j_i > j$。如果存在某个 $\langle x, n\rangle = i < s$ 以及 $g^*(x, n, s) \neq g^*(x, n, s-1)$，则对所有满足 $i \leq k < s$ 的 k，将 b_{k,j_k} 和 b_{k,j_k+1} 枚举到 B 中，并定义

- $b^r_{k,s} = f_B(b^r_{k,s-1}) = b_{k,j_k+1}$，
- $b^l_{k,s} = b_{k,j_k}$，以及
- $f_B(b_{k,j_k}) = b^l_{k,s-1}$。

否则，只需将 b_{i,j_i} 枚举到 B 中，定义 $b^r_{i,s} = f_B(b^r_{i,s-1}) = b_{i,j_i}$ 以及 $b^l_{i,s} = b^l_{i,s-1}$。步骤 3：对每个 $j < s$，将 $c_{s,2j}, c_{s,2j+1}$ 枚举到 B 中；对每个 $i \leq s$，将 $c_{i,2s}, c_{i,2s+1}$ 枚举到 B 中。现在，对每个 $i < s$，定义 $f_B(c_{i,2(s-1)}) = c_{i,2s}$ 以及 $f_B(c_{i,2s+1}) = c_{i,2s-1}$，并且

$$c_{s,2s+1} \xrightarrow{f_B} c_{s,2s-1} \xrightarrow{f_B} \ldots \xrightarrow{f_B} c_{s,1} \xrightarrow{f_B} c_{s,0} \xrightarrow{f_B} c_{s,2} \xrightarrow{f_B} \ldots \xrightarrow{f_B} c_{s,2s}.$$

在每个阶段 s，B 都包含 $c_{i,j}$，对于每个 $i \leq s$ 以及每个 $j < 2(s+1)$，并且 f_B 在所有此类元素上都是原始递归的。

步骤 4： 将 $d_{s,0}$ 枚举到 A 中，并定义 $d^l_{s,s} = d^r_{s,s} = d_{s,0}$。对于每个 $i < s$，令 j_i 为最小指标，使得对于任何当前已枚举到 A 中的 $d_{i,j}$，都有 $j_i > j$。如果存在某个 $x \leq i < s$

使得 $P(x,i)$ 在当前阶段看起来为真，那么将 d_{i,j_i} 和 d_{i,j_i+1} 枚举到 A 中，并定义如下。

- $d^r_{i,s} = f_A(d^r_{i,s-1}) = d_{i,j_i+1}$,
- $d^l_{i,s} = d_{i,j_i}$，以及
- $f_A(d_{i,\ j_i}) = d^l_{i,\ s-1}$。

否则，仅将d_{i,j_i} 枚举到 A中，并定义$d^r_{i,s} = f_A(d^r_{i,s-1}) = d_{i,j_i}$。此外，令 $d^l_{i,s} = d^l_{i,s-1}$.

每当给定的准时单射结构中揭示出一条有限轨道时，我们也将一条相同大小的有限轨道枚举到结构 A 和 B中。

验证：我们作出如下观察。

(i) 对于任意 $x,\ s$，集合 $\{b_{\langle x,s\rangle,j} \mid j \geq \langle x,s\rangle\}$ 构成一条以$b_{\langle x,\ s\rangle,\ t}$为最左元素的 ω 链；其中，对于所有 $t' \geq t$ 以及任意 $\langle x',\ s'\rangle \leq \langle x,\ s\rangle$，$g^*(x',\ s',\ t') = g^*(x',\ s',\ t)$。（注意，对于 $j < \langle x,\ s\rangle$，$b_{\langle x,\ s\rangle,\ j}$ 未定义，因为它们从未被枚举进入 B。）

对于固定的一对 x,s，由于假设 $\lim_t g^*(x,s,t)$ 存在，因此必定存在某个有限阶段 $t_{x,s}$，使得对于所有 $t \geq t_{x,s}$, $g^*(x,s,t_{x,s}) = g^*(x,s,t)$。这意味着，对于所有$t > \max\{t_{x',s'} \mid \langle x',s'\rangle \leq \langle x,s\rangle\}$，我们总是定义 $b^l_{\langle x,s\rangle,t+1} = b^l_{\langle x,s\rangle,t}$，并且 $f_B^{-1}(b^l_{\langle x,s\rangle,t}) \uparrow$。因此，存在某个有限阶段 t，此后集合 $\{b_{\langle x,s\rangle,j} \mid j \geq \langle x,s\rangle\}$ 中的最左元素不再改变。也就是说，该集合构成一条 ω 链。根据上述论证并分析步骤 2 中的操作，可以轻易得出，对于满足 $b_{\langle x,s\rangle,j} = b^l_{\langle x,s\rangle,t}$的指标 $j \in \omega$，有 $j \geq t_{x',s'}$，对任意 $\langle x',s'\rangle \leq \langle x,s\rangle$均成立。因此，(i) 成立。

(ii) 对于任意 $s \in \omega$，集合 $\{d_{s,j} \mid j \in \omega\}$ 构成一条 ζ 链，当且仅当存在某个 $x \leq s$，使得 $P(x,\ s)$ 在无限多个阶段触发。

为了解释 (ii) 为何成立，我们来关注构造中的步骤 4。首先，假设对于所有 $x \leq s$，$P(x,\ s)$ 只触发有限多次。特别地，存在一个足够大的有限阶段 s^*，使得在 s^* 之后，对于所有 $x \leq s$，$P(x,\ s)$ 都不再触发。分析构造中的步骤 4 后，可以得出结论：对于所有 $s' \geq s^*$，$d^l_{s,\ s'} = d^l_{s,\ s^*}$，且 $f_A^{-1}(d^l_{s,\ s^*}) \uparrow$。换言之，集合 $\{d_{s,j} \mid j \geq s\}$ 构成一条 ω 链。

另一方面，如果存在某个 $x \leq s$，使得 $P(x,\ s)$ 在无限多个阶段触发，那么将这些阶段记为 $s_0 < s_1 < s_2 < \ldots$。显然，在所有这些阶段，我们都会定义 $d^l_{s,\ s_i} = f_A^{-1}(d^l_{s,\ s_i-1})$，这意味着集合 $\{d_{s,j} \mid j \in \omega\}$ 没有最左元素。此外，如步骤 4 中所述，我们总会定义 $d^r_{s,\ s'} = f_A(d^r_{s,\ s'-1})$，从而也确保 $\{d_{s,j} \mid j \in \omega\}$ 没有最右元素。因此，$\{d_{s,j} \mid j \in \omega\}$ 构成一条 ζ 链，当且仅当存在某个 $x \leq s$，使得 $P(x,\ s)$ 在无限多个阶段触发。

要证明 A 和 B 具有正确的同构类型，只需证明它们由无限多个 ω 链和无限多个 ζ 链组成，因为在给定的精确副本中，一旦观察到有限轨道闭合，就会将其枚举。构造的步骤 3 确保 B由形如 $\{c_{i,j} \mid j \in \omega\}$ 的 ζ 链组成，每个 $i \in \omega$对应一条。通过应用 (i)，我们还可以得出结论，B 包含无限多条由 $\{b_{i,j} \mid j \geq i\}$ 给出的 ω 链，每个 $i \in \omega$对应一条。事实上，不难看出，这些恰好就是 B中的所有 ω 链。

在 A 中，容易看出存在无穷多条 ω 链，由每个 $i \in \omega$ 的 $\{a_{i,j} \mid j \in \omega\}$ 给出。由于 $g(x)$ 是全 Δ^0_3 函数，对每个 $x \in \omega$，必存在某个 $s_x \in \omega$，使得 $P(x,s_x)$ 无限多次触发。应用上文的 (ii)，我们便可得到，对每个 $x \in \omega$，链$\{d_{s_x,j} \mid j \in \omega\}$ 都是 ζ 链。因此，A 既包含无穷多条 ω 链，也

包含无穷多条 ζ 链。我们在此还注意到，作为 (ii) 的推论，A 中仅有的 ζ 链都形如某个 $x \in \omega$ 所对应的 $\{d_{s_{x,j}} \mid j \in \omega\}$。

设 $h : A \to B$ 是一个同构。为恢复 $g(x)$，考虑以下过程。对每个 $i \leq x$，计算 $h^{-1}(c_i,0)$。由于 h 是一个同构，我们得到 $h^{-1}(c_i,0)$ 也必定包含在 A 的某条 ζ 链中。回想一下，A 的链只有形如 $\{d_{s_{y,j}} \mid j \in \omega\}$ 的形式，其中 $y \in \omega$ 是某个值。根据鸽巢原理，至少有一个 $h^{-1}(c_i,0) = d_s$，其中某个 j 和 s 满足 $s \geq s_x$。令 s^* 为从 $h^{-1}(c_i,0)$ 得到的所有此类 s 中的最大值。显然，s^* 具有如下性质：对于任意 $s' \geq s^*$，$\lim_t g^*(x, s^*, t) = \lim_t g^*(x, s', t)$。或者等价地，$\lim_t g^*(x, s^*, t) = \lim_s \lim_t g^*(x, s, t)$。

根据上面的 s^*，对所有 $i \leq \langle x\, s^* \rangle$ 计算 $h(a_{i,\,0})$。这些像中的每一个都必须是 B 中 ω 链的最左侧元素。由于 B 只包含形如 $\{b_{\langle y,s\rangle,j} \mid j \geq \langle y, s\rangle\}$ 的 ω 链，因此对于某个 $y\, s,\ t \in \omega$，每个 $h(a_{i,\,0})$ 都满足 $= b_{\langle y,\ s\rangle,\ t}$。选取具有以下性质的 t^*。

- $h(a_{i^*,0}) = b_{\langle y,s\rangle,t^*}$ for some $i^* \leq \langle x, s^*\rangle$, and
- for any other $b_{\langle y',s'\rangle,t'} = h(a_{i,0})$, $\langle y', s'\rangle \leq \langle y, s\rangle$.

根据鸽巢原理，必有 $\langle x、\ s^*\rangle \leq \langle y、\ s\rangle$，并且由 (i) 可知，$t^*$ 具有如下性质：对于任意 $t \geq t^*$、$g^*(x、\ s^*、\ t^*) = g^*(x、\ s^*、\ t)$。总之，$g^*(x、\ s^*、\ t^*) = \lim_t g^*(x、\ s^*、\ t) = \lim_s \lim_t g^*(x、\ s、\ t)$。由于上述过程显然是原始递归的，$g \leq_{pr} h \oplus h^{-1}$，因此，$\mathrm{PRCatSpec}(A) \subseteq$ 锥(Δ_3^0)。定理 2.4 得证。□

3. A pathological injection structure

定理 3.1. 存在一个结构 A，它是可计算范畴的，但不是逐点范畴的，并且满足 $\mathtt{PRCatSpec}(A) \nsubseteq$ 锥(Δ_1^0)。

我们将构造一个准时单射结构。回顾第2节可知，这个单射结构必然没有无限轨道，并且没有任何轨道大小会无限次重复。直观上，证明的思路是采用某种伪“施压”策略，确保“对手”尽可能多地复制我们的结构。在无法进行这种“施压”的地方，我们转而依靠函数预言机来计算同构。

证明。固定一个可计算但非原始递归函数 g，令 $\{\Psi_e\}_{e\in\omega}$ 为所有原始递归方案的列表，$\{B_e\}_{e\in\omega}$ 为含一个一元函数符号的语言中所有准时结构的列表。我们构造 d、一个 Δ_2^0 函数预言机以及一个准时单射结构 $A = (\omega,\ f_A)$，使其满足以下要求。

$$P_e : \Psi_e^d \neq g \quad Q_e : d \geq_{pr} q_e \oplus q_e^{-1} \text{其中 } q_e : A \to B_e \text{ 是同构，或 } A \ncong B_e.$$

针对一个 Q_e 要求：固定一个具有单个一元函数的准时结构 B_e。如果发现这个函数并非单射，那么 Q_e 显然成立。因此，我们可以假设 B_e 是一个单射结构。

构造开始时，我们只枚举大小为 n 的有限轨道。虽然 B_e 准时，并且应该“快速”枚举其元素，但我们注意到，任意的 B_e 仍可能比我们定义的结构 A 慢得多。这里显然是要用 d 来编码这种延迟。更具体地说，由于我们只枚举大小为 n 的有限轨道，如果 B_e 曾显示出一个大小不是 n 的轨道（或者更一般地说，如果 B_e 不是 A 的子结构），那么我们将永远不会把这种大小枚举到我们的结构 A 中，从而确保 $A \ncong B_e$。因此，B_e 最终应该会枚举一个大小恰好为 n 的轨道。一旦它这样做了，我们就将 $d(0)$ 定义为这一情况发生时的阶段编号。

