步自动机

— Yong Wang —

arXiv:2603.08043v1 [cs.LO] 9 Mar 2026

目录

1 引　　言　　1

2 预备知识　　2

2.1 集合与语言.2 2.2 自动机.3

3 串并有理语言及其代数 5

3.1 偏序多重集与步.5 3.2 串并有理语言.6 3.3 模语言等价的代数.7 3.4 串并有理系统.9

4 步自　　动机　　10

4.1 表达式到自动机.12 4.2 自动机到表达式.14

5 步 T　　uring 机器　　15

5.1 步进图灵机.15 5.2 丘奇-图灵论题.18

1 引言

对于计算，已有图灵机 [1] [2] 以及后来成熟的自动机理论。对于低级并行计算，已有图灵机的变体，例如双带图灵机 [3] 和多带图灵机 [4]。在文献中，计算与并发的结合仍然活跃，例如自动机与进程的结合 [5][6] [7] [8] [9] [10] [11], ，以及将并发引入自动机：所谓的 pomset 自动机 [12] [13] [14] [15] 和分支自动机 [16] [17] [18] [19]。

然而，图灵机与并发自动机之间的联系仍然缺失。本文提出步进自动机和步进图灵机（STM）的概念，它们是传统自动机和经典图灵机的自然扩展，只允许自动机或图灵机执行一组原子动作（这些动作之间没有偏序关系）。

作为一种自然的并行计算模型，我们相信，未来 STM 至少可用于以下两种场景：

1. 可用于分析计算的并行复杂度。目前，并行复杂度分析的主要工具是电路复杂度。由于电路可以自然地建模为 STM，我们相信，通过电路得到的并行复杂度结果也可以通过 STM 重新获得。或许还能得到更多结果，但我们尚不清楚。

2. 神经网络的可计算性，尤其是循环神经网络（RNN）的可计算性，已基于不同类型的权重和不同精度进行了深入探究 [20] 。Transformer 的出现 [21] 为并行性提供了支持，使大规模训练成为可能。分析 Transformer 的可计算性时，除了考虑其基于无限精度的图灵完备性 [24]，还应考虑其并行性特征 [22][23], 。Transformer 的并行性特征应与 STM 的并行性特征相匹配；也就是说，STM 为分析 Transformer 的可计算性提供了一种新工具，这将留待未来工作探讨。

2 预备知识

为使内容自足，本节将在第 2.1 节介绍集合与语言的预备知识，并在第 2.2 节介绍自动机。

2.1 集合与语言

定义 2.1（集合）。集合包含一些对象，令 {–} 表示一个集合的内容。例如，$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$。令 $a \in A$ 表示 a 是集合 A 的一个元素，令 $a \notin A$ 表示 a 不是集合 A 的一个元素。对于所有 $a \in A$，如果我们能够得到 $a \in B$，那么就称 A 是 B 的子集，记作 $A \subseteq B$。如果 $A \subseteq B$ 和 $B \subseteq A$，那么 $A = B$。我们可以利用已有集合上的谓词定义一个新集合，例如，偶数集合可表示为 $\{n \in \mathbb{N} | \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k\}$。我们也可以将一个集合指定为满足某些归纳推理规则的最小集合，例如，我们指定偶数集合 A 满足以下规则：

$$\frac{}{0 \in A} \qquad \frac{n \in A}{n + 2 \in A}$$

定义 2.2（集合复合）。两个集合 A 和 B 的并集记作 $A \cup B = \{a | a \in A$ 或 $a \in B\}$，A 和 B 的交集记作 $A \cap B = \{a | a \in A$ 和 $a \in B\}$，A 和 B 的差集记作 $A \setminus B = \{a | a \in A$ 和 $a \notin B\}$。空集 $\varnothing$ 不包含任何元素。集合 A 的所有子集构成的集合称为 A 的幂集，记作 2^A。

定义 2.3（元组）。元组是由对象构成的有限有序列表，记作 –。对于集合 A 和 B，A 和 B 的笛卡尔积记作 $A \times B = \{a, b | a \in A, b \in B\}$。$A^n$ 是集合 A 的 n 重笛卡尔积，例如 $A^2 = A \times A$。对于集合 A、B 和 C，元组可以展平为 $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C = A \times B \times C$。

定义 2.4（关系）。集合 A 与 B 之间的关系 R 是 $A \times B$ 的子集，即 $R \subseteq A \times B$。如果 R 是 A 与自身之间的关系，我们称 R 是集合 A 上的关系，并且，

- 如果对所有 $a \in A$，aRa 都成立，则称 R 是自反的；如果对所有 $a \in A$，aRa 都不成立，则称其为反自反的。
- 如果对所有 a，当 $a\prime \in A$ 且 $aRa\prime$ 时，$a\prime Ra$ 都成立，则称 R 是对称的；如果对所有 a，当 $a\prime \in A$ 且 $aRa\prime$ 和 $a\prime Ra$ 时，$a = a\prime$，则称其为反对称的。
- 如果对所有 a，当 $a\prime a\prime\prime \in A$ 且 $aRa\prime$ 和 $a\prime Ra\prime\prime$ 时，$aRa\prime\prime$ 都成立，则称 R 是传递的。

定义 2.5（预序、偏序、严格序）。如果关系 R 是自反的且传递的，则称其为预序；如果它是预序且反对称的，则称其为偏序，而偏序集（poset）是一个二元组 A, R，其中 A 是集合，R 是 A 上的偏序；如果它是反自反且传递的，则称其为严格序。

定义 2.6（等价关系）。如果关系 R 是自反、对称且传递的，则称其为等价关系。对于等价关系 R 和集合 A，$[a]_R = \{a' \in A | aRa'\}$ 称为 $a \in A$ 的等价类。

定义 2.7（关系复合）。对于集合 A、B 和 C，以及关系 $R \subseteq A \times B$ 和 $R' \subseteq B \times C$，关系复合记作 $R \bigcirc R'$，定义为满足 $a(R \bigcirc R')c$ 的最小关系

满足 aRb 和 $bR'c$，其中 $a \in A$、$b \in B$ 和 $c \in C$。对于集合 A 上的关系 R，我们将 R^* 记作 R 的自反传递闭包，即包含 R 的 A 上的最小自反传递关系。

定义 2.8（函数）。从集合 $f : A \to B$ 到 B 的函数 A 是 A 与 B 之间的一种关系；也就是说，对于每个 $a \in A$，都存在唯一的一个 $b = f(a) \in B$，其中 A 称为 f 的定义域，B 称为 f 的陪域。$[\![-]\!]$ 也用作带有占位符 $-$ 的函数，即 $[\![x]\!]$ 是 $[\![-]\!]$ 在输入 x 时的值。如果对于每个 $b \in B$，都恰好存在一个 $a \in A$ 使得 $b = f(a)$，则函数 f 是一个双射。对于函数 $f : A \to B$ 和 $g : B \to C$，f 与 g 的函数复合记作 $g \bigcirc f$，满足 $(g \bigcirc f)(a) = g(f(a))$，其中 $a \in A$。

定义 2.9（偏序集态射）。对于偏序集 $A, \leq$ 和 $A', \leq'$，以及函数 $f : A \to A'$，若对于 a_0、$a_1 \in A$，当 $a_0 \leq a_1$ 时，$f(a_0) \leq' f(a_1)$ 成立，则称 f 为偏序集态射。

定义 2.10（多重集）。多重集是一种对象集合，其中对象可以重复，记作 $\{\!|-|\!\}$，因此 $\{\!|0, 1, 1|\!\}$ 与 $\{\!|0, 1|\!\}$ 有显著区别。

定义 2.11（字母表、字、语言）。字母表 Σ 是一个（可能无限的）符号集合。在某个字母表 Σ 上的字，是由 Σ 中的符号组成的有限序列。字可以进行水平连接，水平连接算子记作 $\cdot$，例如 $ab \cdot c = abc$。空字记作 1，对于字 $1 \cdot w = w = w \cdot 1$。对于 $n \in \mathbb{N}$ 和 $a \in \Sigma$，a^n 是 a 的 n 次水平连接，其中 $a^0 = 1$ 和 $a^{n+1} = a \cdot a^n$。字也可以进行垂直连接，垂直连接算子记作 $\|$，例如 $a \parallel b \parallel c$。对于字 w，$1 \parallel w = w = w \parallel 1$。对于 $n \in \mathbb{N}$ 和 $a \in \Sigma$，$a^{\langle n \rangle}$ 是 a 的 n 次垂直连接，其中 $a^{\langle 0 \rangle} = 1$ 和 $a^{\langle n+1 \rangle} = a \parallel a^{\langle n \rangle}$。语言是字的集合，字母表 Σ 上所有字组成的语言记作 $\Sigma^{\langle * \rangle^*}$。

定义 2.12（表达式）。表达式由固定字母表上的函数符号和常量归纳构造。例如，给定某个固定变量集 V，其上的数值表达式集合定义为满足以下推理规则的最小集合 $\mathbf{T}$:

$$\frac{n \in \mathbb{N}}{n \in \mathcal{T}} \quad \frac{v \in V}{v \in \mathcal{T}} \quad \frac{x, y \in \mathcal{T}}{x + y \in \mathcal{T}} \quad \frac{x, y \in \mathcal{T}}{x \times y \in \mathcal{T}} \quad \frac{x \in \mathcal{T}}{-x \in \mathcal{T}}$$

