arXiv:2603.08039v1 [math.AT] 9 Mar 2026

Fukaya 范畴的高阶 operad 结构

HANG YUAN

摘要：拟运算子往往源自几何。标准的 A_∞ operad 可由 Stasheff结合多面体上的胞腔链导出，而 A_∞ 代数是这个 operad 上的代数。fc-多范畴的概念也称为虚拟双范畴，是 operad 和多范畴的二维推广。这里的 fc 表示自由范畴单子。

我们在辛流形中一系列拉格朗日子流形边界上的fc-多范畴模空间集合上建立了自然的结构。这些模空间由伪全纯多边形 构成，众所周知，它们是构造 Fukaya 范畴的基础。基于此，我们发展了fc-多范畴的微分分次（dg）变体理论，并证明，广泛的一类A_∞型结构，例如A_∞ 代数、A_∞ （双）模以及A_∞ 范畴（可能是弯曲的），都可统一表述为 dg fc-多范畴上的代数。

目录

1. 引言.1

2. 拟运算子与多范畴.6..

2.1. 单子 .1 2.2. 跨度双范畴 .2 2.3. 广义多范畴.6 2.4. 拟运算子与多范畴中的标记 .8 2.5. 作为多范畴的伪全纯圆盘模空间 .10

3. fc-多范畴 .173.1. 有向图与函子 **fc** .18 3.2. **fc**-多范畴的具体描述.19 3.3. 映射 **fc**-多范畴与因子闭性.22 3.4. 由 **fc**-多范畴进行标记.23

4. 伪全纯多边形的模空间作为 因子封闭-多范畴 .254.1. Pseudo-holomorphic polygons and motivations .25 4.2. **因子封闭**-多范畴结构在模空间上 .26 4.3. 重新审视第二相对奇异同调 .27 4.4. 格罗莫夫紧性与 **因子封闭**-多范畴结构的因子闭性 .30

5. fc-多范畴上的代数fc-多范畴及其 dg 变体 .325.1. 指数型 dg 函子与自然变换 .32 5.2. 射到一个 dg 范畴的 dg 函子 .33 5.3. 同构 .34 5.4. fc-多范畴上的代数.34 5.5. fc-多范畴的 dg 变体.35 5.4. dg 自同态.36 5.5. fc-多范畴上的代数：dg 变体.37 6. 作为 dg fc-多范畴上的代数的 A_∞型结构.38 6.1. A_∞代数.38 6.2. A_∞范畴.39 6.3. 广义 A_∞ 范畴.41 6.4. 左、右 A_∞ 模.41 6.5. 一对 A_∞ 代数上的 A_∞ 双模.42 6.6. 一对 A_∞ 范畴上的 A_∞ 双模.45 6.7. A_∞ 多重模.45 参考文献.46

1 引言

（非对称）operad 是只有一个对象的多范畴。多范畴的理念可追溯至 Lambek 在20世纪60年代的研究 [20], , 随后由 Boardman-Vogt [1] 和 May [28] 进一步发展,

以及许多其他学者也作出了贡献。此后，operad 和多范畴一直是描述具有多个输入和一个输出的代数结构的有用语言。Burroni 提出了一种更一般的视角 [2]，后来许多学者又对其加以发展；这种视角认为，多范畴源自单子。对于范畴上的笛卡尔单子 T，可以定义 T-多范畴，其中经典多范畴和 operad 是其特例。本文聚焦于 $T = \mathbf{fc}$ (§ 3.1) 这一情形，并研究**fc-多范畴**的概念，该概念由 Leinster 于 [21,22,24]中提出。它也称为虚拟双范畴，由 Cruttwell 和 Shulman 在 [3]中提出；另请参见 [19,29]。

Stasheff 在20世纪60年代发现了A_∞ 代数，这标志着同伦代数中的一个关键时刻，并推动了拟运算子在拓扑学和数理物理中的应用。事实上，Stasheff结合多面体$K = \{K_n\}$ 构成一个胞腔非对称拓扑幺半群算子，即一列配备了圆形i 部分复合运算 $\circ_i$ 的拓扑空间：$K_r \times K_s \to K_{r+s-1}$ 由满足某些结合律条件的胞腔映射给出。此外，结合式多面体的胞腔链所构成的 dg 伴随代数与标准的A_∞ dg 伴随代数 $\mathcal{A}_\infty = \{\mathcal{A}_\infty(n)\}_{n\geq 2}$同构。它由符号$\mathbf{m}_n$自由生成，其微分 δ 在生成元上的定义为

$$\delta(\mathbf{m}_n) = \pm \sum_{r+s+t=n} \mathbf{m}_{r+1+t} \circ_{r+1} \mathbf{m}_s$$

并按幺半群算子莱布尼茨法则 [26]延拓。已知，上链复形X 上的*an* A_∞ 代数 可视为 dg 伴随代数 $\mathcal{A}_\infty$上的代数，或等价地，视为一个 dg 拟运算子态射

$$\alpha : \mathcal{A}_\infty \to \mathrm{End}(X) \tag{1.1}$$

其中 $\mathrm{End}(X)$ 是标准的微分分次自同态运算子。

自 Fukaya 的工作以来， [4], A_∞ 结构已成为辛几何中的标准框架。然而，除了 A_∞ 代数之外，诸如 A_∞ 双模 [11, §3。7] 以及 A_∞ 范畴 [4,7,30] 等变体也经常出现。但对于这些变体，文献中较少采用（1.1）中的运算子观点。通常，人们会引入一组多线性运算（输入类型往往各不相同），再逐项写出所需的恒等关系。例如，A_∞ 范畴定义为由以下数据构成：一组对象、对于每对对象 v_0,v_1，相应的分次向量空间 $\hom(v_0,v_1)$，以及高阶复合

$$\mu_d : \hom(v_{d-1}, v_d) \otimes \cdots \otimes \hom(v_0, v_1) \longrightarrow \hom(v_0, v_d)$$

满足某些 A_∞ 结合关系。尽管这种做法在实践中很有效，但看起来可能像是一组临时拼凑的公式，在一定程度上掩盖了（1.1）所揭示的概念统一性以及这些运算的几何起源。在辛几何中，这些结构映射由伪全纯多边形的（虚）计数定义，而上述纯代数构造可能会舍弃有用的几何数据。例如，它没有保留这些多边形边界环的拓扑类，而这在应用中往往很有用，例如在表述 Fukaya 的 A_∞ 代数的（边界）除子公理时 [5,32,36]。

现在自然会产生两个问题：

(I) 给定 *Stasheff*结合子的拟运算结构，我们能否同样从伪全纯圆盘及多边形的模空间中提取出“类似拟运算”的结构？

(II) 既然 A_∞ 代数可以视为标准 *dg* A_∞ 拟运算（见*1.1*）上的代数，我们能否本着同样的精神，以拟运算的方式表述其他各种 A_∞型结构？

令人满意的 对问题（I）的ry理解或许能为通向问题（II）的系统途径提供启示。

几何动机

我们先来讨论问题（I）。在辛几何中，带有拉格朗日边界条件（单个或多个，嵌入或浸入）的伪全纯曲线的模空间应当产生丰富的A_∞型结构族，这表明仅靠拟运算子可能不够灵活。

作为出发点，我们考虑边界落在单个嵌入的拉格朗日子流形上的伪全纯圆盘的模空间（图1）。接下来的陈述记录了这个模空间的关键拓扑特征，并以此为切入点，解释 **fc**-多范畴如何从更一般的模空间中产生。下述陈述似乎隐含于标准文献中 [11,15], ，但并未以 operad 的语言表述。Fukaya 曾从 operad 的视角研究模空间上 Kuranishi 结构的微分几何理论 [6]。

命题 1.1。设 L 是闭辛流形$(X\ \omega)$中的一个嵌入的闭拉格朗日子流形。那么，以 L 为边界的伪全纯圆盘的模空间构成一个非对称拓扑多范畴（带色拟运算），其对象（颜色）集合等于 L。

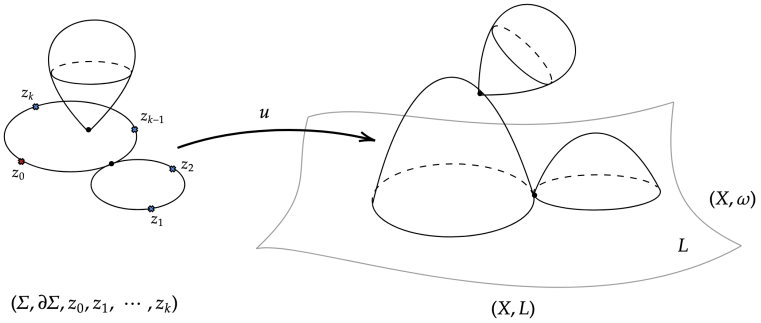


图 *1*：由单个嵌入的拉格朗日子流形所界定的伪全纯（稳定）圆盘的模空间

读者不必具备深厚的辛几何背景，也可以从图1中领会基本的拓扑直觉。本文的主要目标之一，是以几何作为动机，探讨后文发展的代数结果。

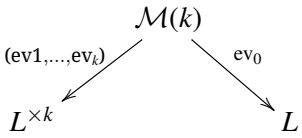
为方便读者，我们简要回顾一下辛几何背景。固定 $k \geq 0$ and$\beta \in H_2(X, L)$。考虑图 1 中的元组 $(\Sigma, \partial\Sigma; z0, \ldots, z_k; u)$，其中 $(\Sigma, \partial\Sigma)$ 是定向结点带边黎曼曲面，$z0, \ldots, z_k \in \partial\Sigma$ 是 k 个按诱导边界定向循环排序的边界标记点，$u : (\Sigma, \partial\Sigma) \to (X, L)$ 是一个连续映射，其在 Σ 的光滑部分上的限制满足某个柯西-黎曼方程，并且这些数据还须满足所谓的稳定条件。在辛几何文献中，这种映射通常称为伪全纯曲线或稳定映射；更多细节请参见 [8,11] 。

令 $\mathcal{M}(k)$ 表示这些元组 $(\Sigma,\ \partial\Sigma;\ z0,\ \ldots\ldots,\ z_k;\ u)$ 的同构类的集合，我们将其称为伪全纯稳定映射的模空间 。Fukaya-Oh-Ohta-Ono 利用这些模空间以及 Kuranishi 结构的解析理论，在 de Rham 复形 $\Omega^*(L)$ 上构造了一个 A_∞ 代数结构；见 [8,9,11,15]。

在拓扑学层面上，模空间 $\mathcal{M}(k)$ 的结构已得到充分理解。首先，我们知道 $\mathcal{M}(k)$ 是一个紧豪斯多夫空间 [11,定理 2.1.29]。此外，存在自然的连续评价映射

$$\mathrm{ev}_i : \mathcal{M}(k) \to L\,, \quad i = 0, 1, \ldots, k \tag{1.2}$$

由将元组的同构类 $(\Sigma, \partial\Sigma; z_0, \ldots, z_k; u)$ 送到点 $u(z_i) \in L$。下面的图表说明了命题 1.1 中多范畴（带色拟运算）的结构：



这里，ev_0 充当目标映射，而 $(\mathrm{ev}_1, \ldots, \mathrm{ev}_k)$ 充当多范畴结构的源映射。

根据上述讨论，我们的基本观察是：如果允许多个拉格朗日子流形（而不是单个拉格朗日子流形），或者允许拉格朗日子流形是浸入的，就会自然地引出某些“高阶”歌剧对象；与单独使用A_∞型代数结构相比，这些对象或许能提供一种更自然的形式体系来编码由此产生的A_∞ 代数结构。具体而言，我们可以得到以下结果：

定理 1.2 (定理 4.3). 设 $(X\ \omega)$ 是一个闭辛流形。设 $\iota : L \to X$ 是一个拉格朗日浸入，即 $\iota^*\omega = 0$。那么，由 $\mathscr{M}_\iota$ 所组成的、边界位于 $\iota(L)$ 上的伪全纯多边形模空间集合自然构成一个拓扑的 **fc**-多范畴。

一个**fc**-多范畴 [22, 24] 可视为一种类歌剧结构，其运算由二维粘贴图而非有根树索引。它由满足适当匹配条件的 0-胞腔、1-胞和 2-胞腔组成；更多详情见第3 节。在图2中，0-胞腔是 v_i，（水平）1-胞是边e_i，而 2-胞腔是**u**。关键观察在于，2-胞腔的复合似乎与辛几何中伪全纯多边形的粘合相容（参见图2）。

我们也来说明与模空间相关的概念。与上述嵌入情形类似，但针对浸入情形作了一些重要修改，我们考虑元组 $(\Sigma, \partial\Sigma; \mathrm{z}0, \ldots, \mathrm{z}_k; \mathrm{u}\ \gamma)$，其中 $\mathrm{u} : (\Sigma, \partial\Sigma) \to (\mathrm{X}\ \iota(\mathrm{L}))$ 如前所述，而 γ: $\partial\Sigma \setminus \{\mathrm{z}0, \ldots, \mathrm{z}_k\} \to \mathrm{L}$ 是 u 连续提升时所需的额外数据，且满足 $\iota \circ \gamma = \mathrm{u}$。与 (1.2) 不同，在这一浸入情形下，求值映射

$$\mathrm{ev}_i : \mathcal{M}(k) \to L \times_X L\,, \quad i = 0, 1, \ldots, k.$$

取值于纤维积 $\mathrm{L}\ \times_X \mathrm{L}\ = \mathrm{L}\ \times_\iota \mathrm{L}\ = \{(\mathrm{p}, \mathrm{q}) \in \mathrm{L}\ \times \mathrm{L}\ \mid \iota(\mathrm{p})\ = \iota(\mathrm{q})\}$，并由将元组 $(\Sigma, \partial\Sigma;$ $\mathrm{z}0, \ldots, \mathrm{z}_k; \mathrm{u}\ \gamma)$ 的同构类映到点 $(\gamma(\mathrm{z}_i-)\ \gamma(\mathrm{z}_i+))$ 来定义，其中$\gamma(\mathrm{z}_i\pm)$是沿 $\partial\Sigma$ 相对于诱导边界定向所取的“单侧极限”；详见 [7, 定义 3.17] 。特别地，$\partial\Sigma$ 从 z_i 到 z_{i+1} 的定向边界弧被 γ 映为一条路径 $\gamma_i \subset \mathrm{L}$，这自然提示我们追踪 L 的（路径）连通分支 L_v，其中 $\mathrm{L} = \bigsqcup_{\mathrm{v}} \mathrm{L}\ _v$。纤维积 $\mathrm{L}\ \times_X \mathrm{L}$ 随之继承相应的分解，因而每个评价映射 ev_i 诱导模空间 $\mathcal{M}(\mathrm{k})$ 的进一步分解。这种更精细的分解表明，前述多范畴结构可能容许相应的细化。

注 1.3. 一个典型的 ι 例子如下。设 $\{L_v\}_{v\in V}$ 是一族两两横截相交的连通嵌入拉格朗日子流形。令 $L := \bigsqcup_{v\in V} L\ _v$，自然包含定义了一个拉格朗日浸入 $: L \to X$。那么，在定理 4.3 中，0-胞腔由指标集 V给出，1-胞由 $L_v \cap L_{v'}$ 中的交点给出，而 2-胞腔则是伪全纯多边形。

注 1.4. 在辛几何中，一个可能适合在模空间上引入 **fc**- 多范畴结构的具体情形如下。我们希望区分 (i) 拉格朗日子流形

一对 (L_0, L_1) 的 Floer理论与 (ii) 对象集为 L_0, L_1 的 Fukaya 范畴。如果我们将相应的模空间族记为 $\mathscr{M}_1$ 和 $\mathscr{M}_2$，那么 $\mathscr{M}_1 \subset \mathscr{M}_2$ 并且实际上 $\mathscr{M}_1$ 构成 fc-多范畴 $\mathscr{M}_2$的一个满子多范畴；相关讨论见第 4.4 节。

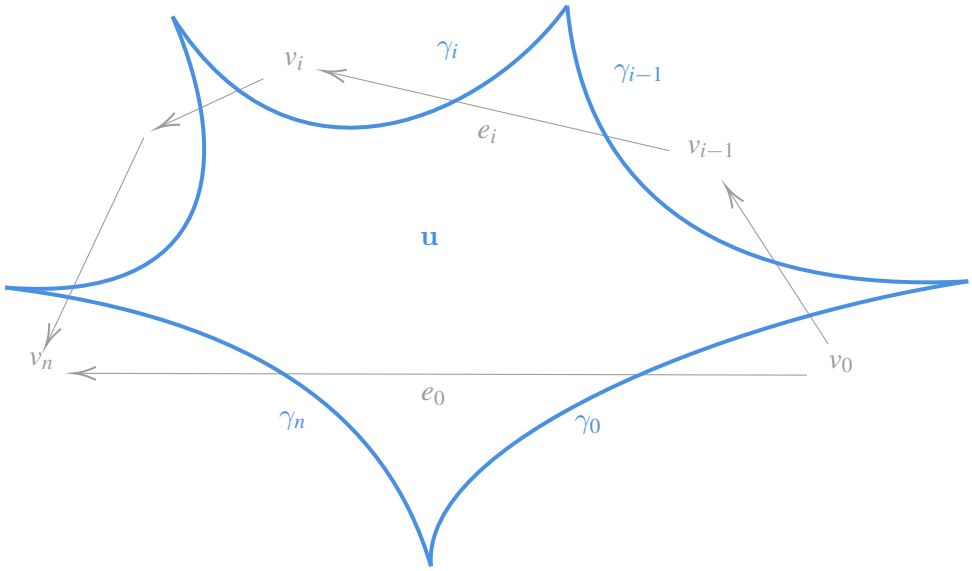


图 *2*：定理中 *1.2*，一个边界路径为 γ_i 、位于拉格朗日分量 L_{v_i} （蓝色）的伪全纯多边形被视为一个2-胞图表，相应的 fc-多范畴（灰色）中，而 $L_{v_i} \cap L^{v_{i+1}}$ 中的一个交点被视为一个水平 *1*-胞腔。

代数推论

现在，我们来处理引言开头的问题（II）。遵循 Leinster 在 [24],中的思路，我们将发展微分分次（*dg*）fc-多范畴以及*dg* fc-多范畴上的代数理论（见第5节）。基于这些概念，我们的主要观察如下：

定理 1.5。存在一些 *dg* fc-多范畴，其上的代数能够还原 A_∞ 代数、A_∞ 范畴、A_∞ 左／右模以及 A_∞ 双模的概念。

这个定理背后的基本思想如下。可以将标准 dg 伴随代数 $\mathcal{A}_\infty$ 视为由 Stasheff结合子经由“将每个胞腔缩成一个点”而得到。K_n 的每个余维一面都具有$K_{r+1+t} \times K_s$的形式，对应于嫁接。因此，顶胞腔的胞腔边界产生了 $\mathcal{A}_\infty$上的微分 δ，赋予其 dg 伴随代数的结构。A∞ 关系正是结合式多面体胞腔链的恒等态射 $\partial^2 = 0$ 的伴随代数表达。

鉴于（1.1），一个 A_∞ 代数等价于 dg 拟运算子的一个态射 $\alpha : \mathcal{A}_\infty \to \mathrm{End}(X)$。受此启发，我们可以思考，是否能将类似的“把每个胞腔缩成一个点”的过程应用于定理 $\mathscr{M}_\iota$ 中出现的1.2的模空间。

由于一个 fc-多范畴的 0-胞腔和（水平）1-胞构成有向图，因此自然会尝试构造一个 fc-多范畴，使得对于每个给定的 1-胞边界轮廓，相应的 2-胞腔空间都是单元素集。由此，预期可以得到 Stasheff 的 dg 伴随代数 $\mathcal{A}_\infty$ 的推广版本。这些本质上就是定理 fc-多范畴中提到的 dg 1.5，其代数是 A_∞ 范畴。此外，通过限制到 $\mathscr{M}_\iota$ 的适当子集，还可以构造 dg fc-子多范畴。例如，这些包括其代数为 fc-多范畴的 dg A_∞ 双模。更为特殊的 A_∞-型结构也自然地适用于这一框架

之中，例如 A_∞ 三模，以及更一般地，任意 A_∞ k-模，其中 $k > 0$。更多示例和讨论请参见第 6 节。

本文结构安排如下。在第 2 节中，我们回顾拟运算子和多范畴，并在命题 1.1 中描述由单个拉格朗日子流形围成的伪全纯圆盘模空间上的多范畴结构。在第 3 节中，我们回顾 fc-多范畴，并将其结构展开为明确的数据。在第 4 节中，我们讨论定理1.2 ，并简要说明 fc-多范畴如何应用于辛几何。在第 5 节中，我们回顾 fc-多范畴上的代数，提出 dg fc-多范畴，并介绍 dg fc-多范畴上的代数。最后，在第 6 节中，我们讨论定理 1.5 ，并说明如何将各种经典的 A_∞-型结构还原为 dgfc-多范畴上的代数。

致谢

作者谨此感谢 T. Leinster 在电子邮件往来中给予的有益建议与深思熟虑的见解。

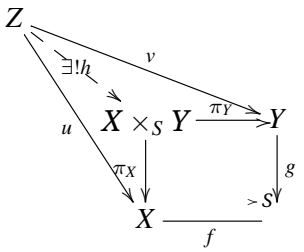
2 拟运算子与多范畴

在本节中，我们回顾拟运算子与多范畴的一般抽象框架；一旦熟悉这种抽象语言，它们便能给出简洁而清晰的表述。我们的主要参考文献是 Leinster 的著作 [24]；另见 [17, 21, 22, 25, 27]。初次阅读时，可查阅定义 2.7本身，其中我们采用更为经典而显式的描述。

[2.1] 单子

范畴 $\mathcal{E}$ 中的终对象是这样一个对象 $\mathbf{1}$：对每个 $X \in \mathcal{E}$，存在唯一的态射 $X \to \mathbf{1}$。例如，在集合范畴 Set 中，单点集 $\{*\}$ 是终对象。给定对象 X、Y $\in \mathcal{E}$，二元积是一个对象 $X \times Y$，并配备投影 $\mathrm{pr}_1 : X \times Y \to X$ 与 $\mathrm{pr}_2 : X \times Y \to Y$，使得对每个 Z 以及态射 $f : Z \to X$、$g : Z \to Y$，存在唯一的$\langle f, g\rangle : Z \to X \times Y$，满足 $\mathrm{pr}_1 \circ \langle f, g\rangle = f$ 与 $\mathrm{pr}_2 \circ \langle f, g\rangle = g$。

给定 $\mathcal{E}$ 中的态射 $f : X \to S$ 和 $g : Y \to S$，拉回（或纤维积）是一个对象 $X \times_S Y$，连同态射 $\pi_X : X \times_S Y \to X$ 和 $\pi_Y : X \times_S Y \to Y$，使得方形 $f \circ \pi_X = g \circ \pi_Y$交换，并满足泛性质：对于任意对象 Z 及映射 $u : Z \to X$、$v : Z \to Y$，若 $f \circ u = g \circ v$，则存在唯一的 $h : Z \to X \times_S Y$，使得 $\pi_X \circ h = u$ 且 $\pi_Y \circ h = v$。



如果一个范畴 $\mathcal{E}$ 具有有限极限，我们就称它具有有限极限；也就是说，它有一个终对象、所有二元积以及所有拉回（等价地说，所有有限图表的极限）。 $\mathcal{E}$ 具有所有有限极限这一条件，等价于 $\mathcal{E}$ 有一个终对象和所有拉回。特别地，二元积可以构造为终对象上的拉回。

一个笛卡尔范畴是一个范畴 $\mathcal{E}$，它具有终对象$\mathbf{1}$ 以及所有拉回。一个函子F： $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ 是笛卡尔的，如果它保持拉回，即对于 $\mathcal{E}$中的每一个拉回方块，其像

在F下仍是一个拉回方块。设F，G：$\mathcal{E}\to\mathcal{E}$为函子。一个自然变换$\alpha$：$F\Rightarrow G$是笛卡尔的，如果对于$\mathcal{E}$中的每一个态射$f$：$X\to Y$，自然性方块

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ {\scriptstyle\alpha_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_Y} \\ G(X) & \xrightarrow[G(f)]{} & G(Y) \end{array}$$

是$\mathcal{E}$中的一个拉回方块。参见 [24, 定义 4.1。1]。

例 2.1（笛卡尔范畴）。集合范畴 Set 是笛卡尔的：终对象是$1=\{*\}$，并且拉回存在。拓扑空间范畴 Top 是笛卡尔的：终对象是单点空间，且拉回按通常方式存在。对于任意笛卡尔$\mathcal{E}$以及任意对象$B\in\mathcal{E}$，切片范畴$\mathcal{E}/B$（其对象是映射$X\to B$，其中$X\in\mathcal{E}$；态射$f:(X\xrightarrow{p}B)\to(Y\xrightarrow{q}B)$是$\mathcal{E}$中的映射$f:X\to Y$，满足$q\circ f=p$。）是笛卡尔的。终对象是$\mathrm{id}_B:B\to B$，而它们的拉回（或 B 上的纤维积）是$X\times_B Y$，并构成$\mathcal{E}$中的通常拉回方块。特别地，Top/B 是笛卡尔的，其纤维积为$X\times_B Y$。

$\mathcal{E}$上的单子是一个三元组(T,η,μ)，由一个自函子T：$\mathcal{E}\to\mathcal{E}$、一个单位$\eta:\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}\Rightarrow T$和一个乘法$\mu:T\circ T\Rightarrow T$组成，并满足通常的结合律与单位公理：

$$\mu\circ T\mu=\mu\circ\mu T,\qquad \mu\circ T\eta=\mathrm{id}_T=\mu\circ\eta T.$$

具体而言，对每个对象X，我们有

$$\begin{array}{ccc} T^3X & \xrightarrow{T\mu_X} & T^2X \\ {\scriptstyle\mu_{TX}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mu_X} \\ T^2X & \xrightarrow[\mu_X]{} & TX \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} TX & \xrightarrow{T\eta_X} & T^2X \\ & {\scriptstyle\mathrm{id}_{TX}}\searrow & \downarrow{\scriptstyle\mu_X} \\ & & TX \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{ccc} TX & \xrightarrow{\eta_{TX}} & T^2X \\ & {\scriptstyle\mathrm{id}_{TX}}\searrow & \downarrow{\scriptstyle\mu_X} \\ & & TX \end{array}$$

$\mathcal{E}$上的单子(T,η,μ)是笛卡尔的，当且仅当（i）函子T是笛卡尔的，且（ii）自变换η和μ是笛卡尔的。等价地，T保持拉回，并且对每个态射$f:X\to Y$，两个自然性方块

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle\eta_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\eta_Y} \\ TX & \xrightarrow[Tf]{} & TY \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{ccc} TTX & \xrightarrow{TTf} & TTY \\ {\scriptstyle\mu_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mu_Y} \\ TX & \xrightarrow[Tf]{} & TY \end{array}$$

都是拉回。

对于任意笛卡尔$\mathcal{E}$，恒等单子（$\mathrm{Id}\ \eta=\mathrm{id}\ \mu=\mathrm{id}$）都是笛卡尔的。此外，笛卡尔范畴$\mathcal{E}=$自由幺半群单子$(T,\eta,\mu)$ **Top** 定义如下。定义自函子$T:\mathcal{E}\to\mathcal{E}$如下：

$$TX:=\coprod_{n\geq 0}X^{\times n}\tag{2.1}$$

约定$X^{\times 0}$为终对象，即单点空间。对于态射$f\colon X \to Y$，定义

$$Tf = \coprod_{n\geq 0} f^{\times n} : \coprod_{n\geq 0} X^{\times n} \longrightarrow \coprod_{n\geq 0} Y^{\times n}.$$