这里的意图是， $d(j)$ 对应于 B_e 将枚举进 A 的轨道 j^{th} 枚举出来时的阶段编号。

一个 Q_e 以及无穷多个 P_e的策略：固定一个无限的大小序列 $n_0 < n_1 < n_2, \ldots$，并按前文所述开始针对 Q_e 的策略。只枚举大小为 n_0 的轨道，并定义$d(j)$为 B_e 为 A中的 j^{th} 轨道枚举合适的 q_e-像的阶段。重复此过程，直到 $\Psi_0^d \neq g$ 得到见证。由于 g 不是原始递归的，而 d 目前只包含原始递归信息，因此$\Psi_0^d \neq g$ 必定在某个有限阶段 s_0得到见证。达到这样的阶段后，我们定义 $d(s_0)[s_0] = 0$。其思路是， $d(s_0)$应编码一个足够大的阶段，使得 B_e 包含 $A[s_0]$ 作为子结构。只要 $A[s_0]$ 不是 B_e的子结构， $d(s_0)$就保持为 0。

假设对于所有 $j < i$，我们都已定义 s_j，并且 $\Psi_j^d \neq g$ 由初始段$d \upharpoonright s_j$见证。现在我们开始仅将大小为 n_i 的轨道枚举进结构 A。与之前一样，如果发现 B_e 不是 A的子结构，那么通过保持 $A \ncong B_e$，即可满足 Q_e 。类似地， $d(s_{i-1} + k)$将编码大小为 n_i 的 k^{th} 轨道被枚举进B_e的阶段。继续此过程，直到发现 $\Psi_i^d \neq g$。由于 d 仅由原始递归信息构成（只有有限个例外，即每个 $j < i$ 对应的 $d(s_j)$），而 g 不是原始递归的，因此 $\Psi_i^d \neq g$ 必定在某个有限阶段 s_i得到见证。随后，我们可以按照上述描述递归地重复此过程，定义 $d(s_i)[s_i] = 0$ ，并将大小为 n_{i+1} 的轨道枚举进 A。

然而，对于 $i > 0$， Ψ_i^d无法计算 g 这一失败由初始段 $d \upharpoonright s_i$ 所见证。特别地，该初始段包含对应于 $j < i$ 的 $d(s_j)$。在阶段 s ，当发现 $A[s_j]$ 是 B_e 的子结构时， $d(s_j)$ 的值从 0 变为 s，这可能改变计算，使得 Ψ_i^d 现在看起来等于 g。当这种情况发生时，我们初始化所有针对 $k > j$ 的要求P_k ，并回到仅枚举大小为 n_{j+1} 的轨道，同时对所有 $k > j$ 重新开始我们对 s_k 的定义。显然，每个 P_i 只有当对某个 $j < i$ 而言 $d(s_j)$ 发生变化时才能被初始化，因此每个P_i 只会被初始化有限多次。

一般策略：我们将要求排序为 Q_0， P_0， Q_1， P_1，.....。在构造过程中，我们按通常规则将 $n_0 < n_1 < \ldots$和 $s_0 < s_1 < \ldots$维持为互不相同的标记集合；每当n_i 或 s_i 发生变化时，所有针对 $j > i$ 的 n_j 或 s_j 都将被踢到某个值 $> n_i$ 或 $> s_i$ 。如前所述，我们首先将大小为 n_0 的轨道枚举到 A 中，并记录这些轨道被枚举到 B_0中的阶段。在构造的每个阶段 s ，只要 $\Psi_0^{d\upharpoonright s} = g$，我们就对所有 $i \geq 0$ 踢 s_i 并定义 $s_0 = s + 1$。一旦 $\Psi_0^{d\upharpoonright s} \neq g$ 被见证，令 $s_0 = s$ 并定义$d(s_0) = 0$。

现在假设我们已经为每个 $j < i$见证了 $\Psi_j^{d\upharpoonright s_j} \neq g$ 。在后续阶段，我们将处理Q_0， Q_1， $\ldots$， Q_i 和 P_i。与之前类似，在等待满足$\Psi_i^{d\upharpoonright s} \neq g$的阶段 s 时，我们只枚举大小为 n_i的轨道。只要 $\Psi_i^{d\upharpoonright s} = g$，我们就在阶段 s为所有 $k \geq i$ 启动 s_k 。对于输入 $x > s_{i-1}$，我们使用 $d(x)$记录将大小为n_i的第 $x - s_{i-1}$ 个轨道枚举到结构 B_0， B_1， $\ldots$， B_i中的阶段。更具体地说，我们将 $d(s_{i-1} + k)$定义为一个$(i+1)$元组，其中每个分量都是 B_j 为每个 $j \leq i$枚举大小为 n_i的第 k^{th} （> 0）个轨道的阶段。我们继续这一过程，直到出现以下情况之一的第一个阶段 s 。

- 若 $\Psi_i^{d\upharpoonright s} \neq g$，则定义 $d(s_i)[s]$ 为全零的 i 元组，并继续处理$Q_0, Q_1, \ldots, Q_{i+1}$，然后开始寻找 s_{i+1}。
- 对于某个 $j < i$， $A[s_j]$ 被发现是 B_k 的子结构，其中 $k \leq j$ 处于阶段 s。在这样的阶段 s，将 $d(s_j)$的 k^{th} 项改为 s （回想一下， $d(s_j)$是一个 j元组），定义

$s_{j+1} = s+1$并初始化要求 $P_{j'}$, $Q_{j'}$，对所有 $j' > j$均如此。然后返回处理 Q_0, Q_1、.....、Q_{j+1}，并重新开始该过程以找到 s_{j+1}。

- 当我们有多个 Q_e 要求时，还有一点需要注意。回想一下，对于单个 Q_e，若对某个 k，B_e 所揭示的大小为 k 的轨道多于 A 当前所包含的，则我们能够永久保留 $A \ncong B_e$。然而，不同的 Q_e 可能会以某种方式相互作用，从而"破坏"我们从 d恢复同构的策略。

  特别地，我们编码到 d 中的信息并不完全充分；我们需要能够计算每个结构 B_e 将大小为 k 的轨道放置在何处，对于 $n_j < k < n_{j+1}$（这些轨道可能在 k 被限制进入 A之前已被枚举到 A中）。因此，我们还将追踪我们为 Q_e "采取行动"的阶段 t_e （定义见构造）。如果我们从未这样做，则令 $t_e \uparrow$。否则， d（s_j）还将编码 $A[t_{j+1}]$对各个 $k \leq j$成为 B_k 的子结构时所处的阶段。

直观地说，第一种情形是我们成功定义了 s_i，且未对 $d \upharpoonright s_{i-1}$作任何改动。后几种情形是我们在找到 s_i之前对 $d \upharpoonright s_{i-1}$ 作了改动。当这种情况发生时，选取使 $d \upharpoonright s_j$ 未发生变化的最大 s_j，并返回到处理指标为 $\leq j+1$的要求的策略。然后我们可以重新开始对 $x > s_j$定义 $d(x)$。回想一下，所有此类 x 上的 $d(x)$本来就是为 Q_{j+1} 的策略而定义的，因此可以重新初始化。

构造：构造的每个阶段都可能持续非原始递归的时间量。在构造过程中，我们还跟踪子阶段，即在原始递归时间内将新元素枚举到 A中的那些阶段。

在阶段 0，对每个 $i \in \omega$定义 $n_i[0] = i+1$ 和 $s_i = i$。开始将大小为 $n_0[0]$的轨道枚举到 A中，并执行以下操作。

(i) 如果 B_0 仍然是 A 的子结构，那么在原始递归时间内， B_0 必须枚举第一个大小为 $n_0[0]$ 的轨道。发生时，我们用 $d(0)$ 记录该情况发生的子阶段。(ii) 如果 B_0 不是 A 的子结构，则定义 $d(0) = 0$。由于 n_0 当前为 1，且 A仅包含大小为 $n_0[0]$的轨道，要使 B_0 不是 A 的子结构，以下情况之一必须发生。

- B_0 枚举一个尚未闭合的轨道。通过确保我们的结构没有无穷轨道，只有当 B_0 的所有轨道也都是有限的时， B_0 才可能与 A 同构。因此， B_0 枚举的任何轨道最终都必须闭合。也就是说，我们无需考虑不会闭合的轨道。
- B_0 枚举一个大小为 $k > n_0[0]$ 的（闭合）轨道。然后定义 $n_0[1]$ 为某个数$> k$，将之后所有的 n_j 都踢出 $j > 0$。在整个构造过程中，我们在构造的每个阶段 s 只枚举大小为 $n_i[s]$ 的轨道，其中 i 为某个值。这确保我们绝不会将任何大小为 k 的轨道枚举到 A 中，因为对于所有 $s > 0$， $k < n_0[1] \leq n_0[s] < n_1[s] < \ldots$。

- B_0 枚举的大小为 n_0 的轨道多于 A。然后我们类似地将 $n_0[1]$定义为一个新数。在该构造的后续阶段中，我们将永不枚举任何大小为 $n_0[0]$的轨道。如果 n_0 被上述某个动作定义为某个新数，则我们称已采取行动 以应对Q_0，并将 t_0 定义为我们这样做时所处的子阶段。一旦我们成功定义了 $d(0)$，便进入阶段1。在阶段 s，我们称 Q_i 或 P_i 需要关注，如果

• 我们从未采取行动 以应对 Q_i （稍后定义），并且存在某个大小为 $k \geq n_i[s]$的轨道，使得 B_i 所含大小为 k 的轨道多于 A，或者
• $\Psi_i^{d\restriction s}$ 当前分别等于 g 。

此外，如果我们已经针对 Q_i采取了行动，那么令 t_i 为我们采取该行动的子阶段。在阶段 s开始时，对于任何满足 $i \geq 0$ 和 $j \leq i$ 且 $s_i < s$ 、并且我们尚未针对 Q_j采取行动的对象，执行以下操作。

• 如果 t_{i+1} 有定义，并且结构 $A[s_i]$ 和 $A[t_{i+1}]$ 都是 B_j的子结构，那么将 $d(s_i)$ 的 j^{th} 项定义为首次见证这一点的子阶段。否则，对于所有 $x \geq s_i$ ，令 $d(x)$ 的 j^{th} 项为 0。

• 如果 t_{i+1} 未定义，那么我们只检查 $A[s_i]$ 是否为 B_j的子结构。如果是，则将 $d(s_i)$ 的 j^{th} 项定义为首次见证这一点的子阶段。否则，对于所有 $x \geq s_i$ ，将 $d(x)$ 的 j^{th} 项定义为 0。

完成所有此类更改后，令 i 为使得 Q_i 或 P_i 需要关注的最小值 n.