The 上述推理规则等价于以下巴科斯-诺尔范式（BNF）文法 *r.*

$$\mathcal{T} \ni x, y ::= n \in \mathbb{N} | v \in V | x + y | x \times y | -x$$

定义 2.13（同余、预同余）。表达式集合上的关系 R 若为与算子相容的等价关系，则称为同余；表达式集合上的关系 R 若为与算子相容的预序，则称为预同余。

2.2 自动机

定义 2.14（自动机）。自动机是一个元组 $A = (Q, F, \delta)$，其中 Q 是状态的有限集，$F \subseteq Q$ 是终止状态集合，δ 是 A 和 $\delta \subseteq (Q \setminus F) \times \Sigma \times Q$ 的转移有限集。

众所周知，自动机识别有理语言。

定义 2.15（转移关系）。设 p、$q \in Q$。我们将 A 上的转移关系 $\text{Đ}_A^{\to} \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ 定义为满足以下条件的最小关系：

1. $p\ {}^{1}\text{Đ}_A^{\to}\ p$ 对所有 $p \in Q$；2. $p\ {}^{a}\text{Đ}_A^{\to}\ q$ 当且仅当 $(p, a, q) \in \delta$。

3 串并有理语言及其代数

本节将介绍串并有理语言，以及模语言等价关系的代数，称为并发克莱尼代数（CKA）。我们将在第 3.1 节介绍偏序多重集和步的概念。在第 3.2 节介绍串并有理语言，在第 3.3 节介绍 CKA，并在第 3.2 节介绍串并有理系统。

3.1 偏序多重集与步

定义 3.1（标记偏序集）。标记偏序集是一个元组 $\mathbf{u} = S, \leq, \lambda$，其中 S 是承载集，$\leq$ 是 S 上的偏序，λ 是标记函数 $\lambda : S \to \Sigma$。

对于标记偏序集 u，$S_{\mathbf{u}}$、$\leq_{\mathbf{u}}$ 和 $\lambda_{\mathbf{u}}$ 分别表示 u 的承载集、偏序和标记。标记偏序集的集合记为 LP，空标记偏序集记为 1。

定义 3.2（标记偏序集同构）。设 $\mathbf{u} = S_1, \leq_1, \lambda_1$ 和 $\mathbf{v} = S_2, \leq_2, \lambda_2$ 是标记偏序集。标记偏序集态射 h 从 $\mathbf{u} = S_1, \leq_1, \lambda_1$ 到 $\mathbf{v} = S_2, \leq_2, \lambda_2$，是从 $S_1, \leq_1$ 到 $S_2, \leq_2$ 的偏序集态射，且满足 $\lambda_2 \bigcirc h = \lambda_1$。此外，如果 h 是双射，且 h^{-1} 是从 $S_2, \leq_2, \lambda_2$ 到 $S_1, \leq_1, \lambda_1$ 的偏序集同构，则称其为标记偏序集同构。若存在 $S_1, \leq_1, \lambda_1$ 与 $S_2, \leq_2, \lambda_2$ 之间的偏序集同构 h，则称 $\mathbf{u} = S_1, \leq_1, \lambda_1$ 与 $\mathbf{v} = S_2, \leq_2, \lambda_2$ 同构，记作 $S_1, \leq_1, \lambda_1 \sim S_2, \leq_2, \lambda_2$。

It 很容易看出，~是一个等价关系，可用于对载体进行抽象 s.

定义 3.3（偏序多重集与步）。偏序多重集（pomset）是标记偏序集的 ~-等价类。$\mathbf{u} \in$ LP 的 ~-等价类记作 [u]；偏序多重集的集合记作 Pom；空标记偏序集记作 1，而 1 的 ~-等价类记作 1；恰好包含一个动作 $a \in \Sigma$ 的偏序多重集称为本原元。包含的动作两两之间不存在偏序的偏序多重集，即 $\leq_{\mathbf{u}} = \varnothing$，称为步。通常，我们将一个偏序多重集 $U \in$ Pom 记作 $\{a_1, \cdots, a_n|\}$，将一个步记作 $|a_1, \cdots, a_n|$，其中 a_1、$\cdots$、$a_n \in \Sigma$ 和 $n \in \mathbb{N}$。

定义 3.4（偏序多重集的并行组合）。设 U、$V \in$ 为 Pom，且 $U =$ [u] 和 $V =$ [v]。我们将 $U \parallel V$ 记作 U 与 V的并行组合，即由 $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$ 表示的偏序多重集，其中

$$S_{\mathbf{u}\parallel\mathbf{v}} = S_{\mathbf{u}} \cup S_{\mathbf{v}} \qquad \leq_{\mathbf{u}\parallel\mathbf{v}} = \leq_{\mathbf{u}} \cup \leq_{\mathbf{v}} \qquad \lambda_{\mathbf{u}\parallel\mathbf{v}}(x) = \begin{cases} \lambda_{\mathbf{u}} & x \in S_{\mathbf{u}} \\ \lambda_{\mathbf{v}} & x \in S_{\mathbf{v}} \end{cases}$$

定义 3.5（偏序多重集的顺序组合）。设 U、$V \in$ 为 Pom，且 $U =$ [u] 和 $V =$ [v]。我们将 $U \cdot V$记作 U与 V的顺序组合，即由 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ 表示的偏序多重集，其中

$$S_{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}} = S_{\mathbf{u}} \cup S_{\mathbf{v}} \qquad \leq_{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}} = \leq_{\mathbf{u}} \cup \leq_{\mathbf{v}} \qquad \lambda_{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}(x) = \begin{cases} \lambda_{\mathbf{u}} & x \in S_{\mathbf{u}} \\ \lambda_{\mathbf{v}} & x \in S_{\mathbf{v}} \end{cases}$$

以下定义和结论来自 [25], ，我们将其重新输入。

定义 3.6（偏序多重集类型）。设 $U \in$Pom，若存在非空偏序多重集 U_1 和 U_2，使得 $U = U_1 \cdot U_2$（分别为 $U = U_1 \parallel U_2$），则称 U 是顺序的（分别为并行的）。

定义 3.7（分解）。设 $U \in \mathsf{Pom}$。（1）当 $U = U_1 \cdot \cdots \cdot U_i \cdot \cdots \cdot U_n$ 且每个 U_i 都是非顺序且非空的，序列 U_1、…、U_i、…、U_n 称为 U 的串行分解。（2）当 $U = U_1 \parallel \cdots \parallel U_i \parallel \cdots \parallel U_n$ 且每个 U_i 都是非并行且非空的，多重集 $\{\!|U_1$、…、U_i、…、$U_n|\!\}$ 称为 U 的并行分解。

引理 3.8（分解）。顺序分解和并行分解唯一存在。

3.2 串并有理语言

定义 3.9（串并偏序多重集）。串并偏序多重集的集合，或记为 SP 的串并偏序多重集，是满足以下规则的最小集合:

$$\frac{}{1 \in \mathsf{SP}} \quad \frac{a \in \Sigma}{a \in \mathsf{SP}} \quad \frac{U, V \in \mathsf{SP}}{U \cdot V \in \mathsf{SP}} \quad \frac{U, V \in \mathsf{SP}}{U \parallel V \in \mathsf{SP}}$$

定义 3.10（N形）。设 $U = [\mathrm{u}]$ 为一个偏序多重集。U 中的一个 N形是由互异点构成的四元组 u_0、u_1、u_2、$u_3 \in S_{\mathbf{u}}$，使得 $u_0 \leq_{\mathbf{u}} u_1$、$u_2 \leq_{\mathbf{u}} u_3$和 $u_0 \leq_{\mathbf{u}} u_3$，且它们之间不存在其他关系。若偏序多重集 U 不含 N形，则称其为无N形。

定理 3.11（N形）。一个偏序多重集是串并的，当且仅当它在定义 ?? 中是无N形的。

定义 3.12（偏序多重集语言）。偏序多重集语言是偏序多重集的集合。由串并偏序多重集构成的偏序多重集语言称为串并通信并行语言，简称串并语言。

定义 3.13（偏序多重集语言组合）。令 $L, K \subseteq \mathsf{Pom}$。于是我们定义如下组合。

$$L + K = L \cup K \quad L \cdot K = \{U \cdot V : U \in L, V \in K\} \quad L \parallel K = \{U \parallel V : U \in L, V \in K\}$$

$$L^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n \ \textit{where}\ L^0 = \{1\}\ \textit{and}\ L^{n+1} = L^n \cdot L$$

$$L^{\langle * \rangle} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^{\langle n \rangle} \ \textit{where}\ L^{\langle 0 \rangle} = \{1\}\ \textit{and}\ L^{\langle n+1 \rangle} = L^{\langle n \rangle} \parallel L$$