单位 $\eta : \mathrm{Id} \Rightarrow T$ 和乘法 $\mu : T^2 \Rightarrow T$ 为:

$$\eta_X : X \longrightarrow TX, \qquad x \longmapsto [x] \in X^{\times 1} \subseteq TX,$$
$$\mu_X : T(TX) \longrightarrow TX,$$

其中， μ_X 通过拼接将列表的列表展平。具体而言，

$$T(TX) = \coprod_{k\geq 0} (TX)^{\times k} \cong \coprod_{k\geq 0} \coprod_{(n_1,\ldots,n_k)\in\mathbb{N}^k} \prod_{i=1}^{k} X^{\times n_i}.$$

$T(TX)$ 的元素因此是有限列表的有限列表:

$$\big([x_{1,1},\ldots,x_{1,n_1}],\ [x_{2,1},\ldots,x_{2,n_2}],\ \ldots,\ [x_{k,1},\ldots,x_{k,n_k}]\big).$$

这里，k 可以为 0，此时得到空列表；某些 n_i 也可以为 0。乘法$\mu_X : T(TX) \to TX$ 将列表的列表映射为它们的拼接:

$$\mu_X\Big([x_{1,\ 1},\ \ldots,\ x_{1,\ n_1}],\ \ldots,\ [x_{k,\ 1},\ \ldots,\ x_{k,\ n_k}]\Big) := [x_{1,1},\ldots,x_{1,n_1},\ x_{2,1},\ldots,x_{2,n_2},\ \ldots,\ x_{k,\ 1},\ \ldots\ldots,\ x_{k,\ n_k}] \in X^{\times(n_1+\cdots+n_k)} \subseteq TX。$$

也就是说，在直和项 $\prod^k{}_{i=1} X^{\times n_i}$ 上，我们定义

$$\mu_X|_{\prod_{i=1}^k X^{\times n_i}} : \prod_{i=1}^{k} X^{\times n_i} \longrightarrow X^{\times(n_1+\cdots+n_k)}$$

作为将元组 $((x1,1,\ldots,x1,n_1)\ldots,(x_{k,}1,\ldots,x_{k,n_k}))$重新编排为单个 $(n_1+\cdots+n_k)$-元组的典范同构。若$k = 0$, 则 μ_X将其映射为空列表 $[\,] \in X^{\times 0} \subseteq TX$。最后，容易验证 $(T\ \eta, \mu)$ 实际上是一个笛卡尔单子。

设 $(T\ \eta, \mu)$ 是范畴 $\mathcal{C}$ 上的一个单子。单子 T 上的一个 代数(或简称 T-代数) 是一对 $(A\ \alpha)$，其中包含一个对象 $A \in \mathcal{C}$ 以及一个结构态射 $\alpha : TA \longrightarrow A$ ，满足单位和结合律公理：(见 [25, B.4.2]和 [24,p7])

(2.2)

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & TA \\ & \searrow^{\mathrm{id}_A} & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ & & A \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} T^2A & \xrightarrow{\mu_A} & TA \\ {\scriptstyle T\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ TA & \xrightarrow[\alpha]{} & A \end{array}$$

T-代数的一个态射 f: $(A, a) \to (B, b)$ 是一个映射 $f : A \to B$ 属于 $\mathcal{C}$，且满足 $f \circ a = b \circ Tf$。

当 T 是自由幺半群单子（2.1）时，态射 $\alpha : \mathrm{TA} \to \mathrm{A}$ 分解为 $\alpha_n : \mathrm{A}^{\times n} \to \mathrm{A}$（$\mathrm{n} \geq 0$）。按照我们的约定，$\mathrm{A}^{\times 0}$ 是终对象，因此 α_0 指定了 A 的一个元素，记为 e。定义 $\mathrm{x}_1 * \mathrm{x}_2 = \alpha_2(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2)$，则 $(\mathrm{A}\ *, \mathrm{e})$ 是一个幺半群（带恒等元的半群）。

[2.2] 跨度双范畴

回忆一下，一个双范畴 $\mathcal{B}$ 由以下数据组成（参见 [24, 定义 1.5。1]） :

- 一个类，其元素称为对象或*0*-胞腔。
- 对于每一对对象A，B，范畴 $\mathcal{B}(A,B)$ 中的对象$f\colon A \to B$称为*1*-胞腔，其态射称为*2*-胞腔 $\alpha : f \Rightarrow g$。

- 对于每组三个对象 A、B、C，一个函子

$$\circ:\ \mathcal{B}(B,C)\times\mathcal{B}(A,B)\ \longrightarrow\ \mathcal{B}(A,C),$$

  称为复合。
- 对于每个对象 A，有一个指定的 1-胞 $\mathrm{id}_A:\ A\ \to A$，称为恒等态射。
- 自然同构

$$a_{f,g,h}:(h\circ g)\circ f\ \cong\ h\circ(g\circ f),\qquad \lambda_f:\mathrm{id}_B\circ f\ \cong\ f,\qquad \rho_f:f\circ\mathrm{id}_A\ \cong\ f$$

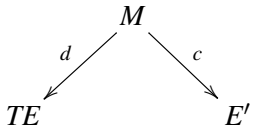
  对于可复合的 1-胞腔 f、g、h。

这些数据满足通常的相容条件：a 的五边形恒等式，以及 λ, ρ 的三角恒等式。实际上，只有一个对象（0-胞腔）的双范畴恰好是一个幺半范畴。

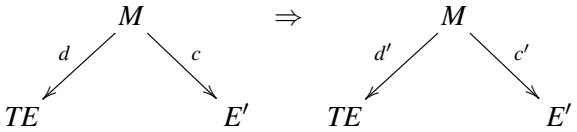
以下构造见 [24,定义 4.2。1] 或 [17, 定义 4。2]。

构造 ***2.2***。设 $\mathcal{E}$ 是一个笛卡尔范畴，且 $(T\ \eta,\mu)$ 是 $\mathcal{E}$ 上的一个笛卡尔单子。我们如下引入由 T-跨接构成的双范畴 $\mathcal{E}_{(T)}$。

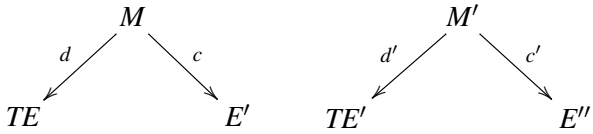
- 0-胞是 $\mathcal{E}$ 中的对象。
- 1-胞 $E\ \to E'$ 是 $\mathcal{E}$ 中的图示



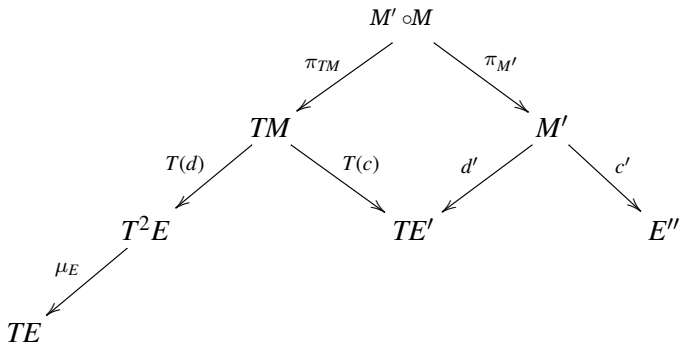
  其中 M 是 $\mathcal{E}$ 中的一个对象，带有一个定义域映射 $d:M\ \to TE$ 以及一个陪域映射 $c:M\ \to E'$。相应的恒等1-胞腔是 $TE\ \xleftarrow{\eta_E}\ E\ \mathrm{id}\ \xrightarrow{E}\ E$。
- 2-胞



  是态射 $\alpha:\ M\ \to M'$，在 $\mathcal{E}$ 中，使得 $d\ =d'\alpha$ 且 $c\ =c'\alpha$。
- 1-胞腔的复合 $\circ$



  由图表给出



其中

$$M' \circ M = TM \times_{TE'} M' \tag{2.3}$$

2-胞腔的复合以类似方式定义，此处从略。结合子与单位子是由拉回的泛性质连同（$T\ \eta, \mu$）的幺半群公理所诱导的典范同构。笛卡尔性保证所需的拉回被 T 保持。

设 $\mathcal{E}$ 为任意笛卡尔范畴，并取恒等单子 $T = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$。则 1-胞 $E \to E'$ 不过是图表 $E \xleftarrow{d} M \xrightarrow{c} E'$。1-胞的复合是通常的拉回复合，而 E 处的恒等态射为 $E \xleftarrow{\mathrm{id}} E \xrightarrow{\mathrm{id}} E$。

当 T 是 (2.1) 中的自由幺半群单子时，一个 1-胞 $\mathrm{E} \to \mathrm{E}'$ 是配备了分别到 E 与 E′ 的“多输入到单输出”映射的空间 M：元素 $\mathrm{m} \in \mathrm{M}$ 决定一个由输入构成的有限列表 $\mathrm{d(m)} = [\mathrm{e1}, \ldots, \mathrm{e}_n] \in \mathrm{TE}$，以及一个输出 $\mathrm{c(m)} \in \mathrm{E}'$。给定如上的 $\mathrm{m} \in \mathrm{M}$ 与 $\mathrm{m}' \in \mathrm{M}'$，该复合恰当 $\mathrm{d}'(\mathrm{n}) = [\,\mathrm{c(m)}\,]$, 时有定义，亦即 n 的 TE′-输入是以 m 的输出为唯一条目的单元素集列表。复合 $\mathrm{M}' \circ \mathrm{M}$ 收集所有这样的可复合对；复合的左腿给出原来的 E-输入 $[\mathrm{e1}, \ldots, \mathrm{e}_n]$，而右腿给出 E″中的最终输出。

设 $\mathcal{B}$ 是一个双范畴。在 $X \in \mathcal{B}$ 上的单子 由一个 1-胞 $t : X \to X$ 以及两个 2-胞腔（称为乘法和单位）$m : t \circ t \Rightarrow t$、$u : 1_X \Rightarrow t$ 组成，并满足以下相容条件：(1) 这两个复合

$$(t \circ t \circ t) \xRightarrow{m \circ \mathrm{id}_t} (t \circ t) \xRightarrow{m} t \qquad \text{and} \qquad (t \circ t \circ t) \xRightarrow{\mathrm{id}_t \circ m} (t \circ t) \xRightarrow{m} t$$

作为 2-胞腔相等。

(2) 这两个复合

$$(t \circ 1_X) \xRightarrow{\mathrm{id}_t \circ u} (t \circ t) \xRightarrow{m} t \qquad \text{and} \qquad (1_X \circ t) \xRightarrow{u \circ \mathrm{id}_t} (t \circ t) \xRightarrow{m} t$$

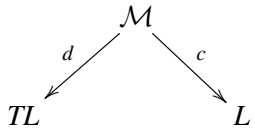
都等于恒等 2-胞腔 $\mathrm{id}_t : t \Rightarrow t$。

[2.3] 广义多范畴

设 $\mathcal{E}$ 是一个笛卡尔范畴，且 $T = (T\ \eta,\ \mu)$ 是其上的笛卡尔单子。

定义 2.3。*T*-多范畴（或称*L* 上的 *T*-多范畴，以强调对象）定义为双范畴 $\mathcal{E}_{(T)}$ 的*T*-跨接中的一个单子。具体来说，它是一个元组$C = (L\ \mathcal{M}; d, c;\ \iota, \gamma)$，由以下部分组成：

- $\mathcal{E}(\tau)$中的一个 1-胞，也就是说，一个图表



我们将 $\mathcal{M}$ 的元素视为箭头，它们带有一个定义域映射 d（即 L 中输入的“*T*-列表”）和一个陪域映射 c（即 L 中的单个输出）。

- γ： $\mathcal{M} \circ \mathcal{M} = \mathcal{M} \times_{TL} T\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ 是一个映射（称为乘法），使得

$$d \circ \gamma = \mu_L \circ T(d) \circ \pi_{T\mathcal{M}}, \qquad \text{and} \qquad c \circ \gamma = c \circ \pi_{\mathcal{M}} \tag{2.4}$$

- $\iota : L \to \mathcal{M}$ 是一个映射（称为单位），使得

$$d \circ \iota = \eta_L, \qquad \text{and} \qquad c \circ \iota = \mathrm{id}_L \tag{2.5}$$

其中 $\pi_{T\mathcal{M}}$： $\mathcal{M} \circ \mathcal{M} \to T\mathcal{M}$ 与 $\pi_{\mathcal{M}}$： $\mathcal{M} \circ \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 是来自拉回的自然投影映射，而 η_L, μ_L 来自单子 $T = (T\ \eta, \mu)$。这些数据须满足自然的

相容条件；参见 [24, 定义 4.2.2 与 6.2。2]。一个 *T-operad* 被定义为一个 *T*-多范畴，定义在终对象 **1** 上，即 $\mathcal{E}$ [24, 定义 4.2。3]。我们称一个 *T*-多范畴为 拓扑的，如果其底范畴 $\mathcal{E}$ 是拓扑空间范畴。

例 ***2.4*** （范畴的恢复）。注意，如果 T 是恒等单子，那么 *T*-多范畴就是一个范畴 [24, 例 4.2。6]例如，乘法为 $\gamma\colon\ \mathcal{M}\times_L\mathcal{M}\to\mathcal{M}$ 其中，纤维积指的是可复合的态射对；单位映射 ι 将 L 中的一个对象映射到 $\mathcal{M}$中的恒等态射。

命题 2.5。 对于 （*2.1*）中的自由幺半群单子 T，*T*-拟运算子的概念与非对称拓扑拟运算子的概念一致，而 L 上的 *T*-多范畴的概念与 L 上的非对称拓扑多范畴的概念一致。

证明。 稍一般的情形见下文的命题 2.8 。 □

令 T为如前所述的笛卡尔单子。设 $C=(\mathcal{L},\mathcal{M};d,c;\ \iota,\gamma)$ 和 $C'=(\mathcal{L}',\mathcal{M}';d',c';\ \iota',\gamma')$ 是 *T*-多范畴。一个 映射$f\colon\ C\to C'$ 的 *T*-多范畴映射 是底层图的一个映射$f=(f_0,f_1)$，并满足以下交换图表

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{L} & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{M}\\ \downarrow{\scriptstyle f_0} & & \downarrow{\scriptstyle f_1}\\ \mathcal{L}' & \xrightarrow{\iota'} & \mathcal{M}'\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{ccc}\mathcal{M}\circ\mathcal{M} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{M}\\ \downarrow{\scriptstyle f_1*f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_1}\\ \mathcal{M}'\circ\mathcal{M}' & \xrightarrow{\mu'} & \mathcal{M}'\end{array}$$

其中，f_1*f_1 是由两个f_1 副本经T诱导的自然映射。

[2.4] 拟运算子和多范畴中的标记

在本小节中，我们回到拟运算子和多范畴的经典概念。在拟运算子中，我们将n元运算视为单幺范畴 $\mathcal{C}$中的一个对象 $\mathcal{O}(n)$。在施加任何复合律之前，原始数据只是一个族

$$\{\mathcal{O}(n)\}_{n\geq 0}$$

以 $\mathcal{C}$ 为指标，指标由元数 $n\in\mathbb{N}$给出。这类族为定义拟运算子的概念提供了基本环境（参见 [27,定义 1。98]）。在许多情况下，为这一图景增添一个额外的分次会很有用。例如，运算可以带有“权重”、“次数”或“能量”，并且这些量在代入下具有可加性。形式上，固定一个幺半群（S $+,\theta$），并考虑由以下数据组成的族

$$\{\mathcal{O}(n,\beta)\}_{n\geq 0,\ \beta\in S}$$

同时以元数 n和分次 $\beta\in S$为指标，我们可以将 $\mathcal{O}(n)=\coprod_\beta\mathcal{O}(n\ \beta$视为这类对象族*S*-标记的族，取值于 $\mathcal{C}$。我们的目标是将这一思想发展到拟运算子和多范畴两者中。引入这一额外分次的一个主要目的，是纳入弯曲的 A_∞ 代数 [11,32]的结构；这类结构在各种应用中都至关重要 [10,13,14,33,35,36]。非正式地说，我们将多线性映射 $\mathfrak{m}_k$ 替换为一个族 $\mathfrak{m}_{k,\ \beta}$ 它带有额外的幺半群分次，并满足相应的“β-分次”A_∞ 关系；更多细节见第 6.1 节。

取一个交换幺半群（S $+$， θ），其中 θ是单位元。在辛几何中，我们通常选择 $S\subseteq H_2(X,\ L)$ 或 π_2 $(X,\ L)$，其由辛面积非负的类组成，其中L 是辛流形 X中的拉格朗日子流形；参见第 2.5节。

约定***2.6***。虽然“*S*-分级”一词可能更自然，但“分级”一词常用于其他语境；为避免歧义，下面采用“带标签的”这一术语。

定义 2.7。 在L上的多范畴（L $\mathcal{M}$; d, c ι, γ）是自由幺半群单子T对应的T-多范畴。若给定一个标记映射，则称其为S-标记

$$|\cdot| : \mathcal{M} \longrightarrow S$$

其中 $|\iota(\ell)| = \theta$ 对所有 $\ell \in L$ 均成立，并满足标记可加性

$$|\gamma(x; [y_1, \ldots, y_k])| = |x| + \sum_{i=1}^{k} |y_i| \qquad \text{or equivalently} \qquad |x \circ_i y| = |x| + |y|$$

具体而言，L 上的 S-标记多范畴定义为以下数据：

(1) 对每个 $n \geq 0$ 和 $\beta \in S$，一个空间 $\mathcal{M}(n\ \beta)$，其中包含标签为 β 的 n 元运算。

(2) 结构映射（输入和输出颜色）

$$\mathrm{ev}_0 : \mathcal{M}(n, \beta) \to L, \qquad \mathrm{ev}_i : \mathcal{M}(n, \beta) \to L \quad (1 \leq i \leq n),$$

使得每个运算都有 n 个有序输入颜色和一个输出颜色。

(3) 一个单位映射

$$\iota : L \to \mathcal{M}(1, \theta),$$

为每种颜色 $\ell \in L$ 指定一个标签为 θ 的特定一元运算。

(4) 复合映射：对于所有 $k \geq 0$、$n1, \ldots, n_k \geq 0$ 以及 $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k \in S$,

$$\gamma : \mathcal{M}(k, \beta_0) \times_{L^{\times k}} \prod_{j=1}^{k} \mathcal{M}(n_j, \beta_j) \longrightarrow \mathcal{M}\Big(\sum_{j=1}^{k} n_j,\ \beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j\Big).$$

此处的纤维积条件要求，对于 $x \in \mathcal{O}(k\ \beta_0)$ 和 $y_j \in \mathcal{O}(nj, \beta_j)$，有 $\mathrm{ev}j(x) = \mathrm{ev}_0(yj)$。等价地，我们有偏复合映射

$$\circ_i : \mathcal{M}(k, \beta_0) \times_{L,(\mathrm{ev}_i, \mathrm{ev}_0)} \mathcal{M}(n, \beta) \to \mathcal{M}(k + n - 1, \beta_0 + \beta)$$

(5) 这些数据满足显然的结合律和单位公理。

此外，如果 L 和 $\mathcal{M}(n\ \beta)$ 都是拓扑空间，且 $\mathrm{ev}_0, \mathrm{ev}_i, \iota, \gamma$ 是连续映射，我们就称 $\mathcal{M}$ 为拓扑的。

命题 2.8。 令 T 为自由幺半群单子 $TX = \coprod_{n\geq 0} X^{\times n}$ 在 $\mathbf{Top}$ *(2.1)* 上的单子，并令 $(S\ +, \theta)$ 为交换幺半群。则：

(1) S 标记的 T-拟运算子的概念与 S 标记的非对称拓扑 *operad* 的概念一致。(2) L 上 S 标记的 T-多范畴的概念与 L 上 S 标记的拓扑多范畴的概念一致

证明。 关于（带颜色的）operad 的定义，我们参考标准资料，例如 [27]。证明基本上以与未标记情形相同的方式进行（例如 [24, 例 4.2。7]），为完整起见，我们在此给出带标签情形下的论证。不失一般性，我们只讨论第二个陈述，因为第一个陈述是 L 为终对象时的特殊情形。设（L $\mathcal{M}$; d, c ι, γ）是一个 S-带标签的 T-多范畴，其含义见定义 2.7，其标记映射为

$|\cdot|$。对于 $TL \cong \coprod_{n\geq 0} L^{\times n}$，我们通过作拉回定义 $\mathcal{M}(n)$ 的元数-n 分量

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}(n) \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "j_n"'] & L^{\times n} \arrow[d, "i_n"] \\ \mathcal{M} \arrow[r, "d"'] & TL. \end{tikzcd}$$

其中 d_n：$\mathcal{M}(n) \to L^{\times n}$ 记录了n 个输入对象，而j_n：$\mathcal{M}(n) \to \mathcal{M}$ 是包含。进一步按标签分解：

$$\mathcal{M}(n) = \coprod_{\beta\in S} \mathcal{M}(n,\beta), \quad \text{where} \quad \mathcal{M}(n,\beta) = \{x \in \mathcal{M}(n) : |x| = \beta\} = |\cdot|^{-1}(\beta) \cap \mathcal{M}(n).$$

因此，

$$\mathcal{M} = \coprod_{n\geq 0} \coprod_{\beta\in S} \mathcal{M}(n,\beta).$$

将拉回的泛性质应用于自然包含 $\mathcal{M}(n\ \beta) \to \mathcal{M}(n)$，我们也有图表

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}(n,\beta) \arrow[r, "d_{n,\beta}"] \arrow[d, "j_{n,\beta}"'] & L^{\times n} \arrow[d, "i_n"] \\ \mathcal{M} \arrow[r, "d"'] & TL. \end{tikzcd}$$

对每个 $\beta \in S$，其中 $d_{n,\beta}$ 和 $j_{n,\beta}$ 分别由 d_n 和 j_n 自然诱导。记

(2.6) $\quad \mathrm{ev}_0^{(n,\beta)} = c \circ j_{n,\beta} : \mathcal{M}(n,\beta) \to L, \qquad \mathrm{ev}_i^{(n,\beta)} = \mathrm{pr}_i \circ d_{n,\beta} : \mathcal{M}(n,\beta) \to L \ \ (1 \leq i \leq n)$

并称它们为求值映射。换言之，每个元素 u $\in \mathcal{M}$(n β) 都有一个输出 ev_0(u) 和 n 个有序输入 (ev_1(u) . . . , ev_n(u))。对于自由幺半群单子，η_L: L $\to$ TL 正是单元素列表的包含，即 $\eta_L = \mathrm{i}_1 \circ \mathrm{id}_L$: L $\xrightarrow{\cong}$ $\mathrm{L}^{\times 1}$ i$\xrightarrow{\iota}$ TL.. 根据条件 d $\circ \iota = \eta_L$(2.5),

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\mathrm{id}_L"] \arrow[d, "\iota"'] & L^{\times 1} \arrow[d, "i_1"] \\ \mathcal{M} \arrow[r, "d"'] & TL \end{tikzcd}$$

可交换。由拉回的泛性质，存在唯一的映射 $\iota : L \to \mathcal{M}(1)$，使得$j_1 \circ \iota = \iota$和 $d_1 \circ \bar{\iota} = \mathrm{id}_L$。由于要求 $|\iota| = \bar{\theta}$，可以证明 ι可分解为 $L \to \mathcal{M}(1,\theta) \to \mathcal{M}(1)$。沿用这一记号，我们也将映射 $L \to \mathcal{M}(1,\theta)$ 记作 ι。

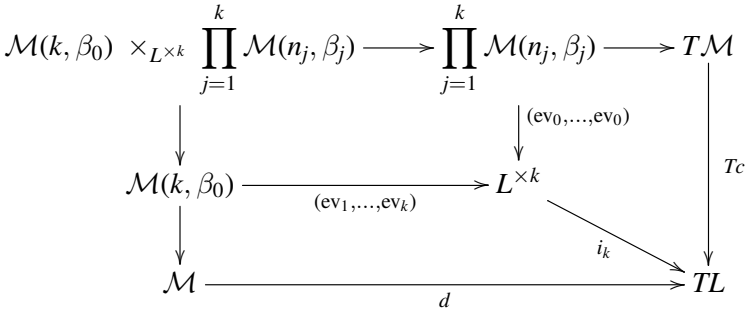
拉回

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \circ \mathcal{M} \arrow[r, "\pi_{T\mathcal{M}}"] \arrow[d, "\pi_{\mathcal{M}}"'] & T\mathcal{M} \arrow[d, "Tc"] \\ \mathcal{M} \arrow[r, "d"'] & TL \end{tikzcd}$$

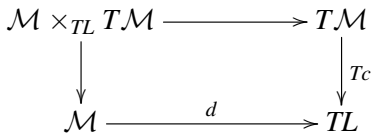
对于自由幺半群单子T，可将其识别为有序对空间 $\big(x,\ [y1, \ldots, y_k]\big)$，其中$x \in \mathcal{M}$ 和 $[y1, \ldots, y_k] \in T\mathcal{M} \equiv \coprod_{k\geq 0} \mathcal{M}^{\times k}$满足匹配条件

$$d(x) = T(c)\big([y_1, \ldots, y_k]\big) = [\,c(y_1), \ldots, c(y_k)\,] \in TL.$$

在这一识别下，我们有 $\pi_{\mathcal{M}}\big(x,[y1,\dots,y_k]\big)=x$ 和 $\pi_{T\mathcal{M}}\big(x,[y1,\dots,y_k]\big)=[y1,\dots,y_k]$。注意下面的图表



是.....的直和项



因此，复合 γ 诱导

$$\gamma^{\beta_0;\beta_1,\dots,\beta_k}_{n_1,\dots,n_k}:\ \mathcal{M}(k,\beta_0)\ \times_{L^{\times k}}\ \prod_{j=1}^{k}\mathcal{M}(n_j,\beta_j)\to\mathcal{M}\times_{TL}T\mathcal{M}\to\mathcal{M} \tag{2.7}$$

我们进一步断言，它的像包含于 $\mathcal{M}(\mathrm{n}_1+\cdots+\mathrm{n}_k,\beta_0+\beta_1+\cdots+\beta_k)$。为看出这一点，根据定义，一个输入点是一个元组$(\mathrm{x};\ [\mathrm{y1},\dots,\mathrm{y}_k])$，其中$\mathrm{x}\ \in\mathcal{M}(\mathrm{k}\ \beta_0)$，$\mathrm{y}_j\in\mathcal{M}(\mathrm{n}j,\beta_j)$，使得匹配条件$\mathrm{ev}j(\mathrm{x})\ =\mathrm{ev}_0(\mathrm{y}j)$成立。根据(2.4)处的源定律，

$$d\Big(\gamma^{\beta_0;\beta_1,\dots,\beta_k}_{n_1,\dots,n_k}(x;[y_1,\dots,y_k])\Big)=\mu_L([d(y_1),\dots,d(y_k)])$$

由于每个$d(yj)$位于$L^{\times n_j}$中，且单子乘法 μ_L 将列表$d(y_1)\dots,d(y_k)$连接起来，因此左边位于$L^{\times(n_1+\cdots+n_k)}$中。根据沿包含$L^{\times n}\hookrightarrow TL$的拉回定义 $\mathcal{M}(n)\ =\mathcal{M}\ \times_{TL}L^{\times n}$，这恰好说明该复合位于子对象 $\mathcal{M}(n$ $_1+\cdots+n_k)$中。由于标签加法性条件，它进一步位于 $\mathcal{M}(n_1+\cdots+n_k,\beta_0+\beta_1+\cdots+\beta_k)$中：

$$|\gamma(x;[y_1,\dots,y_k])=|x|+\sum_j|y_j|=\beta_0+\cdots+\beta_j$$

等价地，给定$x\ \in\mathcal{M}(k\ \beta_0)$和$y\ \in\mathcal{M}(n\ \beta)$，且对于固定的$i$，有 $\mathrm{ev}_i(x)\ =\mathrm{ev}_0(y)$，我们可以定义部分复合

$$\circ_i:\mathcal{M}(k,\beta_0)\times_{L,(\mathrm{ev}_i,\mathrm{ev}_0)}\mathcal{M}(n,\beta)\to\mathcal{M}(k+n-1,\beta_0+\beta) \tag{2.8}$$

via

$$x\circ_i y\ :=\ \gamma^{\beta_0;\,\theta,\dots,\theta,\,\beta,\,\theta,\dots,\theta}_{1,\dots,1,\,n,\,1,\dots,1}\big(x;\ y_1,\dots,y_{i-1},y,y_{i+1},\dots,y_k\big)\ \in\ \mathcal{M}(k+n-1,\ \beta_0+\beta).$$