如果需要关注的是 Q_i，则将 $n_i[s+1]$ 定义为某个新数，并进入阶段 $s+1$。接着我们称自己已为 Q_i 采取了行动，并将 t_i 定义为当前子阶段。

如果需要关注的是 P_i，则定义 $s_i = s+1$，并按如下方式为所有 $s_{i-1} < x < s_i = s+1$ 定义 $d(x)$。在尝试定义 $d(x)$ 时，我们只将大小为 $n_i[s]$ 的轨道枚举到A中。设 $j \leq i$ 已给定。

(i) 若以下条件之一成立，则将 $d(x)$的 j^{th} 项定义为 0。

• B_j 当前不是 A 的子结构。更具体地说，这意味着存在某个有限大小 k，使得 B_j 当前拥有的大小为 k 的轨道比 A 更多。
• $d(y)$ 的 j^{th} 项当前对于某个 $y < x$ 为 0。直观地说，这意味着 B_j 当前看起来与 A 不同构。

• 我们在某个较早阶段已经为 Q_j 采取了行动。事实上，一旦我们为 Q_j采取了行动，就令 $d(x)$ 的第 j^{th} 个条目对所有 $x \geq s_j$ 都为 0。

因此，在以下情形中，我们可以假设上述情况均不成立。

(ii) 将 $d(x)$ 的第 j^{th} 个条目定义为：大小为 $n_i[s]$ 的第 $x - s_{i-1}$ 个轨道被枚举进 B_j 时所在的子阶段。由于 B_j 准时，它必须以原始递归的方式枚举新元素。此外，新轨道要么迅速增大，要么闭合并显露其最终大小。结合当前 A 中大小为 $< n_i[s]$ 的轨道数量有限这一事实，以及我们只将大小为 $n_i[s]$ 的轨道枚举进 A 这一点，经过一段原始递归延迟后，以下情况之一必定发生。

• B_j 枚举大小为 $n_i[s]$ 的第 $x - s_{i-1}$ 个轨道。正如前文所述，我们在 $d(x)$ 的第 j^{th} 个条目中记录这一情况发生时的子阶段。
• 存在某个 $k \geq n_j[s]$ ，使得 B_j 中大小为 k 的轨道比 A 中的更多。也就是说，Q_j 需要在下一个阶段获得关注；如果对它采取行动，我们声称此后将不会再枚举任何大小为 k 的轨道（稍后验证）。

• 存在某个 $k < n_j[s]$ ，使得 B_j 中大小为 k 的轨道比 A 中的更多。在这种情况下，为了 Q_j，我们不能强行排挤优先级更高的 $n_{j'}[s] \leq k$ 。相反，我们确保每种大小在 A 中只出现有限多次，这意味着我们可以非一致地固定 q_j^{-1}：在所有大小为 $< n_j$ 的轨道上， $B_j \to A$ ，从而通过根据 d 计算 $q_j \oplus q_j^{-1}$ 来满足 Q_j （下文验证）。与此同时，将 d（x）的 j^{th} 个条目定义为 0。

一旦我们成功定义了 $d \restriction (s+1)$，就进入阶段 $s+1$。

验证：我们先做一些初步观察。注意，只有当某个 $e' < e$ 发生变化时，n_e 才会改变；或者，我们在构造过程中为 Q_e 采取了行动。由于对于每个 Q_e，我们至多采取一次行动，因此很容易看出，每个 n_e 最终都会稳定下来。

要证明 d 是 Δ_2^0，注意，对于每个 $x \in \omega$和每个 s_i，在构造的余有限多个阶段中，$x > s_i$和 $x \leq s_i$恰有一个为真。注意，这仅仅是因为每个 s_i 只有在发生变化时才会增大；而且我们在此并未声称或要求 s_i 稳定下来。对于给定的 x，由于 $x = s_x[0]$，存在最小的 i，使得在余有限多个阶段中 $x \leq s_i$。因此，$d(x)$必定是一个$(i+1)$元组。对于这样的 i，存在一个阶段 s^*，使得 n_i 在阶段 s^*之后再也不会改变。我们还可以归纳地假设，s^* 也满足 $d \upharpoonright x$ 在 s^*之后再也不会改变。我们来证明 $d(x)$的每个分量都会稳定下来。固定某个 $j \leq i$，并考察 $d(x)$的 j^{th}分量。

- 如果存在某个 $y < x$，使得 $d(y)$的 j^{th} 分量为0，那么 $d(x)$的 j^{th} 分量也将被定义为0。此外，根据假设，$d \upharpoonright x$ 在阶段 s^*之后再也不会改变，因此 $d(x)$的 j^{th} 分量将永远保持为0。
- 因此，我们可以假设，对于每个 $y < x$，$d(y)$ 的 j^{th} 项始终为 > 0。我们进一步分情况讨论：$x < s_i$ 或 $x = s_i$。对于 $x < s_i$，回想一下，$d(x)[s]$ 的 j^{th} 项要么记录 B_j 枚举第 $x - s_{i-1}$ 个大小为 $n_i[s]$的轨道时所处的子阶段，要么在阶段 s 发现 B_j 不是 A 的子结构时记录为 0。这意味着存在某个 k，使得 $B_j[s]$ 中大小为 k 的轨道比 $A[s]$ 中的更多。根据构造过程中我们从不为 Q_j 行动这一假设，必有 $k < n_j$；否则，Q_j 就需要关注并采取行动，从而在某个阶段 $s > s^*$ 改变 n_j，这就矛盾了。另一方面，我们只会在阶段 s^* 之后才将大小为 $\geq n_i \geq n_j > k$ 的轨道枚举进 A；如果 B_j 在阶段 $s > s^*$ 枚举出的大小为 k 的轨道曾多于 A，那么它之后就不可能成为 A 的子结构。总之，如果在阶段 $s > s^*$ 发现 B_j 不是 A 的子结构，那么 $d(x)$ 的 j^{th} 项将永远保持为 0。

  对于 $x = s_i$，$d(x)$ 的 j^{th} 项记录以下情况之一。– $A[s_{i-1}]$ 成为 B_j的子结构时所在的子阶段，或– 在 t_i 有定义且大于 s_{i-1}的情况下，$A[t_i]$ 成为 B_j的子结构时所在的子阶段，或– 其他情况则为 0。容易看出，一旦 s_{i-1} 稳定下来，并且 t_i（若有定义）已定义，前两种情况就是可计算可枚举事件。因此，经过某个有限阶段后，$d(x)$ 不再变化。

总之，每个 n_e 最终都会稳定下来，并且 d 是一个 Δ_2^0 函数。现在我们已经准备好证明 P_e 和 Q_e 成立。

每个 P_e 都成立：我们对 $e \in \omega$ 使用归纳法，并证明 s_e 最终会稳定在某个有限值。设 e 是使得 s_e 无限次变化的最小值。根据构造，只有在 Q_e 或 P_e 需要关注，或者某个 $s_{e'}$ 发生变化且 $e' < e$ 时，s_e 才会变化。由于假定 e 是使 s_e 无限次变化的最小值，因此我们可以假设 Q_e 或 P_e无限次需要关注。

- 回想一下，只有当我们从未为 Q_e 采取行动时，它才能在阶段 s需要关注。特别是，由于 s_e 是无限多次发生变化的最小项，Q_e 最终必定会成为需要关注的最高优先级要求。在这样的阶段，我们就会为 Q_e采取行动，而它此后在构造过程中将不再需要关注。因此，我们不妨假设，无限多次需要关注的是 P_e。

- 假设 P_e 无限多次需要关注。令 s^* 为一个足够大的阶段，使得以下条件全部成立。

  – s_0，s_1，.....，s_{e-1}和 n_0，n_1，.....，n_e都已稳定。– 对于所有 $x \leq s_{e-1}$，$d(x)$ 在阶段 s^*之后不再变化。– P_e 在阶段 s^*需要关注。

  根据我们的假设，e 是使得 s_e 无限次变化的最小值；再结合之前的观察，这样的 s^* 必定存在。

  如果存在某个阶段 $s > s^*$，使得 P_e 不需要关注，那么我们断言P_e 此后将不再需要关注。令 s 表示在 s^* 之后 P_e 首次不需要关注的阶段。类似地，令 s' 表示在 s 之后 P_e 再次需要关注的第一个阶段。回想一下，P_e 在某个阶段需要关注，当且仅当 Ψ_e 暂时根据当前的 d计算出 g。更具体地说，我们有 $\Psi_e^{(d\restriction s)[s])} \neq g$、$\Psi^{(d\restriction s'}{}_e{}^{[s']} = g$；并且在某个介于 s 和 s'之间的阶段 s''，对于某个 $x < s$，有 $d(x)[s''] \neq d(x)[s''+1]$。根据构造可知 $s_e[s] = s$；结合 s^* 的选取，可得 $s_{e-1} < x < s_e[s'']$。对于每个这样的 x，$d(x)$记录的要么是 j^{th} 项中的 0，要么是 B_j 枚举出第 $x - s_{e-1}$个大小为 n_e的轨道时所处的子阶段。考虑以下几种情况。

  – 如果 $d(x)$ 的 j^{th} 项 $[s]$ 非零，那么这意味着 B_j 已经枚举了大小为 n_e 的第 $x-s_{e-1}$ 个轨道。由于 B_j 是准时的，这次枚举无法被“撤销”，并且只有当对于某个 $y < x$，$d(y)$ 的 j^{th} 项变为 0 时，$d(x)$ 的 j^{th} 项才会发生变化。根据对 s^* 的选择，这样的 y 必须大于 s_{e-1}，因为假设 $d\restriction(s_{e-1}+1)$ 已经稳定。然而，$d(y)$ 的 j^{th} 项记录了 B_j 枚举大小为 n_e 的第 $y - s_{e-1}$ 个轨道时所处的子阶段。这意味着 $d(y)$ 的 j^{th} 项不可能为 0。

  – 如上所述，如果存在某个 $y < x$，使得 $d(y)$ 的 j^{th} 项为 0，那么类似地，$d(x)$ 的 j^{th} 项也将为 0。因此，我们可以假设 x 是使 $d(x)$ 的 j^{th} 项 $[s]$ 为 0 的最小者。对构造中各项操作的分析可以很容易地得出，只有在存在某个 $k \in \omega$，使得 $B_j[s]$ 中大小为 k 的轨道数量多于 A 时，才会发生这种情况。显然，$k < n_j \leq n_e$，否则我们就会在 s^* 之后的某个阶段对 Q_j 采取操作，从而与 n_j 已经稳定这一假设相矛盾。注意，在 s^* 之前我们不可能对 Q_j 采取操作，否则对于所有 $y \geq s^*$，$d(y)$ 的 j^{th} 项都将为 0（根据 $d(x)$ 的定义）。

  换言之，一旦为每个 $x < s$ 定义了 $d(x)[s]$，它就不会再改变，这意味着 $g \neq \Psi_e^{(d\restriction s)[s]} = \Psi_e^{d\restriction s}$。也就是说，$P_e$ 在阶段 s 之后不再需要关注，这与它需要无限多次关注的假设矛盾。因此，我们可以假设，在 s^* 之后的所有阶段，P_e 始终需要关注。

  此外，回想一下，我们可以在原始递归时间内判定 B_j 是否枚举了大小为 n_e 的第 $x - s_{e-1}$ 个轨道，或者是否枚举了比 A 对某个 $k < n_e$ 所枚举的更多大小为 k 的轨道。因此，对每个 $x > s_{e-1}$，都可以原始递归地计算 $d(x)$。但这意味着 $\Psi_e^d = g$，与 g 不是原始递归的假设矛盾。因此，P_e 不可能在无限多个阶段需要关注。

由此立即可知，对每个 e，P_e 都成立，因为 $\Psi_e^{d\restriction s_e} \neq g$，因此 $\Psi_e^d \neq g$。

每个 Q_e 均被满足：在构造过程中，注意我们仅在 P_e 是需要关注的最高优先级要求的那些阶段，才枚举大小为 n_e 的轨道。利用如下观察

即 s_e 最终也会稳定，由此可知，在阶段 s_e之后，我们绝不会把任何大小为$k \leq n_e$ 的轨道枚举进 A。因此，对每个 $k \in \omega$， A 仅由有限多个大小为 k 的轨道组成。

接下来要论证每个 Q_e 都得到满足。由于每个 n_e 都会在有限值处稳定，而我们只会枚举大小为 $n_e[s]$ 的轨道，其中某个 e， s，因此 A 不含无穷轨道。于是我们可以假设 B_e 也不含无穷轨道，否则 B_e 不可能与 A 同构。我们将证明分为以下两种情况。

首先，假设在某个有限阶段 s，我们为 Q_e 行动过。回想一下，这意味着在阶段s， Q_e 是需要关注的最高优先级要求。特别地，在阶段 s，我们尚未为 Q_e 行动，并且存在一个大小为 $k \geq n_e[s]$ 的轨道，使得 B_e 中大小为 k 的轨道数多于 A。我们断言，在为 Q_e 行动之后，不会再有大小为 k 的轨道被枚举进A，从而保持 $B_e \ncong A$。为 Q_e 行动时，我们在阶段 s 将 n_e 定义为某个新数，并使之后所有针对 $e' > e$ 的 $n_{e'}$ 失效。也就是说，对于每个 $e' \geq e$ 和 $s' > s$，都有 $k < n_{e'}[s']$。根据标记 n_i 的性质，对于每个 $i < e$，我们也有 $n_i[s] < n_e[s] \leq k$，因此 $k \neq n_i[s]$。所以，如果在阶段 s 之后，我们再也没有为 $i < e$ 的任何 Q_i 行动过，那么 B_e 不可能与A 同构，因为此后不会再枚举任何大小为 k 的轨道。另一方面，如果存在某个阶段 $s' > s$，在该阶段我们为满足 $i < e$ 的 Q_i 行动，那么 n_i 同样会在该阶段s' 被定义为一个新数。这再次确保，对于任意 $i \in \omega$ 和任意 $s'' > s'$，都有 $n_i[s''] > k$。总之，一旦我们为 Q_e 行动过，就绝不会再向 A 中枚举任何大小为 k 的轨道。