定义 3.14（偏序多重集语言替换）。令 Δ 为一个字母表。替换是一个函数 $\zeta : \Sigma \to 2^{\mathsf{Pom}(\Delta)}$，并将其提升到 $\zeta : \mathsf{Pom}(\Delta) \to 2^{\mathsf{Pom}(\Delta)}$:

$$\zeta(1) = \{1\} \quad \zeta(U \cdot V) = \zeta(U) \cdot \zeta(V) \quad \zeta(U \parallel V) = \zeta(U) \parallel \zeta(V)$$

我们定义串并有理（spr-）表达式的语法和语言语义。

定义 3.15（spr 表达式的语法）。我们将 spr 表达式的集合 T_{SPR} 定义如下。

$$\mathcal{T}_{SPR} \ni x, y ::= 0 | 1 | a, b \in \Sigma | x + y | x \cdot y | x^* | x \parallel y | x^{\langle * \rangle}$$

$$[\![0]\!]_{SPR} = \varnothing \quad [\![a]\!]_{SPR} = \{a\} \quad [\![x \cdot y]\!]_{SPR} = [\![x]\!]_{SPR} \cdot [\![y]\!]_{SPR}$$
$$[\![1]\!]_{SPR} = \{1\} \quad [\![x + y]\!]_{SPR} = [\![x]\!]_{SPR} + [\![y]\!]_{SPR} \quad [\![x^*]\!]_{SPR} = [\![x]\!]^*_{SPR}$$
$$[\![x \parallel y]\!]_{SPR} = [\![x]\!]_{SPR} \parallel [\![y]\!]_{SPR} \quad [\![x^{\langle * \rangle}]\!]_{SPR} = [\![x]\!]^{\langle * \rangle}_{SPR}$$

表 1：spr 表达式的语言语义

在 spr 表达式的定义中，原子动作包括 a、$b \in \Sigma$ 中的动作；常量 0 表示无动作，不具有任何行为；常量 1 表示空动作，会立即成功终止。运算符 $+$ 表示选择组合，即程序 $x + y$ 或执行 x，或执行 y。运算符 $\cdot$ 表示顺序组合，即程序 $x \cdot y$ 先执行 x，然后执行 y。克莱尼星 x^* 可按顺序执行若干次 x（也可以执行零次）。运算符 $\parallel$ 表示并行组合，即程序 $x \parallel y$ 并行执行 x 和 y。并行星 $x^{\langle * \rangle}$ 可并行执行若干次 x（也可以执行零次）。

定义 3.16（spr 表达式的语言语义）。我们按照表 1 所示，归纳地定义 spr 表达式 $[\![-]\!]_{SPR} : \mathsf{T}_{SPR} \to 2^{\mathsf{SCP}}$ 的解释。

3.3 模语言等价代数

我们将并发克莱尼代数（CKA）定义为一个元组 $(\Sigma, +, \cdot, ^*, \parallel, ^{\langle * \rangle}, 0, 1)$，其中 Σ 是一个字母表，* 和 $^{\langle * \rangle}$ 是一元算子，$+$、$\cdot$ 和 $\parallel$ 是二元运算符，0 和 1 是常量；对于所有 x、y、z、$h \in \mathsf{T}_{SPR}$，该代数均满足表 2 中的公理，其中 $x \leqq y$ 表示 $x + y = y$。

由于语言等价是关于并发克莱尼代数算子的同余，我们只需根据 spr 表达式语义的定义来检验表 2 中每条公理的可靠性。由此可得如下可靠性与完备性定理 [26] [27] [25]。

定理 3.17（并发克莱尼代数的可靠性与完备性）。对所有 x，$y \in \mathsf{T}_{SPR}$，$x = y$ 当且仅当 $[\![x]\!]_{SPR} = [\![y]\!]_{SPR}$。

定理 3.18。设 x，$y \in \mathsf{T}_{SPR}$。$[\![x]\!]_{SPR} = [\![y]\!]_{SPR}$ 是否成立是可判定的。

定义 3.19。我们将 F_{SPR} 定义为满足以下规则的 T_{SPR} 的最小子集：

$$\frac{}{1 \in \mathcal{F}_{SPR}} \quad \frac{x \in \mathcal{F}_{SPR} \quad y \in \mathcal{T}_{SPR}}{x + y \in \mathcal{F}_{SPR} \quad y + x \in \mathcal{F}_{SPR}} \quad \frac{x \in \mathcal{T}_{SPR}}{x^* \in \mathcal{F}_{SPR} \quad x^{\langle * \rangle} \in \mathcal{F}_{SPR}}$$
$$\frac{x \in \mathcal{F}_{SPR} \quad y \in \mathcal{F}_{SPR}}{x \cdot y \in \mathcal{F}_{SPR} \quad x \parallel y \in \mathcal{F}_{SPR}}$$

编号。公理			
$A1$	$x + y = y + z$		
$A2$	$x + (y + z) = (x + y) + z$		
$A3$	$x + x = x$	$A4$	$(x + y)$
$\cdot z = x \cdot z + y \cdot z$	$A5$	$x \cdot (y + z)$	
$= x \cdot y + x \cdot z$	$A6$	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$	
$A7$	$x + 0 = x$	$A8$	$0 \cdot x = 0$
$A9$	$x \cdot 0 = 0$	$A10$	$x \cdot 1 = x$
$A11$	$1 \cdot x = x$	$P1$	$x \parallel y = y \parallel x$
$P2$	$x \parallel (y \parallel z) = (x \parallel y) \parallel z$	$P3$	(
$x + y) \parallel z = x \parallel z + y \parallel z$	$P4$	$x \parallel ($	
$y + z) = x \parallel y + x \parallel z$	$P5$	$(x \parallel y) \cdot (z \parallel h)$	
$\leqq (x \cdot z) \parallel (y \cdot h)$	$P6$	$x \parallel 0 = 0$	
$P7$	$0 \parallel x = 0$	$P8$	$x \parallel 1 = x$
$P9$	$1 \parallel x = x$	$A12$	$1 + x \cdot x^* = x^*$
$A13$	$1 + x^* \cdot x = x^*$		
$A14$	$x + y \cdot z \leqq z \Rightarrow y^* \cdot x \leqq z$		
$A15$	$x + y \cdot z \leqq y \Rightarrow x \cdot z^* \leqq y$		
$P10$	$1 + x \parallel x^{\langle * \rangle} = x^{\langle * \rangle}$		
$P11$	$1 + x^{\langle * \rangle} \parallel x = x^{\langle * \rangle}$		
$P12$	$x + y \parallel z \leqq z \Rightarrow y^{\langle * \rangle} \parallel x \leqq z$		
$P13$	$x + y \parallel z \leqq y \Rightarrow x \parallel z^{\langle * \rangle} \leqq y$		

表 2：模语言等价的并发克莱尼代数公理

3.4 串并有理系统

定义 3.20（语言等价意义下的串并有理系统）。设 Q 是一个有限集。定义在 Q 上的语言等价意义下的串并有理系统，或称语言等价意义下的spr系统，是一个对 $\mathsf{S} = M, b$，其中 $M : Q^2 \to \mathsf{T}_{SPR}$ 且 $b : Q \to \mathsf{T}_{SPR}$。设 $=$ 是 $\mathsf{T}_{SPR}(\Delta)$ 上的一个并发克莱尼代数语言等价关系，且 $\Sigma \subseteq \Delta$。若对于 $q \in Q$: ，我们称 $s : Q \to \mathsf{T}_{SPR}(\Delta)$ 是 S 的一个 $=$-解

$$b(q) + \sum_{q' \in Q} M(q, q') \cdot s(q') \leqq s(q)$$

最后，如果对于每个这样的解 s' 和每个 $q \in Q$，都有 $s(q) \leqq s'(q)$，则 s 是最小的 $=$-解。

定理 3.21。设 $\mathsf{S} = M, b$ 是一个关于 Q 模语言等价的串并有理系统。我们可以构造一个 $s : Q \to \mathsf{T}_{SPR}$，使得对于 $\mathsf{T}_{SPR}(\Delta)$ 上的任意 CKA 等价关系 $=$，满足 $\Sigma \subseteq \Delta$，以及任意 $x \in \mathsf{T}_{SPR}$， Q-向量 $s : Q \to \mathsf{T}_{SPR}$ 是 S 的最小 $=$-解；我们称这样的 s 为 S 的最小解。

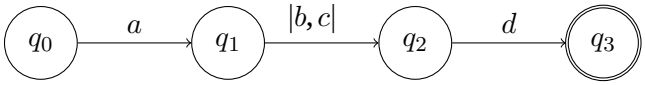

图1：串行自动机接受 $a \cdot (b \parallel c) \cdot d$。

4 步自动机

本节将介绍所谓的步自动机，它能够恰好接受串并有理（spr）语言。我们将在第 4.1 节介绍从表达式到 SA 的过程，并在第 4.2 节介绍从 SA 到表达式的过程。

定义 4.1（步进自动机）。一个步进自动机（串行自动机）是元组 $A = (Q, F, \delta, \gamma)$，其中 e:

1. Q 是状态的有限集。2. $F \subseteq Q$ 是接受状态的集合。3. $\delta : (Q \setminus F) \times \Sigma \to 2^Q$ 是顺序转移函数，即传统克莱尼自动机的转移。4. $\gamma : (Q \setminus F) \times U \to 2^Q$ 是步转移函数，其中 $U \in \mathrm{SCP}(\Sigma)$，且 $\mathrm{SCP}(\Sigma)$ 是 Σ 的串并步，即一个动作步。

接受 $a \cdot (b \parallel c) \cdot d$ 的串行自动机在图 1 中给出。

定义 4.2（运行关系）。设 $\mathrm{SCP}(\Sigma)$ 是 Σ, $a \in \Sigma$, $q, q' \in Q$ and$U \subseteq \mathrm{SCP}(\Sigma)$ 的串并步。我们将串行自动机 A 上的运行关系 $\xrightarrow[A]{} \subseteq Q \times \mathrm{SCP}(\Sigma) \times Q$ 定义为满足以下条件的最小关系：

1. $q \xrightarrow[A]{1} q$ *for all* $q \in Q$.
2. $q \xrightarrow[A]{a} q'$ *if and only if* $q' \in \delta(q, a)$.
3. $q \xrightarrow[A]{U} q'$ *if and only if* $q' \in \gamma(q, U)$.