其中 $\mathrm{y}j:=\iota(\mathrm{ev}j(\mathrm{x}))\ \in\mathcal{M}(1,\theta)$，对 $\mathrm{j}\ \neq\mathrm{i}$ 成立。 γ 的结合律与单位公理确保部分复合 $\circ_i$ 满足标准的 operad 公理（参见 [25, 第 5 节 5.9.4]）：对于任意 $\lambda\in\mathcal{M}(\ell,\beta_1)$、$\mu\in\mathcal{M}(\mathrm{m}\ \beta_2)$ 和 $\nu\in\mathcal{M}(\mathrm{n}\ \beta_3)$，有

$$\begin{aligned}(\lambda\circ_i\mu)\ \circ_{i-1+j}\nu\ &=\ \lambda\circ_i(\mu\circ_j\nu),\qquad 1\le i\le l,\ 1\le j\le m,\\ (\lambda\circ_i\mu)\ \circ_{k-1+m}\nu\ &=\ (\lambda\circ_k\nu)\circ_i\mu,\qquad 1\le i<k\le l.\end{aligned} \tag{2.9}$$

□

请注意，部分复合 $\circ_i$ 在（2.8）中，连同性质（2.9），不同于幺范畴中的通常非对称拟运算（$\mathcal{C}$, $\odot$）。事实上，在我们的设定中，（2.8）中的纤维积（拉回）取决于 i，因此部分复合的定义域随 i变化。这与文献中的标准定义不符（参见 [27,定义 1。16], [25, 第 5 节 5.9。4]它实际上是一个多范畴或带色拟运算。

最后，我们给出一些S带标签的拟运算子的自然例子。

例2.9（S加权根平面树）。平面树是一棵树 Γ，带有嵌入 $\Gamma \hookrightarrow \mathbb{D}^2 \subset \mathbb{C}$，使得顶点v仅有一条边当且仅当v位于单位圆 $\partial\mathbb{D}^2$上。这样的顶点称为外部顶点，其余每个顶点称为内部顶点。外部（相应地，内部）顶点的集合记为$C_0^{\mathrm{ext}}(\Gamma)$（相应地，$C_0^{\mathrm{int}}(\Gamma)$）。于是，$C_0(\Gamma) = C_0^{\mathrm{ext}}(\Gamma) \cup C_0^{\mathrm{int}}(\Gamma)$是所有顶点的集合。此外，$\Gamma$ 的一条边若包含外部顶点则称为外部边，否则称为内部边。所有外部边的集合记为$C_1^{\mathrm{ext}}(\Gamma)$，所有内部边的集合记为$C_1^{\mathrm{int}}(\Gamma)$。一条外部边若包含根则称为出边，否则称为入边或叶。平面有根树是一棵平面树 Γ，其中指定了一个外部顶点v_0。我们称 v_0 为根；它在顶点集$C_0(\Gamma)$上诱导一个自然偏序，其定义为：令$v < v'$，若$v \neq v'$ 且 Γ 中存在一条从v到v_0 并经过v′的路径。特别地，根v_0 关于该偏序是最大的顶点。此外，我们从根开始按逆时针方向对叶排序。

固定一个交换幺半群 $(S, +, \theta)$。对于 $n \geq 0$和 $\beta \in S$，令 $\mathcal{T}_S(n, \beta)$ 为有限个平面有根树 Γ 的同构类的集合，这些树有 n 条出边，并且每个S-权重

$$w : V_{\mathrm{int}}(\Gamma) \longrightarrow S$$

赋给一个内部顶点，使得总权 为

$$|\Gamma| := \sum_{v \in V_{\mathrm{int}}(\Gamma)} w(v) = \beta.$$

我们断言，$\mathcal{T}_S = \{\mathcal{T}_S(n, \beta)\}_{n \geq 0, \beta \in \Gamma}$ 是一个S-带标签的 operad。事实上，复合映射定义如下。给定一棵树 $\Gamma_0 \in \mathcal{T}_S(k, \beta_0)$ 和树 $\Gamma_i \in \mathcal{T}_S(n_i, \beta_i)$（$1 \leq i \leq k$），定义

$$\gamma(\Gamma_0; \Gamma_1, \ldots, \Gamma_k) = \gamma_{k; n_1, \ldots, n_k}^{\beta_0; \beta_1, \ldots, \beta_k}(\Gamma_0; \Gamma_1, \ldots, \Gamma_k)$$

为如下平面有根树：将 Γ_i 的根嫁接到 Γ_0 的第i片叶上（对所有i），并按照诱导的逆时针顺序读取叶。顶点权继承自各部分，因此所得树的总权为

$$|\gamma(\Gamma_0; \Gamma_1, \ldots, \Gamma_k)| = |\Gamma_0| + \sum_{i=1}^{k} |\Gamma_i| = \beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_k,$$

因此，我们定义了：

$$\gamma_{k; n_1, \ldots, n_k}^{\beta_0; \beta_1, \ldots, \beta_k} : \mathcal{T}_S(k, \beta_0) \times \prod_{i=1}^{k} \mathcal{T}_S(n_i, \beta_i) \longrightarrow \mathcal{T}_S\Big(\textstyle\sum_i n_i,\ \beta_0 + \sum_i \beta_i\Big).$$

等价地，我们可以定义第i个部分复合

$$\circ_i : \mathcal{T}_S(k, \beta_0) \times \mathcal{T}_S(n, \beta) \longrightarrow \mathcal{T}_S(k + n - 1, \beta_0 + \beta)$$

将 $\Gamma \in \mathcal{T}_S(n, \beta)$ 的根嫁接到 $\Gamma_0 \in \mathcal{T}_S(k, \beta_0)$ 的第 i 个叶上。顶点权也以类似方式继承，总权为 $\beta_0 + \beta$。

例 ***2.10*** （***S*-带标签的端同态拟运算子**）。固定一个交换幺半群（S, $+, \theta$）。固定一个向量 r

空间A。我们如下定义S-带标签的端同态拟运算子 $\mathrm{End}_A^S = \{\mathrm{End}_A^S(n\ \beta)\}$ 。给定$n \geq 0$ 和 $\beta \in S$，我们令

$$\mathrm{End}_A^S(n,\beta) = \mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, A)$$

其中右侧与 β 无关，而 β 只是一个额外的标签。换句话说，

$$\mathrm{End}_A^S(n) = \coprod_{\beta\in S} \mathrm{End}_A^S(n,\beta) = \coprod_{\beta\in S} \{\beta\} \times \mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, A)$$

当 $n = 0$ 时，我们约定将 $\mathrm{Hom}(A^{\otimes 0},A)$ 与 A 等同。额外的标签在研究弯曲的 A_∞ 代数的拉格朗日 Floer 理论时很有用；例如参见 [5,32,36]。稍后我们还会回到这一点。

$\mathrm{End}_A^S(1,\theta)$ 的单位 η 由恒等映射 id_A 给出。给定 $k \geq 0$、$n1,\ldots,n_k \geq 0$ 以及次数 $\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_k \in S$，我们将复合映射定义为多线性复合：

$$\gamma_{k;n_1,\ldots,n_k}^{\beta_0;\beta_1,\ldots,\beta_k}(f;g_1,\ldots,g_k) = f \circ \left(g_1 \otimes \cdots \otimes g_k\right)$$

部分复合定义如下。对于 $f \in \mathrm{End}_A^S(k\ \beta_0)$ 和 $g \in \mathrm{End}_A^S(n\ \beta)$，我们将$f \circ_i g \in \mathrm{End}_A^S(k + n - 1,\ \beta_0+\beta)$ 定义为将 g 通常地插入f的第 i 个输入中，并在目标上记录总和 $\beta_0+\beta$。

[2.5] 作为多范畴的伪全纯圆盘模空间

设 $(X\ \omega)$ 是一个闭辛流形，J是一个 ω-相容的几乎复结构。设$\iota: L \to X$是一个拉格朗日子流形，即 $\iota^*\omega = 0$且 $\dim L = \frac{1}{2}\dim X$。

当 ι 是嵌入时，我们可以将 L 与其在 X 中的像等同，从而将其视为子空间 $L \subset X$。$H_2(X,L)$ 的零元记为 $\theta = \theta_L$。我们考虑交换幺半群

$$S_L := \{\theta\} \cup \{\beta \in H_2(X,L) \mid \omega(\beta) > 0\} \tag{2.10}$$

固定一个整数 $k \geq 0$ 以及一个相对同伦类 β，它属于 S_L，且满足 $(k\ \beta) \neq (0,\theta),(1,\theta)$。一个A$J$-全纯稳定圆盘，其类型为 $(k\ \beta)$，由以下数据构成

$$\mathbf{u} = \left(\Sigma, z_0, z_1, \ldots, z_k,\ u\right)$$

其中：

- Σ 是一个连通、定向、带节点的亏格为 0 的带边黎曼曲面。结点可以是边界节点（位于 $\partial\Sigma$ 上）或内部节点（位于 $\Sigma\setminus\partial\Sigma$内）。
- $z0$、$z1$，……，$z_k \in \partial\Sigma$ 是两两不同的$k+1$（而非k）个边界标记点，沿 $\partial\Sigma$所诱导的定向排列；没有标记点是结点。
- $u:\ \Sigma \to X$ 连续，在每个分支上都是J-全纯的，并满足拉格朗日边界条件$u(\partial\Sigma) \subset L$，其相对类为 $[u] = \beta \in S_L$。
- 我们要求$\mathbf{u}$ 是稳定的，即$\mathbf{u}$ 的自同构群是有限群。

这里，若存在一个双全纯映射 $\phi:\ \Sigma \to \Sigma'$，将边界映到边界、标记点映到相应的标记点、结点映到结点，并且满足$u = u' \circ \phi$，则称这两个对象$\mathbf{u} = (\Sigma,\ (z_i),\ u)$和$\mathbf{u}' = (\Sigma',\ (z_i'),\ u')$同构。我们称 ϕ 为从$\mathbf{u}$ 到$\mathbf{u}'$的同构。若$\mathbf{u} = \mathbf{u}'$，则称 ϕ为自同构。

定义 2.11. 对于 $(k\ \beta) \neq (0,\theta),(1,\theta)$，类型为$(k\ \beta)$ 的 J-全纯稳定圆盘的模空间，记为 $\mathcal{M}(k\ \beta)$，定义为这类对象 $\mathbf{u}$ 的同构类 $[\mathbf{u}]$ 的集合。它具有求值映射

$$\mathrm{ev}_i : \mathcal{M}(k,\beta) \to L \quad , \qquad i = 0,1,\ldots,k$$

由 $\mathrm{ev}_i([\mathrm{u}]) = \mathrm{u}(\mathrm{z}_i)$ 给出。对于情形* $(\mathrm{k}\ \beta) = (1,\theta)$，我们人为地定义 $\mathcal{M}(1,\theta) = \mathrm{L}$，并配备显然的评价映射 $\mathrm{ev}_0 = \mathrm{id}_L : \mathrm{L} \to \mathrm{L}$。对于 $(\mathrm{k}\ \beta) = (0,\theta)$，我们定义 $\mathcal{M}(0,\theta) = \varnothing$。

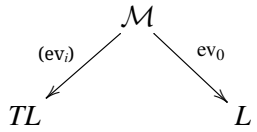
集合 $\mathcal{M}(k) = \coprod_{\beta\in S_L} \mathcal{M}(k\ \beta)$，并将 $\mathcal{M}(k)$ 中的一个元素称为类型为 k 的 J-全纯稳定圆盘。

令 T 为自由幺半群单子（2.1）。于是有如下结论：

命题 2.12。模空间系统

$$\mathcal{M} = \coprod_{k\geq 0} \mathcal{M}(k) = \coprod_{k\geq 0,\beta\in S_L} \mathcal{M}(k,\beta) \tag{2.11}$$

以及它们的求值映射



在 L 上构成一个 S_L-带标签的拓扑多范畴

证明。 标记映射 $|\cdot|$如定义 2.7所述，通过要求 $|\mathbf{u}| = \beta$对每个 $\mathbf{u} \in \mathcal{M}(k\ \beta)$ 来定义。单位映射 $\iota : L \to \mathcal{M}(1,\theta) \hookrightarrow \mathcal{M}$ 就是由包含给出的。正如命题 2.7 的证明中关于（ 2.8 ）所讨论的，建立乘法映射 γ 等价于指定满足所需公理的偏复合映射：

$$\circ_i = \circ_i^{\beta_1,\beta_2} : \mathcal{M}(k_1,\beta_1) \times_{L,(\mathrm{ev}_i,\mathrm{ev}_0)} \mathcal{M}(k_2,\beta_2) \to \mathcal{M}(k_1+k_2-1,\beta_1+\beta_2) \tag{2.12}$$

事实上，如果 $(k1,\beta_1)$ 或 $(k2,\beta_2)$ 是 $(1,\theta)$，那么它就退化为恒等映射。在其他情况下，给定 $[\mathbf{u}_1] = [\Sigma_1, z_0, z1, \ldots, z^{k_1}, u_1] \in \mathcal{M}(k1,\beta_1)$ 和 $[\mathbf{u}_1] = [\Sigma_2, w_0, w1, \ldots, w^{k_2}, u_2] \in \mathcal{M}(k2,\beta_2)$，我们定义

$$[\mathbf{u}_1] \circ_i [\mathbf{u}_2] = [\Sigma, y_0, y_1, \ldots, y_{k_1+k_2-1}, u]$$

如下。结点曲面 Σ 由将 $\mathrm{z}_i \in \Sigma_1$ 与 $\mathrm{w}_0 \in \Sigma_2$粘合而得，标记点为 $(\mathrm{y}_0, \mathrm{y1}, \ldots, \mathrm{y}_{k_1+k_2-1}) = (\mathrm{z0}, \ldots, \mathrm{z}_{i-1}, \mathrm{w1}, \ldots, \mathrm{w}^{k_2}, \mathrm{z}_{i+1}, \ldots, \mathrm{z}^{k_1})$。映射 $\mathrm{u} : \Sigma \to \mathrm{X}$ 的定义是令 $\mathrm{u}|_{\Sigma_1} = \mathrm{u}_1$ 且 $\mathrm{u}|_{\Sigma_2} = \mathrm{u}_2$；这是良定义的，因为 $\mathrm{u}_1(\mathrm{z}_i) = \mathrm{ev}_i(\mathrm{u}_1) = \mathrm{ev}_0(\mathrm{u}_2) = \mathrm{u}_2(\mathrm{w}_0)$。$\mathrm{u}$ 的等价类就是 u_1和 u_2,的等价类之和，即 $\beta_1 + \beta_2$。由构造可直接验证，结合性公理 (2.9) 成立。最后，这是一个拓扑多范畴，因为已知每个 $\mathcal{M}(\mathrm{k}\ \beta)$ 都是紧致的豪斯多夫拓扑空间 [12, 定理 7.1.43], ，且求值映射 ev_0,ev_i 是连续的 [12, 命题 7.1.1]。 □

3 fc-多范畴

fc-多范畴是 Leinster [22], 提出的一个通用框架，可以将其视为一种“二维多范畴”，在这种框架中，不仅要记录对象和多输入运算，还要记录两种不同类型的态射，以及联系它们的 2-胞腔。“**fc**”中的字母代表“自由范畴”（free category）。它可以同时涵盖普通范畴、多范畴、双范畴、幺半范畴、双重范畴等。因此，**fc**-多范畴提供了一个便捷的统一环境，使我们能够并列研究许多表面上不同的范畴构造。此外，本文的目标之一是探索其拓扑与几何实现的潜力。

---

* 这涉及所谓的 -稳定性，即辛几何中伪全纯映射的稳定性。我们需要假设$k + 1 \geq 3$ 个标记点 s
以确保 常值映射的稳定性。

[3.1] 有向图与函子 **fc**

令 $\mathcal{D}$ 为有向图范畴（有时也称为箭图范畴），它由函子范畴 $\mathcal{D} = [\mathbb{H}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$ 定义，其中 $\mathbb{H}$ 是一个具有两个对象和两个指定态射 $\{0 \rightrightarrows 1\}$ 的范畴。具体而言， $\mathcal{D}$ 中的一个对象（称为有向图）是一个元组 $(\mathrm{V}, \mathrm{E}, \mathrm{s}, \mathrm{t})$，由一个顶点集合 V 和一个有向边集合 E 组成，并配备两个函数 $\mathrm{s}, \mathrm{t} : \mathrm{E} \to \mathrm{V}$。给定两个顶点 $\mathrm{v}, \mathrm{v}' \in \mathrm{V}$，我们将从 v 到 v′的边的集合记为 $\mathrm{E}(\mathrm{v}, \mathrm{v}') = \{\mathrm{e} \in \mathrm{E} \mid \mathrm{s}(\mathrm{e}) = \mathrm{v}, \mathrm{t}(\mathrm{e}) = \mathrm{v}'\}$。

稍微滥用一下记号，我们常将有向图 (V, E, s, t) 写作 E ；因此，视上下文而定，E 可以表示图本身，也可以表示其边集。

E 的有向子图是一个四元组 $\mathrm{E}' = (\mathrm{V}', \mathrm{E}', \mathrm{s}|_{E'}, \mathrm{t}|_{E'})$，其中 $\mathrm{V}' \subseteq \mathrm{V}$、$\mathrm{E}' \subseteq \mathrm{E}$，且 $\mathrm{s}(\mathrm{E}')$、$\mathrm{t}(\mathrm{E}') \subseteq \mathrm{V}'$。两个有向图 $\mathrm{E} = (\mathrm{V}, \mathrm{E}, \mathrm{s}, \mathrm{t})$ 和 $\mathrm{E}' = (\mathrm{V}', \mathrm{E}', \mathrm{s}', \mathrm{t}')$ 之间的态射 $\boldsymbol{\phi} = (\bar{\phi}, \phi) : \mathrm{E} \to \mathrm{E}'$ 由两个连续映射 $\bar{\phi} : \mathrm{V} \to \mathrm{V}'$、 $\phi : \mathrm{E} \to \mathrm{E}'$ 构成，并且源映射和目标映射保持不变，即 $\bar{\phi} \circ \mathrm{s} = \mathrm{s}' \circ \phi$ 且 $\bar{\phi} \circ \mathrm{t} = \mathrm{t}' \circ \phi$。复合和恒等态射以显然的方式按分量定义。

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\ \phi\ } & E' \\ {\scriptstyle s}\downarrow\downarrow{\scriptstyle t} & & {\scriptstyle s'}\downarrow\downarrow{\scriptstyle t'} \\ V & \xrightarrow{\ \bar{\phi}\ } & V' \end{array}$$

令 **Cat** 表示小范畴范畴。每个范畴都可以看作一个有向图，但反过来一般不成立。存在一个函子 $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbf{Cat}$ ，称为路径范畴函子，它是遗忘函子 $U : \mathbf{Cat} \to \mathcal{D}$ 的左伴随。具体来说，对于有向图 $E = (V, E, s, t)$，范畴 $F(E)$ 的对象是 V 中的顶点，而 $F(E)$ 中从 $x \to y$ 出发的态射是一条（可以为空的）有限可复合路径

$$\cdot \xleftarrow{e_n} \cdot \longleftarrow \cdot \longleftarrow \cdot \xleftarrow{e_1} \cdot$$

记作 $(e1, \ldots, e_n)$。当 $n = 0$ 时，我们得到空路径 $x \to x$，它是恒等态射。路径的复合就是路径的拼接。对于有向图的态射 $\boldsymbol{\phi} : E \to E'$，定义 $F(\boldsymbol{\phi}) : F(E) \longrightarrow F(E')$ ：在对象上将 $x \mapsto \phi$ 映为 (x)，在态射上将路径 $(e1, \ldots, e_n)$ 映为路径 $(\phi(e_1) \ldots, \phi(e_n))$。

定义

$$\mathbf{fc} := U \circ F : \mathcal{D} \to \mathcal{D} \tag{3.1}$$

具体而言，给定一个有向图 $E = (V, E, s, t)$，新的有向图 $\mathbf{fc}(E)$，记作

$$E^* = (V, E^*, s^*, t^*),$$

定义如下：顶点集 V 保持不变。边集 E^* 是原有向图 E 中所有有限可复合路径构成的集合，也就是说，

$$E^* = \mathbf{fc}(E) = \bigsqcup_{n \geq 0} \{(e_1, \ldots, e_n) \in E^{\times n} \mid t(e_i) = s(e_{i+1})\} \tag{3.2}$$

对于路径 $\vec{e} = (e1, \ldots, e_n)$，令 $s^*(\vec{e}) := s(e_1)$，且 $t^*(\vec{e}) := t(e_n)$。对于有向图的态射 $\boldsymbol{\phi} = (\bar{\phi}, \phi) : E \to E'$，我们定义新的有向图态射 $\mathbf{fc}(\boldsymbol{\phi}) : \mathbf{fc}(E) \to \mathbf{fc}(E')$，定义如下：

$$\overline{\mathbf{fc}(\boldsymbol{\phi})} := \bar{\phi}, \qquad \mathbf{fc}(\boldsymbol{\phi})(e_1, \ldots, e_n) := \big(\phi(e_1), \ldots, \phi_1(e_n)\big).$$

对于一族可复合的边串

$$\vec{e}_i = (e_{i1}, \ldots, e_{in_i}) \in E^* \quad (1 \leq i \leq k),$$

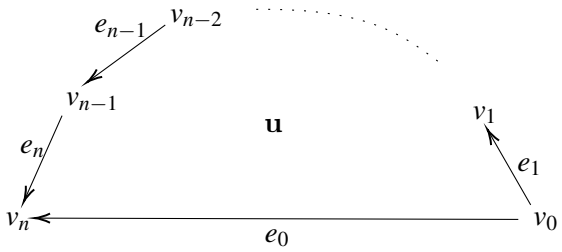


图 *3*：垂直离散的 **fc**-多范畴中的一个 *2*-胞腔

对于 $t^*(\vec{}e_i) = t(e^{in}_i) = s(e_{i+1,1}) = s^*(\vec{}e_{i+1})$，我们将它们在 E^* 中的拼接记作

$$\vec{e}_1 * \cdots * \vec{e}_k = (e_{11}, \ldots, e_{1n_1}, \ldots, e_{k1}, \ldots, e_{kn_k}).$$

也可以将拼接视为一个映射

$$E^* \times_V E^* \times_V \cdots \times_V E^* \to E^* \tag{3.3}$$

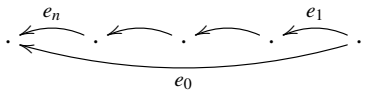
定义 3.1. 有向图 $E = (V,E,s,t)$ 的一个轮廓环定义为一对 r

$$(\vec{e}; e_0) = ((e_1, \ldots, e_n); e_0) \in E^* \times E$$

其中 $\vec{}e = (e1, \ldots, en) \in E^*$，$e_0 \in E$，且端点匹配，具体来说

$$s^*(\vec{e}) = s(e_0) \qquad \text{and} \qquad t^*(\vec{e}) = t(e_0)$$

换句话说，它看起来像



在图中。将 (V,E) 中所有轮廓环的集合记为 $\mathcal{P}_E$。此外，我们称 $(e;e)$ 为 e 处的恒等剖面环。上面也允许特殊情况 $n = 0$，即 $(\varnothing;e_0)$，其中 $s(e_0) = t(e_0)$，同样是一个轮廓环，并表示为一个有一个顶点和一条边的树：



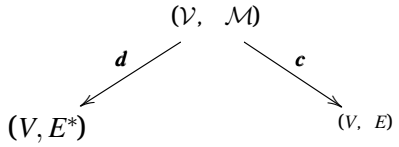
[3.2] **fc-**多范畴的具体描述

众所周知，**fc** 是一个笛卡尔单子（例如参见 [24,第 5 节。1]），因此，关于具有笛卡尔单子 T 的 T-范畴的一般定义（定义 2.3）适用。也就是说，一个 **fc-**多范畴定义为如下元组的数据

$$\mathscr{M} = (V, E, \mathcal{V}, \mathcal{M}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{\iota}, \boldsymbol{\gamma}) \tag{3.4}$$

由两个有向图 $\mathrm{E} = (\mathrm{V}, \mathrm{E}, \mathrm{s}, \mathrm{t})$、$\mathcal{M} = (\mathcal{V}, \mathcal{M}, \hat{}\mathrm{s}, \hat{}\mathrm{t})$ 以及有向图图式 $\mathrm{E}^* \xleftarrow{\mathrm{ddd}} \mathcal{M} \xrightarrow{\mathrm{ccc}} \mathrm{E}$ 组成，其中 $\mathrm{E}^* = \mathrm{fc}(\mathrm{E})$，而 $\mathrm{ddd} = (\bar{}\mathrm{d}, \mathrm{d})$、$\mathrm{ccc} = (\bar{}\mathrm{c}, \mathrm{c})$ 是有向图的映射。这些数据满足定义 2.3 中所述的条件。此外，还有相应的单位映射和乘法映射 $\boldsymbol{\iota} = (\bar{\iota}, \iota) : (\mathrm{V}, \mathrm{E}) \to (\mathcal{V}, \mathcal{M})$ 以及 $\boldsymbol{\gamma} = (\bar{\gamma}, \gamma) : (\mathcal{V}, \mathcal{M}) \circ (\mathcal{V}, \mathcal{M}) \to (\mathcal{V}, \mathcal{M})$，它们满足结合律与单位公理。我们也称 fc-多范畴 $\mathscr{M}$ 是位于 E 之上的，而 $\mathrm{E} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$ 是 $\mathscr{M}$ 的底层有向图。

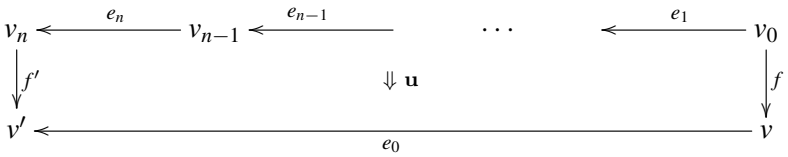
举例来说，我们有如下图表：



接下来 莱斯特的著作 [22,24], 我们可以按如下方式展开 fc-多范畴的数据 ：

• 首先，V 中的元素称为对象或*0*-胞腔；E 中的元素称为水平 *1*-胞腔； $\mathcal{V}$ 中的元素称为垂直*1*-胞腔； $\mathcal{M}$ 中的元素称为*2*-胞腔。具体而言，$\mathcal{M}$ 中的一个元素可表示为*

(3.5)



其中，$v0,\ldots,vn,v,v' \in V$是 0-胞腔，$e1,\ldots,en,e_0 \in E$是水平 1-胞腔，$f,f' \in \mathcal{V}$是垂直1-胞腔，而$\mathbf{u} \in \mathcal{M}$是一个 2-胞腔。注意，边串 $\vec{e} = (e1,\ldots,en) \in E^*$。

• 对于源映射和目标映射 s, t : E $\to$ V 和 s*, t* : E* $\to$ V , 有 s(e0) = v, t(e0) = v′; s*($\vec{}$e) = v0 , t*($\vec{}$e) = vn ; $\hat{}$s(u) = f , $\hat{}$t(u) = f ′, 见矩形 (3.5)。