现在假设在构造过程中，我们从未为 Q_e 采取行动。如果 Q_e 在无限多个阶段都需要关注，那么必定存在某个有限阶段，我们会为它采取行动。因此，必定存在某个阶段 s，此后 Q_e 再也不需要关注。特别是，在这样的阶段之后，我们必定有 B_e 始终是 A的子结构；只要我们能够在此后枚举进 A 的轨道上定义 q_e： $A \to B_e$，那么 q_e^{-1}自然也是原始递归的。我们将这样的阶段固定为 s^*，并如下定义 q_e： $A \to B_e$。令 k 为在阶段 s^*时， B_e 中存在大小为 k 的轨道所对应的最大值。此外，令 $i \geq e$ 为满足 $n_i > k$的最小值。注意，在构造中，阶段 s_i 之后，我们不会再枚举任何大小为 $< n_i$的轨道。特别地，通过非一致地固定 q_e 在 $A \upharpoonright s_i$上，我们只需在大小为 $\geq n_i > k$的轨道上定义 q_e。

令 a_0、 a_1、..... 表示在阶段 s_i 之后枚举进 A 的轨道。我们进一步假设，对于 n_j 的每个稳定值，至少将一个大小为 n_j 的轨道枚举进 A。特别地，对于每个 $j \in \omega$， a_j 的大小至多为 n_{i+j}。为方便起见，我们将 d 中的 $j \in \omega$ 的 $d(s_j)$ 称为特殊项，并将所有其他 x 的 $d(x)$ 称为非特殊项。注意，我们实际上并不需要区分这两类；作此定义纯粹是为了便于论证。定义如下原始递归方案，由 d 计算 q_e。给定 $j \in \omega$，对每个 $x \geq s_i$ 计算 $d(x)$，直到我们计算出 $d(s_i + 2(j+1)+1)$。由于每个项要么是特殊项，要么是非特殊项，这一过程保证我们最终必定已经在至少 $j+2$ 个特殊项上计算出了 d，或者已经在至少 $j+2$ 个非特殊项上计算出了 d。

我们将说明，到上述过程中计算出的各个 $d(x)$ 的 e^{th} 项的最大值所对应的子阶段时， a_j 的适当 q_e 像必定已经被枚举进 B_e。具体分以下几种情况讨论。

- 假设我们已经计算出 d 的至少 $j+2$ 个特殊项。也就是说，我们已经对项 $s_i < s_{i+1} < \cdots < s_{i+j+1} \leq s_i + 2(j+1) + 1$ 进行了计算。由于 a_j 的大小至多为 n_{i+j}, 且所有这些轨道必定已在阶段 s_{i+j+1} 之前被枚举进 A，因此， $d(s_{i+j+1})$ 的 e^{th} 项编码了一个足够大的子阶段，使得 $A[s_{i+j+1}]$ 已成为 B_e 的子结构，从而为 a_j 提供适当的 q_e 像。
- 假设前一种情形不成立。也就是说，存在 $k \leq j$ 使得$s_{i+k} \leq s_i + 2(j+1) + 1 < s_{i+k+1}$。根据先前至少存在一个的假设

对每个 $l \in \omega$而言大小为 n_l 的轨道，则 a_j 的大小必为 $< n_{i+k+1}$。若 a_j 的大小为 $< n_{i+k}$，则采用与前面相同的论证，将 a_j 的一个 q_e 像枚举到 B_e 中的那个子阶段，发生在由 $d(s_{i+k})$的第 e^{th} 项所给出的子阶段之前。此外，若 a_j的大小为 $> n_{i+k}$，则 $t_{i+k+1}\downarrow$ 与 a_j 到阶段 t_{i+k+1} 时必定已被枚举到 A 中。回顾：若 $t_{i+k+1}\downarrow$，则 $d(s_{i+k})$的第 e^{th} 项至少与 $A[t_{i+k+1}]$ 成为 B_e 的子结构的那个子阶段一样大。因此，我们可以到这样的子阶段时为 a_j 找到一个适当的 q_e像。

因此，我们可以假设 a_j 的大小恰好为 n_{i+k}。应用情形假设，我们还可以得到：我们已经在至少 $j+2$ 个非特殊项上计算出了 d，这些项记为$x_0 < x_1 < \cdots < x_{j+1}$。回想一下，$d(x)$的非特殊项在第 e^{th} 项中记录了 B_e 枚举出大小为 n_l的第 $x - s_l$个轨道时所处的子阶段，其中 l 是满足 $s_l < x$的最大值。因此，$d(x_0)$ $d(x_1)\ldots, d(x_{j+1})$的每个 e^{th} 项都应编码某个大小为 n_l的轨道在某个 $l \geq i$时进入 B_e的子阶段。由于 a_j是将被枚举进 A的大小为 $\geq n_i$ 的第 $j+1$个轨道，因此$d(x_0)$ $d(x_1)\ldots, d(x_{j+1})$的 e^{th} 项中至少有一项给出了一个足够大的子阶段，在该子阶段，某个适当的 q_e像必须已经被枚举进 B_e，用于 a_j。

因此，只要 $B_e \cong A$，也就是说，对所有 $x \geq e$，$d(x)$ 的 e^{th} 项均非零，我们就可以利用 d 原始递归地计算出一个同构 $q_e : A \to B_e$ 及其逆映射。定理 3.1 得证。□

4. Degrees of punctual categoricity

本节将证明，在每个非零可计算可枚举图灵度中，都存在一个对准时同构为低的原始递归度，以及一个准时范畴性度。我们将证明分为定理 4.1 和 4.2。

定理 4.1。设**d** 是一个非零可计算可枚举图灵度，则存在 $f \equiv_T \mathbf{d}$，使得 f 对准时同构为低。

证明。设 W 是一个非递归可计算可枚举集，并设 $\{\Psi_i\}_{i\in\omega}$ 和 $\{A_n\}_{n\in\omega}$ 分别是所有原始递归方案和所有准时结构的枚举。我们构造一个全函数 $f : \omega \to \{0, 1\}$，使得 $f \equiv_T W$，并满足以下要求。

$R_{i,\ j,\ m,\ n}$：如果 $\Psi_i^f :\ A_m \to A_n$ 和 $\Psi_j^f :\ A_n \to A_m$ 是同构，且 $\Psi_i^f \circ \Psi_j^f$ 是恒等映射，那么 A_m 和 A_n 逐点同构。

初步说明：为了构造 $f \equiv_T W$，我们使用一种标准的许可技术。在整个构造过程中，将有一个标记集合 $\{m_0 < m_1 < \ldots\} \subseteq \omega$，使得 $f(m_i) = W(i)$；在某些 $j < i$ 被枚举进 W 的阶段，标记 m_i 可以移动。这保证了 $W \leq_T f$（稍后证明）。为了得到 $f \leq_T W$，我们只会在阶段 s，当某个 $y \leq x$ 在阶段 s 被枚举进 W 时，才改变 $f(x)$。

现在我们来关注这些要求 $R_{i,\ j,\ m,\ n}$。设 $i,\ j,\ m,\ n \in \omega$ 已给定。预言机f 初始为全 0 函数。对于单个要求 $R_{i,\ j,\ m,\ n}$，我们维护一个指针 p，用于跟踪 $R_{i,\ j,\ m,\ n}$ 当前正在搜索错误的位置；令 $f^* := (f \upharpoonright p)^\frown 1^\omega$，并检查以下两项是否都成立。

- $\Psi_i^{f^*} \circ \Psi_j^{f^*}$ 是恒等映射。
- $\Psi_i^{f^*}$ 和 $\Psi_j^{f^*}$ 都是单射，并且保持 A_m 和 A_n的签名。

如果在 p的这个取值处始终没有发现错误，那么 $\Psi_i^{f^*}$ 必定是从 A_m 到A_n的准时同构，因为 f^* 显然是原始递归的。另一方面，如果其中一个条件不成立，那么在预言机为 $f^* \upharpoonright s$的某个有限阶段 s，一定能找到相应的见证。将 $f \upharpoonright s$改为 $f^* \upharpoonright s$，并且假设 $f \upharpoonright s$ 之后不再改变，那么上述条件之一不成立这一事实就会保持下去，从而确保满足$R_{i,\ j,\ m,\ n}$。

为了与许可策略保持一致，必须由 W 为$f \upharpoonright s$ 提供许可，$f \upharpoonright s$ 才能改变。也就是说，必须在发现关于$R_{i、\ j、\ m、\ n}$ 的错误之后的某个阶段，让某个 $x \leq p$ 进入 W，这样 f（y）才能改变，其中 $p \leq y < s$。对于固定的 p，我们可能永远无法获得许可。为了解决这个问题，$R_{i、\ j、\ m、\ n}$ 应当在多个位置搜索错误。更具体地说，对于$R_{i、\ j、\ m、\ n}$的策略，我们也尝试如下定义一个可计算函数 g。在构造的每个阶段 s，p 都会“指向”某个标记 m_x。一旦在 m_x（当前取值处）发现关于$R_{i、\ j、\ m、\ n}$ 的错误，就将 g（x）也定义为 W（x）的当前取值。之后，我们将p “指向”标记 m_{x+1}，并重复这一过程。显然，按此定义的函数 g 是可计算的；而且，只要每个 m_x处的错误都能成功找到，g 也将是全函数。由于 W 是非递归的，必定存在某个 x，使得 x 在某个阶段进入 W；该阶段晚于在 m_x处发现关于$R_{i、\ j、\ m、\ n}$ 的错误的阶段，因此我们可以通过改变预言机 f，为$R_{i、\ j、\ m、\ n}$ 采取行动。

由于每个要求$R_{i,j,m,n}$ 的策略仅取决于能否找到错误，我们略去指标，并简单地将$R_{i,j,m,n}$ 称为 R_e。类似地，p_e 和 g_e 将分别是与 R_e的策略相关联的指针和可计算函数。

一般策略与损伤：各要求的优先级将排列为 $R_0, R_1, \ldots$。由于标记的值是动态的，当我们说 p_e 指向 m_x时，这意味着 p_e 的值会在其变化时复制 m_x。在构造的每个阶段，R_e 将始终使用 $f_e := (f \upharpoonright p_e)^\frown 1^\omega$搜索错误。一旦找到错误，就将 $g_e(x)$定义为$W(x)$的当前值，其中 x 使得 p_e 当前指向 m_x。同时令 p_e 现在指向 m_{x+1}。出于与之前类似的原因，要么存在某个 x，使得在 x 处对 R_e 始终找不到任何错误，要么 x 最终进入 W，从而允许 R_e 采取行动。

在实施 R_e 的策略期间，可能发生以下情况之一。

m_x 中 R_e 此前发现错误的位置发生变化。
m_x 中 p_e 当前指向的位置发生变化。
对于某个 $y < p_e$，预言机在 y 处的值发生变化。

在上述情形中，显然，针对 R_e 已取得的任何潜在满足现在都可能被撤销，我们称 R_e 受到损伤。不过，我们将证明，在上述每种情形中，更高优先级 $R_{e'}$ 的策略都必定取得了进展。简要来说，之所以如此，是因为回想一下，只有当某个 $x' < x$ 进入 W 时，m_x 才会发生变化。具体而言，W 刚刚授予了在任意 $y \geq x'$ 时改变 f（y）的许可。也就是说，任何先前曾在 $m_{x'}$ 处发现错误的 $R_{e'}$ 现在都有权采取行动。只要我们安排构造，使这样的 $R_{e'}$ 必定具有更高优先级，或者 $e' = e$，那么潜在损伤显然就是有限的。为此，在整个构造过程中，$p_e < p_{e'}$ 若 $e < e'$。此外，对于每个满足 $p_e < m_x < p_{e'}$的 x，都必定是 $R_{e'}$ 在 m_x处发现了错误。

构造：在构造过程中，每个要求 R_e 都会被声明为满足或未满足。构造开始时，对于每个 $e \in \omega$，令 $m_e[0] = e$，将每个 p_e 指向 m_e，并声明 R_e 未满足。此外，对所有 $x \in \omega$，定义 $f(x) = 0$。在构造的每个阶段 s，执行以下操作。