每个 $q \xrightarrow{1}_A q$, $q \xrightarrow{a}_A q'$ 和 $q \xrightarrow{U}_A q'$ 都称为单位运行。

定义 4.3（路径）。设 $A = (Q, F, \delta, \gamma)$ 是一个串行自动机。我们将运行关系 $\to$ 推广到路径 $\twoheadrightarrow$；对于 $w \in \mathrm{SCP}(\Sigma)^*$ 和 $q_i, q_j \in Q$，则 $q_i \xrightarrow{w}_A q_j$ 表示一条从 q_i 到 q_j、标签为 w 的路径，可按如下方式推导：

1. 对所有 $q \in Q$，均有 $q \xrightarrow{1}_A q$。2. 对所有 q_i、q_j、$q_k \in Q$，若 $q_i \xrightarrow{U}_A q_j$ 且 $q_j \xrightarrow{w}_A q_k$，则 $q_i \xrightarrow{Uw}_A q_k$。

定义 4.4（串行自动机的语言）。串行自动机 $A = (Q, A, \delta, \gamma)$ 接受的语言为 $q \in Q$，即集合 $L_A(q) = \{w \in \mathrm{SCP}(\Sigma)^* : q \overset{w}{\text{ÐÐ}\twoheadrightarrow}_A q' \in F\}$。

已经证明，所谓的良嵌套部分有序多重集自动机 [25] 恰好接受串并有理（spr）语言。接下来，我们扩展来自 [25] 的相关概念与结论，并证明良嵌套串行自动机恰好接受串并有理（spr）语言。

定义 4.5（支撑关系）。A 的支撑关系 $\preceq$ 是 Q上的最小预序，并且对于 $q \in Q$:

$$\frac{a \in \Sigma \quad q' \in \delta(q, a)}{q' \preceq_A q}$$

$$\frac{U \in \mathrm{SCP}(\Sigma) \quad q' \in \gamma(q, U)}{q' \preceq_A q}$$

若 $q' \preceq_A q$ 且 $q \not\preceq_A q'$，则 $q' \prec_A q$ 成立，我们称其为严格支撑关系 $\prec_A$。

定义 4.6（支撑）。若对所有满足 $q' \preceq_A q$ 的 $q \in Q'$ 都有 $q' \in Q'$，则 $Q' \subseteq Q$ 是支撑闭合的。$q \in Q$ 的支撑记为 $\pi_A(q)$，是包含 q的最小支撑闭合集合。

定义 4.7（有界）。若对 A中的所有 $q \in Q$， $\pi_A(q)$都是有限的，则称 A 是有界的。

并行星允许无界数量的事件并行发生，因此我们需要以下概念。

定义 4.8（部分有序多重集宽度）。有限偏序多重集 $U = [\mathrm{u}] \in \mathrm{Pom}$ 的宽度是最大 $\preceq_{\mathbf{u}}$-反链的大小。

定义 4.9（部分有序多重集深度）。$U \in \mathrm{SCP}$ 的深度记为 $d(U)$，归纳定义如下:

1. 若 U 为空或为本原元，则 $d(U) = 0$。2. 若 U是顺序的，且其串行分解为 $U_1, \cdots, U_n$，则 $d(U) = 1 + \max_{1 \le i \le n} d(U_i)$。3. 若 U是并行的，且其并行分解为 $\{U_1, \cdots, U_n\}$，则 $d(U) = 1 + \max_{1 \le i \le n} d(U_i)$。

定义 4.10（递归状态）。设 $A = (Q, F, \delta, \gamma)$ 为一个串行自动机， $q \in Q$ 是递归的 i f:

1. 对所有 $a \in \Sigma$, $q' \in \delta(q, a)$，有 $q' \prec_A q$。2. 对所有 $U \in \mathrm{SCP}(\Sigma)$， $q' \in \gamma(q, U)$，有 $q' \prec_A q$。

定义 4.11（良嵌套性）。设 $A = (Q, F, \delta, \gamma)$ 是一个串行自动机，若每个状态都是递归的，则 A 是良嵌套的。

引理 4.12. 设串行自动机 $A = (Q, F, \delta, \gamma)$ 和 $A[Q'] = (Q', F \cap Q', \delta', \gamma')$，若 Q' 支撑闭合且 A 良嵌套，则 $A[Q']$ 良嵌套。

4.1 表达式到自动机

给定一个 spr 表达式 x，我们将说明如何构造一个良嵌套的有限 SA，使某个状态接受 $[\![x]\!]_{SPR}$。与接受 spr 表达式的 pomset 自动机构造过程类似，我们首先构造所谓的串并联有理语法步自动机。

定义 4.13（串并联有理语法步自动机）。令 $x \in \mathrm{T}_{SPR}$和 $S \subseteq \mathrm{T}_{SPR}$：(1)$x \star S = S$，如果 $x \in \mathrm{F}_{SPR}$；(2) $x \star S = \varnothing$，否则。我们将串并联有理语法 SA 定义为 $A_{SPR} = (\mathrm{T}_{SPR}, \mathrm{F}_{SPR}, \delta_{SPR}, \gamma_{SPR})$，其中 $\delta_{SPR} : \mathrm{T}_{SPR} \times \Sigma \to 2^{\mathcal{T}_{SPR}}$按以下方式归纳定义。

$$\delta_{SPR}(0,a) = \varnothing \quad \delta_{SPR}(1,a) = \varnothing \quad \delta_{SPR}(b,a) = \{1 : a = b\}$$
$$\delta_{SPR}(x+y,a) = \delta_{SPR}(x,a) \cup \delta_{SPR}(y,a) \quad \delta_{SPR}(x \cdot y,a) = \delta_{SPR}(x,a) \fatsemi y \ \cup \ x \star \delta_{SPR}(y,a)$$
$$\delta_{SPR}(x^*,a) = \delta_{SPR}(x,a) \fatsemi x^* \quad \delta_{SPR}(x^{\langle * \rangle},a) = \varnothing \quad \delta_{SPR}(x \parallel y,a) = \varnothing$$

$\gamma_{SPR} : \mathrm{T}_{SPR} \times U \to 2^{\mathcal{T}_{SPR}}$按以下方式归纳定义。

$$\gamma_{SPR}(0,U) = \varnothing \quad \gamma_{SPR}(1,U) = \varnothing \quad \gamma_{SPR}(U,V) = \{1 : U \sim V\}$$
$$\gamma_{SPR}(x+y,U) = \gamma_{SPR}(x,U) \cup \gamma_{SPR}(y,U) \quad \gamma_{SPR}(x \cdot y,U) = \gamma_{SPR}(x,U) \fatsemi y \ \cup \ x \star \gamma_{SPR}(y,U)$$
$$\gamma_{SPR}(x^*,U) = \gamma_{SPR}(x,U) \fatsemi x^* \quad \gamma_{SPR}(x^{\langle * \rangle},U) = \{1 : U = \langle\!|x, x^{\langle * \rangle}|\!\rangle\} \ \cup \ \{1\} \fatsemi \gamma_{SCPR}(x^{\langle * \rangle},U)$$
$$\gamma_{SPR}(x \parallel y,U) = \{1 : U = \langle\!|x,y|\!\rangle\} \ \cup \ \{U\} \fatsemi \gamma_{SCR}(x' \parallel y', U') \ with \ x \parallel y = U \cdot (x' \parallel y')$$

引理 4.14。令 $x_1, x_2 \in \mathrm{T}_{SPR}$且 $w \in \mathrm{SCP}(\Sigma)^*$。以下两个结论等价：

1. 存在一个 $y \in \mathrm{F}_{SPR}$，使得 $x_1 + x_2 \ {}^{w}\text{ĐĐĐĐ}_{A_{SPR}} \overrightarrow{\twoheadrightarrow} y$。2. 存在一个 $y \in \mathrm{F}_{SPR}$，使得 $x_1 \ {}^{w}\text{ĐĐĐĐ}_{A_{SPR}} \overrightarrow{\twoheadrightarrow} y$ 或 $x_2 \ {}^{w}\text{ĐĐĐĐ}_{A_{SPR}} \overrightarrow{\twoheadrightarrow} y$。