• 顶点的映射 $\bar{}$d $\bar{}$c 给出图表 V d$\leftarrow$ $\mathcal{V}$ $\bar{}$c$\to$V。$\bar{}$它们满足 (3.5) 中的 $\bar{}$d(f) = v0 和 $\bar{}$c(f) = v。此外，复合和恒等函数 $\bar{\gamma},\bar{\iota}$ （ $\boldsymbol{\gamma}$ 和 $\boldsymbol{\iota}$的顶点部分）使 0-胞腔和垂直 1-胞腔构成一个范畴（V $\mathcal{V}$）。

定义 3.2。 一个 fc-多范畴 $\mathscr{M}$ = （V、E $\mathcal{V}$， $\mathcal{M}$）称为 垂直离散的 , 如果所有垂直 1-$\bar{}$胞腔都是恒等态射 [24, 例 5.1。4]也就是说，由 V $\mathcal{V}$、d $\bar{}c$ 构成的范畴是离散范畴，因此 $V \equiv \mathcal{V}$。由于不存在垂直边，我们可以像图 3.5那样绘制图表（3）。

• 边的映射 d、c 给出图表 E* d$\leftarrow$ $\mathcal{M}$ c$\to$ E。在矩形 (3.5) 中，我们有 d(u) =(e1, e2, . . . , en) $\in$ E* 以及 c(u) = $e_0 \in$ E。若记 $\mathcal{M}(\vec{}e; e0) = \{u \in \mathcal{M} \mid d(u) = \vec{}e , c(u) = e_0\}$为 $\mathcal{M}$ 在 ($\vec{}$e, e0) 上的纤维，则 $\mathcal{M}$ 容许分解 $\mathcal{M} = \coprod_{e_0 \in E} \coprod_{\vec{}e \in E_*} \mathcal{M}(\vec{}e; e0)$。对于垂直离散 fc-多范畴，它可进一步细化为

(3.6)
$$\mathcal{M} = \coprod_{(\vec{e};e_0)\in\mathcal{P}_E} \mathcal{M}(\vec{e};e_0)$$

其中 $\mathcal{P}_E$ 是图 (*V*,*E*) 中轮廓环的集合；见定义 3.1。

• 展开定义 2.3 中复合图 $\mathcal{M} \circ \mathcal{M}$ 的定义（对 T = fc 而言）， $\mathcal{M} \circ \mathcal{M}$ 的一条边可以描述为一个元组 (u; u1, . . . , un)，其中 u $\in \mathcal{M}(\vec{}e; e0)$ 是一个 2-胞腔，且$\vec{}$e = (e1, . . . , en) $\in$ E*，$e_0 \in$ E；对于每个 i = 1, . . . , n，都有一个 2-胞腔 ui $\in \mathcal{M}(\vec{}ei; ei)$，其中 ei $\in$ E* 是某个字，使得 c(ui) = ei 与 u 的第 i 个输入相匹配。为了描述 $\mathcal{M}\circ\mathcal{M}$的顶点集，回想一下， $\mathcal{M}$ 的顶点是 $\mathcal{V}$中的垂直 1-胞腔。因此，$\mathcal{M} \circ \mathcal{M}$ 的一个顶点是可复合的垂直1-胞腔的有序对 (f1, f2) $\in \mathcal{V} \times$V $\mathcal{V}$, 也就是说， $\bar{}$c(g1) = d(g2), 表示拼接矩形的左、右垂直边界。据此，我们可以将乘法 $\boldsymbol{\gamma} = (\bar{\gamma},\gamma) : \mathcal{M} \circ \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 描述如下：

---

* 为了保持兼容 性与辛几何中伪全纯曲线的标准定向，我们在 (3.5) 中采用箭头与……方向相反 Leinster 的约定 [24]。如有可能造成的混淆，我们深表歉意。

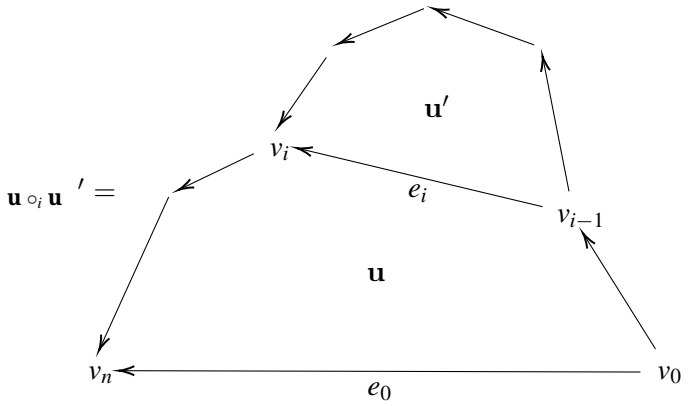


图 4：2-胞腔 u 与 u′ 的部分复合

如下：其顶点部分 $\bar{\gamma}$ 就是垂直 1-胞腔范畴 $(V\ \mathcal{V})$ 中的复合，而其边部分定义为

$$\gamma:\ \mathcal{M}(\vec{e};\, e_0)\ \times\ \bigtimes_{i=1}^{n} \mathcal{M}(\vec{e}_i;\, e_i)\ \longrightarrow\ \mathcal{M}(\vec{e}_1 * \cdots * \vec{e}_n;\, e_0), \qquad (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}) \mapsto \mathbf{u} \circ (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$$

其中 $\bar{}\mathrm{e}\ = (\mathrm{e}1, \ldots, \mathrm{e}_n)\ \in \mathrm{E}^*$ 和 $\bar{}\mathrm{e}_1 * \cdots * \bar{}\mathrm{e}_n \in \mathrm{E}^*$ 是拼接（3.3）。另请参见 [22, 第2] 页和 [24, (5:2)]，以查看更详细的图示。单位 $\boldsymbol{\iota} = (\bar{\iota}, \iota)$ 的边部分 ι 将每个水平 1-胞腔 e 映射为一个恒等 2-胞腔

$$\mathrm{id}_e = \iota(e)$$

$\bar{}$满足 $d(\mathrm{id}_e)\ = \bar{}c(\mathrm{id}_e)\ = e$。这些映射都需要满足相应的结合律和单位律。粗略地说，由 2-胞腔粘贴而成、具有矩形边界的图表，应当有良定义的复合结果。此外，2-胞腔的复合也可以等价地用以下形式的某些部分复合来表示

$$\circ_i : \mathcal{M}(e_1, \ldots, e_n; e_0) \times \mathcal{M}(e'_1, \ldots, e'_m; e_i) \to \mathcal{M}(e_1, \ldots, e_{i-1}, e'_1, \ldots, e'_m, e_{i+1}, \ldots, e_n; e_0)$$

其中

$$\mathbf{u} \circ_i \mathbf{u}' := \mathbf{u} \circ (\mathrm{id}_{e_1}, \ldots, \mathbf{u}', \ldots, \mathrm{id}_{e_n})$$

对于垂直离散的 **fc**-多范畴，这个部分复合 $\circ_i$ 可如图 4所示。对于特殊情形，即 $\mathbf{u}'$ 是一个空输入的 2-胞腔（参见定义3.1），部分复合如图5所示。 *

例 ***3.3***。回忆一下，（非对称）operad 是只有一个对象的多范畴。此外，根据 [24, 例 5.1.6 和 5.1.7]，，多范畴 M 可视为如下的（垂直离散）**fc**-多范畴 ΣM。我们称 ΣM 为 M 的悬挂M。它只有一个 0-胞腔和一个垂直 1-胞腔；其水平 1-胞腔是 M 的对象。这样，给定 M 的对象 $c1$、……、c_n、c_0，从 $(c1$、……、$c_n)$ 到 c 的多范畴复合 θ 可视为 ΣM 中的一个 2-胞腔。

例 ***3.4***。对于有向图 $E\ = (V,\ E,\ s,\ t)$，令 $\mathcal{P}_E$ 为定义3.1中所述的轮廓环集合。那么，元组 $(V,\ E\ \mathcal{P}_E$ 构成一个垂直离散的 **fc**-多范畴。事实上，0-胞腔是顶点 $v\ \in V$；水平 1-胞腔是边 $e\ \in E$。2-胞腔是所有 $\mathcal{P}_E$ 轮廓环组成的集合

* 直观地说，这些pict ures很可能会让我们想起（弯曲的）拉格朗日子流形研究中阻碍性伪全纯圆盘的冒泡 Floer理论与Fuk aya范畴。

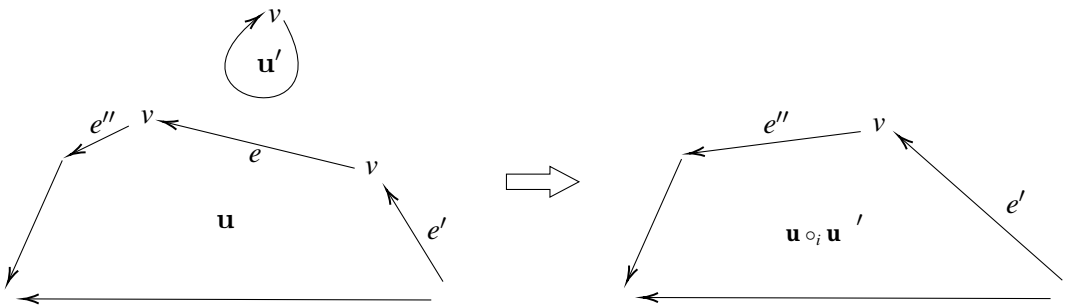


图 5：对空输入进行部分复合，$\mathbf{u}'$ 会解析水平 1-胞腔输入并移除该槽位。

。（因此，填充指定矩形 (3.5) 的 2-胞腔集合是单元素集。）单位映射$\boldsymbol{\iota} = (\bar{\iota},\ \iota) : (V,\ E) \to (V\ \mathcal{P}_E)$ 定义为 $\bar{\iota} = \mathrm{id}_V$ 以及 $\iota(e) = (e;\ e) \in \mathcal{P}_E$。垂直 1-胞腔的乘法映射显而易见。2-胞腔的乘法映射 γ 由两个轮廓环的（部分）复合给出（另见图4）：

$$\Big((e_1,\dots,e_n;e_0)\ ,\ (e'_1,\dots,e'_m;e_i)\Big) \mapsto (e_1,\dots,e_{i-1},e'_1,\dots,e'_m,e_{i+1},\dots,e;e_0).$$

***[3.3] fc-*多范畴的映射与因子闭性**

设 $\mathscr{M} = (V,\ E\ \mathcal{V},\ \mathcal{M},\ ddd,\ ccc\ \boldsymbol{\iota},\ \boldsymbol{\gamma})$ 和 $\mathscr{M}' = (V',\ E',\ \mathcal{V}',\ \mathcal{M}',\ ddd',\ ccc',\ \boldsymbol{\iota}',\ \boldsymbol{\gamma}')$ 是 fc-多范畴，其中

$$E = (V,E,s,t), \quad \mathbf{fc}(E) = (V,E^*,s^*,t^*), \quad \mathcal{M} = (\mathcal{V},\mathcal{M},\hat{s},\hat{t}),$$

是有向图，$\mathscr{M}'$ 也类似。

定义 3.5。一个 fc-多范畴的有向图映射

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_E,\alpha) = (\alpha_V,\alpha_E,\alpha_{\mathcal{V}},\alpha) :\ \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{M}'$$

由有向图映射组成（这里我们稍微滥用了记号）

$$\alpha_E = (\alpha_V,\alpha_E) :\ (V,E) \to (V',E'), \qquad \alpha = (\alpha_{\mathcal{V}},\alpha) :\ (\mathcal{V},\mathcal{M}) \to (\mathcal{V}',\mathcal{M}'),$$

使得以下三个相容条件成立。

(1) $\alpha \circ \boldsymbol{\iota} = \boldsymbol{\iota}' \circ \alpha_E$. (2) 要求 $ccc' \circ \alpha = \alpha_E \circ ccc$ 和 $ddd' \circ \alpha = \mathbf{fc}(\alpha_E)\ \circ ddd$，其中 $\mathbf{fc}(\alpha_E) : \mathbf{fc}(E) \to \mathbf{fc}(E')$ 是将 $(e1,\dots,e_n) \in E^*$ 映到 $(\alpha_E(e_1)\dots,\alpha_E(e_n)) \in (E')^*$ 的诱导有向图映射。(3) 令 $\alpha \circ \alpha :\ \mathcal{M} \circ \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}' \circ \mathcal{M}'$ 表示在复合图上诱导的映射。于是要求 $\alpha \circ \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}' \circ (\alpha \circ \alpha)$，也就是说，以下图表可交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} \circ \mathcal{M} & \xrightarrow{\alpha\circ\alpha} & \mathcal{M}' \circ \mathcal{M}' \\ \downarrow{\scriptstyle \boldsymbol{\gamma}} & & \downarrow{\scriptstyle \boldsymbol{\gamma}'} \\ \mathcal{M} & \xrightarrow[\alpha]{} & \mathcal{M}', \end{array}$$

回想一下，$\mathcal{M} \circ \mathcal{M}$ 的一个元素可由粘贴数据 $(\mathrm{u};\ \mathrm{u1},\dots,\mathrm{u}_n)$ 表示，其中 $\mathrm{u} \in \mathcal{M}(\vec{\ }\mathrm{e};\ \mathrm{e}_0)$，且 $\vec{\ }\mathrm{e} = (\mathrm{e1},\dots,\mathrm{e}_n) \in \mathrm{E}^*$，而 $\mathrm{u}_i \in \mathcal{M}(\vec{\ }\mathrm{e}_i;\ \mathrm{e}_i)$ 对于 $1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{n}$ 成立。上面的第三个条件恰好意味着，对复合2-胞应用 α，等于先分别对每个组成2-胞应用 α，再进行复合；换言之，$\alpha(\gamma(\mathrm{u1},\dots,\mathrm{u}_n,\mathrm{u})) = \gamma'(\alpha(\mathrm{u}_1)\dots,\alpha(\mathrm{u}_n)\ \alpha(\mathrm{u}))$。等价地，

对于部分复合 $\circ_i$，可得

$$\alpha(\mathbf{u}\circ_i \mathbf{u}') = \alpha(\mathbf{u})\circ_i \alpha(\mathbf{u}').$$

在例3.3的情境中，可以验证，多范畴的映射$M \to M'$（特别是 operad 的映射）等价于相应**fc**-多范畴之间的映射 $\Sigma M \to \Sigma M'$。

定义3.6。 $\mathscr{M}$ 的一个**fc**-子多范畴是指由以下子集构成的数据

$$V_0 \subset V, \qquad E_0 \subset E, \qquad \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}, \qquad \mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M},$$

使得限制结构映射将 $\mathscr{M}_0 := (V_0, E0, \mathcal{V}_0, \mathcal{M}_0)$ 构成一个**fc**-多范畴，并且包含映射汇集成一个**fc**-多范畴映射 $\mathscr{M}_0 \to \mathscr{M}$。我们称 $\mathscr{M}$ 中的**fc**-子范畴 $\mathscr{M}_0$在 $\mathscr{M}$ 中是因子封闭的，如果对于满足部分复合$\mathbf{u}\circ_i \mathbf{u}'$ 有定义的 2-胞腔$\mathbf{u} \in \mathcal{M}(e1, \ldots, en; e_0)$ 和$\mathbf{u}' \in \mathcal{M}(e'_1, \ldots, e'_m; e_i)$，有

$$\mathbf{u}\circ_i \mathbf{u}' \in \mathcal{M}_0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{u} \in \mathcal{M}_0 \text{ and } \mathbf{u}' \in \mathcal{M}_0.$$

定义 3.7。 $\mathscr{M}_0 =$ （**fc**-子多范畴 $\mathscr{M}_0 = (V_0, E0, \mathcal{V}_0, \mathcal{M}_0)$ of $\mathscr{M}$ is called 满 if the following hold:

(1) 对任意v，$w \in V_0$,， $\mathcal{V}_0$中从v到w的垂直 1-胞腔集合与 $\mathcal{V}$ 中从v 到w的垂直 1-胞腔集合相同。换言之，$(V0, \mathcal{V}_0)$ 是竖直范畴 $(V\ \mathcal{V})$ 在对象集 V_0 上的满子范畴。

(2) 对于每一个 $(\vec{e}; e') \in E_0^* \times E_0$, $\mathcal{M}_0(\vec{e}; e') = \{\mathbf{u} \in \mathcal{M}(\vec{e}; e') \mid \hat{s}(\mathbf{u}), \hat{t}(\mathbf{u}) \in \mathcal{V}_0\}$. I$^{\text{n 个 par}}$ ticular, if $\mathscr{M}$ i

垂直离散，那么它指出，对于每个轮廓环（$\vec{}$e, e′），都有 $\mathcal{M}_0(\vec{}e; e') = \mathcal{M}(\vec{}e; e')$。注意，$E_0 = (V_0, E_0)$ 是 E $= (V, E)$ 的有向子图，这意味着 $V_0 \subset V$，$E_0 \subset E$，且 $s(E_0)$、$t(E_0) \subset V_0$。接下来，我们称 $\mathscr{M}_0$ 为 $\mathscr{M}$ 在 E_0 上的满 fc-子多范畴。

定义 3.8。若有向子图 $E_0 = (V_0, E_0)$ 属于 $E = (V, E)$，且满足以下条件，则称其在 E 中端点闭：对于 E 中任意轮廓环（$\vec{}$e; e′） $\in E^* \times E$（定义 3.1），若 $\vec{}e \in E_0^*$，则 $e' \in E_{0}$。

为后续使用，我们引入一个判定 fc-子多范畴因子闭性的充分判据。设 $\mathscr{M} = (V,\ E\ \mathcal{M},\ d,\ c\ \iota,\ \gamma)$ 是一个垂直离散的 fc- 多范畴。设 $E_0 = (V_0, E_0)$ 是 $E = (V,\ E)$ 的一个有向子图，并设 $\mathscr{M}_0 \subset \mathscr{M}$ 是由 E_0 上的满 fc-子多范畴。

命题 3.9。 若 E_0 在 E 中端点闭，则 $\mathscr{M}_0$ 在 $\mathscr{M}$ 中因子封闭。

证明。设 $u \in \mathcal{M}(e1, \ldots, e_n; e_0)$ 和 $u' \in \mathcal{M}(e'_1, \ldots, e'_m; e_i)$ 满足 $u \circ_i u'$ 有定义且属于 $\mathcal{M}_0$。我们的目标是证明 u 和 u′ 也属于 $\mathcal{M}_0$。应用陪域映射和定义域映射，得到 $e_0 = c(u \circ_i u') \in E_0$，以及 $d(u \circ_i u') = (e1, \ldots, e_{i-1}, e'_1, \ldots, e'_m, e_{i+1}, \ldots, e_n) \in E_0^*$。特别地，$(e'_1, \ldots, e'_m) \in E_0^*$，因此令

$$v := s^*(e'_1, \ldots, e'_m), \qquad w := t^*(e'_1, \ldots, e'_m),$$

我们有 v、w $\in V_0$，且从 v 到 w 的边集 $E_0^*(v, w)$ 非空。由于可以定义 $u' \in \mathcal{M}(e'_1, \ldots, e'_m; e_i)$ 和 $u \circ_i u'$，边 e_i 的端点为 $s(e_i) = v$ 和 $t(e_i) = w$。根据 E_0, 的端点闭合条件，我们有 $e_i \in E_0$。因此 $d(u) = (e1, \ldots, e_n) \in E_0^*$，且 $c(u) = e_0 \in E_0$,，从而 $u \in \mathcal{M}_0$。同样，$d(u') = (e'_1, \ldots, e'_m) \in E_0^*$，且 $c(u') = e_i \in E_0$,，从而 $u' \in \mathcal{M}_0$。这证明了 $\mathscr{M}_0$是因子封闭的。 □

[3.4] 按 **fc**-多范畴进行标记

类似于第 2.4 节中的思想，我们也可以在 **fc**-多范畴的语境中引入标记。

定义 3.10。令 $\mathbb{S}$ 为一个固定的 fc-多范畴。若一个 fc-多范畴 $\mathscr{M} = (V, E, \mathcal{V}, \mathcal{M})$ 配备了一个 fc-多范畴的映射 $|\cdot| : \mathscr{M} \longrightarrow \mathbb{S}$，且其在 0-胞腔、垂直 1-胞腔和水平 1-胞腔上的分量均为恒等映射，则称其为$\mathbb{S}$-带标签的。

换句话说，$|\cdot|$ 在V、$\mathcal{V}$和E上的作用是平凡的，只记录 $\mathcal{M}$ 中每个 2-胞腔在$\mathbb{S}$中的标签。直观地说，通过考虑映射 $|\cdot|$的纤维，我们可以对 $\mathcal{M}$中的 2-胞腔作更细致的分解。事实上，位于$(\vec{e}, e')$之上的 2-胞腔集合 $\mathcal{M}(\vec{e};e') \in E^* \times E$ 还可以进一步分解为

$$\mathcal{M}(\vec{e}; e'; \beta) = \{\mathbf{u} \in \mathcal{M}(\vec{e}; e') \mid |\mathbf{u}| = \beta\}$$

其中，β遍历 $\mathbb{S}$中相应的 2-胞腔集合 $\mathbb{S}(\vec{e};e')$。注意，只有少数 $\mathcal{M}(\vec{e};e'; \beta)$非空。我们不允许从非空集合映射到空集，因此 $\mathbb{S}(\vec{e};e') = \varnothing$ 意味着$\mathcal{M}(\vec{e}; e') = \varnothing$。然而，当 $\mathcal{M}(\vec{e};e') = \varnothing$时，$\mathbb{S}(\vec{e};e') \neq \varnothing$ 也有可能。

例 ***3.11.*** 上述概念是定义 2.7 的推广。令 $(S, +, \theta)$ 为一个幺半群，其单位元记作 θ。令 $E = (V, E, s, t)$ 为一个固定的有向图。我们可以构造一个垂直离散的 fc-多范畴

$$S_E := \left(V\ ,\ E\ ,\ \bigsqcup_{(\vec{e};e')\ \text{profile-loop}} S \right)$$

其 0-胞腔集为 V，水平 1-胞腔集为 E，而其 2-胞腔统一由 S 标记，具体而言，对于每个轮廓环 $(\vec{e}; e') \in E^* \times E$（定义 3.1），我们令 $S_E(\vec{e}; e') := S$；除此之外，$S_E(\vec{e}; e') := \varnothing$。对于每个水平 1-胞腔 $e \in E$，相应的恒等 2-胞腔 id_e in $S_E(e; e) = S$ 定义为幺半群 S 的单位元，即 $\mathrm{id}_e := \theta \in S$。部分复合映射 $\circ_i : S_E(e1, \ldots, e_n; e') \times S_E(f1, \ldots, f_m; e_i) \to S_E(e1, \ldots, e_{i-1}, f1, \ldots, f_m, e_{i+1}, \ldots, e_n; e')$ 定义为 $\beta \circ_i \beta' := \beta + \beta'$。结合律与单位公理归结为 $+$ 的结合律，以及 θ 是 S 的单位元这一事实。当 E 是平凡有向图时，S_E 可自然地识别为由 $S(n)\}_{n\geq 0}$ 给出的（非对称）operad $\{$，其中对每个 $n \geq 0$，$S(n) := S$，运算子单位元为 $\theta \in S(1) = S$。当 E 是仅含一个顶点的有向图时，S_E 可类似地识别为一个多范畴，其对象集为边集。根据例 3.3，operad 和多范畴都是 fc- 多范畴的特例。在这两种情形下，S_E- 标记 fc- 多范畴的概念归结为定义 2.7 中 S-标记运算子/多范畴的概念。

例 ***3.12***。我们还考虑例 3.11 的一个变体。回顾一下，$(\varnothing;e')$ 也被视为一个轮廓环（定义3.1）。我们来引入

$$S_E^{red} := \left(V\ ,\ E\ ,\ \bigsqcup_{(\vec{e};e')\ ,\ \vec{e}\neq\varnothing} S \sqcup \bigsqcup_{(\varnothing;e')} S \setminus \{\theta\} \right)$$

通过移除 $S_E(\varnothing; e')$ 中对所有 $e' \in E$ 的单位元 θ 得到。由于复合映射 $\circ_i$ 永远不会在 $S_E(\varnothing;e')$ 中产生输出，因此可以验证 S_{redE} 也是一个 fc-多范畴。

例 3.13. 每个 fc-多范畴 $\mathscr{M} = (V, E, \mathcal{V}, \mathcal{M})$ 都由将每个非空的 $\mathcal{M}(\vec{e}; e')$ 坍缩为一个点所得到的 fc-多范畴带标签。事实上，我们定义 $\mathbb{S}$，使得对每一对 $(\vec{e}; e') \in E^* \times E$，只要 $\mathcal{M}(\vec{e}; e')$ 非空，集合 $\mathbb{S}(\vec{e}; e')$ 就是单元素集；而只要 $\mathcal{M}(\vec{e}; e')$ 为空，该集合就为空。特别地，每个垂直离散 fc-多范畴 $\mathscr{M}$都自然地由例 3.11 中定义的 $\mathbf{0}_E$ 带标签，其中 S 是平凡幺半群，而 $E = (V, E)$ 是 $\mathscr{M}$ 的 0- 胞腔与水平 1- 胞腔的底层有向图。此外，若 $\mathcal{M}(\varnothing; e')$ 恒为空，则 $\mathscr{M}$ 由

$\mathbf{0}_E^{red}$ (例3.12)。

4 伪全纯多边形的模空间作为 fc-多范畴

让我们回到第 2.5 节的语境。如果 $\iota : L \to X$ 是拉格朗日子流形浸入，则更为微妙；参见 [7]。在这种情形下，边界落在 $\iota(L)$ 上的伪全纯圆盘更恰当地称为伪全纯多边形，因为自交点可能成为边界上的“角点”。尽管如此，若语境清楚，我们有时会互换使用这两个术语。在此设定下，我们假设 ι 具有干净自交：即，我们要求对角线

$$\Delta_L = \{(p,p) \mid p \in L\}$$

在纤维积中

$$L \times_X L = \{(p,q) \in L \times L \mid \iota(p) = \iota(q)\}.$$

是$L \times_X L$的连通分支之并；$L \times_X L$的其他每个连通分支都是$L \times L$的光滑子流形；在每个$p,q) \in L \times_X L$处，切空间满足

$$T_{(p,q)}(L \times_X L) = \{(v,w) \in T_pL \times T_qL \mid d\iota_p(v) = d\iota_q(w)\}.$$

[4.1] 伪全纯多边形与动机

伪全纯稳定圆盘的模空间定义需要作如下修改（参见 [7, 定义 3。17]）。与定义2.11相比，类型为 k 的 J-全纯稳定多边形定义为以下数据

$$\mathbf{u} = (\Sigma, z_0, z_1, \ldots, z_k, u, \gamma) \tag{4.1}$$

其中 Σ，zj，u 的定义方式相同，但拉格朗日边界条件现在为$u(\partial\Sigma) \subset \iota(L)$，并且

$$\gamma : \partial\Sigma \setminus \{z_0, z_1, \ldots, z_k, \text{ all boundary nodal points}\} \to L \tag{4.2}$$

是一个额外的连续映射，满足 $\iota \circ \gamma = u$。事实上，这一条件意味着 γ 在每个节点处都相对连续，具体来说：设 $\sigma : (-\epsilon, \epsilon) \to \partial\Sigma$ 是一个连续路径，它遵循 $\partial\Sigma$ 上的诱导边界定向，且 $\sigma(0) = 0$。如果 σ 与 Σ的两个不同不可约分支相交，那么我们要求 $\gamma \circ \sigma : (-\epsilon, 0) \cup (0, \epsilon) \to L$ 连续延拓到 0。换言之，数据 γ 等价于指定 $\partial\Sigma$ 中的k 条路径以及k 条L中的路径，

$$\sigma_j : (-\infty, +\infty) \to \partial\Sigma, \qquad \gamma_j : (-\infty, +\infty) \to L, \qquad 0 \le j \le k, \tag{4.3}$$