步骤 1： 令 e 为满足以下条件的最小值： R_e 当前未满足。然后开始为 R_e 在 p_e处搜索错误。

步骤 2： 令 e 为满足以下条件的最小值： R_e 已在 p_e 处发现错误，且 R_e 当前未满足。若不存在这样的 e，则继续执行步骤 3。否则，令 x 满足 p_e 当前指向 m_x。接着定义 $g_e(x) = W(x)[s]$，并令 p_e 现在指向 m_{x+1}。对于每个 $e' > e$，将 $R_{e'}$ 标记为未满足；对每个 $y \in \omega$，定义 $g_{e'}(y) \uparrow$，并令 $p_{e'}$ 指向 $m_{x+1+e'-e}$。为方便起见，我们将此操作称为初始化 $R_{e'}$。

步骤 3： 令 e 为满足以下条件的最小值： R_e 在 $m_x[s]$ 处发现了一个错误，且 x 刚刚进入了 W。然后定义 $f \upharpoonright s$ 为 $(f \upharpoonright m_x)^\frown 1^{s-m_x}$，将 R_e 标记为已满足，并对每个 $e' > e$ 初始化 $R_{e'}$。此外，定义 $m_{x'}[s+1]$ 为任意 $x'' < x'$ 对应的最小数 $\geq s$ 和 $\neq m_{x''}[s+1]$。注意，对于所有这类输入， f 当前均为 0。对于当前包含在 W 中的每个 $x' \geq x$，定义 $f(m_{x'}[s+1]) = 1$。

验证：为了验证该构造有效，我们证明以下陈述。

(i) 对每个 $x \in \omega$， $m_x := \lim_s m_x[s]$ 的值在满足$W[s] \upharpoonright x = W \upharpoonright x$的阶段 s 之后不再改变，并且 $f(m_x) = W(x)$。(ii) 对每个 $e \in \omega$，存在某个 $x_e \in \omega$，使得 p_e 指向 m_x 在余有限多个阶段。

给定 $x \in \omega$。固定满足 $W[s] \upharpoonright x = W \upharpoonright x$ 的最小阶段 s。构造中唯一可能改变 m_x 之值的操作位于步骤 3。特别地，若 $m_x[s+1] \neq m_x[s]$，则在阶段 s，某个 $x' < x$ 必定已被枚举到 W 中。由于 s 是满足$W[s] \upharpoonright x = W \upharpoonright x$的阶段，此事在阶段 s 之后不可能发生，因此 $\lim_s m_x[s] = m_x[s+1]$。为说明为何$f(m_x) = W(x)$，考虑以下情形。

- 存在某个阶段 t，使得 x 在阶段 t进入 W。若 $t \geq s$，则在阶段 t，构造的步骤 3 确保我们定义 $f(m_x[t+1]) = 1$。由于 m_x 的值在阶段 s之后不再改变，因此 $f(m_x) = f(m_x[t+1]) = 1$。另一方面，若 $t < s$，则必有 $s > 0$，并且在阶段 s，某个 $x' < x$ 进入 W。于是构造会定义 $f(m_x[s+1]) = 1$，因为 $x \in W[t] \subseteq W[s]$ 且 $x > x'$。与之前一样，由于 m_x的值在阶段 $s+1$之后不再改变， $f(m_x) = f(m_x[s+1]) = 1$。
- 若 $x \notin W$，则我们断言 $f(m_x) = 0$。注意到每当某个 $x' < x$ 进入 $W[t]$时，$m_x[t+1]$ 会被定义为一个新值；因此 $f(m_x[t+1])[t] = 0$。这意味着$f(m_x) = f(m_x[s+1])[s] = 0$，因为在阶段 s之后没有任何 $x' < x$ 进入 W。

利用 (i)，我们可以很容易地证明 $f \equiv_T W$。给定 f 和 x，假设已经为每个 $x' < x$计算出 $m_{x'}$，并搜索满足 $W[s] \upharpoonright x = \{x' \mid x' < x \text{ 且 } f(m_{x'}) = 1\}$的阶段 s。对于这样的阶段 s，必有 $m_x[s+1] = m_x$，于是我们可以通过计算$f(m_x)$来求得 $W(x)$。要计算 $f(x)$，由于只有当某个 $y \leq x$进入 W时， $f(x)$ 才可能发生变化，因此在满足 $W[s] \upharpoonright (x+1) = W \upharpoonright (x+1)$的阶段$s$，有 $f(x)[s+1] = \lim_s f(x)[s]$。

从构造的步骤 2 和 3 可以明显看出，每个 p_e 所指向的标记 m_x 是递增的（在 x中）。因此，如果 p_e 在余有限多个阶段都不指向同一个标记，那么p_e 指向每个标记的阶段数都只有有限个（也可能为 0）。令 $e \in \omega$ 为满足此条件的最小值。按照构造，指针 p_e 只有由于以下某个原因才会改变其指向的标记。

- 在 p_e 当前所指向的 m_x 处发现了 R_e 的错误。随后， p_e 指向 m_{x+1}。（参见构造的步骤 2。）
- R_e 已执行操作（参见步骤 3）。
- R_e 已初始化。

只有在存在某个 $e' < e$，使得发现了针对 $R_{e'}$ 的错误（见步骤 2），或者 $R_{e'}$已采取行动（见步骤 3）时，R_e 才会被初始化。在这两种情况下，标记 $p_{e'}$ 都指向变化。根据假设， e 是标记 p_e 无限多次指向变化的最小对象，因此我们可以假设，在经过某个有限阶段 s^*后， p_e 不会再因 R_e 被初始化而发生变化。在此阶段之后，只有当 p_e 采取行动，或者在当前标记 p_e 所指向的位置发现错误时， p_e 才会发生变化。

如果 R_e 采取了行动，那么它必定已被宣布为满足。此外，由于在 s^*之后没有其他更高优先级的要求采取行动，构造的步骤 2 不会再考虑 R_e。换言之，一旦 R_e 在阶段 s^*之后采取行动， p_e 就不再改变它所指向的标记。

最后，我们考虑 R_e 在阶段 s^*之后从未采取行动的可能性。那么， p_e无穷多次改变它所指向的标记的唯一方式，就是在 p_e 所指向的每个标记处都发现错误。此外， R_e 从未获准对这些错误采取行动；存在某个 x ，使得对于所有 $x' \geq x$， $g_e(x') \downarrow = W(x')$，这与 W 是非递归的假设相矛盾。

对构造进行快速分析可以得出：如果 p_e 稳定下来，那么 R_e 必须在余有限多个阶段保持满足状态。此外，这意味着要么已经发现了某个关于 R_e 的错误并对此采取了行动，要么存在某个 x ，使得在 m_x处永远不会发现关于 R_e 的错误。因此，每个 R_e 都得到满足。定理 4.1 得证。□

定理 4.2。 设$\mathbf{d}$ 是一个非零的可计算可枚举图灵度，则存在 $g \equiv_T \mathbf{d}$ ，使得 g 是一个准时范畴性度。

证明。 设 W 是一个非递归可计算可枚举集， $\{p_e\}_{e\in\omega}$ 是原始递归函数的一个枚举，并设 $\{B_e\}_{e\in\omega}$ 是我们结构 B的语言中的准时结构的一个枚举。我们构造$g \equiv_T W$ ，使其满足以下要求。

G： 存在准时的 $B' \cong B$ ，使得如果 f： $B \to B'$ 是一个同构，

then $f \oplus f^{-1} \geq_{pr} g$.

$Q_{m,\ n}$： 如果 $B_m \cong B_n \cong B$，那么存在 h： $B_m \to B_n$ 是一个同构，使得 $g \geq_{pr} h \oplus h^{-1}$.

对每个 $x \in \omega$，定义 $g(\langle 0,\ x\rangle)$为 x 进入 W的阶段；如果不存在这样的阶段，则令 -1。对每个 $e > 0$ 和每个 $x \in \omega$，也定义 $g(\langle e,\ x\rangle)$为 $p_{e-1}(x) \downarrow$的阶段。显然， $g \equiv_T W$。

以下是对 B的初步描述：我们采用来自 [KMN17a]的压迫策略。我们这一结构的语言将由下文所定义的四个一元函数符号 S、 P、 R、 C组成。在我们结构的 e^{th}分量中，将有一些元素构成一条脊柱，由$b_{e,i,0}$ 给出（对应于各个$j \in \omega$），以及一个特殊元素$b_{e,0,0}$ ，它是根（如图1所示）。

- 对于沿脊柱的每个元素$b_{e,i,0}$，函数 C 生成 x_e-循环，这些循环由有限多个元素$b_{e,i,j}$组成，且对每个满足如下性质的 $j < x_e$ 成立： $C(b_{e,i,x_e-1}) = b_{e,i,0}$，并且 $C(b_{e,i,j}) = b_{e,i,j+1}$ 对每个 $j < x_e - 1$成立。
- 映射 S 的值域仅由沿脊柱的元素组成。更具体地说，对每个 i 和 $j < x_e$， $S(b_{e,i,j}) = b_{e,i+1,0}$。
- P 是所有形如 $b_{e,\ i,\ j}$ 的元素上的恒等映射。
- 最后， R 将 e^{th} 分量内的所有元素映射到$b_{e,0,0}$，即根。这确保了在 B的任何潜在副本中，每个分量的根都必须在该同一分量内的任一元素被枚举之后迅速被枚举。

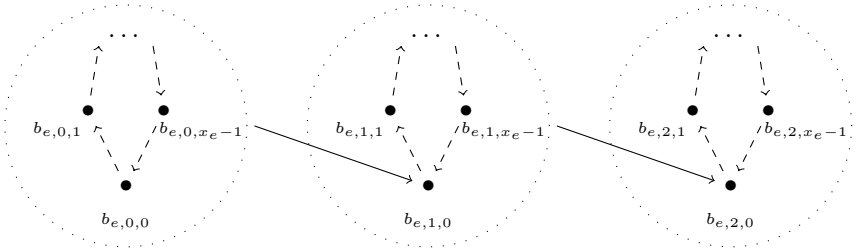


FIGURE 1. e^{th} 分量（ B）。此处未显示 R 和 P 的函数箭头。实线箭头表示函数 S，虚线箭头表示 C。

为了辅助针对 G 以及各个$Q_{m,n}$的策略，我们将通过使每个分量的循环大小彼此不同，来使这些分量保持“足够”不同。

压迫策略：除了进行“切换”的阶段（参见 R的策略）外，结构B 和 B' 将以完全相同的方式枚举。秉承原始压迫论证的精神，我们希望“迫使”结构 B_e 在每个阶段都保持为 B 和 B' 的子结构。一般来说，集合 B 的第 $2e^{th}$ 个和第 $2e+1$个分量将取决于每个 $n \leq e$对应的结构 B_n。在构造的每个阶段，只有一个分量尚未封闭：该分量中存在某个元素，而 S 尚未在该元素上定义。

为简单起见，先考虑 0^{th} 分量。将 0^{th} 分量的循环大小设为 $\mathbf{1}$。在等待 B_0 枚举元素的同时，继续枚举 0^{th} 分量脊柱中的元素$b_{0,\,i,\,0}$，并定义函数 $\mathbf{f}(b_{0,\,i,\,0}) = b_{0,\,i,\,0}$。当某个元素被枚举进 B_0 时，对每个 $m \leq M_1$ 计算函数 $\mathbf{f}(b)$（其中 $M_1 \geq 1$ 稍后定义）。

- 如果 $CR(b) \downarrow = R(b)$，则这意味着结构 B_0 已枚举该分量的根。
- 如果使 $m > 0$ ($C^m R)b(\downarrow = R)b$成立的最小 $m > 0$ 不等于 $\mathbf{1}$，那么 B_0 就揭示了一个尚未枚举到 B中的循环大小。通过始终不将这样的循环大小枚举到 B中，我们便可以保证 $B_0 \supsetneq B$。
- 如果不存在这样的 $m > 0$，也就是说，对于每个 $0 < m \leq M_1$，都有 $C^m R(b) \downarrow \neq R(b)$，那么我们可以直观地将这种情况理解为： B_0 揭示了某个“较大”的循环大小。虽然在这种情况下我们无法直接得到 $B_0 \supsetneq B$，但通过仔细安排后续各个分量的循环大小，我们可以避免 $R(b)$ 的循环的最终大小。