引理 4.15. 设 $x_1, x_2 \in \mathrm{T}_{SPR}$, $w \in \mathrm{SCP}(\Sigma)^*$和 $\ell \in \mathbb{N}$。以下两个结论等价：

1. 存在一个 $y \in \mathrm{F}_{SPR}$，使得 $x_1 \cdot x_2 \ {}^{w}\text{ĐĐĐĐ}_{A_{SPR}} \overrightarrow{\twoheadrightarrow} y$ 的长度为 ℓ。

2. $w = w_1 \cdot w_2$，那么存在 $y_1, y_2 \in \mathrm{F}_{SPR}$，使得 $x_1 \ {}^{w_1}\text{ĐĐĐĐ}_{A_{SPR}} \overrightarrow{\twoheadrightarrow} y_1$ 或 $x_2 \ {}^{w_2}\text{ĐĐĐĐ}_{A_{SPR}} \overrightarrow{\twoheadrightarrow} y_2$，长度至多为 ℓ。

引理 4.16. 设 $x_1, x_2 \in \mathrm{T}_{SPR}$, $w \in \mathrm{SCP}(\Sigma)^*$。以下两个结论等价：

1. 存在一个 $y \in \mathrm{F}_{SPR}$，使得 $x_1 \parallel x_2 \ {}^{w}\text{ĐĐĐĐ}_{A_{SPR}} \overrightarrow{\twoheadrightarrow} y$。

2. $w = w_1 \parallel w_2$，那么存在 $y_1, y_2 \in \mathrm{F}_{SPR}$，使得 $x_1 \ {}^{w_1}\text{ĐĐĐĐ}_{A_{SPR}} \overrightarrow{\twoheadrightarrow} y_1$ 或 $x_2 \ {}^{w_2}\text{ĐĐĐĐ}_{A_{SPR}} \overrightarrow{\twoheadrightarrow} y_2$。

引理 4.17. 设 $x \in \mathrm{T}_{SPR}$, $w \in \mathrm{SCP}(\Sigma)^*$。以下两个结论等价：

1. 存在一个 $y \in \mathrm{F}_{SPR}$ 使得 $x^* \overset{w}{\text{ĐĐĐĐ}}_{A_{SPR}} \overset{\twoheadrightarrow}{} y$。2. $w = w_1 \cdots w_n$，则存在 $y_i \in \mathrm{F}_{SPR}$ 使得 $x \overset{w_i}{\text{ĐĐĐĐ}}_{A_{SPR}} \overset{\twoheadrightarrow}{} y_i$ 对于 $1 \le i \le n$。

引理 4.18。设 $x \in \mathrm{T}_{SPR}$, $w \in \mathrm{SCP}(\Sigma)^*$。以下两个结论等价：

1. 存在一个 $y \in \mathrm{F}_{SPR}$，使得 $x^{\langle * \rangle} \overset{w}{\text{ĐĐĐĐ}}_{A_{SPR}} \overset{\twoheadrightarrow}{} y$。2. $w = w_1 \parallel \cdots \parallel w_n$，则存在 $y_i \in \mathrm{F}_{SPR}$，使得对于 $1 \le i \le n$，有 $x \overset{w_i}{\text{ĐĐĐĐ}}_{A_{SPR}} \overset{\twoheadrightarrow}{} y_i$。

引理 4.19。设 $x, y \in \mathrm{T}_{SPR}$，则以下结论成立：

1. $L_{SPR}(x + y) = L_{SPR}(x) + L_{SPR}(y)$。
2. $L_{SPR}(x \cdot y) = L_{SPR}(x) \cdot L_{SPR}(y)$。
3. $L_{SPR}(x^*) = L_{SPR}(x)^*$。4. $L_{SPR}(x^{\langle * \rangle}) = L_{SPR}(x)^{\langle * \rangle}$。5. $L_{SPR}(x \parallel y) = L_{SPR}(x) \parallel L_{SPR}(y)$。

引理 4.20。对所有 $x \in \mathrm{T}_{SPR}$，均有 $L_{SPR}(x) = [\![x]\!]_{SPR}$。

定义 4.21（∥-深度）。 $x \in \mathrm{T}_{SPR}$ 的 ∥-深度记为 $d_{\parallel}(x)$，按 x的结构归纳定义如下。

$$d_{\parallel}(0) = 0 \quad d_{\parallel}(1) = 0 \quad d_{\parallel}(a) = 0 \quad d_{\parallel}(U) = 0$$
$$d_{\parallel}(x \cdot y) = \max(d_{\parallel}(x), d_{\parallel}(y)) \quad d_{\parallel}(x + y) = \max(d_{\parallel}(x), d_{\parallel}(y)) \quad d_{\parallel}(x^*) = d_{\parallel}(x)$$
$$d_{\parallel}(x \parallel y) = \max(d_{\parallel}(x), d_{\parallel}(y)) + 1 \quad d_{\parallel}(x^{\langle * \rangle}) = d_{\parallel}(x)$$

定义 4.22（⋆-深度）。我们将 $x \in \mathrm{T}_{SPR}$ 的⋆-深度记为 $d_{\langle * \rangle}(x)$，按 x 的结构归纳定义如下。

$$d_{\langle * \rangle}(0) = 0 \quad d_{\langle * \rangle}(1) = 0 \quad d_{\langle * \rangle}(a) = 0 \quad d_{\langle * \rangle}(U) = 0$$
$$d_{\langle * \rangle}(x \cdot y) = \max(d_{\langle * \rangle}(x), d_{\langle * \rangle}(y)) \quad d_{\langle * \rangle}(x + y) = \max(d_{\langle * \rangle}(x), d_{\langle * \rangle}(y)) \quad d_{\langle * \rangle}(x^*) = d_{\langle * \rangle}(x)$$
$$d_{\langle * \rangle}(x \parallel y) = \max(d_{\langle * \rangle}(x), d_{\langle * \rangle}(y)) \quad d_{\langle * \rangle}(x^{\langle * \rangle}) = d_{\langle * \rangle}(x) + 1$$

L引理 4.23。设 $x, y \in \mathrm{T}_{SPR}$，若 $x \preceq_{SPR} y$，则 $d_{\parallel}(x) \le d_{\parallel}(y)$ 且 $d_{\langle * \rangle}(x) \le d_{\langle * \rangle}(y)$.

L引理 4.24。设 $x, y \in \mathrm{T}_{SPR}$，若 $x \preceq_{SPR} y^{\langle * \rangle}$ 且 $d_{\langle * \rangle}(x) = d_{\langle * \rangle}(y^{\langle * \rangle})$，则 $x = y^{\langle * \rangle}$。

Le引理 4.25。每个 $x \in \mathrm{T}_{SPR}$ 在 A_{SPR} 中都是递归的，且句法 SA 是良好嵌套的 *d.*

De定义 4.26。设 $x_1, x_2 \in \mathrm{T}_{SPR}$, $R : \mathrm{T}_{SPR} \to 2^{\mathcal{T}_{SPR}}$，其定义如下：

$$R(0) = \{0\} \quad R(1) = \{1\} \quad R(a) = \{a, 1\} \quad R(U) = \{U, 1\}$$

$$R(x_1 + x_2) = R(x_1) \cup R(x_2) \quad R(x_1 \cdot x_2) = R(x_1) \fatsemi x_2 \ \cup \ R(x_1) \cup R(x_2)$$

$R(x_1^*) = R(x_1) \fatsemi x_1^* \cup R(x_1) \cup \{x_1^*\}$ $R(x_1^{\langle * \rangle}) = R(x_1) \cup \{x_1^{\langle * \rangle}, 1\}$ $R(x_1 \parallel x_2) = R(x_1) \cup R(x_2) \cup \{x_1 \parallel x_2, 1\}$

引理 4.27。对于每个 $x \in \mathrm{T}_{SPR}$，以下结论成立：

1. $x \in R(x)$。2. $R(x)$ 是支撑闭
合的。3. 句法 SA 是有界的。

定理 4.28（表达式到自动机）。对于每个 $x \in \mathrm{T}_{SPR}$，我们可以得到一个良嵌套的有限 SA A，其状态为 q，使得 $L_A(q) = [\![x]\!]_{SPR}$。

4.2 自动机到表达式

在本节中，我们将证明，任何良嵌套有限自动机中的一个状态所接受的语言，都可以用串并联有理表达式实现。

定义 4.29（SA 的解）。设 $A = (Q, F, \delta, \gamma)$ 是一个 SA，且 $=$ 是 $\mathrm{T}_{SPR}(\Delta)$ 上满足 $\Sigma \subseteq \Delta$的 CKA 语言同余。若对每个 $q \in Q$：我们称 $s : Q \to \mathrm{T}_{SPR}(\Delta)$ 是 A的一个 $=$-解。

$$[q \in \mathcal{F}_{SPR}] + \sum_{q' \in \delta(q,a)} a \cdot s(q') + \sum_{q' \in \gamma(q,U)} U \cdot s(q') \leqq s(q)$$