使得每个 σ_j 都遵循边界定向，将相邻的标记点与$\sigma_j(-\infty) = z_j$和 $\sigma_j(+\infty) = z_{j+1}$连接起来，并满足兼容条件 $\iota \circ \gamma_j = u \circ \sigma_j$。

$\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{u}'$ 之间的同构仍是一个双全纯映射 $\phi : \Sigma \to \Sigma'$ 但我们还进一步要求$\gamma = \gamma' \circ \phi$。与定义 2.11类似，我们定义 $\mathcal{M}(k)$ 为 $[\mathbf{u}]$的同构类集合。不过，其求值映射

$$\mathrm{ev}_0, \mathrm{ev}_i \ (1 \le i \le k) : \mathcal{M}(k) \to L \times_X L$$

随后被映射到$L \times_X L$ （而不是L）中，并修改为

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_0(\mathbf{u}) &= \big(\gamma(z_0+), \gamma(z_0-)\big) = \big(\gamma_0(-\infty), \gamma_k(+\infty)\big) \\ \mathrm{ev}_i(\mathbf{u}) &= \big(\gamma(z_i-), \gamma(z_i+)\big) = \big(\gamma_{i-1}(+\infty), \gamma_i(-\infty)\big) \qquad 1 \le i \le k \end{aligned} \tag{4.4}$$

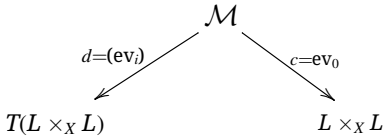
其中 $\gamma(z_j\pm) = \lim_{z \to z_j\pm,\ z \in \partial\Sigma} \gamma(z)$ 在 L 中，以及 $z \to z_j+$ （分别为 $z \to z_j-$）表示 z 趋近于 z_j

沿着一条路径，该路径在 $\partial\Sigma$上反转（分别保持）诱导边界定向。详见 [7, §3]以了解更多细节。请注意，与其他 ev_i相比，ev_0 的第一和第二个分量互换了，因为 ev_0 表示“输出”。

幺半群 S_L 在 (2.10) 中仍以相同方式定义，但此处是在 $H_2(X, \iota(L))$ 内。类似地，可以定义 $\mathcal{M}(k, \beta)$，其中 $\beta \in S_L$。遵循 Fukaya 在 [7], 中的框架，并几乎原样重复命题 2.12 的论证，只需将 L 替换为 $L \times_X L$，并将求值映射改为 (4.4) 中的形式，即可类似地得到：

命题 4.1 。 模空间 $\mathcal{M} = \coprod_{k\geq 0} \mathcal{M}(k) = \coprod_{k\geq 0, \beta\in S_L} \mathcal{M}(k, \beta)$ 以及求值映射

(4.5)



在 L 上构成一个 S_L-标记的多范畴。这里，T 是自由幺半群单子（2.1）。

然而，这并非全貌：当 $\iota : L \to X$ 是一个浸入（而非嵌入）时，可能会出现更精细的结构。注意，$L \times_X L$ 自然构成一个有向图 $(L, L \times_X L; s, t)$，其顶点集为 L，边集为 $L \times_X L$，源/目标映射为 $s = \mathrm{pr}_1, t = \mathrm{pr}_2$。这或许会让我们想起第 3.1 节关于有向图和 fc-多范畴的讨论。将这个图 $(L, L \times_X L)$ 适当地扩展为一个垂直离散 fc-多范畴，并纳入模空间 $\mathcal{M}$，似乎是合理的。仔细考察后会发现这是可行的，前提是我们将 0-胞腔取为$\pi_0(L)$，而非 L：$\mathcal{M}$ 中的一个伪全纯多边形 u 在相邻的评价映射之间携带边界路径 $\gamma_j \subset L$（参见 (4.3)），因此对于相邻的水平 1-胞腔，我们只能保证它们的端点位于 L 的同一道路连通分支中，而不能保证端点重合。

[4.2] fc-多范畴结构在模空间上

浸入 L 的定义域 i 不一定连通（参见 [7, 备注 3。3]）。每条边界路径 γ_j 都包含在 L的某个连通分支中。因此，将 L 分解为其连通分支：

$$L = \coprod_{v\in V_\iota} L_v, \qquad V_\iota := \pi_0(L) \tag{4.6}$$

定义 $E_\iota = L \times_X L$。记 ρ_ι 为典范映射 $L \to V_\iota$，它将 L_v 中的点映到 v。定义

$$s_\iota, t_\iota : E_\iota \xrightarrow{\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2} L \xrightarrow{\rho_\iota} V_\iota$$

其中 $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2$ 是到第一和第二个因子的自然投影映射。由此，我们得到一个有向图

$$E_\iota := (V_\iota, E_\iota, s_\iota, t_\iota) \tag{4.7}$$

对于每个 $v, v' \in V_\iota$，从 v 到 v' 的边为 $L_v \times_X L_{v'}$。在ι 为拉格朗日嵌入且 L 连通的特殊情形下，顶点集仅包含一个元素，而边集 $E_\iota = L \times_X L$与 L典范地同一。

将定义 3.1 中 $E_\iota = (V_\iota, E_\iota)$ 的所有轮廓环的集合记为 $\mathcal{P}_\iota$。对于 $e_0, e1, \ldots, e_n \in E_\iota$，定义 $\mathcal{M}(e1, \ldots, e_n; e_0)$ 为 $\mathcal{M}(n)$ 的子集，其中包含满足 $\mathrm{ev}_0(u) = e_0$ 且对 $i = 1, \ldots, n$ 均有 $\mathrm{ev}_i(u) = e_i$ 的伪全纯多边形 u。

引理 4.2。 若 $\mathcal{M}(e_1, \ldots, e_n; e_0)$ 非空，则 $(e_1, \ldots, e_n; e_0) \in \mathcal{P}_\iota$

证明。假设它非空，并从中取一个元素 $[u] = [\Sigma, z_0, \dots, z_n, u, \gamma]$。回想一下，$\gamma$ 可如 (4.3) 所示，在 L 中诱导连续路径 γ_j，其中 $0 \le j \le n$。每个 γ_j 都必须属于 L 的某个连通分支，因此由 (4.6) 可知，对某个 $v_j \in V_\iota$，$\gamma_j \subset L^{v_j}$。由 (4.4) 得出，$ev_0(u) \in L_{v_0} \times_X L^{v_n}$，且 $ev_i(u) \in L_{v_{i-1}} \times_X L^{v_i}$，其中 $i \neq 0$。也就是说，e_0 是从 v_0 到 v_n的一条边；对 $i \neq 0$，边 e_i从 v_{i-1}指向 v_i。因此，根据 (3.2)，$\vec{e} = (e_1, \dots, e_n) \in E_\iota^*$，且 $(\vec{e}; e_0)$ 是 E_ι 中的一个轮廓环。 □

由此可知，我们可以写成

$$\mathcal{M} = \coprod_{(e_1,\dots,e_n;e_0)\in\mathcal{P}_\iota} \mathcal{M}(e_1, \dots, e_n; e_0) \tag{4.8}$$

定理 4.3. 给定拉格朗日浸入 $\iota : L \to X$，我们可以典范地关联一个垂直离散的fc-多范畴

$$\mathscr{M}_\iota = \left(\pi_0(L) \,,\, L \times_X L \,,\, \mathcal{M} \right)$$

其中0-胞腔的集合为 $V_\iota = \pi_0(L)$；水平1-胞腔的集合为 $E_\iota = L \times_X L$；而2-胞腔是伪全纯多边形的模空间中的元素 $\mathcal{M}$。

证明。这本质上与命题 2.12 的证明以相同方式完成，但对 fc-多范畴这一概念采用了某种新的观点。0-胞腔与水平 1-胞腔的底层图恰好是上述的 $E_\iota = (V_\iota, E_\iota)$。至于 2-胞腔，源映射将 $u \in \mathcal{M}$ 送到 $(ev_1(u) \dots, ev_n(u)) \in E_\iota^*$，而目标映射将 u 送到水平 1-胞腔 $ev_0(u) \in E_\iota$。 □

[4.3] 第二相对奇异同调

由于 operad 和多范畴是 fc-多范畴的特殊情形，因此，第 2.4 节中对幺半群所作的额外标记应当可以扩展到定理 4.3 的 fc-多范畴情形。例如，设 $(S, +, \theta)$ 是一个交换幺半群；如果存在标记映射 $|\cdot|: \mathcal{M} \to S$，使得对于每个 $e \in E$ 都有 $|\iota(e)| = \theta$，并且对于可复合的 2-胞腔 u, u' 有 $|u \circ_i u'| = |u| + |u'|$，则称 fc-多范畴 $C = (V, E, \mathcal{V}, \mathcal{M})$ 是 S-标记的。在此背景下，如果仿照 (2.10) 定义 $S'_L = \{\theta\} \cup \{\beta \in H_2(X, \iota(L)) \mid \omega(\beta) > 0\}$，其中零元 θ 位于 $H_2(X, \iota(L))$ 中，那么很容易证明，定理 4.3 中的 fc-多范畴实际上都是 S'_L-标记的。

尽管如此，这种表述并不完全令人满意。仅保留相对同调类 $[u]$ 在 $S_L \subset H_2(X, \iota(L))$ 会舍弃更精细的边界路径信息 $\{\gamma_j\}$。正如第 2.4 节所述，为了辛几何应用，额外的标记很有用；特别是，采用比幺半群结构 $S_L \subset H_2(X, \iota(L))$ 更精细的标记结构或许会有用。

因此，我们希望遵循定义 3.10 并研究带标签的 **fc**-多范畴。

若 $\iota : L \to X$ 是一个嵌入，则相对奇异链复形 $C_\bullet(X, \iota(L))$ 与映射锥 $\mathrm{Cone}_\bullet(\iota)$ 拟同构，其中 $\iota_* : C_\bullet(L) \to C_\bullet(X)$，且 $\mathrm{Cone}_k(\iota) = C_k(X) \oplus C_{k-1}(L)$，其微分由 $(u, \gamma) \mapsto (\partial u, \iota_*(\gamma) - \partial\gamma)$ 给出。然而，若 $\iota : L \to X$ 不是嵌入，则这种拟同构通常不成立；因此，这段讨论或许表明，仅考虑 $H_2(X, \iota(L))$ 可能会丢失信息。事实上，我们来考虑

$$\mathrm{Cone}_2(\iota) = C_2(X) \oplus C_1(L) = C_2(X) \oplus \bigoplus_{v\in V_L} C_1(L_v)$$

由（4.6）。于是，给定一个伪全纯多边形 u，与其将其记录在次数为二的相对奇异链群 $C_2(X, \iota(L))$ 中，似乎更宜将其编码到次数为二的映射锥群 $\mathrm{Cone}_2(\iota)$ 中，其 $C_1(L_v)$ 分量留有空间来编码前述边界路径 γ_j 关联于 u。进一步发展这些想法，我们提出如下内容。

假设 $\iota : L \to X$ 与之前一样，是一个拉格朗日子流形浸入。我们构造一个垂直离散的

fc-多范畴，记作

$$\mathbb{S}_\iota = \mathbb{S}(X,\iota) = (\pi_0(L), L \times_X L, \mathbb{S}_\iota) \tag{4.9}$$

如下：

0-胞腔和水平 1-胞腔： 0-胞腔的集合定义为$V_\iota = \pi_0(L)$。水平 1-胞腔的集合定义为$E_\iota = L \times_X L$中的点集。换言之，底层有向图为$E_\iota(V_\iota, E_\iota, s_\iota, t_\iota)$（见4.7）。

2-胞腔的一般情形：设 $(\mathrm{e}1,\ldots,\mathrm{e}_n;\mathrm{e}_0)$ 是 E_ι 中的一个轮廓环。假设对于 $\mathrm{i} = 1,\ldots,\mathrm{n}$，$\mathrm{e}_i$ 是一条从 v_{i-1} 到 v_i 的边，而 e_0 是一条从 v_0 到 v_n 的边（参见图 4）。将 $\mathrm{L} \times_X \mathrm{L} \to \mathrm{L}$ 的第一和第二投影映射分别记为 $\mathrm{s} = \mathrm{pr}_1$ 和 $\mathrm{t} = \mathrm{pr}_2$，并注意到$\jmath := \mathrm{s} \circ \iota = \mathrm{t} \circ \iota : \mathrm{L} \times_X \mathrm{L} \to \mathrm{L}$。

固定水平的 1-胞腔 $q_i \in L \times_X L$ 对于 $i = 0,1\ldots,n$。记 $Z_\iota(q1,\ldots,q_n;q_0)$ 为由.....组成的子集 f

$$C_2(X) \oplus \bigoplus_{i=0}^{n} C_1(L_{v_i})$$

由以下元素组成

$$\left(u\ ,\ (\gamma_i)_{i=0}^n\right)$$

满足

$$\begin{aligned}
&\partial u = \sum_{i=0}^{n} \iota_* \gamma_i \\
&\begin{cases} s_* q_i = \partial^+ \gamma_{i-1} \\ t_* q_i = \partial^- \gamma_i \end{cases} \qquad i = 1,2,\ldots,n \\
&\begin{cases} s_* q_0 = \partial^- \gamma_0 \\ t_* q_0 = \partial^+ \gamma_n \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

以及半正条件*：

$$\text{either } u = 0 \quad \text{or} \quad \int_u \omega > 0 \tag{4.11}$$

这里回顾一下，边界算子是面映射的交错和 $\partial = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial_i$，其中对于 $i = 0,\ldots,n$，令 δ_i：$\Delta^{n-1} \hookrightarrow \Delta^n$ 表示第 i 个面嵌入（省略第 i 个顶点），并定义第 i 个面映射 ∂_i：将一个奇异 n-链 σ 映射为其诱导的 $(n-1)$-链 $\sigma \circ \delta_i$，再将其线性延拓。在次数一时，这写作并记为 $\partial = \partial_0 - \partial_1 =: \partial^+ - \partial^-$

称这两个元素 $(u,(\gamma_i))$ 和 $(\tilde{u},(\tilde{\gamma}_i))$ 为 ι等价，记作

$$(u,(\gamma_i)) \sim_\iota (\tilde{u},(\tilde{\gamma}_i)),$$

如果存在

$$(U,(\Gamma_i)) \in C_3(X) \oplus \bigoplus_{i=0}^{n} C_2(L_{v_i})$$

* 这反映了~~伪全纯曲线 u 总是具有正的辛能量 $\int_u \omega > 0$，除非 u 是常数~~

使得

$$u - \tilde{u} = -\partial U + \sum_{i=0}^{n} \iota_* \Gamma_i$$

$$\gamma_i - \tilde{\gamma}_i = -\partial \Gamma_i \qquad\qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

现在，我们将相应的 2-胞腔集合定义为 ι-等价类的集合，即

$$\mathbb{S}_\iota(q_1, \ldots, q_n; q_0) = Z_\iota(q_1, \ldots, q_n; q_0) / \sim_\iota$$

元素 $(u, (\gamma_i))$ 的 ι-等价类记为 $[u,(\gamma_i)]$。

部分复合： 给定

$$\mathbf{u} = [u, (\gamma_0, \ldots, \gamma_n)] \in Z_\iota(q_1, \ldots, q_i, \ldots, q_n; q_0)$$

and

$$\mathbf{u}' = [u', (\gamma_0', \ldots, \gamma_m')] \in Z_\iota(q_1', \ldots, q_m'; q_i)$$

对于固定的 $1 \le i \le n$，我们将它们的部分复合 $\mathbf{u} \circ_i \mathbf{u}'$ 定义为元素的 ι-等价类

$$\big(u + u', (\gamma_0, \ldots, \gamma_{i-2}, \gamma_{i-1} + \gamma_0', \gamma_1', \ldots, \gamma_{m-1}', \gamma_m' + \gamma_i, \gamma_{i+1}, \ldots, \gamma_n)\big)$$

in

$$Z_\iota(q_1, \ldots, q_{i-1}, q_1', \ldots, q_m', q_{i+1}, \ldots, q_n; q_0)$$

这就完成了 $\mathbb{S}_\iota$ 在（4.9）中的构造。

第二相对同调的恢复：若 $\iota : L \to X$ 是一个嵌入，且 $L \cong \iota(L)$ 连通，则 $\mathbb{S}_\iota$ 恢复了 (2.10) 中的 $S_L \subset H_2(X, L)$。事实上，关联图 $E_\iota = (V_\iota, E_\iota)$ 仅由一个顶点 v 和一个环 e 组成。由于 ι 是一个嵌入，我们有 $L_v \cong L$、$R(e) = \Delta_L \cong L$，并且映射 $s, t : R(e) \to L_v$ 可与恒等映射 $L \to L$ 视为相同。注意，根据 (4.11)，存在一个自然良定义的映射

$$\mathbb{S}_\iota(q_1, \ldots, q_n; q_0) \to S_L \subset H_2(X, L), \quad [u, (\gamma_i)_{i=0}^n] \mapsto [u]$$

对于 $n = 0$，$Z_\iota(\varnothing; q_0)$ 中的一个元素是一个对 $(u\ \gamma_0) \in C_2(X) \oplus C_1(L)$，满足 $\partial u = \gamma_0$、$\partial^- \gamma_0 = q_0$，和 $\partial^+ \gamma_0 = q_0$。因此，$\partial \gamma_0 = \partial^+ \gamma_0 - \partial^- \gamma_0 = 0$。特别地，类 $[u] \in C_2(X)/C_2(L)$ 是一个相对2-循环。若 $(u\ \gamma_0) \sim_\iota (\tilde{u}\ \tilde{\gamma}_0)$，则根据定义，存在 $(U\ \Gamma_0) \in C_3(X) \oplus C_2(L)$，使得 $u - \tilde{u} = -\partial U + \Gamma_0$ 且 $\gamma_0 - \tilde{\gamma}_0 = -\partial \Gamma_0$。映到商 $C_2(X)/C_2(L)$ 后，得到$[u] - [\tilde{u}] = -[\partial U] = -\partial[U]$,，因此 $[u]$ 和 $[\tilde{u}]$ 在 $H_2(X, L)$ 中给出相同的类。反过来，设$\alpha \in H_2(X, L)$，并选取一个代表元 $u \in C_2(X)$，使得 $\partial u \in C_1(L)$。由于 L 连通，类$[\gamma] \in H_1(L)$ 有一个以 q_0, 为基点的环作为代表元，即一个 1-链 γ_0，满足 $\partial^{\pm} \gamma_0 = q_0$ 且$[\gamma_0] = [\gamma] \in H_1(L)$。于是 $\gamma - \gamma_0 = \partial \Gamma_0$，其中某个 $\Gamma_0 \in C_2(L)$ 满足该式；令 $u' := u - \iota_* \Gamma_0$ g，可得$\partial u' = \iota_* \gamma_0$。因此，$(u', \gamma_0) \in Z_\iota(\varnothing; q_0)$ 代表 α。总而言之，映射

$$\mathbb{S}_\iota(\varnothing; q_0) \xrightarrow{\cong} S_L \tag{4.12}$$

由 $[u\ \gamma_0] \mapsto [u]$ 给出的映射是一个同构。然而，对于 $n \ge 1$，数据 $(\gamma_0, \ldots, \gamma_n)$ 记录了边界 ∂u 分解为带有指定角点的线段，因此包含的信息多于所得的相对类 $H_2(X,L)$。固定总边界 $\sum^n{}_{i=0} \gamma_i$ 后，可以通过在 L 中添加 1-循环来修改该元组；模去 ι-等价后，这种歧义由$H_1(L)$ 控制。因此，$\mathbb{S}_\iota(q1, \ldots, q_n; q_0)$ 是对 $H_2(X, L)$ 的细化，而非与之重合。

实际情形 回忆一下，$L = \coprod_{v\in V_\iota} L_v$，其中 $V_\iota = \pi_0(L)$。假设对于每个 $v \in V_\iota$，限制映射 $\overline{\iota_v := \iota|_{L_v} : L_v \to X}$ 都是一个嵌入。换言之，ι 是通过取嵌入子流形 $L_v \cong \iota(L_v) \subset X$ 的不交并，并允许它们在 X 中的像彼此相交而得到的浸入。也就是说，ι 在单个分量 L_v 内没有自交，而 ι 的所有自交都源自不同分量之间的相交。特别地，相应的图 $E_\iota = (V_\iota, E_\iota)$ 除特异环 (4.7) 外没有环。这是拉格朗日 Floer 理论和 Fukaya 范畴研究中的典型设置。

前面对 (4.12) 及 $\mathbb{S}_\iota$ 中部分复合的讨论，立即推出以下结论（参见图5）：

命题 4.4. 设 $\mathbb{S}_\iota(q_1,\dots,q_n;q_0)$ 为一组具有固定源和目标水平 *1*-胞腔$(q_1,\dots,q_n)$ 和 q_0 的 *2*-胞腔。假设对于某个 $1 \le i \le n$，点 q_i 位于 $R(e_v)$ 中，其中 e_v 是顶点 $v \in V_\iota$ 处的指定环，并且 $\iota|_{L_v}$ 是一个嵌入。那么存在一个自然作用

$$S_{L_v} \times \mathbb{S}_\iota(q_1,\dots,q_n;q_0) \to \mathbb{S}_\iota(q_1,\dots,q_{i-1},q_{i+1},\dots,q_n;q_0)$$

其中 $S_{L_v} \subset H_2(X,L_v)$ 的定义见 *(2.10)*。

最后，定理 4.3 可以改进如下：

P命题 4.5. 该 fc-多范畴 $\mathscr{M}_\iota$ 是 $\mathbb{S}_\iota$-带标签的（定义见 *3.10* .

证明。注意，$\mathscr{M}_\iota$ 和 $\mathbb{S}_\iota$ 都是垂直离散的，并且具有相同的 0-胞腔和 1-胞腔。因此，只需为 2-胞腔定义映射。回忆一下，$\mathscr{M}$ 在 $(e1,\dots,e_n;e') \in E^* \times E$ 上的一个 2-胞腔是伪全纯多边形 $u = (\Sigma, z_0, z1,\dots,z_k, u\ \gamma)$（取其同构类），如 (4.1) 所示。与 (4.3) 中一样，数据 γ 由 L 中的 k 条 $+1$ 路径 γ_j 组成，它们在 $C_1(L_{v_i})$ 中给出奇异 1-链，仍记作γ_j。此外，忽略伪全纯条件后，映射 $u : (\Sigma, \partial\Sigma) \to (X\ \iota(L))$ 首先是一个连续映射，因此定义了 $C_2(X)$ 中的一个奇异 2-链，仍记作 u。于是，$(u, (\gamma_j))$ 在 $\mathbb{S}_\iota$中诱导出一个 2-胞腔。由此可以得到一个 fc-多范畴映射 $\mathscr{M}_\iota \to \mathbb{S}_\iota$。 □

[4.4] 格罗莫夫紧性与fc-多范畴结构的因子闭性

设 $\iota : L \to X$ 是一个具有干净自交的拉格朗日浸入，与前文一样。我们已在定理 4.3 中构造了一个模空间的自然 fc-多范畴 $\mathscr{M}_\iota = (\pi_0(L), L \times_X L\ \mathcal{M})$，并在命题 4.5 中证明，它具有定义 3.10 意义下的 $\mathbb{S}_\iota$-标记，其中$\mathbb{S}_\iota = (\pi_0(L), L \times_X L\ \mathbb{S}_\iota)$ 是按 (4.9) 定义的 fc-多范畴。其底层有向图是 (4.7) 中的 $E_\iota = (\pi_0(L), L \times_X L)$。

在辛几何中，通常可以从相关模空间中选出一个恰当的子集 $\mathscr{M}_\iota$，使其在格罗莫夫极限下封闭，也就是说，若一列伪全纯曲线$\mathbf{u}_n$ 属于这个子集，那么任意一个格罗莫夫极限$\mathbf{u}_\infty$（取子列后）都由同一子集中的一个元素表示。若存在这样的子集，通常的虚拟计数和代数构造便可在其中进行，从而得到精细化的不变量或相对不变量。我们想指出的是，因子闭性条件是这种在格罗莫夫极限下封闭性的 operad 反映。

在实践中，格罗莫夫紧性往往迫使我们一次只处理有限多个拉格朗日子流形，而同时处理无穷多个拉格朗日子流形则会遇到技术上的局限。要定义“完整福柯范畴”，应取一列穷尽性的有限拉格朗日子流形集合，并构造适当的同伦归纳极限。参见 Fukaya 在 [7, §18.1]中的评述。从这个角度来看，我们认为，采用 fc-多范畴的语言很有用，因为它能将一系列看似不同的 A_∞ 型结构统一打包为一种统一的 operad 描述。

最后，让我们列举几个在辛几何中遇到的具体例子：

设 $\{L_0, L1, \ldots\ldots, L_N\}$ 是一族有限个连通的嵌入拉格朗日子流形，其中$N \in \mathbb{Z}_+$ 或$N = \infty$，并假设相应的拉格朗日浸入

$$\iota_N : L \equiv \bigsqcup_{i=0}^{N} L_i \to X$$

具有横截自交。令$V = \{0, \ldots, N\}$，且$E = L \times_X L$。

首先，对每个$m < n$，我们可以类似地得到一个拉格朗日浸入

$$\iota_m : L' \equiv \bigsqcup_{i=0}^{m} L_i \to X.$$

命题 4.6。 $\mathscr{M}_{\iota_m}$ 是 $\mathscr{M}_{\iota_N}$的因子封闭fc-子多范畴。

证明。令 $\mathrm{V}_0 = \{0, \ldots, \mathrm{m}\}$。有向图 $\mathrm{E}_0 := \mathrm{L}' \times_X \mathrm{L}'$是有向图 $\mathrm{E} = \mathrm{L} \times_X \mathrm{L}$ 的有向子图，并注意到，按照定义 3.7 的含义， $\mathscr{M}_{\iota_m}$ 是 $\mathscr{M}_{\iota_n}$ 在 E_0 上的满 fc-子多范畴。令$\vec{\mathrm{e}} = (\mathrm{e1}, \ldots, \mathrm{e}_n) \in (\mathrm{E}_0)^*$，并设 e_i是从 v_{i-1} 到 v_i的一条边，其中 $\mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{n}$。这意味着 e_i是 $\mathrm{L}_{v_{i-1}} \times_X \mathrm{L}_{v_i} = \mathrm{L}_{v_{i-1}} \cap \mathrm{L}_{v_i}$中的一个点，因此 v_{i-1}、$\mathrm{v}_i \in \in \mathrm{V}'$。特别地，$\mathrm{v}_0, \mathrm{v}_n \in \in \mathrm{V}_0$。于是，从 v_0到 v_n的每条边 $\mathrm{e}' \in \in \mathrm{E}$ 都包含在 $\mathrm{L}_{v_0} \cap \mathrm{L}_{v_n} \subset \mathrm{L}' \cap \mathrm{L}'$中，即 $\mathrm{e}' \in \in \mathrm{E}_0$。因此，按照定义 3.8 的含义，$\mathrm{E}_0$在 E 中是端点闭的。故命题 3.9 适用，并得出所需的因子闭性。 □

其次，考虑一个划分 $V = V' \sqcup V''$，其中 $V = \{0, \ldots, N\}$。这确定了两个拉格朗日浸入

$$\iota' : L' = \bigsqcup_{v \in V'} L_v \to X, \qquad \iota'' : L'' = \bigsqcup_{v \in V''} L_v \to X.$$

回忆一下，$\mathrm{L} = \bigsqcup_{\mathrm{v} \in \mathrm{V}} \mathrm{L}_v = \mathrm{L}' \sqcup \mathrm{L}''$，且 $\mathrm{E} = \mathrm{L} \times_X \mathrm{L}$。我们将 E 中的元素 $\mathrm{e} = (\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2) \in$ 视为一条从 v_1到 v_2,的有向边，其中 $\mathrm{p}_1 \in \mathrm{L}_{v_1}$且 $\mathrm{p}_2 \in \mathrm{L}_{v_2}$。在 E 中，还存在反向边 $\bar{\mathrm{e}} := (\mathrm{p}_2, \mathrm{p}_1)$，它从 v_2 到 v_1。现在，我们进一步考虑有向子图

$$E_0 := (L' \times_X L') \cup (L' \times_X L'') \cup (L'' \times_X L'')$$

E 的有向子图。换言之，E_0由所有边 $\mathrm{e} = (\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2)$ 构成，但不包括满足 $\mathrm{p}_1 \in \mathrm{L}''$且 $\mathrm{p}_2 \in \mathrm{L}'$的边；也就是说，不包括源位于 V''中且目标位于 V'中的边。例如，若 $\mathrm{e} \in \mathrm{L}' \times_X \mathrm{L}'' \subset \mathrm{E}_0$,，则 $\bar{\mathrm{e}} \in \mathrm{L}'' \times_X \mathrm{L}'$，因此 $\bar{\mathrm{e}} \notin \mathrm{E}_0$。

在此背景下，我们可以构造一个垂直离散的 fc-子多范畴 $\mathscr{M}_{\iota', \iota''}$ 它是 $\mathscr{M}_{\iota_N}$ 在子图 fc-子多范畴 $\mathscr{M}_{\iota}$ 上、以定义 E_0 所述的意义，构成其满 3.7。

命题 4.7。 $\mathscr{M}_{\iota', \iota''}$ 在 $\mathscr{M}_{\iota_N}$ 中因子封闭。

证明。根据命题 3.9，只需证明 E_0 在 E 中端点闭。设 $\vec{\mathrm{e}} = (\mathrm{e1}, \ldots, \mathrm{e}_n) \in (\mathrm{E}_0)^*$，且对于 $\mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{n}$，$\mathrm{e}_i$ 是一条从 v_{i-1} 到 v_i 的边。令 $\mathrm{e}' \in \mathrm{E}$ 是一条从 v_0 到 v_n 的边。我们要证明 $\mathrm{e}' \in \mathrm{E}_0$。若 v_0 和 v_n 都属于 V'，则 $\mathrm{e}' \in \mathrm{L}_{v_0} \times_X \mathrm{L}_{v_n} \subset \mathrm{L}' \times_X \mathrm{L}'$ 属于 E_0。若 v_0 和 v_n 都属于 V''，论证类似。若 $\mathrm{v}_0 \in \mathrm{V}'$ 且 $\mathrm{v}_n \in \mathrm{V}''$，则 $\mathrm{e}' \in \mathrm{L}' \times_X \mathrm{L}''$ 也属于 E_0。最后，我们注意到 $\mathrm{v}_0 \in \mathrm{V}''$ 且 $\mathrm{v}_n \in \mathrm{V}'$ 的情形不可能发生，因为不存在一条从 V'' 到 V' 的边。 □

我们重新 标记：给定一个划分 $V = \bigsqcup_{j=1}^{r} V^{(j)}$ 及诱导浸入 $\iota^{(j)} : L^{(j)} \to X$，令

$$E_0 := \bigcup_{j \le k} L^{(j)} \times_X L^{(k)} \tag{4.13}$$

那么，E_0 是端点闭的，因此通过与上文几乎相同的论证，确定了一个因子封闭的fc-子多范畴 $\mathscr{M}_{\iota^{(1)}, \ldots, \iota^{(r)}}$ of$\mathscr{M}_{\iota}$。更一般地，任何端点闭的有向子图$E_0 \subset E$ 都会诱导出一个 $\mathscr{M}_{\iota}$ 的因子封闭fc-子多范畴。不过，目前我们在

辛几何应用中遇到的情形，主要是由命题4.6和4.7.