一旦上述情形之一被见证，我们便可关闭 0^{th} 分量，其方式是定义 $S(b_{0,i,0}) = b_{0,i,0}$，其中 i是使得 $b_{0,i,0}$ 当前存在于 B中的最大指标。这里的想法是，在第一种情形中，我们已成功使 B_0 ‘副本’我们的结构 B，因而可以继续枚举其他分量。在第二和第三种情形中，我们继续枚举 0^{th}分量，直到获得某种关于$B_0 \supsetneq B$ 的保证，然后再关闭 0^{th} 分量并开始新的分量。特别地，要么存在某个元素 $b \in B_0$，使得 $R(b)$的循环大小不同于迄今为止枚举进 B 的任何对象，要么其循环大小至少为 M_1。

给定 $e > 0$，并假设 M_e 已定义，且具有如下性质：至少有一个可用的（非零）大小 $x_e < M_e$。此外，对于每个 $n \leq \lfloor e/2 \rfloor$，以下条件之一成立。

- 对于每个 $e' < e$，第 e' 个分量的根已枚举进 B_n；存在某个 $b \in B_n$，使得满足 $C^m R(b) \downarrow = R(b)$ 的最小 $m > 0$ 满足 $m = x_{e'}$。
- 存在某个 $b \in B_n$，使得使 $C^m R(b) \downarrow = R(b)$成立的最小 $m > 0$ 满足：对任意 $e' < e$都有 $m \neq x_{e'}$。于是，这样的大小 m 必定已被声明为不可用，我们将这样的 B_n 称为非活动。
- 若 B_n 不是非活动的，但存在某个 $b \in B_n$，使得对每个 $0 < m \leq M_e$，$C^m R(b) \downarrow \neq R(b)$，则我们称 B_n 为待定，并称 b 为 $e-1$-见证。

其直觉在于：对于那些非活动的 B_n，我们已经得到 $B_n \not\supseteq B$；而活动的 B_n 则是我们在构造过程中仍须监控的那些。对于那些待定的 B_n，仍存在某个“神秘”元素 $b \in B_n$，它尚未被揭示为迄今枚举进 B 的任何分量的一部分。其想法是，我们不希望这样的元素能够模仿在较后阶段枚举进 B 的某个分量。在构建 e^{th} 分量时，我们需要考虑所有这些结构，并确保只枚举大小小于 $R(b)$的循环，以应对各个见证 b。

通过枚举元素 $b_{e,i,0}$ 并令循环大小为 x_e，来开始 e^{th} 分量：对于每个 $j < x_e - 1$，令 $C(b_{e,i,j}) = b_{e,i,j+1}$，并令 $C(b_{e,i,x_e-1}) = b_{e,i,0}$。只有当对于每个 $n \leq \lfloor e/2 \rfloor$（其中 B_n 不是非活动的），要么 B_n 已经枚举了 e^{th} 分量的根，要么 B_n 有一个 e-见证 b时，我们才会关闭 e^{th}分量。请记住，这意味着对于每个 $0 < m \leq M_{e+1}$（稍后将定义为充分大的），$C^m R(b) \downarrow \neq R(b)$。和之前一样，在等待满足这些条件的同时，我们继续延伸 e^{th} 分量的脊柱，以保持 B （以及 B'）准时。

- 如果 B_n 之前被声明为待定，那么它就有一个 $e-1$-见证 b。也就是说，$R(b)$ 不可能具有循环大小 $x_e < M_e$，因为 B_n 已经证明 $C^{x_e} R(b) \downarrow \neq R(b)$。继续计算 $e-1$-见证 b对应的 $C^m R(b)$。这个过程要么产生某个 $M_e < m \leq M_{e+1}$，使得 $C^m R(b) \downarrow = R(b)$；要么我们发现，对于每个 $0 < m \leq M_{e+1}$，$C^m R(b) \downarrow \neq R(b)$。若前一种情况成立，则将 B_n 声明为非活动，并将大小 m 声明为不可用（请记住，这意味着此阶段之后永远不会再枚举这种大小）。此外，注意对于任何 $e' \leq e$，$m \neq x_{e'}$；当前 B 中没有大小为 m 的循环。若后一种情况成立，则注意到 b现在是 B_n 的一个 e-见证（而且显然仍是 B_n的一个 $e-1$-见证）。总之，对于每个待定的 B_n，它要么继续保持待定，要么变为非活动。
- 如果 B_n 既不是非活动状态，也不是当前待定状态，那么对于枚举进入B_n的每个元素 b，对每个 $0 < m \leq M_{e+1}$计算 $C^m R(b)$。如果对每个 $m \leq M_{e+1}$，$C^m R(b) \downarrow \neq R(b)$，那么就声明 B_n 处于待定状态，并指定 e-见证 b。因此，我们可以假设存在某个 $0 < m \leq M_{e+1}$，使得 $C^m R(b) \downarrow = R(b)$。令 m 为满足此条件的最小值。如果对于任意 $e' \leq e$，$m \neq x_{e'}$（或稍后定义的 $y_{e'}$），那么就声明 m 不可用，并将B_n 置为非活动状态。出于与之前相同的原因，B_n 不可能与B同构。递归地假设，对于每个 $e' < e$，第 e'个分量都是有限的。也就是说，只有有限多个元素 $b' \in B$ 满足：对于某个$e' < e$，$R(b')$的循环大小为 $x_{e'}$（或 $y_{e'}$）。特别地，B_n 最终必定会枚举出某个元素 b，使得对于任意 $e' < e$，$R(b)$的循环大小都不等于 $x_{e'}$；否则，我们又会发现$B_n \not\supseteq B$（并可将 B_n 置为非活动状态）。也就是说，如果 B_n 未被声明为待定或非活动，那么它必定会在有限时间内枚举出一个元素 b，使得满足$C^m R(b) \downarrow = R(b)$的最小 $m > 0$ 恰好为 x_e。

显然，在 B中启动 e^{th} 分量之后，对于每个 $n \leq \lfloor e/2 \rfloor$，每个 B_n都必须在有限时间内要么给出一个 e-见证，要么变为非活动状态，要么枚举出 e^{th} 分量的根。一旦到达这样的阶段，我们就通过定义 $S(b_{e,\ i,\ j}) = b_{e,\ i,\ 0}$ 来闭合 e^{th} 分量，其中对每个$j < x_e$，满足 i 是唯一一个尚未定义 $S(b_{e,\ i,\ j})$的指标。粗略地说，由于每个结构可能只会“阻挡”一种大小，而每个分量只使用一种大小，因此不难看出，只要 $M_{e+1} > (e+1) + (\lfloor e/2 \rfloor + 1) + 1$，我们总能成功找到一个可用的$x_{e+1} < M_e$，作为第 $e+1$个分量的循环大小。正如很快将看到的，还有一些其他因素会影响 M_e的定义，因此我们暂且推迟给出其定义。

对于 G 的策略：这里的想法是，利用给定的从 B 到 B' 的同构，将每个分量的根映射到的像编码 g 的值。然而，由于每个分量都依赖于数量不断增加的准时结构，因此不可能以原始递归的方式列出每个分量的根的指标。为克服这一点，我们将指定指标为 $2e$ 的分量来编码一个足够大的阶段，使得 B 已经闭合了第 $2e+2$ 个分量，因此也必然闭合了第 $2e+1$ 个分量。粗略地说，要获得每个 $e' \leq 2e$ 对应的 $b_{e',\ 0,\ 0}$ 的指标，计算给定同构在 $b_{0,\ 0,\ 0}$ 上的像，从而得到 $b_{2,\ 0,\ 0}$ 的指标；然后重复这一过程，直到得到 $b_{2e,\ 0,\ 0}$ 的指标。注意，这一过程相对于给定的同构是原始递归的。元素 $b_{2e+1,\ 0,\ 0}$ 将用于编码 g 的值。

我们称一个分量就绪，如果满足以下条件。

- 如果该分量是 $2e^{th}$ 分量，并且结构 B 中的第 $2e+2$个分量已闭合（因此 B'也已闭合）。
- 如果该分量是第 $2\langle 0,\ x\rangle + 1$个分量，并且 x 已进入 W。
- 如果该分量是第 $2\langle e+1,\ x\rangle + 1$个分量，并且 $p_e(x)$ 已收敛。

假设 B 和 B' 中的所有分量目前都已闭合。对于指标最低且就绪的分量，设为 e，我们按如下方式进行切换。将 e^{th} 分量的一个完全副本枚举到 B中，其中包含元素$d_{e,\ i,\ j}$，对每个满足$b_{e,\ i,\ j}$ 当前是 e^{th} 分量中的一个元素的 i、j 而言都是如此。特别地，所有$b_{e,\ i,\ j}$的集合与$d_{e,\ i,\ j}$的集合在同构意义下不可区分。在 B'中也进行同样的操作。注意，按照约定，这些$d_{e,\ i,\ j}$以及$d'_{e,\ i,\ j} \in B'$ 的指标都大于当前阶段编号。因此，我们希望“迫使”从 $B \to B'$ 出发的任何同构都将B中原始分量的元素映射到 B'中的副本分量。为此，我们枚举一个尾部，将原始 e^{th}分量与副本 e^{th} 分量连接起来（见图2）。

由于副本和原始 e^{th} 分量在同构意义下完全相同，因此我们可以像图中所示，在 B 和 B' 中以不同方式连接尾部，同时保持 $B \cong B'$。显然，为了确保从 B 到 B' 的同构必须将$b_{e,\ 0,\ 0}$ 映射到 B'中的$d'_{e,\ 0,\ 0}$（指标较大），$t_{e,\ 0,\ 0}$ 和$t_{e,\ 1,\ 0}$ 在同构意义下必须可以区分。尾部将由标记为$t_{e,\ i,\ j}$（在 B中）的元素组成，映射 S，P，R，C定义在这些元素上，具体如下。

- 设 e' 是使 B中当前存在第 e'个分量的最大指标。选取一个大小为$0 < y_e < M_{e'+1}$ 的循环，该大小与 B 中迄今为止出现的任何循环大小都不同，并且仍然可用（我们稍后将说明，通过选择足够大的 $M_{e'+1}$，这样的大小必定存在）。尾部中所有元素的循环大小均为 y_e。
- 如图所示，在 B 中定义 $P(t_e,0,0) = b_e,0,0$, $P(t_e,1,0) = d_e,0,0$，并在 B' 中定义 $P(t'_e,0,0) = d'_e,0,0$，以及 $P(t'_e,1,0) = b'_e,0,0$。对于尾部中的其余元素，P 仍然是恒等映射。这是 B 和 B' 在“局部”上有所不同的唯一之处。

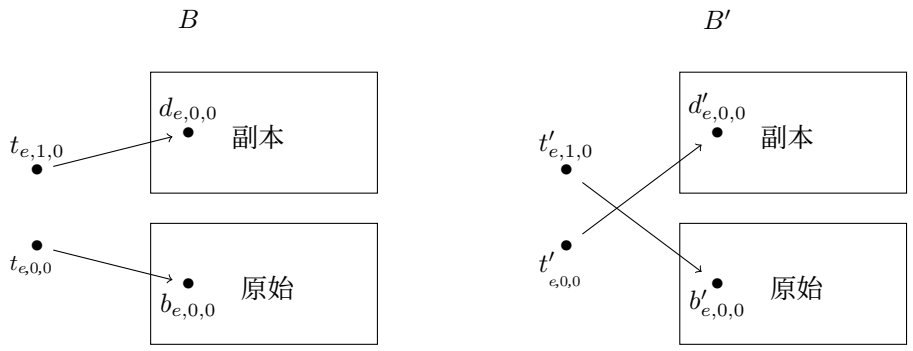


FIGURE 2. 在 e^{th} 分量中切换。箭头表示函数 P。

- R 尾部中任意元素的映射为 $t_{e,\ 0,\ 0}$（在 B 中），而在 B' 中为 $t'_{e,\ 0,\ 0}$。
- 对于任意 $j < y_e$和任意 i，定义 $S(t_{e,\ i,\ j}) = t_{e,\ i+1,\ 0}$，同时等待尾部闭合。