此外，若对每个 $=$-解 s'，对所有 $q \in Q$均有 $s(q) \leqq s'(q)$，则 s 是 A 的一个最小 $=$-解。如果 $s : Q \to \mathrm{T}_{SPR}$ 对任意 CKA 语言同余 $=$都是最小的 $=$-解，我们就称其为 A 的最小解。

引理 4.30。设 $A = (Q, F, \delta, \gamma)$ 是一个步进自动机。若 $s : Q \to \mathrm{T}_{SPR}$是 A的最小解，则对 $q \in Q$ 有 $L_A(q) = [\![s(q)]\!]_{SPR}$。

引理 4.31. 设 A 是良嵌套且有限的 SA，则我们可以构造出 A 的最小解。

定理 4.32（自动机到表达式）。若 $A = (Q, F, \delta, \gamma)$ 是良嵌套且有限的 SA，则我们可以为每个 $q \in Q$ 构造一个串并有理表达式 $x \in \mathrm{T}_{SPR}$，使得 $L_A(q) = [\![x]\!]_{SPR}$。

推论 4.33（串并有理语言的克莱尼定理）。设 $L \subseteq \mathrm{SCP}$，则 L 是串并有理的，当且仅当它被一个有限且良嵌套的步自动机所接受。

5 步进图灵机

在本节中，我们将介绍步进图灵机，它是一种配备了称为平面步带的无限存储器的步进自动机。我们将在第 5.1 节介绍步进图灵机的定义，并在第 5.2 节介绍其可计算性。

5.1 步进图灵机

首先，我们给出步进图灵机的定义。

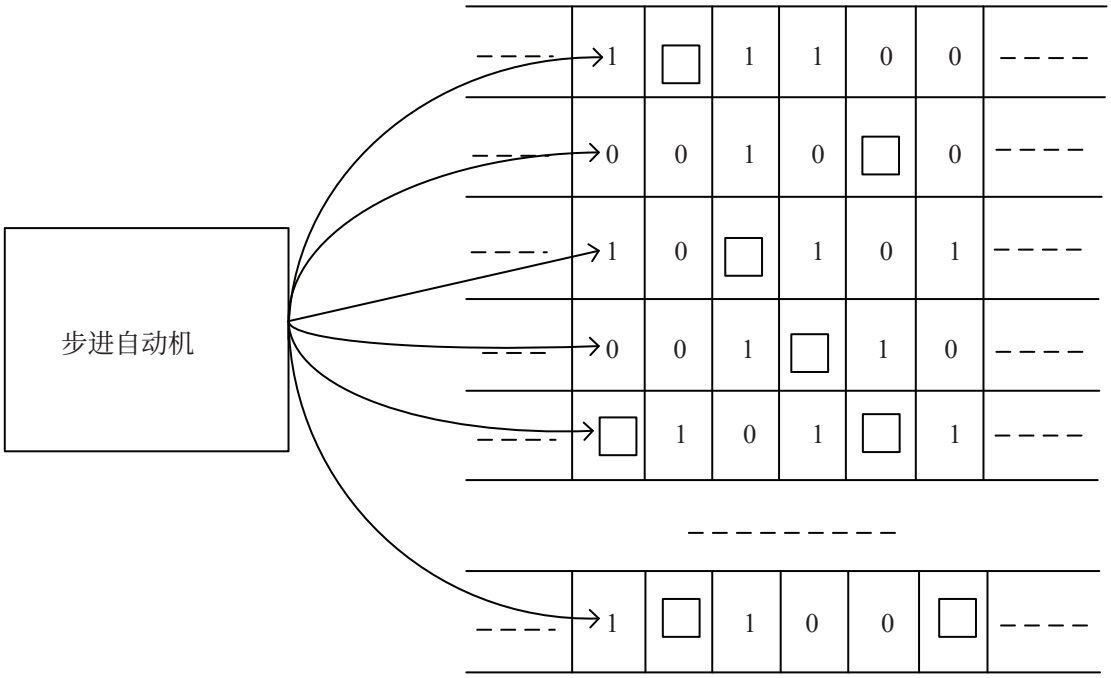

图 2：步进图灵机

定义 5.1（步进图灵机）。步进图灵机（STM）定义为一个八元组$M = (Q, q_0, F, \Sigma, \Gamma, \delta, \gamma, \eta)$，其中

- Q 是一个有限的控制状态集合。
- $q_0 \in Q$ 是初始状态。
- $F \subseteq Q$ 是终止状态集合。
- Σ 是一个包含特殊动作 0、1 的有限字母表。
- Γ 是由 0、1 和空白符号 $\square$ 组成的磁带符号集合。

- $\delta : (Q \setminus F) \times 1 \times \Gamma \to Q \times \Gamma_{(* \; *)} \times (D = \{R\})$ 是一个有限的输入读取转移集合，其中 $D = \{R\}$ 是读头的移动方向：仅向右。对于 $(q_i, 1, \Gamma) \to (q_j, \Gamma_{(* \; *)}, R)$，我们将其写作 $q_i \overset{1,\Gamma,\Gamma_{(* \; *)},R}{\underset{\ell r}{\text{ĐĐĐĐĐĐ}\to}} q_j$，其中 q_i、$q_j \in Q$、ℓ 是平面步带上读/写头的当前位置，而 r 是从上到下第 r 个单元格。这意味着 STM 处于状态 q_i，从输入带读取符号 Γ 后，将执行空动作 1，把它写入平面步带的第 ℓr 个单元格，在输入带上向右移动一步，因此转移到状态 q_j。

- $\gamma : (Q \setminus F) \times 1 \times \Gamma_{* \; *} \to Q \times \Gamma \times (D = \{R\})$ 是输出写入转移的有限集，其中$D = \{R\}$是写头的移动方向：仅向右。对于 $(q_i, 1, \Gamma_{* \; *}) \to (q_j, \Gamma, R)$，我们将其写为 $q_i \overset{1,\Gamma_{* \; *},\Gamma,R}{\underset{\ell r}{\text{ĐĐĐĐĐĐ}\to}} q_j$，其中 $q_i, q_j \in Q$, ℓ 是平面步带读写头的当前位置，r 是自上而下的第 r 个单元格。这意味着 STM 处于状态 q_i，并从平面步带的第 ℓr 个单元格读取符号 $\Gamma_{* \; *}$，将其写入输出带，将执行空动作 1，在输出带上向右移动一步，从而演化为状态q_j。

- $\eta : (Q \setminus F) \times U \times (\Gamma \cup \{\epsilon\})_k \to Q \times (\Gamma \cup \{\epsilon\})_k \times (D = \{L, R\})$ 是一个步转移的有限集，其中 $U \in \mathrm{SCP}(\Sigma)$ 和 $\mathrm{SCP}(\Sigma)$ 是 Σ 的串并步，$k \in \mathbb{N}$, $D = \{L, R\}$ 表示读写头的移动方向：向左或向右；如果读取 ϵ，则表示我们正在查看带上的空白部分；如果写入 ϵ，则带上的一个符号将被擦除。对于 $(q_i, U, (\Gamma \cup \{\epsilon\})_k) \to (q_j, (\Gamma \cup \{\epsilon\})_k D)$，我们将其写作 $q_i \overset{U,(\Gamma\cup\{\epsilon\})_k,(\Gamma\cup\{\epsilon\})_k D}{\text{ĐĐĐĐĐĐĐĐĐĐĐĐĐĐĐĐ}\to} q_j$，其中 $q_i, q_j \in Q$。这意味着 STM 处于状态 q_i，并行读取平面带上的符号 $(\Gamma \cup \{\epsilon\})_k$，将执行动作步 U，把平面带上的符号改写为新符号 $(\Gamma \cup \{\epsilon\})_k$；当 $D = L$ 时向左移动一步，当 $D = R$ 时向右移动一步，并因此演变为状态 q_j。注意，当 $U = 1$ 时，平面步带的当前内容保持不变，然后读写头向左或向右移动。

如图 2 所示，STM 包含一个提供有限状态控制的步进自动机，以及一个平面带，其中有有限条经典带，每条经典带都配有一个读写头并具有无限个单元格。每个单元格可以包含带符号 0、1 或 □。平面带的垂直维度具有上界和下界。第一条经典带是只读输入带，第二条经典带是只写输出带。整个平面步带并行地向左/向右移动，并在一步内从各单元格读取内容或向其中写入内容。

STM 是离线的，即 STM 的输入以 {0,1}* 中的一个元素写在输入带上，且输入带的读头位于最左侧的非空白单元格上。STM 的输出是 STM 停机时输出带上的内容，并且该内容是 {0, 1}* 中的一个元素。
STM 的构型由其三种磁带的内容以及相应读写头的位置决定。

定义5.2（STM的构型）。STM的当前构型由输入带读头的内容与当前位置、输出带写头的内容与当前位置，以及平面步带读写头的内容与当前位置组成。我们在内容中某个符号上方加一条横线来表示带头的当前位置，例如，□1̄0̄1□ 是一台经典图灵机的一个构型。