5 fc-多范畴上的代数及其 dg 变体

拟运算子与多范畴是fc-多范畴的特例，见例3.3。因此，我们应当能够从fc-多范畴上的代数这一概念中，恢复出通常的拟群上的代数概念。正如群可以有表示，多范畴也可以有代数。对于任意笛卡尔单子T，都可以发展出T-拟运算子和T-多范畴上的代数这一思想，并且有几种等价的定义，详见 [24,§ 4.3、§ 6.3、§ 6.4]。本文选择 [24, §6。4] 中的定义，其形式类似于经典的自同态描述，如式（1.1）所示。

本文只关注$T = \mathbf{fc}$： $\mathcal{D} \to \mathcal{D}$ 这一情形。回顾一下，我们用 $\mathcal{D}$ 表示有向图范畴（§3.1）。

固定 $\mathcal{D}$ 中的有向图 $E = (V, E, s, t)$。设 $p_X \colon X \to E$ 和 $p_Y \colon Y \to E$ 是切片范畴 $\mathcal{D}/E$ 中的对象。更具体地说，相关的有向图记作

$$X = (\bar{X}, X, \mathfrak{s}_X, \mathfrak{t}_X), \qquad Y = (\bar{Y}, Y, \mathfrak{s}_Y, \mathfrak{t}_Y)$$

有向图的映射记作

$$p_X = (\bar{p}_X, p_X) : (\bar{X}, X) \to (V, E), \qquad p_Y = (\bar{p}_Y, p_Y) : (\bar{Y}, Y) \to (V, E),$$

[5.1] 指数对象与自同态

对于切片范畴 $\mathcal{D}/\mathrm{E}$ 中的对象 $\mathrm{A}\ \mathrm{a} \to \mathrm{E}$ 和 $\mathrm{B}\ \mathrm{b} \to \mathrm{E}$，指数对象 $\mathrm{B}^A \xrightarrow{\pi} \mathrm{E}$ 是 $\mathcal{D}/\mathrm{E}$ 中的一个对象，并配有求值态射 $\mathrm{ev} : \mathrm{B}^A \times_E \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$，该态射属于 $\mathcal{D}/\mathrm{E}$，且满足以下泛性质：对于 $\mathcal{D}/\mathrm{E}$ 中的每个对象 $\mathrm{Z}\ \mathrm{z} \to \mathrm{E}$，映射 $\mathrm{Hom}^{\mathcal{D}/E}(\mathrm{Z}, \mathrm{B}^A) \to \mathrm{Hom}^{\mathcal{D}/E}(\mathrm{Z} \times_E \mathrm{A}, \mathrm{B})$，其定义为 $\mathrm{u} \mapsto \mathrm{ev} \circ (\mathrm{u} \times_E \mathrm{id}_A)$，是一个双射。注意，对于每个 $\mathrm{E} \in \mathcal{D}$，切片范畴 $\mathcal{D}/\mathrm{E}$ 都存在指数对象。

定义对象

$$G_1(X) := G_{1,E}(X) := \left(X^* \times E \xrightarrow{p_X^* \times \mathrm{id}_E} E^* \times E\right)$$

$$G_2(Y) := G_{2,E}(Y) := \left(E^* \times Y \xrightarrow{\mathrm{id}_{E^*} \times p_Y} E^* \times E\right).$$

在切片范畴 $\mathcal{D}/(E^* \times E)$ 中，并定义

$$\mathbf{Hom}(X, Y) := G_2(Y)^{G_1(X)} \in \mathcal{D}/(E^* \times E),$$

为指数对象。回顾一下，我们用 $\mathbf{fc}(E)$ 表示 E^*，如 (3.2) 中所示。

对于 $v \in V$ 和 $e \in E$，定义 $\bar{X}(v) = \bar{p}_X^{-1}(v)$，以及 $X(e) = p_X^{-1}(e)$；类似地定义 $\bar{Y}(v)$ 和 $Y(e)$。对于 $\vec{e} = (e1, \ldots, e_n) \in E^*$，我们将 $\vec{e}$ *in* X 的提升集合定义为

$$\begin{aligned} X^*(\vec{e}) &= (p_X^*)^{-1}(\vec{e}) = X(e_1) \times_{\bar{X}} \cdots \times_{\bar{X}} X(e_n) \\ &= \{(x_1, \ldots, x_n) \in X(e_1) \times \cdots \times X(e_n) \mid \mathfrak{t}_X(x_i) = \mathfrak{s}_X(x_{i+1}), i = 1, \ldots, n-1\} \end{aligned} \tag{5.1}$$

换言之，$X^*(\bar{e})$ 是 X 中投影到 $\vec{e}$（在 p_X^* 下）的可复合路径集合。类似地，我们也定义$Y^*(\bar{e})$。注意，$E^* \times E$ 是一个有向图，其顶点集合为 $V \times V$。

将$\mathbf{Hom}(X,Y)$的顶点集记为$\mathbf{V}(X, Y)$。为简便起见，也用$\mathbf{Hom}(X, Y)$表示其边集。一个顶点 over $(u, u') \in V \times V$是一个三元组 (u, u', ϕ)，或简写为 ϕ，其中$u,u' \in V$且

ϕ： $\bar{X}(u) \to \bar{Y}(u')$是一个函数。换言之，

$$\mathbf{V}(X,Y) := \{\phi : \bar{X}(u) \to \bar{Y}(u') \mid u, u' \in V\}.$$

给定 $(\bar{e}; e') \in E^* \times E$，设 $v_0, v1, \ldots, v_n$为 $\bar{e}$ 的顶点，并设 v'_0、v'_1为 e' 的源顶点与靶顶点。Hom(X, Y) 在 $(\bar{e}, e')$ 上从 (v_0, v'_0, ϕ) 到另一个 (v_n, v'_1, ψ) 的一条边是一个元组 $(\bar{e}, e'; \phi, \psi; \xi)$，或简记为 ξ，其中

$$\xi : X^*(\vec{e}) \to Y(e') \tag{5.2}$$

是一个函数，使得对于提升路径 $\sigma \in X^*(\bar{e})$，边 $\xi(\sigma) \in Y(e')$ 的端点与 ϕ和 ψ相容。源映射和目标映射 $s_{X,Y}, t_{X,Y}$: Hom(X, Y) $\to$V(X, Y) 分别将这条边 ξ送到顶点 (v_0, v'_0, ϕ) 与 (v_n, v'_1, ψ)。对于切片范畴 $\mathcal{D}/(E^* \times E)$，我们有两个结构映射

$$\boldsymbol{d}_{E,X,Y} \times \boldsymbol{c}_{E,X,Y} : (\mathbf{V}(X,Y), \mathbf{Hom}(X,Y)) \to (V \times V, E^* \times E)$$

有向图的，将顶点 $(u, u', \phi) \in \mathbf{V}(X, Y)$ 映到 $(u, u') \in V \times V$，并将边，即元组 $\xi = (\bar{e}, e'; \phi, \psi; \xi)$ 映到 $(\bar{e}, e') \in E^* \times E$。

当 X $=$Y 时，我们记 V(X) $=$V(X, X)，并记 End(X) $=$Hom(X, X)；结构映射记为 $\mathrm{ddd}_{E,X}$ 和 $\mathrm{ccc}_{E,X}$。以下内容来自 [24, 命题 6.4.2], ，此处我们将其特化到 fc-多范畴的情形。

命题 5.1. 设 $E = (V, E, s, t)$ 为 $\mathcal{D}$ 中的一个对象。设 $X = (X, X \xrightarrow{s} E, t, p_X)$ 为切片范畴 $\mathcal{D}/E$ 中的一个对象。存在一个自然的 **fc**-多范畴（此处我们再次滥用记号）

$$\mathbf{End}(X) = (V, E, \mathbf{V}(X), \mathbf{End}(X))$$

具体而言，

- a0-胞腔是 E 的一个顶点 V。
- 从 v_0 到 v_1 的水平 *1*-胞腔是一条边 $e \in E$。
- 从 u 到 u' 的垂直 1-胞腔是 $\mathbf{V}(X)$ 中位于 $(u, u') \in V \times V$ 上的一个元素。
- 边 $(\bar{e}, e') \in E^* \times E$ 上的一个 2-胞腔 ξ 是 $\mathbf{End}(X)$ 中位于 $(\bar{e}, e')$上的一个元素。

证明。与（3.5）类似，2-胞腔以及相关的 0-胞腔和水平/垂直 1-胞腔可用如下矩形图表示:

$$\begin{array}{ccccccc}
\bar{X}(v_n) & \xleftarrow{X(e_n)} & \bar{X}(v_{n-1}) & \xleftarrow{X(e_{n-1})} & \cdots & \xleftarrow{X(e_1)} & \bar{X}(v_0) \\
\downarrow{\scriptstyle \psi} & & & \Downarrow \xi & & & \downarrow{\scriptstyle \phi} \\
\bar{X}(v'_1) & & & \xleftarrow[X(e')]{} & & & \bar{X}(v'_0)
\end{array} \tag{5.3}$$

这里的一个箭头 $\bar{X}(v_i) \xleftarrow{X(e_i)} \bar{X}(v_{i-1})$ 实际上表示一个跨接 $\bar{X}(v_i) \xleftarrow{t} X(e_i) \xrightarrow{s} \bar{X}(v_{i-1})$，因此，一串箭头表示式 (5.1) 中的提升集合 $X^*(\bar{e})$。

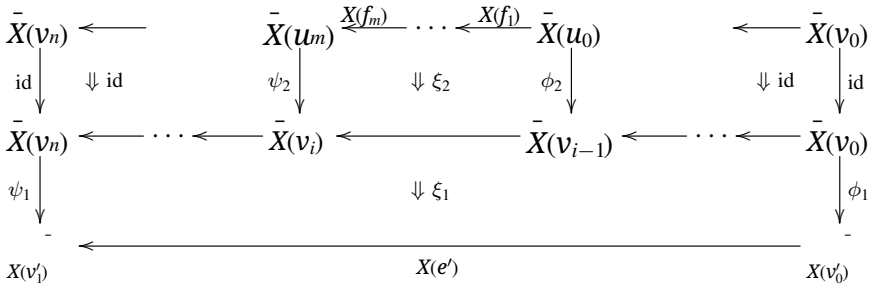
恒等态射$\iota_{E,X} : E \to \mathbf{End}(X)$的定义是，将$E$的顶点$v$映到$(v, v, \mathrm{id}_{\bar{X}(v)})$，并将从$u$到$u'$的边$e$映到显然的2-胞腔$\mathrm{id}_{X(e)} = ((e), e; \mathrm{id}_{\bar{X}(u)}, \mathrm{id}_{\bar{X}(u')}; \mathrm{id}_{X(e)})$，图示如下:

$$\iota_{E,X} : \quad u' \xleftarrow{e} u \qquad \rightsquigarrow \qquad \begin{array}{ccc}
\bar{X}(u') & \xleftarrow{X(e)} & \bar{X}(u) \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & \Downarrow \mathrm{id} & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\
\bar{X}(u') & \xleftarrow[X(e)]{} & \bar{X}(u)
\end{array}$$

给定 $\vec{e}=(e1,\dots,e_n)\in E^*$、$e'\in E$、$\vec{f}=(f1,\dots,f_m)\in E^*$ 以及 $1\le i\le n$，复合

$$\begin{aligned}\circ_i : \mathbf{End}(X)(e_1,\dots,e_n;e')\times \mathbf{End}(X)(f_1,\dots,f_m;e_i)\\ \to \mathbf{End}(X)(e_1,\dots,e_{i-1},f_1,\dots,f_m,e_{i+1},\dots,e_n;e')\,,\quad (\xi_1,\xi_2)\mapsto \xi_1\circ_i\xi_2\end{aligned}$$

2-胞腔的描述如下



□

[5.2] 代数 ***over*** fc-多范畴

按照 [24, §6.4], 我们引入：

定义 5.2。设 $E=(V,E,s,t)\in\mathcal{D}$。设 $\mathscr{M}=(V,E\ \mathcal{V},\mathcal{M},ddd,ccc\ \boldsymbol{\iota},\boldsymbol{\gamma})$ 是一个基于 E 的fc-多范畴。所谓 $\mathscr{M}$-代数 或代数 *over* $\mathscr{M}$，是指由以下部分组成的一对 $(X\ \boldsymbol{\alpha})$

- 切片范畴 $\mathcal{D}/E$ 中的一个对象 $X=(\bar{X},X\ \mathfrak{s},\mathfrak{t},p_X)$，也就是说，$(\bar{X},X\ \mathfrak{s},\mathfrak{t})$ 是一个有向图，且 $p_X=(\bar{p}_X,p_X):(X,X)\to(V,E)$ 是一个有向图映射。
- 一个多范畴 fc-$\mathbf{End}(X)$ 映射 $\boldsymbol{\alpha}:\mathscr{M}\to$，其有向图诱导映射 $(V,E)\to(V,E)$ 是恒等态射。

以下附加条件在实践中通常很有用。

定义 5.3。若有向图 $\mathrm{X}=(\mathrm{X},\mathrm{X}\ \mathfrak{s},\mathfrak{t},\mathrm{p}_X)$ 位于 $\mathrm{E}=(\mathrm{V},\mathrm{E},\mathrm{s},\mathrm{t})$ 之上，且 $\mathrm{X}=\mathrm{V},\mathfrak{s}=\mathrm{s}\circ\mathrm{p}_X,\mathfrak{t}=\mathrm{t}\circ\mathrm{p}_X$，并且 $\bar{\mathrm{p}}_X=\mathrm{id}_V$，则称其为简单的。此外，若一个 $\mathscr{M}$-代数 $(\mathrm{X}\ \boldsymbol{\alpha})$ 中的 X 是简单的，则称该代数为简单的。

从现在起，我们主要将注意力限制在 $\mathrm{X}=(\mathrm{X},\mathrm{X}\ \mathfrak{s},\mathfrak{t},\mathrm{p}_X)$ 为简单的情形。这一假设通常会简化讨论，并且足以满足我们的目的。下面来展开说明 X 为简单时 $(\mathrm{X}\ \boldsymbol{\alpha})$ 的数据。一方面，我们注意到每个 $\bar{\mathrm{X}}(\mathrm{v})=\{\mathrm{v}\}$ 都是单点集，因此映射 $\bar{\mathrm{X}}(\mathrm{u})\to\bar{\mathrm{X}}(\mathrm{u}')$ 总是唯一的平凡映射。因此，$\mathrm{V}(\mathrm{X})\cong\mathrm{V}\times\mathrm{V}$。根据简单条件，(5.1) 中 $\vec{\mathrm{e}}=(\mathrm{e}1,\dots,\mathrm{e}_n)\in\mathrm{E}^*$ 的提升集合就变成了直积 $\mathrm{X}^*(\vec{\mathrm{e}})=\mathrm{X}(\mathrm{e}_1)\times\cdots\times\mathrm{X}(\mathrm{e}_n)$。事实上，由于 $(\mathrm{X}\ \boldsymbol{\alpha})$ 是简单的且 $\mathrm{X}(\mathrm{e})=\mathrm{p}_X^{-1}(\mathrm{e})$，(5.1) 中的条件 $\mathfrak{t}(\mathrm{x}_i)=\mathfrak{s}(\mathrm{x}_{i+1})$ 化为 $\mathrm{t}\circ\mathrm{p}_X(\mathrm{x}_i)=\mathrm{s}\circ\mathrm{p}_X(\mathrm{x}_{i+1})$，进而化为 $\mathrm{t}(\mathrm{e}_i)=\mathrm{s}(\mathrm{e}_{i+1})$，这恰好对应于条件 $\vec{\mathrm{e}}\in\mathrm{E}^*$。因此，End(X) 中的一个 2-胞腔是映射 $\xi:\mathrm{X}(\mathrm{e}_1)\times\cdots\times\mathrm{X}(\mathrm{e}_n)\to\mathrm{X}(\mathrm{e}')$，其中 $\vec{\mathrm{e}}=(\mathrm{e}1,\dots,\mathrm{e}_n)\in\mathrm{E}^*$ 且 $\mathrm{e}'\in\mathrm{E}$。特别地，

$$\mathbf{End}(X)=\bigcup_{(\vec{e},e')\in E^*\times E}\mathrm{Hom}(X(e_1)\times\cdots\times X(e_n)\ ,\ X(e')) \tag{5.4}$$

另一方面，回顾一下，$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_V,\alpha_E,\alpha_{\mathcal{V}},\alpha)$由两个有向图的映射组成：$\alpha_E=(\alpha_V,\alpha_E):(\mathrm{V},\mathrm{E})\to(\mathrm{V},\mathrm{E})$ 以及 $\alpha=(\alpha_{\mathcal{V}},\alpha):(\mathcal{V},\mathcal{M})\to(\mathrm{V}(\mathrm{X}),\mathrm{End}(\mathrm{X}))$，其中要求 α_E 为恒等态射，并且定义 3.5 中的三个相容性条件成立。具体而言，根据定义 3.5 (1)，我们看到 $\alpha_{\mathcal{V}}(\mathrm{id}_v)=(\mathrm{v},\mathrm{v})$，且 $\alpha(\mathrm{id}_e)=\mathrm{id}^{X(e)}$，其中 id_v 是 $\mathrm{v}\in\mathrm{V}$ 处的恒等垂直 1-胞腔，而 id_e 是 $\mathrm{e}\in\mathrm{E}$ 处的恒等 2-胞腔。根据定义 3.5 (2)，我们有 $ccc=ccc_{E,X}\circ\alpha$ 以及 $ddd=ddd_{E,X}\circ\alpha$。

接下来可以验证，$\alpha_{\mathcal{V}}\colon \mathcal{V}\to \mathrm{V}\times\mathrm{V}$ 正是将一个垂直 1-胞腔 $\mathrm{f}:\mathrm{u}\to\mathrm{u}'$ in $\mathscr{M}$ 映射到二元组 $(\mathrm{u},\mathrm{u}')\in \mathrm{V}\times\mathrm{V}$ 的映射。特别地，如果 $\mathscr{M}$ 是一个垂直离散 fc-多范畴，即 $\mathcal{V}\cong \mathrm{V}$，那么 $\alpha_{\mathcal{V}}:\mathrm{V}\to \mathrm{V}\times\mathrm{V}$ 是对角映射 $\mathrm{u}\mapsto(\mathrm{u},\mathrm{u})$。还可以验证，$\alpha$ 将一个 2-胞腔 $\mathrm{u}\in\mathcal{M}(\vec{\mathrm{e}},\mathrm{e}')$（其中 $\vec{\mathrm{e}}=(\mathrm{e}1,\dots,\mathrm{e}_n)\in \mathrm{E}^*$ 且 $\mathrm{e}'\in\mathrm{E}$）映射为一个映射 $\alpha(\mathrm{u}):\mathrm{X}^*(\vec{\mathrm{e}})\to\mathrm{X}(\mathrm{e}')$。最后，根据定义 3.5 (3)，$\alpha$ 与 2-胞腔的复合相容，即 $\alpha(\mathrm{u}\circ_i\mathrm{u}')=\alpha(\mathrm{u})\circ_i\alpha(\mathrm{u}')$。

*[5.3] fc-*多范畴的 *dg* 变体

我们希望将各种A_∞结构（例如A_∞代数、A_∞双模、A_∞范畴）实现为某些fc-多范畴上的代数。回顾一下，A_∞代数是A_∞operad 上的代数，而它是一个微分分次（*dg*）operad。根据（1.1），上链复形 A_∞ 上的A 代数是一个 dg 拟运算子态射 $\mathcal{A}_\infty\to \mathrm{End}_A$，它从$A_\infty$ operad 映到A的端同态拟运算子。

因此，我们可能需要为*dg* fc-多范畴及其态射定义适当的概念。这可能需要借助一般T-多范畴的富集理论；一般而言，这是一个相当复杂的主题，参见 Leinster 的著作 [23], [24, §6。8]。显然，这一富集理论的完整框架十分深奥，可能会让我们偏离主题。因此，牺牲一些一般性，我们改为采用一种特设且直截了当的表述，这应足以满足我们研究A_∞结构的需要；另见 [24, 例 5.1。11]。

固定一个交换基环 $\Bbbk$，我们将在次数为 $+1$ 的微分所构成的、取值于分次$\Bbbk$-向量空间的上链复形范畴中工作。上链复形中元素x 的次数通常记作 $|x|$。

以下定义试图推广 dg operad 的概念。

定义 5.4. 定义在 $\Bbbk$ 上的*dg* fc-多范畴 由以下数据构成：

$$\widehat{\mathscr{M}}=(\mathscr{M};\delta)$$

其中

(1) $\mathscr{M}=(\mathrm{V},\mathrm{E}\ \mathcal{V},\mathcal{M},\mathrm{ddd},\mathrm{ccc}\ \iota,\gamma)$ 是一个 fc-多范畴。(2) 固定 $\vec{\mathrm{e}}=(\mathrm{e}1,\dots,\mathrm{e}_n)\in\mathrm{E}^*$ 以及 $\mathrm{e}'\in\mathrm{E}$。2-胞腔在 $(\vec{\mathrm{e}},\mathrm{e}')$ 上方的纤维 $\mathcal{M}(\mathrm{e}1,\dots,\mathrm{e}_n;\mathrm{e}')$ 是一个以 $\Bbbk$ 为基环的分次上链复形，其微分记作 $\delta:=\delta_{\vec{e},e'}$。(3) 恒等 2-胞腔 $\mathrm{id}_e=\iota(\mathrm{e})$ 是 $\mathcal{M}(\vec{\mathrm{e}};\mathrm{e}')$ 中次数为零的 δ-循环，即 $\delta(\mathrm{id}_e)=0$。(4) 对于 2-胞腔的（部分）复合，我们有 Leibniz 型法则

$$\delta(\mathbf{u}\circ_i\mathbf{u}')=(\delta\mathbf{u})\circ_i\mathbf{u}'+(-1)^{|\mathbf{u}|}\,\mathbf{u}\circ_i(\delta\mathbf{u}').$$

定义 5.5。 一个 *dg* fc-多范畴的映射 $\boldsymbol{\alpha}:\widehat{\mathscr{M}}\to\widehat{\mathscr{M}'}$ 是一个 fc-多范畴的映射，其含义见定义 3.5，并且 $\boldsymbol{\alpha}$ 的 2-胞腔分量由次数为零的上链映射给出。

注 5.6。 在上述定义中，0-胞腔以及水平/垂直 1-胞腔的集合仍然是普通的集合；只有 2-胞腔被提升为上链复形。

注 5.7。 回顾一下，有向图范畴是函子范畴 $\mathcal{D}=[\mathbb{H}^{\mathrm{op}},\mathbf{Set}]$，其中$\mathbb{H}$ 是一个具有两个对象和两个指定态射的范畴。原则上，我们可以为适当的范畴 $\mathcal{C}$引入$\mathcal{D}(\mathcal{C})=[\mathbb{H}^{\mathrm{op}},\mathcal{C}]$，并以某种方式发展“内在于 $\mathcal{C}$的fc-多范畴”的概念。这里我们不采用这种内在方法；相反，我们采用一种更为具体且略显临时的表述，以适应我们的需要。

例 ***5.8***。 根据定义 fc-多范畴5.4，可以将 dg 伴随代数视为一个 $\mathcal{O}=\{\mathcal{O}(n)\}_{n\geq 0}$，它是一个带单位 $1\in\mathcal{O}(1)$ 和部分复合 $\circ_i:\mathcal{O}(n)\times\mathcal{O}(m)\to\mathcal{O}(n+m-1)$ 的非对称 dg operad，并满足 (2.9) 中的结合律公理；这里，每个 $\mathcal{O}(n)$ 都是一个上链复形，且

带有微分 $\delta = \delta_n : \mathcal{O}(n) \to \mathcal{O}(n)$，且与复合相容，具体而言

$$\delta(x \circ_i y) = (\delta x) \circ_i y + (-1)^{|x|} x \circ_i (\delta y) \tag{5.5}$$

其中 $|x|$ 是 x 的次数。由例 3.3 可知，operad $\mathcal{O}$ 生成一个垂直离散的 fc- 多范畴 $\Sigma\mathcal{O}$，它只有一个 0-胞腔，且垂直和水平 1-胞腔都是恒等态射。具有 n 个输入水平 1-胞腔的 2-胞腔集合，恰好可识别为 $\mathcal{O}(n)$。具体而言，若如上所述记作$\Sigma\mathcal{O} = (V, E\ \mathcal{M}, \delta)$，则 $V = E = \{*\}$ 是一个单点集，并且

$$\mathcal{M}(\underbrace{*, \cdots *}_{n}; *) = \mathcal{O}(n)$$

恒等 2-胞腔是 $\mathcal{O}(1)$ 中的单位。幺半群算子莱布尼茨法则（5.5）对应于定义 5.4 中的条件 (4)。

[5.4] ***dg*** 自同态

设 E $=$(V, E, s, t) $\in \mathcal{D}$。设 $\mathscr{M}$ =(V, E $\mathcal{V}, \mathcal{M}$, ddd, ccc ι, γ) 是 E 上的一个 fc-多范畴。固定 $\mathcal{D}$/E 中的一个对象 X，并要求它按照定义 5.3 的意义是简单的，因此我们可以写作

$$X = (V\ ,\ X\ ,\ s \circ p_X\ ,\ s \circ p_X\ ,\ p_X)$$

其中 p_X =(id, p_X) : (V,X) $\to$ (V,E) 是一个有向图映射，在顶点上是恒等映射 es.