注意，每当尾部中的任意元素 t被枚举进 B_n时，元素 $R(t)$和$SR(t)$也应当迅速枚举进 B_n。此外，尾部也会在原始和副本 e^{th} 分量处于原始递归（关于 B_n）时间内“接合”起来。与之前大致相同，我们应用压迫策略，以确保 $B_n \supsetneq B$（被声明为非活动或待定），或者 B_n 枚举该尾部。此外，根据 y_e的选择， y_e 严格小于任意 e'见证 b 的 B_n 的 $R(b)$的最终循环大小（其中 $n \leq \lfloor e'/2 \rfloor$），并且不同于迄今为止声明为不可用的任何大小。一旦t_e的副本0,0已在每个 $n \leq \lfloor e/2 \rfloor$所对应的每个 B_n 中枚举，我们就像之前一样闭合尾部：对于尚未定义 $S(t_{e,i,0})$的唯一 i，令 $S(t_{e,i,j}) = t_{e,i,0}$，对每个 $j < y_e$均如此。

现在我们来说明如何选择各种 M_e。回想一下，每个结构最多只会声明一种大小不可用，而原始分量各自恰好只使用一种大小。同样，每个尾部也恰好只使用一种大小。因此，只要选取 M_{e+1}，使其大于潜在尾部的总数 $e+1$、分量数 $e+1$和结构数 $\lfloor e/2 \rfloor + 1$之和，就能保证始终有符合要求的可用大小。更具体地说，选择 $M_{e+1} = 4(e+1) > 2(e+1) + (\lfloor e/2 \rfloor + 1) + 1$。

关于$Q_{m,\ n}$：</style}如果 $m = n$，那么恒等映射就能平凡地满足该要求。不失一般性，我们考虑 $m < n$的情形。主要难点在于找出原始分量和副本分量都被枚举到 B_m 和B_n中的阶段。显然，如果我们不等到这样的阶段，任何定义同构的尝试都可能失败；我们无法确定 B_m 中的原始分量映射到 B_n中的原始分量还是副本分量。

请注意， B 枚举 e^{th} 分量所花费的时间取决于对于每个 $k \leq \lfloor e/2 \rfloor$的结构 B_k。由于这些结构中的每一个都是准时的，并且 g 原始递归地计算每个原始递归函数（$g(\langle e+1,\ x \rangle)$ 是 $p_e(x)$ 收敛的阶段），因此我们应该能够恢复 B 中每个分量闭合的阶段。同理，我们也可以恢复尾部被完全枚举到 B 中的阶段，并且类似地恢复每个B_k的阶段。（稍后将对此进行形式化验证。）因此，我们可以取得足够大的阶段，在这些阶段上， B_m和 B_n 已经完成了对完整“局部”结构的枚举，从而使我们能够以显然的方式定义同构。

构造：在构造的每个阶段，B 和 B'中恰好有一个分量，或一个分量的尾部尚未闭合；恰好存在一对 e，i，使得 $S(b_{e,\,i,\,0})$ 和$S(b'_{e,\,i,\,0})$ 尚未定义。请注意，对于每个 e，M_e 定义为 $4e$，并且 b 是B_n 的一个 e-见证，当且仅当对于每个 $0 < m \leq M_{e+1}$，$C^m R(b) \downarrow \neq R(b)$。我们还称 B_n 为待定的，如果存在某个 e- 见证属于 B_n。

在阶段 s，令 e 为满足以下条件之一的最小对象。

(i) 当前位于 B 中的所有分量及其尾部均已闭合，并且 $b_{e,0,0}$ 尚未被枚举进 B。(ii) e^{th} 分量在 B 中未闭合。(iii) 当前位于 B 中的所有分量及其尾部均已闭合，并且 e^{th} 分量已就绪。(iv) e^{th} 分量的尾部在 B 中未闭合。

情形 (i)：若 (i) 成立，则递归地假设：对每个 $n \leq \lfloor (e-1)/2 \rfloor$，如果 B_n 已被声明为待定，那么它有一个 $e-1$-见证。令 $0 < x_e < M_{e+1}$ 为当前可用的最小大小。将 x_e 用作 e^{th} 分量的循环大小，并将其声明为不可用（它不会用于任何其他分量或尾部）。在 B 和 B'中开始 e^{th} 分量，将 $b_{e,0,0}$ 和 $b'_{e,0,0}$ 分别以循环大小 x_e 枚举。对每个 $j < x_e$，将 $S(b_{e,0,j})$ 和 $S(b'_{e,0,j})$ 保持未定义。

情形 (ii)：若 (ii) 成立，则令 i 为最大的指标，使得 $S(b_{e,i,0})$ 尚未被定义。对每个 $n \leq \lfloor e/2 \rfloor$，其中 B_n 不是非活动的，检查以下是否成立。

- 若 B_n 是待定的，则 b有一个 e-见证。
- 若 B_n 不是待定的，则它已枚举某个元素 b，使得使 $C^m R(b) \downarrow = R(b)$ 恰好为 x_e 的最小 $m > 0$。

若上述对所有不是非活动的 B_n 都成立，则通过在 B 中定义 $S(b_{e,i,j}) = b_{e,i,0}$，并在 B' 中对每个 $j < x_e$ 定义 $S(b'_{e,i,j}) = b'_{e,i,0}$，来关闭 e^{th} 分量。若上述对某个 $n \leq \lfloor e/2 \rfloor$不成立，则通过枚举循环大小为 x_e 的 $b_{e,i+1,0}$，并定义 $S(b_{e,i,j}) = b_{e,i+1,0}$，来继续扩展 e^{th} 分量。同时继续对每个 $b \in B_n$ 和每个 $m \leq M_{e+1}$ 计算 $C^m R(b)$。如前所述，以下情形之一必然发生。

- B_n 枚举 e^{th} 分量的根：B_n 枚举一个元素 $R(b)$以及使得 $C^m R(b) \downarrow = R(b)$恰好为 x_e的最小 $m > 0$。

- 找到某个 e-见证 B_n 后，我们就可以将 B_n 声明为待定（如果它之前尚未处于待定状态），然后继续执行下一个所需操作。

- $C^m R(b) \downarrow = R(b)$ 对某个 $0 < m \leq M_{e+1}$ 成立，但 $m \neq x_e$。在 B_n 中满足 $m = x_{e'}$ 或对某个 $e' < e$满足 $y_{e'}$ 的这类 b 至多可能只有有限多个。之后，B_n 将被声明为非活动。唯一的另一种可能是，B_n 枚举出某个b，对它而言，使得 $C^m R(b) \downarrow = R(b)$ 与所有 $x_{e'}$ 都不同且 $y_{e'}$ 对于 $e' < e$成立的最小 $0 < m \leq M_{e+1}$ 存在。如果找到这样的 b，则将 m 声明为不可用，并将 B_n 声明为非活动。也就是说，我们最终会闭合 e^{th} 分量；而在闭合时，当前所有待定的 B_n都具有一个 e-见证。

情形（iii）：若（iii）成立，则令 e' 为满足以下条件的最大值：$b_{e'}$,0,0 已被枚举进 B。选取 $y_e < M_{e'+1}$ 为可用的最小大小，随后将其声明为不可用（这可确保 y_e 与所有先前的循环，以及未来不同分量或尾部中的所有循环均不同）。通过将 t_e,0,0、t_e,1,0、副本 e^{th} 分量及其对应元素分别枚举进 B 和 B'，对 e^{th} 分量执行切换。令 t_e,0,0 和 t_e,1,0 的循环大小为 y_e。对于每个 $j < y_e$，定义 $S(t_e,0,j) = t_e,1,0$，并且

令 $S(t_e,1,j)$ 保持不变。如 G 的策略中所述，对每个 $i<2$，定义 $P(t_{e,i},0)=d_{e,i},0$ 属于 B，并且 $P(t'_{e,i},0)=d'_{e,1-i},0$ 属于 B'。情形（iv）：若（iv）成立，则令 i 为满足以下条件的最大值：$S(t_{e,i},0)$ 当前未定义。与情形（ii）一样，仅当对每个 $n\le\lfloor e/2\rfloor$（其中 B_n 不是非活动的），以下条件均成立时，我们才闭合尾部。

- 如果 B_n 处于待定状态，那么 b 有一个 e'-见证，其中 e' 目前是满足以下条件的最大值：$b_{e',0,0}$ 存在于 B 中。
- B_n 已经枚举了某个元素 b，使得满足 $C^m R(b)\downarrow=R(b)$ 的最小 $m>0$ 恰好是 y_e。

基于同样的理由，我们最终会封闭 e^{th} 尾部；一旦封闭，所有目前处于待定状态的 B_n 都有一个 e'-见证。

验证：我们首先证明 B 和 B' 是准时结构。每当有某个元素被枚举进 B 或 B'，函数 P，R 和 C都会立即定义。唯一会延迟定义的是函数 S，这是因为我们暂时不想封闭 e^{th} 分量或尾部。不过，正如构造的情形 (ii) 和 (iv) 所示，延迟只持续一个阶段：对于那些在阶段 s结束时 S 尚未定义的元素$b_{e,i,j}$ 或 $t_{e,i,j}$，e^{th} 分量或尾部要么在阶段 $s+1$封闭，要么会枚举一个新元素 $b_{e,i+1,0}$ 或 $t_{e,i+1,0}$ 作为 S-像。因此，B和 B' 是准时的。

现在证明，如果 B_n 曾被声明为非活动或待定，那么 $B_n\not\cong B$。如果 B_n 在某个阶段被声明为非活动，那么以下情况必有一种成立。

- 存在互不相同的 b_0、b_1、.....、b_N 以及某个 x_e，使得对于每个 $i\le N$，满足 $C^m R(b_i)=R(b_i)$ 的最小 $m>0$恰好为 x_e，且 N 严格大于 B中闭合 e^{th} 分量内元素的总数。由于每个分量都有不同的循环大小，且该大小也不同于所有可能存在及现有的尾部，因此 B_n 不可能与 B同构。
- 存在某个元素 $b\in B_n$，使得满足 $C^m R(b)\downarrow=R(b)$ 的最小 $m>0$，不同于 B中当前任一循环的大小。根据构造的情形 (ii)，如果找到这样的 b，我们必定已将 m 定义为不可用，因此不会再将任何大小相同的循环枚举进 B_n。

换句话说，如果 B_n 曾被宣布为非活动，那么必定有 $B_n\not\cong B$。因此，我们可以假设 B_n 从未被宣布为非活动，从而永远处于待定状态。根据构造，当存在某个 e，并找到一个针对 B_n 的 e-见证时，结构 B_n 首次被宣布为待定。现在要证明的是，这个针对 B_n 的 e-见证 b 最终会成为适用于所有 e' 的 e'-见证。

归纳地假设 b 是一个 e' 见证。也就是说，对于每个 $0<m\le M_{e'+1}$，$C^m R(b)\downarrow\neq R(b)$。根据构造的情形 (ii)，只有在任何待定结构都获得一个 $e'+1$ 见证后，第 $e'+1$ 个分量才会闭合。接下来要证明 b 必须成为一个 $e'+1$ 见证。由于 $x_{e'+1}<M_{e'+1}$，且 b 是一个 e' 见证，因此 $R(b)$（在 B_n 中）的循环大小不可能与 B 的第 $e'+1$ 个分量中的任何循环的大小相匹配。如果存在某个 $0<m\le M_{e'+2}$ 使得 $C^m R(b)\downarrow=R(b)$，那么满足这一条件的最小 $m>0$ 必然大于 $M_{e'+1}$，因此也大于迄今为止在 B 中展示的任何循环大小。特别是，这样一来 m 就会被判定为不可用，而 B_n 将变为非活动。也就是说，对于每个 $0<m\le M_{e'+2}$，必定有 $C^m R(b)\downarrow\neq R(b)$，因此 b 也必定是一个 $e'+1$ 见证。因此，B_n 不可能与 B 同构，因为 B_n 包含一个无穷连通分支。

$Q_{m,\ n}$ 满足：如果 $m = n$，那么恒等映射显然是一个准时同构。不失一般性，我们可以假设 $m < n$。根据该要求的需求前提， $B_m \cong B_n \cong B$，因此只需在每个分量上构造一个同构。特别是，我们只需计算出一个阶段，在该阶段 B_m 和 B_n 已将原始分量和副本分量连同尾部一并完全枚举。

我们断言，给定 g 与 e，找出 e^{th} 分量在 B 与 B'中闭合的阶段，从而得出 e^{th} 分量内元素的总数，是原始递归的。回想一下， B 与 B' 中的 e^{th} 分量恰好在存在某个 $b \in B_k$ ，使得对每个 $k \leq \lfloor e/2 \rfloor$ 下列情形之一成立时闭合（见构造的情形(ii)）。