- 对于输入内容为101的输入带，可能的构型为 $\bar{\square}101\square$、 $\square101\square$ $\bar{}$ ，$\bar{}$ $\bar{}$ $\square101\square$、 $\square101\square$ 和 $\square101\bar{\square}$。

- 对于输出内容为 101 的输出带， $\square101\bar{\square}$ 是唯一可能的构型。

- 对于中间内容如下的平面步带：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

可能的构型为：

$$\begin{bmatrix} \bar{\square} & 0 & 1 & 0 & \square \\ \bar{\square} & 1 & 1 & 0 & \square \\ \bar{\square} & 1 & 0 & 1 & \square \\ \bar{\square} & 0 & & 0 & \square \\ \bar{\square} & & & 1 & \square \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \square & \bar{0} & 1 & 0 & \square \\ \square & \bar{1} & 1 & 0 & \square \\ \square & \bar{1} & 0 & 1 & \square \\ \square & \bar{0} & & 0 & \square \\ \square & & & 1 & \square \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \square & 0 & \bar{1} & 0 & \square \\ \square & 1 & \bar{1} & 0 & \square \\ \square & 1 & \bar{0} & 1 & \square \\ \square & 0 & & 0 & \square \\ \square & & & 1 & \square \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \square & 0 & 1 & \bar{0} & \square \\ \square & 1 & 1 & \bar{0} & \square \\ \square & 1 & 0 & \bar{1} & \square \\ \square & 0 & & \bar{0} & \square \\ \square & & & \bar{1} & \square \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \square & 0 & 1 & 0 & \bar{\square} \\ \square & 1 & 1 & 0 & \bar{\square} \\ \square & 1 & 0 & 1 & \bar{\square} \\ \square & 0 & & 0 & \bar{\square} \\ \square & & & 1 & \bar{\square} \end{bmatrix}$$

定义 5.3（STM 的状态）。设 $M=(Q,q_0,F,\Sigma,\Gamma,\delta,\gamma,\eta)$ 是一个 STM。状态集合由有限控制状态和构型确定，即 $\{(q,\bar{\square})|q\in Q,\square$是输入带的起始处$\}\cup\{(q,\square x\square,\bar{})|q\in Q,x\in\Gamma^*$是输入$\}\cup\{(q,\bar{\square})|q\in Q,\square$是输出带的起始处$\}\cup\{(q,\square x\bar{\square})|q\in Q,x\in\Gamma^*$是输出$\}\cup\{(q,\square^{\langle*\rangle})|q\in Q,\square^{\langle*\rangle}$是平面步带的起始处$\}\cup\{(q,\square^{\langle*\rangle}x\square^{\langle*\rangle},\bar{})|q\in Q,x\in\Gamma^{\langle*\rangle^*}\}$，其中 $\bar{}$ 表示读写头在 $\square x\square$ 或 $\square^{\langle*\rangle}x\square^{\langle*\rangle}$ 的某个元素上的位置。

初始状态为 $(q_0,\bar{\square},\bar{\square},\overline{\square^{\langle*\rangle}})$，且如果 $(q,\bar{\square},\bar{\square},\overline{\square^{\langle*\rangle}})\in F$，那么 $q\in F$。

定义 5.4（STM 的转换系统）。STM 的转换系统包含三个部分：读取输入的部分、写入输出的部分和中间步骤的部分。

- 读取输入的转换系统：
  $(q_i,\square x\bar{d}fy\square)\xrightarrow{1}(q_j,\square xd\bar{f}y\square,\square^{\langle*\rangle}\Gamma^{\langle*\rangle^*}\square^{\langle*\rangle})$，当且仅当 $q_i\xrightarrow{1,d,\Gamma_{\ell r}^{\langle*\rangle^*},R}q_j$，其中 $d,f\in\Gamma,x,y\in\Gamma^*$，$\Gamma_{\ell r}^{\langle*\rangle^*}$ 是平面步带的第 ℓr 个单元格。

- 写入输出的迁移系统：
  $(q_i,1,\square x\bar{\square},\square^{\langle*\rangle}\Gamma^{\langle*\rangle^*}\square^{\langle*\rangle})\xrightarrow{1}(q_j,\square x\Gamma_{\ell r}^{\langle*\rangle^*}\bar{\square})$, *if and only if* $q_i\xrightarrow{1,\Gamma_{\ell r}^{\langle*\rangle^*},\Gamma_{\ell r}^{\langle*\rangle^*},R}q_j$, *where* $x\in\Gamma^*$, $\Gamma_{\ell r}^{\langle*\rangle^*}$ *is the* ℓr*-th cell of the planar step tape.*

- 中间步骤的迁移系统：
  $(q_i,\square^{\langle*\rangle}x\bar{d}\square^{\langle*\rangle})\xrightarrow{U}(q_j,\square^{\langle*\rangle}xe\overline{\square^{\langle*\rangle}})$ *if and only if* $q_i\xrightarrow{U,d,e,R}q_j$, *where* $d,e\in\Gamma^{\langle k\rangle},x\in\Gamma^{\langle*\rangle^*}$.
  $(q_i,\square^{\langle*\rangle}x\bar{d}fy\square^{\langle*\rangle})\xrightarrow{U}(q_j,\square^{\langle*\rangle}xe\bar{f}y\square^{\langle*\rangle})$ *if and only if* $q_i\xrightarrow{U,d,e,R}q_j$, *where* $d,e,f\in\Gamma^{\langle k\rangle},x,y\in\Gamma^{\langle*\rangle^*}$.
  $(q_i,\square^{\langle*\rangle}\bar{d}x\square^{\langle*\rangle})\xrightarrow{U}(q_j,\overline{\square^{\langle*\rangle}}ex\square^{\langle*\rangle})$ *if and only if* $q_i\xrightarrow{U,d,e,L}q_j$, *where* $d,e\in\Gamma^{\langle k\rangle},x\in\Gamma^{\langle*\rangle^*}$.

$(q_i, \square^{\langle * \rangle} x f \bar{d} y \square^{\langle * \rangle}) \xrightarrow{U} (q_j, \square^{\langle * \rangle} x \bar{f} e y \square^{\langle * \rangle})$ 当且仅当 $q_i \xrightarrow{U,d,e,L} q_j$，其中 $d, e, f \in \Gamma^{\langle k \rangle}, x, y \in \Gamma^{\langle * \rangle^*}$。$(q_i, \square^{\langle * \rangle} \bar{d} \square^{\langle * \rangle}) \xrightarrow{U} (q_j, \square^{\langle * \rangle} \overline{\square^{\langle * \rangle}})$ 当且仅当 $q_i \xrightarrow{U,d,\epsilon,R} q_j$，其中 $d \in \Gamma^{\langle k \rangle}$。$(q_i, \square^{\langle * \rangle} x \bar{d} \square^{\langle * \rangle}) \xrightarrow{U} (q_j, \square^{\langle * \rangle} x \overline{\square^{\langle * \rangle}})$ 当且仅当 $q_i \xrightarrow{U,d,\epsilon,R} q_j$，其中 $d \in \Gamma^{\langle k \rangle}, x \in \Gamma^{\langle * \rangle^*}$。$(q_i, \square^{\langle * \rangle} \bar{d} f x \square^{\langle * \rangle}) \xrightarrow{U} (q_j, \square^{\langle * \rangle} \bar{f} x \square^{\langle * \rangle})$ 当且仅当 $q_i \xrightarrow{U,d,\epsilon,R} q_j$，其中 $d, f \in \Gamma^{\langle k \rangle}, x \in \Gamma^{\langle * \rangle^*}$。$(q_i, \square^{\langle * \rangle} \bar{d} \square^{\langle * \rangle}) \xrightarrow{U} (q_j, \overline{\square^{\langle * \rangle}})$ 当且仅当 $q_i \xrightarrow{U,d,\epsilon,L} q_j$，其中 $d \in \Gamma^{\langle k \rangle}$。$(q_i, \square^{\langle * \rangle} \bar{d} x \square^{\langle * \rangle}) \xrightarrow{U} (q_j, \overline{\square^{\langle * \rangle}} x \square^{\langle * \rangle})$ 当且仅当 $q_i \xrightarrow{U,d,\epsilon,L} q_j$，其中 $d \in \Gamma^{\langle k \rangle}, x \in \Gamma^{\langle * \rangle^*}$。$(q_i, \square^{\langle * \rangle} x f \bar{d} \square^{\langle * \rangle}) \xrightarrow{U} (q_j, \square^{\langle * \rangle} x \bar{f} \square^{\langle * \rangle})$ 当且仅当 $q_i \xrightarrow{U,d,\epsilon,L} q_j$，其中 $d, f \in \Gamma^{\langle k \rangle}, x \in \Gamma^{\langle * \rangle^*}$。$(q_i, \overline{\square^{\langle * \rangle}}) \xrightarrow{U} (q_j, \square^{\langle * \rangle} d \overline{\square^{\langle * \rangle}})$ 当且仅当 $q_i \xrightarrow{U,\epsilon,d,R} q_j$，其中 $d \in \Gamma^{\langle k \rangle}$。$(q_i, \overline{\square^{\langle * \rangle}} f x \square^{\langle * \rangle}) \xrightarrow{U} (q_j, \square^{\langle * \rangle} d \bar{f} x \square^{\langle * \rangle})$ 当且仅当 $q_i \xrightarrow{U,\epsilon,d,R} q_j$，其中 $d \in \Gamma^{\langle k \rangle}, x \in \Gamma^{\langle * \rangle^*}$。$(q_i, \overline{\square^{\langle * \rangle}}) \xrightarrow{U} (q_j, \overline{\square^{\langle * \rangle}} d \square^{\langle * \rangle})$ 当且仅当 $q_i \xrightarrow{U,\epsilon,d,L} q_j$，其中 $d \in \Gamma^{\langle k \rangle}$。$(q_i, \square^{\langle * \rangle} x f \overline{\square^{\langle * \rangle}}) \xrightarrow{U} (q_j, \square^{\langle * \rangle} x \bar{f} d \square^{\langle * \rangle})$ 当且仅当 $q_i \xrightarrow{U,\epsilon,d,L} q_j$，其中 $d, f \in \Gamma^{\langle k \rangle}, x \in \Gamma^{\langle * \rangle^*}$。$(q_i, \square^{\langle * \rangle}) \xrightarrow{U} (q_j, \square^{\langle * \rangle})$ 当且仅当 $q_i \xrightarrow{U,\epsilon,\epsilon,R} q_j$。$(q_i, \overline{\square^{\langle * \rangle}} f x \square^{\langle * \rangle}) \xrightarrow{U} (q_j, \square^{\langle * \rangle} \bar{f} x \square^{\langle * \rangle})$ 当且仅当 $q_i \xrightarrow{U,\epsilon,\epsilon,R} q_j$，其中 $d \in \Gamma^{\langle k \rangle}$。$(q_i, \overline{\square^{\langle * \rangle}}) \xrightarrow{U} (q_j, \overline{\square^{\langle * \rangle}})$ 当且仅当 $q_i \xrightarrow{U,\epsilon,\epsilon,L} q_j$。$(q_i, \square^{\langle * \rangle} x f \overline{\square^{\langle * \rangle}}) \xrightarrow{U} (q_j, \square^{\langle * \rangle} x \bar{f} \square^{\langle * \rangle})$ 当且仅当 $q_i \xrightarrow{U,\epsilon,\epsilon,L} q_j$，其中 $f \in \Gamma^{\langle k \rangle}, x \in \Gamma^{\langle * \rangle^*}$。