作为（5.1）的类比，我们引入

$$X^*(\vec{e}) = X(e_1) \otimes \cdots \otimes X(e_n) \tag{5.6}$$

对于 $\vec{}e = (e_1, \ldots, e_n) \in E^*$，这里我们滥用了记号。如下文注 *5.9* 所解释的，X 需要满足简单条件。

假设对每个$e \in E$，$X(e)$都是上链复形，其微分记为 $\mathrm{d}_e = \mathrm{d}^X_e$。上述$X^*(\vec{}e)$是一个赋有张量积微分 $\mathrm{d}_{\vec{e}} = \mathrm{d}^X_{\vec{e}}$的上链复形，因此

$$\mathrm{d}^X_{\vec{e}}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{|x_1|+\cdots+|x_{k-1}|}\ x_1 \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}^X_{e_k}(x_k) \otimes \cdots \otimes x_n. \tag{5.7}$$

注 5.9。我们施加一个辅助假设：X 如定义 5.3 所述是简单的。这在某种程度上是人为的。然而，若不作此假设，我们可能会根据（5.1）遇到上链复形的纤维积。回忆一下，若 (A, d_A)、(B, d_B) 和 (C, d_C) 是上链复形，且 f : A $\to$ C 和 g : B $\to$ C 是上链映射，则它们的纤维积是子复形 A $\times_C$ B := ker (f $-$ g : A $\oplus$ B $\to$ C)，其微分由乘积微分 $\mathrm{d}_{A\times_C B}$(a, b) := (d_Aa, d_Bb) 限制得到。尽管这一构造在上链复形范畴中是自然的，但它似乎并非 A∞结构中出现的那种构造。

我们可以如下在命题 **5.1** 中建立 End(X) 的 dg 变体：

命题 5.10。存在一个自然的 *dg* fc-多范畴

$$\widehat{\mathbf{End}}(X) = (V, E, V \times V, \widehat{\mathbf{End}}(X)\ ;\ \hat{\mathrm{d}})$$

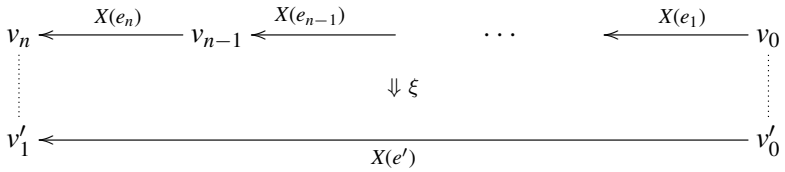
其中

- 一个0-胞是 E 的一个顶点 V。
- 从 v_0 到 v_1 的水平 *1*-胞腔是一条边 $e \in E$ 。
- 从 u 到 u' 的垂直1-胞是一个元素$(u, u') \in V \times V$.
- 从2-细胞到$(\vec{}e, e') \in E^* \times E$ 的空间，记作 $\mathbf{End}(X)(\vec{}e; e')$，是由映射组成的分次向量空间 $\xi : X(e_1) \otimes \cdots \otimes X(en) \to X(e')$。每个 $\mathbf{End}(X)(e_1, \ldots, en; e')$ 都是一个上链复形

whose differential $\widehat{\mathrm{d}} = \widehat{\mathrm{d}}_{\vec{e};e'}$ *is given by*

$$(5.8)\quad \big(\widehat{\mathrm{d}}\xi\big)(x_1\otimes\cdots\otimes x_n) := \mathrm{d}_{e'}\big(\xi(x_1\otimes\cdots\otimes x_n)\big) - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{|\xi|+|x_1|+\cdots+|x_{k-1}|}\,\xi(x_1\otimes\cdots\otimes \mathrm{d}_{e_k}x_k\otimes\cdots\otimes x_n)$$

证明。 依照（3.5）和（5.3），一个 2-胞腔 ξ 可由如下矩形描述：



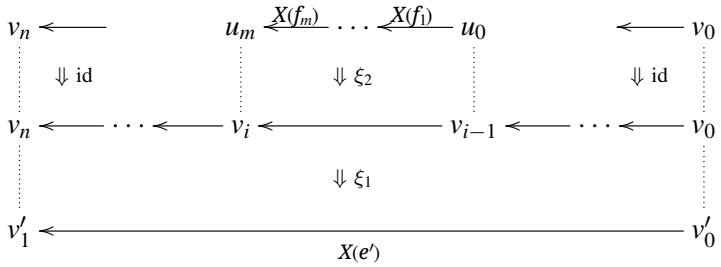
其中，e_i 是从v_{i-1} 到v_i 的一条边，而e' 是从v_0' 到v_1'的一条边。注意，垂直 1-胞腔只是$V \times V$中的一个点，因此这里用虚线表示。

在$e \in E$ 上的恒等 2-胞腔就是恒等映射 $\mathrm{id}_{X(e)}$。其次数为 $|\mathrm{id}_{X(e)}| = 0$，并且

$$\widehat{\mathrm{d}}(\mathrm{id}_{X(e)})x = \mathrm{d}_e x - \mathrm{id}_{X(e)}(\mathrm{d}_e x) = 0$$

如定义 5.4 （3）所要求的。

2-胞腔的复合可如下图示：



具体而言，给定 $\xi_1 \in \mathbf{End}(X)(e1, \ldots\ldots, e_n; e')$ 和 $\xi_2 \in \mathbf{End}(X)(f1, \ldots\ldots, f_n; e_i)$，对于固定的 $1 \le i \le n$，我们定义

$$(5.9)\quad \begin{aligned}&\xi_1 \circ_i \xi_2\,(x_1\otimes\cdots\otimes x_{i-1}\otimes y_1\otimes\cdots\otimes y_m\otimes x_{i+1}\otimes\cdots\otimes x_n)\\ &\quad = (-1)^{|\xi_2|(|x_1|+\cdots+|x_{i-1}|)}\xi_1(x_1\otimes\cdots\otimes x_{i-1}\otimes \xi_2(y_1\cdots y_m)\otimes x_{i+1}\otimes\cdots\otimes x_n)\end{aligned}$$

作为诱导的上链映射

$$X(e_1)\otimes\cdots\otimes X(e_{i-1})\otimes X(f_1)\otimes\cdots\otimes X(f_m)\otimes X(e_{i+1})\otimes\cdots\otimes X(e_n)\to X(e').$$

通过常规计算，最终可以验证定义 5.4 (4)，即

$$\widehat{\mathrm{d}}(\xi_1\circ_i\xi_2) = \widehat{\mathrm{d}}\xi_1\circ\xi_2 + (-1)^{|\xi_1|}\xi_1\circ\widehat{\mathrm{d}}\xi_2$$

□

[5.5] ***fc*-多范畴上的代数：*dg* 变体**

现在，我们介绍定义 5.2 的 dg 类比：

定义 5.11。 设 $\mathscr{M} = (\mathscr{M}; \delta)$ 是一个 dg fc-多范畴。一个 $\mathscr{M}$-代数 定义为一对 $(X\ \boldsymbol{\alpha})$，其中

- 一个简单有向图 $\mathrm{X} = (\mathrm{V}, \mathrm{X}, \mathrm{s}\circ\mathrm{pX}, \mathrm{t}\circ\mathrm{pX}, \mathrm{pX})$，它位于有向图 $\mathrm{E} = (\mathrm{V}, \mathrm{E}, \mathrm{s}, \mathrm{t})$ 之上，并满足对于 $\mathrm{e} \in \mathrm{E}$，$\mathrm{X(e)} = \mathrm{p}^{-1}\mathrm{X}\,(\mathrm{e})$ 是一个上链复形，其微分记为 $\mathrm{de} = \mathrm{dXe}$。
- 一个 dg fc-多范畴映射 $\boldsymbol{\alpha}\colon \mathscr{M} \to \mathbf{End}(X)$，其有向图的诱导映射

$(V,E) \to (V,E)$ 是恒等态射。

让我们展开 dg fc-多范畴 $\mathscr{M} = (\mathscr{M}; \delta)$ 上一个 $\mathscr{M}$-代数 $(X, \boldsymbol{\alpha})$ 的数据，其中 $\mathscr{M} = (V, E, \mathcal{V}, \mathcal{M})$。根据定义 3.5 和 5.5，将 $\boldsymbol{\alpha} = (\mathrm{id}_V, \mathrm{id}_E, \bar{\alpha}, \alpha)$ 记作。回顾命题 5.10，$\mathrm{End}(X)$ 的顶点集为 $V \times V$。对于 $v, v' \in V$，垂直 1-胞腔 $g \in \mathcal{V}$ 从 v 到 v' 在 $\bar{\alpha}$ 下的像就是 (v, v')；换言之，$\bar{\alpha} = (\bar{d}\ \bar{c}) : \mathcal{V} \to V \times V$，其中 d、c 分别是 ddd、ccc 的顶点部分。对于 $\bar{e} = (e1, \ldots, e_n) \in E^* $ 以及 $e' \in E$，在 α 下，位于 $(\bar{e}, e') \in E^* \times E$ 上的每个 2-胞腔 u 的像都是一个上链映射，记作

$$\alpha(\mathbf{u}) : X(e_1) \otimes \cdots \otimes X(e_n) \to X(e')$$

根据定义5.5，每个分量

$$\alpha = \alpha(e_1, \ldots, e_n; e') : \mathcal{M}(e_1, \ldots, e_n; e') \to \widehat{\mathbf{End}}(X)(e_1, \ldots, e_n; e')$$

都是上链映射，也就是说，

$$\hat{d}\alpha(\mathbf{u}) = \alpha(\delta \mathbf{u}) \tag{5.10}$$

还要注意，

$$\alpha(\mathbf{u} \circ_i \mathbf{u}') = \alpha(\mathbf{u}) \circ_i \alpha(\mathbf{u}') \tag{5.11}$$

其中右侧的部分复合由式（5.9）给出。

6 A_∞-型结构作为 dg fc-多范畴上的代数

本节构成了本文的主要部分。其目的是收集文献中出现的各种A_∞-型结构，并将它们置于一个统一的概念框架中重新阐述，即作为定义**5.11**意义下的 dg fc-多范畴上的代数。换言之，我们旨在将歌剧代数描述（1.1）推广到一般的A_∞-型结构。特别是，下面的构造和描述将证明定理 1.5。

[6.1] A_∞代数

我们先从一个预备情形开始。考虑 A_∞ *operad* $\mathcal{A}_\infty = \{\mathcal{A}_\infty(n)\}_{n \geq 0}$。回忆一下，$\mathcal{A}_\infty$ 作为一个 operad，由元素自由生成：$\mathbf{m}_n$，其次数为 $|\mathbf{m}_n| = 1$，对于 $n \geq 2$；见 [26]。通常约定 $\mathbf{m}_n$ 的次数应为 $2 - n$，但也可以采用所谓的 移位次数，如 [11, 32, 34] 中所示，从而使 $|\mathbf{m}_n| = 1$。微分在生成元上的定义由下式确定：

$$\delta(\mathbf{m}_n) = - \sum_{r+s+t=n;\ r,s,t \geq 0} \mathbf{m}_{r+1+t} \circ_{r+1} \mathbf{m}_s,$$

对于 $n \geq 2$，并通过幺半群算子莱布尼茨法则（5.5）扩展到所有复合式。

根据例 5.8，dg 伴随代数（$\mathcal{A}_\infty$，δ）可以视为一个 dg fc-多范畴 $\Sigma\mathcal{A}_\infty$。尽管如此，正如第 2.4节所述，在辛几何应用中加入额外的分次通常很有用。因此，我们遵循定义 2.7 来表述以下变体：

设 $(S, +, \theta)$ 是一个交换幺半群。我们定义 S-标记 A_∞ *operad*（参见定义 2.7）

$$\mathcal{A}_\infty^S = \{\mathcal{A}_\infty^S(n, \beta)\}_{n \geq 0, \beta \in S}$$

如下：它是 由符号$\mathbf{m}_{n,\beta}$与 $|\mathbf{m}_{n,\beta}| = 1$ 自由生成，其中 $(n, \beta) \neq (0, \theta), (1, \theta)$。其

微分在生成元上的定义为

$$\delta(\mathbf{m}_{n,\beta}) = -\sum_{\substack{r+s+t=n;\ r,s,t\geq 0\\ \beta'+\beta''=\beta}} \mathbf{m}_{r+1+t,\beta'} \circ_{r+1} \mathbf{m}_{s,\beta''}, \tag{6.1}$$

并由幺半群算子莱布尼茨法则扩展。这是一个微分，因为可以验证

$$\delta^2(\mathbf{m}_{n,\beta}) = -\sum \delta(\mathbf{m}_{r+1+t,\beta'}) \circ_{r+1} \mathbf{m}_{s,\beta''} - (-1)^{|\mathbf{m}|} \mathbf{m}_{r+1+t,\beta'} \circ_{r+1} \delta(\mathbf{m}_{s,\beta''}) = 0$$

令 $\mathcal{A}^S_\infty(n) = \bigoplus_{\beta\in S} \mathcal{A}^S_\infty(n\ \beta)$，并且我们可以将 $\mathcal{A}^S_\infty$ 视为例 **fc**-多范畴中的一个 dg 对象 5.8；我们也可以将幺半群 S 视为例 **fc**-多范畴中的一个对象 3.11 &3.13 ，因此 $\mathcal{A}^S_\infty$ 是一个S-标记的 **fc**-多范畴，符合定义 3.10。

定义 6.1. 所谓 S-标记的 A_∞ 代数，指的是定义 $\mathcal{A}^S_\infty$中的 -代数（$X\ \boldsymbol{\alpha}$）5.11。

具体而言，由于 $\mathcal{A}^S_\infty$ 的 0-胞腔集和 1-胞腔集都是单点集，并且X 是简单的，我们注意到 X 可以直接视为一个单独的上链复形，其微分记为 $\mathrm{d} = \mathrm{d}^X$. 此外，$\mathbf{End}(X)$ 可以识别为通常的微分分次自同态运算子，它由上链映射组成$X^{\otimes\bullet} \to X$。

定义 $\mathfrak{m}_{1,\ \theta} = \mathrm{d}$ 和

$$\mathfrak{m}_{n,\beta} := \alpha(\mathbf{m}_{n,\beta}) :\ X^{\otimes n} \to X \tag{6.2}$$

对于 $n \geq 0$ 和 $\beta \in S$ 满足 $(n\ \beta) \neq (1,\ \theta)$。当 $n = 0$时，约定令 $X^{\otimes n}$ 为基域，而 $\mathfrak{m}_{0,\ \beta}$ 被视为 X中的一个元素。根据定义，α 的次数为零，因此$|\mathfrak{m}| = |\mathfrak{m}_{n,\ \beta}| = 1$。

条件（5.10）给出：

$$\begin{aligned}\alpha(\delta\mathbf{m}_{n,\beta})(x_1,\dots,x_n) &= \mathrm{d}(\mathfrak{m}_{n,\beta}(x_1,\dots,x_n)) - \sum_{i=1}^{n}(-1)^{|\mathfrak{m}|+|x_1|+\cdots+|x_{i-1}|}\ \mathfrak{m}_{n,\beta}(x_1,\dots,\mathrm{d}x_i,\dots,x_n)\\ &= \mathfrak{m}_{1,0}(\mathfrak{m}_{n,\beta}(x_1,\dots,x_n)) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{|x_1|+\cdots+|x_{i-1}|}\ \mathfrak{m}_{n,\beta}(x_1,\dots,\mathfrak{m}_{1,0}(x_i),\dots,x_n)\end{aligned}$$

利用（6.1）、（5.11）和（5.9），我们得到

$$\begin{aligned}&\alpha(\delta\mathbf{m}_n)(x_1,\dots,x_n)\\ &= -\sum \alpha(\mathbf{m}_{r+1+t,\beta'} \circ_{r+1} \mathbf{m}_{s,\beta''})(x_1,\dots,x_n) = -\sum(\mathfrak{m}_{r+1+t,\beta'} \circ_{r+1} \mathfrak{m}_{s,\beta''})(x_1,\dots,x_n)\\ &= -\sum(-1)^{|\mathfrak{m}|(|x_1|+\cdots+|x_r|)}\mathfrak{m}_{r+1+t,\beta'}(x_1,\dots,x_r,\mathfrak{m}_{s,\beta''}(x_{r+1},\dots,x_{r+s}),\dots,x_n)\end{aligned}$$

其中，右端按构造不涉及 $\mathfrak{m}_{1,\ \theta}$。将它们合在一起，我们恰好得到带标签的 A_∞ 关系：对于每个 $\beta \in S$ 和 $n \geq 0$,

$$\sum_{\beta'+\beta''=\beta}\ \sum_{r+s+t=n}(-1)^{|x_1|+\cdots+|x_r|}\mathfrak{m}_{r+1+t,\beta'}(x_1,\dots,x_r,\mathfrak{m}_{s,\beta''}(x_{r+1},\dots,x_{r+s}),\dots,x_n) = 0 \tag{6.3}$$

注 6.2。 当 S 是平凡幺半群时，operad $\mathcal{A}^S_\infty$ 恢复通常的 A_∞ operad（1.1）。在标准文献中， [11], 滤过 A_∞ 代数 的概念可以视为一种S-带标签的 A_∞代数，其中 $S \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是一个非平凡 离散加法幺半群。

[6.2] A_∞范畴

设V是一个集合。令$E = (V,E,s,t)$为有向图，其顶点集为V，边集为$E = V \times V$，使得对每个有序对$(v,v') \in V \times V$，都存在一条唯一的边$e_{v,v'}$从v指向v'。对于

每个$v \in V$，我们区分出环$e_v := e_{v,v}$。令 $\mathbb{S}$ 为任意固定的fc-多范畴，其底层有向图是给定的$E = (V,E)$。

我们将构造一个垂直离散的 $\mathbb{S}$-带标签 dg fc-多范畴

$$\mathcal{A}^{\mathbb{S}}_{\infty,V} := \mathcal{A}^{\mathbb{S}}_{\infty,V\times V} = (V, E = V \times V, \mathcal{M}; \delta) \tag{6.4}$$

其由 0-胞腔和水平 1-胞腔构成的底层有向图为 (V,E)。我们将 $\mathcal{M}$ 定义为由符号 $\mathbf{m}_\beta \in \mathcal{M}(\vec{\ } e; e')$ 自由生成，其中每个 $(\vec{\ } e; e') \in E^* \times E$，以及每个 $\beta \in \mathbb{S}(\vec{\ } e; e')$，单位情形除外 $\beta = \theta_e \in \mathbb{S}(e;e)$。我们要求每个 $\mathbf{m}_\beta$ 的次数为 1，并将 $\mathcal{M}$ 上的微分定义为

$$\delta(\mathbf{m}_\beta) = -\sum \mathbf{m}_{\beta'} \circ_i \mathbf{m}_{\beta''} \tag{6.5}$$

其中求和遍历所有可能的分解 $\beta = \beta' \circ_i \beta''$，对某个 i 以及某些 β'、β''。

定义 6.3。一个 $\mathbb{S}$-带标签的 A_∞ 范畴，其对象集为 V，是一个 $\mathcal{A}^{\mathbb{S}}_{\infty,V}$-代数（定义 5.11）。

在特殊情形 V 为单点集时，方程（6.5）恰好还原（6.1），并且上述内容也可恢复定义6.1。

注 6.4。在文献中，根据是否允许（或禁止）输入为空的运算，A_∞ 型结构分别称为弯曲的（或非弯曲的）。用我们的术语来说，这对应于是否允许 $\mathbb{S}(\varnothing;e')$ 非空（或要求其为空）。

设 $\mathcal{A}^{red}_{\infty,V}$ 表示在 Example 3.13 中取 $\mathbb{S} = \mathbf{0}^{red}_E$ 时，(6.4) 中的 dg fc-多范畴，其中 $E = V\times V$ 如上所述。特别地，根据定义，$\mathbb{S}(\varnothing;e')$ 因而 $\mathcal{M}(\varnothing;e')$ 为空。若改为取 $\mathbb{S} = \mathbf{0}_E$，并将由此得到的 (6.4) 中的 dg fc-多范畴记为 $\mathcal{A}_{\infty,V}$，那么我们建议将对象集为 V 的弯曲的 A_∞ 范畴定义为一个 $\mathcal{A}_{\infty,V}$-代数。相比之下，$\mathcal{A}^{\mathrm{red}}_{\infty,V}$-代数这一概念恢复了（非弯曲的）$A_\infty$ 范畴的概念，正如下一个定理所示。

命题 6.5. 一个 $\mathcal{A}^{red}_{\infty}$、$V$-代数等价于一个（非弯曲的）$A_\infty$ 范畴，其对象集为 V（例如 *[30, (1a)]*）。

证明。设 (X $\boldsymbol{\alpha}$) 为一个 $\mathcal{A}^{red}_{\infty}$、$V$-代数。根据定义 5.11，数据 X 由上链复形 X(v, v′) 组成，其微分记为 $\mathrm{d}_{v,v'}$，对每个 (v, v′) $\in$ E $=$ V $\times$ V 成立。根据例 3.13，集合 $\mathbf{0}^{\mathrm{red}}_E(\vec{\ }\mathrm{e};\mathrm{e}')$ 要么为空，要么为单元素集，且后者出现当且仅当 $\vec{\ }\mathrm{e} \neq \varnothing$。因此，$\mathcal{A}_\infty$、$V$ 的生成元 m^β 可以等价地标号为 $\mathrm{m}^{\vec{e};e'}$，对所有 $\vec{\ }\mathrm{e} \in \mathrm{E}^*$ 与 $\mathrm{e}' \in \mathrm{E}$，其中 $\vec{\ }\mathrm{e} \in \mathrm{E}^*$ 与 $\mathrm{e}' \in \mathrm{E}$ 满足 $\vec{\ }\mathrm{e} \neq \varnothing$，且 $\vec{\ }\mathrm{e}$ 的源与目标与 e' 的源与目标一致。根据定义，我们还需要要求 $\vec{\ }\mathrm{e} \neq \mathrm{e}'$，以排除单位情形。由于 E $=$ V $\times$ V，由 (3.2) 可知

$$E^* = \bigsqcup_n \left\{ \Big((v_0,v_1),(v_1,v_2),\dots,(v_{n-1},v_n) \Big) \in (V\times V)^{\times n} \mid v_0,\dots,v_n \in V \right\} \cong \bigsqcup_n V^{\times(n+1)}.$$

因此，生成元可以进一步标号为$\mathbf{m}_{\vec{v}}$，对于 $\vec{\ }v = (v_0, v1, \dots, v_n) \in V^{\times(n+1)}$，其中我们需要要求$n \neq 1$以排除单位情形。

我们令$\mu_1 = \mu_{1;v_0,v_1} = \mu_{v_0,v_1} = \mathrm{d}_{v_0,v_1}$对所有$v_0, v_1 \in V$成立。根据定义，数据 $\boldsymbol{\alpha}$ 还由上链映射组成

$$\mu_n = \mu_{n;\vec{v}} = \mu_{\vec{v}} = \alpha(\mathbf{m}_{\vec{v}}) : X(v_0,v_1) \otimes \cdots \otimes X(v_{n-1},v_n) \to X(v_0,v_n) \qquad n \geq 2$$

最后，它仍 ins以恢复标准A_∞关系。实际上，我们固定 $\vec{\ }v = (v_0, v1, \dots, v_n)$以及

$n \geq 2$ 以及以及 $x_k \in X(v_{k-1}, v_k)$对于 $k = 1,\ldots,n$。根据(5.10)和(5.8)，我们计算

$$\begin{aligned}&\alpha(\delta \mathbf{m}_{\vec{v}})(x_1,\ldots,x_n) = (\widehat{\mathrm{d}}\alpha)(\mathbf{m}_{\vec{v}})\\ &= \mu_1\left(\mu_n(x_1,\ldots,x_n)\right) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{|x_1|+\cdots+|x_{k-1}|}\,\mu_n(x_1,\ldots,x_{k-1},\mu_1(x_k),x_{k+1},\ldots,x_n)\end{aligned} \tag{6.6}$$

在我们的情形中，关系式（6.5）变为

$$\delta \mathbf{m}_{\vec{v}} = -\sum_{1\neq k\neq n}\sum_{j} \mathbf{m}_{v_0,v_1,\ldots,v_{j-1},v_{j+k+1},\ldots,v_n} \circ_{j+1} \mathbf{m}_{v_j,\ldots,v_{j+k}}$$

由（5.11）和（5.9），可得

$$\begin{aligned}-\alpha(\delta \mathbf{m}_{\vec{v}})(x_1,\ldots,x_n) &= \sum_{1\neq k\neq n}\sum_{j}(\mu_{n-k}\circ_{j+1}\mu_{k+1})(x_1,\ldots,x_n)\\ &= \sum_{1\neq k\neq n}\sum_{j}(-1)^{|x_1|+\cdots+|x_{j-1}|}\,\mu_{n-k}(x_1,\ldots,x_{j-1},\mu_{k+1}(x_j,\ldots,x_{j+k}),\ldots,x_n)\end{aligned}$$

将此式与（6.6）相加，得到所需的 A_∞ 关系：

$$\sum_k\sum_j(-1)^{|x_1|+\cdots+|x_{j-1}|}\,\mu_{n-k}(x_1,\ldots,x_{j-1},\mu_{k+1}(x_j,\ldots,x_{j+k}),\ldots,x_n) = 0$$

□

[6.3] 广义A_∞ 范畴

在第 6.2 节中，我们将边集固定为 $E = V \times V$。然而，一般而言，这一假设并非必要：我们可以允许更一般的有向图 E，其顶点集为 V。在这种情况下，仍可能出现 A_∞-型结构，我们暂且称之为“广义 A_∞ 范畴”。**fc**-多范畴及其代数的语言，或许能为描述这种一般性提供自然的框架。更确切地说，我们引入：

定义 6.6. 给定任意有向图 $E = (V,E)$ 以及一个**fc**-多范畴 $\mathbb{S}$，其底层有向图为E，则构造（6.4）和（6.5）同样适用。我们将所得的**fc**-多范畴记为 $\mathcal{A}^{\mathbb{S}}_{\infty,E}$。当 $\mathbb{S} = \mathbf{0}_E$如例3.13中所示时，我们也将其记为 $\mathcal{A}_{\infty,E}$。