(i) 使得 $C^l R(b) \downarrow = R(b)$恰好等于 x_e （ e^{th}分量的循环大小）的最小 $0 < l \leq M_{e+1}$ 。(ii) 对每个 $e' \leq e$，使得 $C^l R(b) \downarrow \neq R(b)$不同于$x_{e'}$ 与$y_{e'}$ （若它们存在）的最小 $0 < l \leq M_{e+1}$ 。（此时B_n 将被宣布为非活动。）(iii) 对所有 $0 < l \leq M_{e+1}$， $C^l R(b) \downarrow \neq R(b)$。（$b$ 是 B_n的一个 e-见证。）

由于 g 能原始递归地计算所有原始递归函数，且 B_k 是准时的，我们可以假设在每个 B_k中都能访问 S, P, R和 C的相应版本。特别地，使用g，我们应用以下过程。

- 首先计算 B 和 B' 关闭 0^{th} 分量的阶段，或者等价地，计算找到某个 $b \in B_0$ 满足关于 $e = 0$的 (i)、(ii) 或 (iii) 之一的阶段。显然，这可以由 g原始递归地完成，因为我们可以使用 g 计算 B_0中映射 R, C 各版本的作用；而我们只需检查，对于枚举进入 B_0的第一个 b ，是否有 $CR(b) \downarrow = R(b)$。事实上， g 给出了 $CR(b) \downarrow$的阶段；在这样的阶段，我们必定已经关闭了 0^{th} 分量。特别地， 0^{th} 分量中的元素个数关于 g 和 0 是原始递归的。

- 递归地假设，对于所有 $e' < e$ ， B和 B' 的原始 e'个分量中的元素数目都可以从 g 和 e' 原始递归地计算得出。由于每个 B_k都是准时的，我们可以利用 g进行计算，即计算 B_k 中各函数在 B_k的前 N 个元素上的稳定时间，其中 N 是 B 和 B'的前 e个原始分量中的元素总数。经过这段稳定时间所指示的延迟后，显然 B_k 一定已经枚举了某个元素 b ，它不属于任何 $e' < e$对应的 e'分量。进一步计算 $C^{m+1}R(b)$在这样一个 b上的稳定时间（使用 g），便可得到某个 $b \in B_k$ 被发现满足 (i)、(ii) 或 (iii) 之一的阶段。对每个 $k \leq \lfloor e/2 \rfloor$ 重复此过程，就可以得到 e^{th} 分量在 B 和 B'中闭合的阶段。因此，这样一个阶段可以从 g 和 e原始递归地计算得出。

通过应用类似的论证，我们还可以利用 g 和 e，原始递归地获得一个阶段：在该阶段， B_k 中 e^{th} 分量的副本已闭合，或者对于每个 $k \leq \lfloor e/2 \rfloor$， B_k 已被声明为非活动或待定。类似地，利用 g 以及将 $t_{e,0,0}$ （比如 s_e ）枚举进 B 的阶段，可以原始递归地计算 B 中 e^{th} 尾部闭合的阶段。

现在我们证明， s_e 可以利用 g 和 e原始递归地得到。如果 e是偶数，那么回想一下， e^{th} 分量会在 $e + 2$号分量闭合的阶段就绪。应用上述事实，我们可以得出结论：利用g和 e，这一过程可以原始递归地计算。如果 e是奇数，那么 e^{th}分量会在由 $g((e-1)/2)$给出的阶段就绪。一旦确定分量就绪的阶段，我们只需进一步计算指标较小的任意分量完成切换的阶段，或者等价地，计算

指标较小的尾部闭合的阶段。这显然可以根据 g 和e^{th} 分量就绪的阶段进行原始递归计算。总之，给定 g 和 e，我们可以原始递归地计算出一个足够大的阶段，使得对于任意 $k \leq \lfloor e/2 \rfloor$， B_k 都已枚举原始分量和副本分量中的每个元素，以及 e^{th} 尾部。对每个 $e \geq 2n+2$ 应用这一方法，我们可以得出结论：对于每个指标为$e \geq 2n+2$的分量， g 都可以计算出 B_m 与 B_n 之间的一个同构。由于每个分量和尾部都是有限的，我们可以非一致地固定指标为 $< 2n+2$的分量中 B_m 与 B_n 之间的同构。因此，对于某个h， $g \geq_{pr} h \oplus h^{-1}$： $B_m \to B_n$ 是一个同构。

计算 $g(x)$：令 f： $B \to B'$ 是一个同构。给定 x，按如下方法计算 $g(x)$。对每个 $e \leq x$，计算 $f(b_{2e},0,0)$。由于尾部是刚性的， f 必须将 $t_{2e},0,0$ 映射到 B 中的 $t'_{2e},0,0$。特别地， $f(b_{2e},0,0) = fP(t_{2e},0,0) = Pf(t_{2e},0,0) = P(t'_{2e},0,0) = d''_{2e},0,0$。根据构造的情形（iii），$d''_{2e},0,0$ 只有在 $2e^{th}$ 分量就绪之后的某个阶段才会被枚举进 B'；该阶段至少与 $2e+2$ 个分量在 B 中闭合的阶段一样晚。因此， $f(b_{2e},0,0)$ 给出了一个大于 $b_{2e+2},0,0$ 指标的阶段，并且必然也大于 $b_{2e+1},0,0$ 的指标。取 $e = x$，于是我们可以原始递归地从 f 得到 $b_{2x+1},0,0$ 的指标。出于与前面类似的原因，$f(b_{2x+1},0,0) = fP(t_{2x+1},0,0) = Pf(t_{2x+1},0,0) = P(t'_{2x+1},0,0) = d'_{2x+1},0,0$，其指标必定大于 $g(x)$ 的值。通过枚举 W，或将相应的原始递归函数计算到 $d'_{2x+1},0,0$ 的指标，我们便能恢复 $g(x)$ 的确切值。定理 4.2 得证。□

References

[Baz17] Nikolay Bazhenov. 分配格与Heyting代数的有效范畴化。 *Lobachevskii Journal of Mathematics* 38 4 600 614, 2017 , ( ): – . [Baz21] Nikolay A. Bazhenov. 可计算结构的范畴性谱。 *Journal of Mathematical Sciences*, 256 1 34( ): –50, 2021. [BDK+19] Nikolay Bazhenov、Rod Downey、Iskander Kalimullin、Alexander Melnikov与Keng Meng Ng. 在线结构理论基础。 *Bulletin of Symbolic Logic*, 25(2):141–181, 2019. [BK21] Nikolay Bazhenov与Iskander Kalimullin. 可计算范畴结构的准时范畴性谱。 *Algebra and Logic*, 60(3):223–228, 2021. [BKN] Nikolay Bazhenov、Heer Tern Koh与Keng Meng Ng. 原始递归范畴性谱。已投稿。[BKY18] Nikolay A. Bazhenov、Iskander Sh. Kalimullin与Mars M. Yamaleev. 范畴化度与谱维数。 *Journal of Symbolic Logic*, 83(1):103–116, 2018. [CCHM06] Wesley Calvert、Douglas Cenzer、Valentina Harizanov与Andrei Morozov. 等价结构的有效范畴化。 *Annals of Pure and Applied Logic*, 141(1–2):61–78, 2006. [CCHM09] Wesley Calvert、Douglas Cenzer、Valentina S. Harizanov与Andrey Morozov. 阿贝尔 p群的有效范畴化。 *Annals of Pure and Applied Logic*, 159(1–2):187–197, 2009. [CDHTM20] Barbara F. Csima、Michael Deveau、Matthew Harrison-Trainor与Mohammad Assem Mahmoud. 极限序数之上的范畴化度。 *Computability*, 9(2):127–137, 2020. [CDRU09] Douglas Cenzer、Rod Downey、Jeffrey B. Remmel与Zia Uddin. 阿贝尔群的空间复杂度。 *Archive for Mathematical Logic*, 48(1):115–140, 2009. [CFS13] Barbara F. Csima、Johanna N. Y. Franklin与Richard A. Shore. 范畴化度与超算术层级。 *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 54(2):215–231, 2013. [CHR14] Douglas Cenzer、Valentina Harizanov与Jeffrey B. Remmel. 单射结构的可计算性理论性质。 *Algebra and Logic*, 53(1):39–69, 2014. [CN22] Barbara F. Csima与Keng Meng Ng. 每个 Δ^0_2 *Journal of Mathematical Logic* 22 3 2250022, 2022 度都是强范畴性度。 , ( ): . [CR91] Douglas Cenzer与Jeffrey B. Remmel. 多项式时间模型与递归模型*Annals of Pure and Applied Logic* 54 1 17 58, 1991 , ( ): – .

[CR92] Douglas Cenzer与Jeffrey B. Remmel. 多项式时间阿贝尔群。 *Annals of Pure and Applied Logic* 56 1 3 313 363, 1992

, (–): – . [CR24] Barbara F. Csima与Dino Rossegger. 范畴化度与可树化度。 *Journal of Mathematical Logic* 24 3 2450002, 2024

, ( ): . [CS19] Barbara F. Csima与Jonathan Stephenson. 有限可计算维数与范畴化度。 *Annals of Pure and Applied Logic*, 170(1):58–94, 2019. [DMN21] Rod Downey、Alexander Melnikov与Keng Meng Ng. 在线结构理论基础 II：算子方法。 *Logical Methods in Computer Science*, 17(3):6:1–6:35, 2021. [FKM10] Ekaterina Fokina、Iskander Kalimullin与Russell Miller. 可计算结构的范畴化度。 *Archive for Mathematical Logic*, 49(1):51–67, 2010. [Fro15] Andrey N. Frolov. 可计算线性序的有效范畴化。 *Algebra and Logic*, 54(5):415– 417, 2015.[FS11] Johanna Franklin与Reed Solomon. 对同构而言低的度。

Computability 3 2 73 89, , ( ): – .[GD80] Sergei S. Goncharov与Valeriy D. Dzgoev. 模型的自稳定性。 2011

Algebra and Logic 19 1 28 37, , ( ): – .[Gon11] Sergei S. Goncharov. 相对于强构造化的自稳定性度。 1980

Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics 274 1 105 115, 2011

, ( ): – . [Gri90] Sergei Grigorieff. 每个递归线性序在时间—空间复杂度类(n n *Journal of*, log( ))中都有一个副本。 , *Symbolic Logic* 55 1 260 276, 1990

( ): – . [KK24] Iskander Sh. Kalimullin与Alexandra A. Kurmacheva. 即时范畴化与原始递归度中的跳跃运算。 *Mathematics and Theoretical Computer Science*, 2(2):47–69, 2024. doi: 10.26907/2949-3919.2024.2.47-69. [KM21] Iskander Kalimullin与Alexander Melnikov. 相对于可计算预言机的即时范畴化。 *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 42(4):735–742, 2021. [KMN17a] Iskander Kalimullin、Alexander Melnikov与Keng Meng Ng. 可无延迟计算的代数结构。 *Theoretical Computer Science*, 674:73–98, 2017. [KMN17b] Iskander Sh. Kalimullin、Alexander G. Melnikov与Keng Meng Ng. 无延迟范畴化的多样性。 *Algebra and Logic*, 56(2):171–177, 2017. [Mal61] Anatoly I. Mal'tsev. 构造性代数 I。 *Russian Mathematical Surveys*, 16(3):77–129, 1961. [McC03] Charles F. D. McCoy. 布尔代数与线性序的 Δ^0_2

Annals of Pure and Applied 范畴性。 , (–): – . [Rab60] Michael O. Rabin. 可计算代数、一般理论与可计算域理论。 *Logic* 119 1 3 85 120, 2003

Transactions of the American Mathematical Society 95 2 341 360, 1960

, ( ): – . [Rem81a] Jeffrey B. Remmel. 递归布尔代数的递归同构类型。 *Journal of Symbolic Logic* 46 3 572 594, 1981

, ( ): – . [Rem81b] Jeffrey B. Remmel. 递归范畴线性序。 *Proceedings of the American Mathematical Society* 83 2 387 391, 1981

, ( ): – .

Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan
Email address: nickbazh@yandex.ru

Nanyang Technological University, Singapore
Email address: heertern001@e.ntu.edu.sg

Nanyang Technological University, Singapore
Email address: kmng@ntu.edu.sg