类似于步自动机中路径的定义，我们可以定义转移 $\to$ 的路径 $\xrightarrow{*}$。

定义5.5（STM接受的语言）。设 $M = (Q, q_0, F, \Sigma, \Gamma, \delta, \gamma, \eta)$ 是一个 STM。M 接受的语言是集合 $L_M = \{w \in \text{SCP}(\Sigma)^* : (q_0, \bar{\square}, \bar{\square}, \overline{\square^{\langle * \rangle^*}}) \xrightarrow{w} (q', \bar{\square}, \bar{\square}, \overline{\square^{\langle * \rangle^*}})\ q' \in F\}$。

5.2 丘奇-图灵论题

定义5.6（STM的计算）。原子动作 $a \in \Sigma$ 是 STM 能够单独计算的动作；相应地，一个步包含若干原子动作，且它们两两之间没有偏序。若 STM 从初始状态逐步进行计算，直至到达某个终止状态，我们就称之为 STM 的计算。若对于数据域 Γ^* 中的所有输入 $w \in \Gamma^*$，STM 都有输出 $f(w)$，则称 STM 在数据域 Γ^* 上计算函数 f。

定义5.7（可计算性）。如果一个问题可以由经典图灵机计算，那么它就是可计算的。函数的算法就是计算该函数的经典图灵机。

定理5.8。STM定义的可计算语言和函数类，与经典图灵机定义的可计算语言和函数类相同。

参考文献

[1]A. M. Turing, 《论可计算数及其在判定问题中的应用》, 伦敦数学会会刊 42 (2) (1936) 230–265。doi:10.1112/plms/s2-42.1.230。[2] A. M. Turing, 《论可计算数及其在判定问题中的应用：勘误》, 伦敦数学会会刊 43 (6) (1937) 544–546。doi:10.1112/plms/s2-43.6.544。[3] F. C. Hennie、R. E. Stearns, 《多带图灵机的双带模拟》, ACM学报 (JACM) 13 (4) (1966) 533–546。doi:10.1145/321356.321362。[4] Y. Igarashi、N. Honda, 《确定性多带自动机计算》, 计算机与系统科学杂志 8。[5] J. C. M. Baeten、P. J. L. Cuijpers、B. Luttik、P. J. A. van Tilburg, 《从进程理论角度看自动机》, 载于：软件工程基础：第三届IPM国际会议，FSEN 2009，伊朗基什岛，2009年4月15—17日，修订精选论文 3，施普林格，2010年，第1–33页。[6] J. C. M. Baeten、P. J. L. Cuijpers、B. Luttik、P. J. A. van Tilburg, 《计算模型：自动机与进程》, 埃因霍温理工大学，课程大纲 2IT15 (2010)。[7] J. C. M. Baeten、B. Luttik、P. J. A. van Tilburg, 《计算与交互》, 载于：分布式计算与互联网技术：第七届国际会议，ICDCIT 2011，印度布巴内斯瓦尔，2011年2月9—12日。论文集 7，施普林格，2011年，第35–54页。[8] J. C. M. Baeten、B. Luttik、P. J. A. van Tilburg, 《图灵遇见米尔纳》, 载于：CONCUR 2012—并发理论：第23届国际会议，CONCUR 2012，英国泰恩河畔纽卡斯尔，2012年9月4—7日。论文集 23，施普林格，2012年，第1–20页。[9] E. Maia、N. Moreira、R. Reis, 《偏导数与位置双模拟自动机》, 载于：自动机的实现与应用：第19届国际会议，CIAA 2014，德国吉森，2014年7月30日—8月2日。论文集 19，施普林格，2014年，第264–277页。[10] J. C. M. Baeten、B. B. Luttik、T. Muller、P. J. A. van Tilburg, 《带并行组合的正则表达式在双模拟意义下的表达能力》, 计算机科学中的数学结构 26 (6) (2016) 933–968。[11] J. C. M. Baeten、F. Corradini、C. A. Grabmayer, 《双模拟下正则表达式的刻画》, ACM学报 (JACM) 54 (2) (2007) 6–es。[12] T. Kapp´e、P. Brunet、B. Luttik、A. Silva、F. Zanasi, 《关于串并偏序多重集语言：有理性、上下文无关性与自动机》, 逻辑与代数编程方法杂志 103 (2019) 130–153。[13] G. van Heerdt、T. Kapp´e、J. Rot、A. Silva, 《学习偏序多重集自动机》, 载于：FoSSaCS，2021年，第510–530页。

[14] N. Bedon，分支自动机与 pomset 自动机，载于：第41届 IARCS 软件技术与理论计算机科学基础年会（FSTTCS 2021），Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2021年。[15] Y. Wang，计算与并发，arXiv 预印本 arXiv:2409.02595（2024年）。[16] K. Lodaya，P. Weil，并行性的 Kleene 迭代，载于：软件技术与理论计算机科学基础：第18届会议，印度金奈，1998年12月17日至19日。论文集 18，施普林格，1998年，第355–366页。[17] K. Lodaya，P. Weil，串并偏序集：代数、自动机与语言，载于：理论计算机科学年会，施普林格，1998年，第555–565页。[18] K. Lodaya，P. Weil，串并语言与有界宽度性质，《理论计算机科学》237 (1-2)（2000年）347–380。[19] K. Lodaya，P. Weil，具有串操作的代数中的有理性，Information and Computation 171 (2)（2001年）269–293。[20] H. T. Siegelmann，神经网络与模拟计算：超越图灵极限，Birkh¨auser Boston，波士顿，马萨诸塞州，1999年。[21] A. Vaswani，N. Shazeer，N. Parmar，J. Uszkoreit，L. Jones，A. N. Gomez，L. Kaiser，I. Polo-sukhin，Attention is All You Need（2023年）。arXiv:1706.03762。网址：https://arxiv.org/abs/1706.03762[22] D. H. C. Sanford，M. Telgarsky，Transformer、并行计算与对数深度，审稿中预印本，见 arXiv:2402.09268（2024年）。[23] W. Merrill，A. Sabharwal，并行性权衡：对数精度 Transformer 的局限，《计算语言学协会汇刊》11。[24] J. P´erez，P. Barcel´o，J. Marinkovic，Attention Is Turing Complete，《机器学习研究杂志》22（2021年）1–35。[25] T. Kapp´e，并发 Kleene 代数：完备性与可判定性（博士论文，博士学位论文，伦敦大学学院（UCL）（2020年）。[26] M. R. Laurence，G. Struth，双 Kleene 代数与串并有理 pomset 语言的完备性定理，载于：RAMiCS 会议论文集，2014年，第65–82页。网址：http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-06251-8-5[27] M. R. Laurence，G. Struth，pomset 语言与并发 Kleene 代数的完备性定理，arXiv 预印本 arXiv:1705.05896（2017年）。