我们的基本主张是，文献中许多不同的A_∞型结构，都可以通过为有向图E作适当选择，来实现为 $\mathcal{A}_{\infty,E}$ 上的代数。

[6.4] 左、右A_∞ 模

令 $E = (V,V \times V)$ 为第 6.2 节中的有向图。定义一个新的有向图

$$E_l := (V \sqcup \{*\}, (V\times V)\sqcup(\{*\}\times V))$$

具体来说，我们添加一个记为 $*$ 的新顶点，然后对每个$v \in V$，添加一条从 $*$ 指向v 的新有向边。不过请注意，顶点 $*$ 处没有环。类似地，定义一个有向图

$$E_r := (V \sqcup \{*'\}, (V\times V)\sqcup(V\times\{*'\}))$$

这里我们添加一个新的顶点 $*'$，并且对于每个 $v \in V$，我们添加一条从 v 指向 $*'$ 的新有向边。根据定义6.6，我们引入 dg **fc**-多范畴：

$$\mathcal{A}_{\infty,V,l} := \mathcal{A}_{\infty,E_l} \quad \text{and} \quad \mathcal{A}_{\infty,V,r} := \mathcal{A}_{\infty,E_r}$$

类似的论证可以推出以下结论：

命题 6.7. 一个 $\mathcal{A}_{\infty,V,l}$-代数（分别地，$\mathcal{A}_{\infty,V,r}$-代数）等价于文献中关于对象集为 V 的 A_∞ 范畴上的左（分别地，右）A_∞ 模的标准概念（例如参见 *[16,*定义 *2.9* 和 *2.10]*）。

[6.5] *A_∞* 一对A_∞ 代数上的双模

考虑有向图 $\mathrm{E} = (\mathrm{V}, \mathrm{E}, \mathrm{s}, \mathrm{t})$，其中 $\mathrm{V} = \{\mathrm{v}_0, \mathrm{v}_1\}$ 是一个二元集合，而 $\mathrm{E} = \{\mathrm{e}_0, \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_{01}\}$ 是一个三元集合。这里，e_0 和 e_1 分别是基于 v_0 和 v_1，的环，而 e_{01}是从 v_0 指向 v_1的有向边。注意，不存在从 v_1 指向 v_0 的有向边（见图6）。令$\mathbb{S} = (\mathrm{V}, \mathrm{E}\ \mathbb{S})$为一个固定的 fc-多范畴，其底层有向图与 $\mathrm{E} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$ 相同，其中 2-胞腔的集合仍记作 $\mathbb{S}$。

我们构造一个垂直离散的 $\mathbb{S}$-带标签的 dg fc-多范畴（定义3.10、5.4）

$$\mathcal{A}^{\mathbb{S}}_{\infty,2\text{-mod}} := \mathcal{A}^{\mathbb{S}}_{\infty,\{e_0,e_1,e_{01}\}} = (V, E, \mathcal{M}, \delta) \tag{6.7}$$

作为定义6.6中对象的一个特例，只需取有向图为 $\{e_0,e_1,e_{01}\}$ 如上所述。具体而言，0-胞腔和水平 1-胞腔的集合分别定义为$V = \{v_0,v_1\}$和$E = \{e_0,e_1,e_{01}\}$。图3.1中图E 的轮廓环只有以下三种可能：

- $v0 \xleftarrow{0} \cdots \xleftarrow{0} v0$
- $v1 \xleftarrow{1} \cdots \xleftarrow{1} v1$
- $v1 \xleftarrow{1} \cdots \xleftarrow{1} v1 \xleftarrow{01} v0 \xleftarrow{0} v_0 \leftarrow \cdots \xleftarrow{0} v0$

因此，根据（3.6），2-胞腔的非空部分只有以下三种可能的类型：

$$\mathcal{M}(\underbrace{e_0,\ldots,e_0}_{n};\ e_0),\qquad \mathcal{M}\ (\underbrace{e_1,\ \cdots,e_1}_{n};e_1),\qquad \mathcal{M}(\underbrace{e_0,\ldots,e_0}_{n_0},\ e_{01}\ ,\ \underbrace{e_1,\ \cdots\cdots,e_1}_{n_1};e_{01})$$

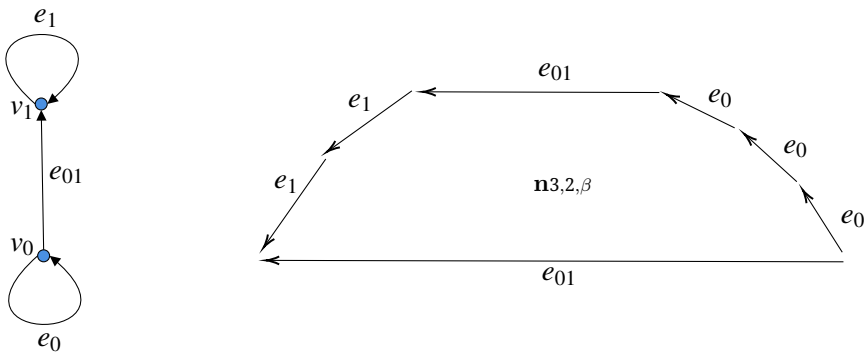


图*6*：左：$\mathcal{A}^{\mathbb{S}}_{\infty,\ 2\text{-}mod}$ 的底层有向图。右：对应于生成元 $\mathbf{n}_{n_0,\ n_1,\ \beta}$ 的 *2*-胞腔。

将 $\theta_e \in \mathbb{S}(e;\ e)$ 记作位于 $e \in E$处的恒等 2-胞腔。略去记号上的区别，$\mathbb{S}$ 中的 2-胞腔复合通常记作 $\beta + \beta' := \beta \circ_i \beta'$。围绕 ($\mathbf{m}^\beta$ 6.5) 的符号可以更明确地描述如下：这些 2-胞腔由 $\mathbb{S}$ 中的非恒等 2-胞腔自由生成，也就是说，我们把 $\mathcal{M}$ 看作由以下符号自由生成：

- $\mathbf{m}(0)_{n\,\beta}$属于 $\mathcal{M}((e0)_n; e0)$，对每个满足 $\beta \neq \theta_{e0}$ 的 $\beta \in \mathbb{S}((e0)_n; e0)$ 均成立；
- $\mathbf{m}(1)_{n\,\beta}$属于 $\mathcal{M}((e1)_n; e1)$，对每个满足 $\beta \neq \theta_{e1}$ 的 $\beta \in \mathbb{S}((e1)_n; e1)$ 均成立；
- $\mathbf{n}_{n_0,\ n_1,\ \beta}$在 $\mathcal{M}((e0)_{n_0},\ e01,\ (e1)_{n^1}; e01)$ 中，对于每个 $\beta \in \mathbb{S}((e0)_{n_0},\ e01,\ (e1)_{n^1}; e01)$，其中 $\beta \neq \theta_{e01}$。

这里的 nu 数 n,n_0,n_1 是冗余的，因为 β可以确定它们，而这些条件可以更

精确地写成 $(n\ \beta) \neq (1,\theta_{e_0}), (n\ \beta) \neq (1,\theta_{e_1}), (n_0,n1,\beta) \neq (0,0,\theta_{e_{01}})$。我们还要求它们的次数都为一：$|\mathbf{m}^{(i)}{}_{n\,\beta}| = |\mathbf{n}_{n_0,n1,\beta}| = 1$。引入定义在 $\mathcal{M}$ 各分量上的微分 $\delta = \{\delta_{\vec{e};e'}\}$，首先在上述生成元上定义为

$$\delta(\mathbf{m}^{(i)}_{n,\beta}) = -\sum_{\substack{r+s+t=n;\ r,s,t\geq 0\\ \beta'+\beta''=\beta}} \mathbf{m}^{(i)}_{r+1+t,\beta'} \circ_{r+1} \mathbf{m}^{(i)}_{s,\beta''},$$

$$\begin{aligned}\delta(\mathbf{n}_{n_0,n_1,\beta}) = &-\sum_{\substack{r_0+s_0+t_0=n_0\\ \beta'+\beta''=\beta}} \mathbf{n}_{r_0+1+t_0,n_1,\beta'} \circ_{r_0+1} \mathbf{m}^{(0)}_{s_0,\beta''}\\ &-\sum_{\substack{r_1+s_1+t_1=n_1\\ \beta'+\beta''=\beta}} \mathbf{n}_{n_0,r_1+1+t_1,\beta'} \circ_{n_0+r_1+2} \mathbf{m}^{(1)}_{s_1,\beta''}\\ &-\sum_{\substack{n_0'+n_0''=n_0\\ n_1'+n_1''=n_1\\ \beta'+\beta''=\beta}} \mathbf{n}_{n_0',n_1',\beta'} \circ_{n_0'+1} \mathbf{n}_{n_0'',n_1'',\beta''}\end{aligned}$$

然后由 Leibniz 型法则 $\delta(\mathbf{u}\circ_i \mathbf{u}') = (\delta\mathbf{u})\circ_i \mathbf{u}' + (-1)^{|\mathbf{u}|}\mathbf{u}\circ_i(\delta\mathbf{u}')$ 完成构造（6.7）。

设（X $\boldsymbol{\alpha}$）是 dg fc-多范畴 $\mathcal{A}^{\mathbb{S}}_{\infty,2\text{-mod}}$ 意义下定义 5.115.11，因此我们有一个 dg fc-多范畴之间的映射：

$$\boldsymbol{\alpha}:\ \mathcal{A}^{\mathbb{S}}_{\infty,2\text{-mod}} \to \widehat{\mathbf{End}}(X)$$

下面我们来逐步展开。首先注意，X 由三个上链复形组成 $(X_i,\mathrm{d}_i) := (X(e_i),\mathrm{d}_{e_i})$，其中 $i = 0,1$，以及 $(X_{01},\mathrm{d}_{01}) := (X(e_{01}),\mathrm{d}_{e_{01}})$。定义算子

$$\mathfrak{m}^{(i)}_{n,\beta} := \alpha(\mathbf{m}^{(i)}_{n,\beta}) : X_i^{\otimes n} \to X_i$$

$$\mathfrak{n}_{n_0,n_1,\beta} := \alpha(\mathbf{n}_{n_0,n_1,\beta}) : X_0^{\otimes n_0}\otimes X_{01}\otimes X_1^{\otimes n_1} \to X_{01}$$

其中 $(n\ \beta) \neq (0,\theta_{e_i}), (1,\theta_{e_i})$ 和 $(n_0,n1,\beta) \neq (0,0,\theta_{e_{01}})$ 按构造定义。我们还定义

$$\mathfrak{m}^{(i)}_{1,\theta_{e_i}} = \mathrm{d}_i\,, \qquad \mathfrak{n}_{0,0,\theta_{e_{01}}} = \mathrm{d}_{01} \tag{6.8}$$

注意 $|\mathfrak{m}^{(i)}| = |\mathfrak{n}| = 1$。由（5.9）、（5.11）和（5.10），我们可以首先证明，算子 $\mathfrak{m}^{(i)}{}_{n\,\beta}$以与（6.3）相同的方式满足 A_∞ 关系。此外，对于 $x1$，……，$x_{n_0}\in X_0, z1$，……，$z_{n_1}\in X_1$，以及$y\ \in X_{01}$，，我们有

$$\begin{aligned}&\alpha(\delta\mathbf{n}_{n_0,n_1,\beta})(x_1,\ldots,x_{n_0},y,z_1,\ldots,z_{n_1})\\ &\quad= \mathrm{d}_{01}\circ\mathfrak{n}_{n_0,n_1,\beta}(x_1,\ldots,z_{n_1}) + \sum(-1)^{\sum_{s=1}^{i-1}|x_s|}\,\mathfrak{n}_{n_0,n_1,\beta}(x_1,\ldots,\mathrm{d}_0x_i,\ldots,x_{n_0},y,\ldots,z_{n_1})\\ &\qquad+\sum(-1)^{\sum_{s=1}^{n_0}|x_s|}\,\mathfrak{n}_{n_0,n_1,\beta}(x_1,\ldots,x_{n_0},\mathrm{d}_{01}y,z_1,\ldots,z_{n_1})\\ &\qquad+\sum(-1)^{\sum_{s=1}^{n_0}|x_s|+\sum_{t=1}^{j-1}|z_t|}\,\mathfrak{n}_{n_0,n_1,\beta}(x_1,\ldots,x_{n_0},y,z_1,\ldots,\mathrm{d}_1z_j,\ldots,z_{n_1})\end{aligned}$$

and

$$
\begin{aligned}
&-\alpha(\delta\mathfrak{n}_{n_0,n_1,\beta})(x_1,\ldots,x_{n_0},y,z_1,\ldots,z_{n_1})\\
=&\sum_{\substack{r_0+s_0+t_0=n_0\\ \beta'+\beta''=\beta\\ (s_0,\beta'')\neq(1,\theta_{e_0})}}(-1)^{\sum_{s=1}^{r_0}|x_s|}\,\mathfrak{n}_{r_0+1+t_0,n_1,\beta'}(x_1,\ldots,x_{r_0},\mathfrak{m}^{(0)}_{s_0,\beta''}(\ldots,x_{r_0+s_0}),\ldots,x_{n_0},y,z_1,\ldots,z_{n_1})\\
+&\sum_{\substack{r_1+s_1+t_1=n_1\\ \beta'+\beta''=\beta\\ (s_1,\beta'')\neq(1,\theta_{e_1})}}(-1)^{\sum_{s=1}^{n_0}|x_s|+|y|+\sum_{t=1}^{r_1}|z_t|}\,\mathfrak{n}_{n_0,r_1+1+t_1,\beta'}(x_1,\ldots,x_{n_0},y,z_1,\ldots,z_{r_1},\mathfrak{m}^{(1)}_{s_1,\beta''}(\ldots,z_{r_1+s_1}),\ldots,z_{n_1})\\
+&\sum_{\substack{n_0'+n_0''=n_0\\ n_1'+n_1''=n_1\\ \beta'+\beta''=\beta\\ (n_0',n_1',\beta')\neq(0,0,\theta_{e_{01}})\\ (n_0'',n_1'',\theta_{e_{01}})\neq(0,0,\theta_{e_{01}})}}(-1)^{\sum_{s=1}^{n_0'}|x_s|}\,\mathfrak{n}_{n_0',n_1',\beta'}(x_1,\ldots,\mathfrak{n}_{n_0'',n_1'',\beta''}(x_{n_0'+1},\ldots,x_{n_0},y,z_1,\ldots,z_{n_1''}),\ldots,z_{n_1})
\end{aligned}
$$

其中符号由（5.9）和（5.11）导出。上述两个计算连同（6.8）蕴含A_∞ 双模方程：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{r_0+s_0+t_0=n_0\\ \beta'+\beta''=\beta}}(-1)^{\sum_{s=1}^{r_0}|x_s|}\,\mathfrak{n}_{r_0+1+t_0,n_1,\beta'}(x_1,\ldots,x_{r_0},\mathfrak{m}^{(0)}_{s_0,\beta''}(\ldots,x_{r_0+s_0}),\ldots,x_{n_0},y,z_1,\ldots,z_{n_1})\\
+&\sum_{\substack{r_1+s_1+t_1=n_1\\ \beta'+\beta''=\beta}}(-1)^{\sum_{s=1}^{n_0}|x_s|+|y|+\sum_{t=1}^{r_1}|z_t|}\,\mathfrak{n}_{n_0,r_1+1+t_1,\beta'}(x_1,\ldots,x_{n_0},y,z_1,\ldots,z_{r_1},\mathfrak{m}^{(1)}_{s_1,\beta''}(\ldots,z_{r_1+s_1}),\ldots,z_{n_1})\\
+&\sum_{\substack{n_0'+n_0''=n_0\\ n_1'+n_1''=n_1\\ \beta'+\beta''=\beta}}(-1)^{\sum_{s=1}^{n_0'}|x_s|}\,\mathfrak{n}_{n_0',n_1',\beta'}(x_1,\ldots,\mathfrak{n}_{n_0'',n_1'',\beta''}(x_{n_0'+1},\ldots,x_{n_0},y,z_1,\ldots,z_{n_1''}),\ldots,z_{n_1})\;=\;0
\end{aligned}
$$

特别地，令$\mathcal{A}_\infty$, 2-mod 表示（6.7）中的 dg fc多范畴，其中取特殊情形：$\mathbb{S}=\mathbf{0}_E$如例3.13所示为平凡情形，且E 为上述具有三条边的图。那么，对于$i=0,\ 1,$ 运算为 $\mathfrak{m}_n^{(i)}$；对于, n_1, 则不带额外的 β标签。上述讨论得到了以下结果：

定理6.8。A_∞ 双模（例如，参见 *[18]*）的概念等价于 dgfc多范畴$\mathcal{A}_\infty$, *2-mod*上的代数。

注6.9。为了对 $\mathbb{S}$中的额外标记有所了解，可以参见例3.11。下面我们还给出一个额外的实用情形。设L_0,L_1 是辛流形（X ω）内彼此横截相交的连通、嵌入、紧致拉格朗日子流形。假设 $\mathrm{H}^2(X;\ \mathbb{Z})$。对于$\mathrm{i}=0,\ 1,$

$$S_i\ :=\ \{\,\omega(\beta)\mid\beta\in\pi_2(X,L_i)\,\}\ \subset\ \mathbb{R}$$

是 $\mathbb{R}$ 的离散子群。令 $\mathbb{R}=\mathbb{R}\cup\{\overline{-}\infty,+\infty\}$，并考虑连续映射 $v\colon[0,1]\times\mathbb{R}\to X$，使得 $v(\{i\}\times\mathbb{R})\ \subset\overline{L}_i$ 且 $v\big([0,1]\times\{\pm\infty\}\big)\ \overline{\in}L_0\cap L_1$。令 $\pi_2(L_0,L_1)$ 表示满足这些边界条件和端点条件的映射的同伦类集合。对于由 $\alpha\in\pi_2(L_0,L_1)$ 表示的

by ν，我们设 $\omega(\alpha) = \int_{[0,1]\times\mathbb{R}} \nu^*\omega$，这一定义良好，因为 $\omega|_{L_0} = \omega|_{L_1} = 0$。于是，

$$S_{01} := \{\, \omega(\alpha) \mid \alpha \in \pi_2(L_0, L_1) \,\} \subset \mathbb{R}.$$

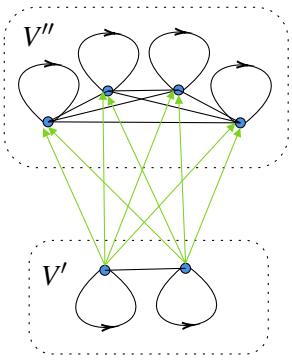
也是 $\mathbb{R}$ 的离散子集。现在我们如下定义一个垂直离散 fc-多范畴 $\mathbb{S} = (\mathrm{V}, \mathrm{E}\ \mathbb{S})$。其底层有向图 (V, E) 如上所述，而非平凡的 2-胞腔只有 $\mathbb{S}\big((\mathrm{e}_0)^n; \mathrm{e}_0\big) = \mathrm{S}0$, $\mathbb{S}\big((\mathrm{e}_1)^n; \mathrm{e}_1\big) = \mathrm{S}_1$, and $\mathbb{S}\big((\mathrm{e}_0)^{n_0}, \mathrm{e}_{01}, (\mathrm{e}_1)^{n_1}; \mathrm{e}_{01}\big) = \mathrm{S}_{01}$。这种标记方式 $\mathbb{S}$ 基本上就是辛几何文献中滤过 A_∞ 双模的概念所采用的方式；参见 [11, 定义 3.7.5]。不过，原则上也可以采用其他的 $\mathbb{S}$ 选择，例如 (4.9) 中的选择，以便在实际应用中追踪额外信息。比如，我们可以分别将上面的 $\mathrm{S}_0, \mathrm{S}_1, \mathrm{S}_{01}$ 替换为 $\pi_2(\mathrm{X}, \mathrm{L}_0)$、$\pi_2(\mathrm{X}, \mathrm{L}_1)$ 和 $\pi_2(\mathrm{L}_0, \mathrm{L}_1)$，从而得到 $\mathbb{S}$ 的另一个例子。

[6.6] A_∞ 双模，定义于一对 A_∞ 范畴之上

我们可以找到第 6.5 节的一个自然推广。设 V 为一个集合。考虑一个划分 $V = V' \sqcup V''$，并定义

$$E = (V' \times V') \sqcup (V' \times V'') \sqcup (V'' \times V'')$$

于是，$E = (V, E)$ 是如下所示的有向图。



在 $\mathrm{V} = \{\mathrm{v}_0, \mathrm{v}_1\}$ 为二元集合这一特殊情形下，这恢复了第 6.5 节中的有向图 $\{\mathrm{e}_0, \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_{01}\}$（参见图6）。为简单起见，我们取 $\mathbb{S} = \mathbf{0}_E$ 为平凡的那个。由 (6.4)，我们可以构成 dg fc-多范畴 $\mathcal{A}_{\infty,\ V'}$ 以及 $\mathcal{A}_{\infty,\ V''}$。根据定义 6.6，我们可以构成一个 dg fc-多范畴 $\mathcal{A}_{\infty,\ E}$。然后，通过与第 6.5 节几乎相同的论证，给出一个 $\mathcal{A}_{\infty,\ E}$-代数等价于指定一个 A_∞ 范畴，其对象集为 V′，一个 A_∞ 范畴，其对象集为 V″，以及一个 A_∞ 双模，它在通常意义下定义于这两个 A_∞ 范畴之上（例如，参见 [16, 定义 2.12]）。

[6.7] A_∞多模

鉴于围绕（4.13）的讨论，引入下面的构造是很自然的。设 V 为一个 Set，并令 $r \geq 1$ 为一个整数。固定一个 $V = \bigsqcup^r{}_{i=1} V^{(i)}$ 划分，并定义

$$E := \bigcup_{j \leq k} V^{(j)} \times V^{(k)}$$

令 $\mathcal{A}_{\infty,E}$ 为按定义 6.6 与 E 相关联的 dg fc-多范畴。于是，我们提议将A_∞ r-模（相对于上述划分）定义为 $\mathcal{A}_{\infty,E}$ 上的代数。当 $r = 2$ 时，这恰好复现了上述A_∞ 双模的概念。

参考文献

[1] J. Boardman 和 R. Vogt。《拓扑空间上的同伦不变代数结构》。《数学讲义》，1973年。[2] A. Burroni。T -cat´egories（cat´égories dans un triple）。《拓扑与微分几何笔记》，12(3):215–321，1971年。[3] G. S. Cruttwell 和 M. A. Shulman。《广义多范畴的统一框架》。arXiv 预印本 arXiv:0907.2460，2009年。[4] K. Fukaya。Morse 同伦、A^∞-范畴与 Floer 同调。载于《GARC 几何与拓扑研讨会'93 论文集》，首尔，1993年，第1–102页。首尔国立大学，1993年。[5] K. Fukaya。拉格朗日 Floer 理论中的循环对称性与 adic 收敛。《京都数学杂志》，50(3):521–590，2010年。[6] K. Fukaya。可微歌剧、Kuranishi 对应与基于伪全纯曲线的拓扑场论基础。《量子化周边的算术与几何》，2010年。[7] K. Fukaya。无障碍浸入拉格朗日对应与滤过的 a-infty 函子。《SIGMA：对称性、可积性与几何：方法与应用》，21:031，2025年。[8] K. Fukaya、Y.-G. Oh、H. Ohta 和 K. On。伪全纯圆盘模空间上 Kuranishi 结构的构造：I。arXiv 预印本 arXiv:1710.01459，2017年。[9] K. Fukaya、Y.-G. Oh、H. Ohta 和 K. On。伪全纯圆盘模空间上 Kuranishi 结构的构造：II。arXiv 预印本 arXiv:1808.06106，2018年。[10] K. Fukaya、Y.-G. Oh、H. Ohta 和 K. Ono。紧致托里克流形上的拉格朗日 Floer 理论，I。《杜克数学杂志》，151(1):23–175，2010年。[11] K. Fukaya、Y.-G. Oh、H. Ohta 和 K. Ono。《拉格朗日交 Floer 理论：反常与障碍，第一部分》，第1卷。美国数学会，2010年。[12] K. Fukaya、Y.-G. Oh、H. Ohta 和 K. Ono。《拉格朗日交 Floer 理论：反常与障碍，第二部分》，第2卷。美国数学会，2010年。[13] K. Fukaya、Y.-G. Oh、H. Ohta 和 K. Ono。紧致托里克流形上的拉格朗日 Floer 理论 II：体变形。《数学精选》，17(3):609，2011年。[14] K. Fukaya、Y.-G. Oh、H. Ohta 和 K. Ono。《紧致托里克流形上的拉格朗日 Floer 理论与镜像对称》。《法国数学会》，2016年。[15] K. Fukaya、Y.-G. Oh、H. Ohta 和 K. Ono。Kuranishi 结构与虚基本链。施普林格，2020年。[16] S. Ganatra。缠绕 Fukaya 范畴的辛上同调与对偶性。arXiv 预印本 arXiv:1304.7312，2013年。[17] C. Hermida。可表示多范畴。《数学进展》，151(2):164–225，2000年。[18] B. Keller。A-无穷代数、模与函子范畴。arXiv 预印本 math/0510508，2005年。[19] S. R. Koudenburg。增广虚拟双范畴。arXiv 预印本 arXiv:1910.11189，2019年。[20] J. Lambek。演绎系统与范畴 II：标准构造与闭范畴。载于《范畴论、同调论及其应用 I》：1968年6月24日至7月19日在巴特尔纪念研究所西雅图研究中心举行的会议论文集，第一卷，第76–122页。施普林格，1968年。[21] T. Leinster。广义 operad 与多范畴。arXiv 预印本 math/9810053，1998年。[22] T. Leinster。fc-多范畴。arXiv 预印本 math/9903004，1999年。

[23] T. Leinster. 范畴与多范畴的广义富集。*arXiv* 预印本 *math/9901139*，1999年。[24] T. Leinster. 高阶拟算子，高阶范畴。第298卷。剑桥大学出版社，2004年。[25] J.-L. Loday 和 B. Vallette。代数拟算子，第346卷。施普林格科学与商业媒体，2012年。[26] M. Markl. 通过拟算子的分解研究同伦代数。*arXiv* 预印本 *math/9808101*，1998年。[27] M. Markl、S. Shnider 和 J. Stasheff. 代数、拓扑学与物理学中的拟算子。数学综述与专著，第96卷，2002年。[28] J. P. May. 迭代环空间的几何，第271卷。施普林格，2006年。[29] H. Nasu. 虚双范畴的逻辑方面。*arXiv* 预印本 *arXiv:2501.17869*，2025年。[30] P. Seidel. *Fukaya*范畴与*Picard–Lefschetz*理论，第10卷。欧洲数学会，2008年。[31] J. D. Stasheff. H空间的同伦结合性，I、II。美国数学会会刊，108(2):275, 293，1963年。[32] H. Yuan. 族Floer计划与非阿基米德SYZ构造。*arXiv* 预印本 *arXiv: 2003.06106*，2020年。[33] H. Yuan. 通过族Floer理论进行圆盘计数与壁穿越现象。固定点理论与应用杂志，24(4):77，2022年。[34] H. Yuan. Hochschild上同调的开闭弦类比。*arXiv* 预印本 *arXiv:2410.20888*，2024年。[35] H. Yuan. 族Floer超势的临界值是量子乘积的特征值，其中乘积由c_1给出。《数学精选》，31(1):13，2025年。[36] H. Yuan. 无阻碍性的非阿基米德解析延拓。《量子拓扑》，2025年。

北京数学科学与应用研究院（*BIMSA*），北京，*101408*，中国；电子邮箱：*yuanhang@bimsa.cn*