arXiv:2603.08044v1 [cond-mat.stat-mech] 9 Mar 2026

渗流

关于多重分形、无标度加权平面随机多孔晶格

Proshanto Kumar 和 Md. Kamrul Hassan*Theoretical Physics Group, Department of Physics, University of Dhaka, Dhaka 1000, Bangladesh*（日期：2026年3月10日）

我们提出了加权平面随机多孔晶格（WPSPL），这是一种通过反复细分单位正方形生成的几何无序基底。每一步中，按面积成比例的概率选取一个块，将其分为四部分，并以概率 q（$1-q$）保留（移除）一个子块。我们从解析上证明，WPSPL 的无穷多个非平凡守恒量均呈现多重分形性，并通过数值结果表明，其不同时刻的快照具有统计自相似性。该晶格的对偶结构形成一个度分布服从幂律的复杂网络。受这一多孔晶格上述性质的启发，我们研究了 WPSPL 上的键渗流，确定了渗流阈值，并估算了分别与比热、序参量和磁化率相关的临界指数 α、β 和 γ。这些指数随 q 连续变化，这反映出一系列不同的普适类，因为晶格的整体维数取决于 q。值得注意的是，Rushbrooke不等式 $\alpha + 2\beta + \gamma \geq 2$ 近乎取等。尤其是，非多孔情形（$q = 1$）的整体维数为 2，但不属于传统二维格点的普适类。我们的结果凸显了几何无序、多重分形性、无标度配位数无序和孔隙率如何共同导致反常的临界行为。

PACS编号：61.43.Hv, 64.60.Ht, 68.03.Fg, 82.70Dd 关键词：平面格点，康托集，分形，多重分形，动态标度，自相似性

I. 引言

渗流理论为理解无序系统中大尺度连通性的涌现提供了一个简洁而有力的框架。其起源可追溯至20世纪40年代初，当时Flory在聚合物凝胶化的背景下引入了渗流概念 [1]。1957年，Broadbent和Hammersley建立了严格的数学表述，用以描述流体在多孔介质中的流动 [2], ，从而形式化了随机性与几何在连通性相变中的作用。在20世纪60年代和70年代，通过Domb、Fisher、Essam和Sykes[3–6]的开创性贡献，渗流理论成为连续相变的典范模型。这一时期发展了有限尺寸标度、重整化群思想和普适性等关键概念，将渗流牢固地纳入现代相变与临界现象理论之中 [7–12]。20世纪80年代和90年代，Aharony、Stauffer、Ziff等人的后续进展进一步拓宽了其范围与应用，使渗流成为无序介质、输运过程和复杂网络的统一框架 [13–17]。

除了为理解相变和临界现象提供理论框架外，渗流理论还广泛应用于多个领域，包括流行病传播、野火动力学、网络鲁棒性，以及生物、计算机和信息传播在社会网络与技术网络中的传播 [18–22]。近期研究进一步表明，渗流相变支配着各种物理系统中的宏观行为，例如多孔介质中渗流阈值附近的输运，以及颗粒物质中由机械作用诱导的连通性[23, 24]。COVID-19大流行凸显了基于渗流的模型对于捕捉现实世界传播过程复杂性的重要性 [25–29]。除此之外，渗流概念还应用于高能物理和宇宙学领域，通过色弦渗流模型帮助阐明退禁闭相变以及大尺度宇宙连通性的形成 [30, 31]。

任何渗流模型都由两个基本要素定义：渗流规则和底层基质 [1, 2]。直到最近，大多数研究都聚焦于规则空间晶格。这类晶格为晶体固体提供了合适的模型。然而，它们无法捕捉许多真实的扩散过程，例如疫情传播、信息流和多孔介质中的输运。这些过程通常发生在无序、异质且不断演化的基质上[18, 19]。这种不匹配促使人们开发具有无标度、自相似和复杂几何结构的空间嵌入模型 [22]。在此背景下，Hassan等人 于2010年提出了加权平面随机晶格 （WPSL），并指出，尽管其内在存在几何无序，却呈现出显著稳健的统计规律 [32, 33]。尤其值得注意的是，其构型在不同生长阶段具有统计自相似性，配位数分布遵循幂律，且生长动力学受无穷多个守恒定律支配，从而产生多重分形行为。

2015年，我们研究了加权平面随机晶格（WPSL）上的渗流，并表明，尽管它是二维的，但并不属于规则二维晶格的普适类[32, 33]。然而，与一般渗流理论一致，WPSL上的格点渗流和键渗流具有相同的普适类，相关临界指数后来也被证明满足Rushbrooke不等式[32, 33]。

这些结果确立了WPSL作为一种具有物理意义的基底，可用于研究无序、无标度空间晶格上的临界现象。最近，我们引入了WPSL的一种随机多孔变体，其中每个被选中的块被水平或垂直地划分为两个矩形 [35]。新生成的两个块中的一个以 q ($1-q$)的概率被保留（移除）。分析结果揭示了一个无限的守恒量集合，其中每个守恒量都定义了一个支撑在维数为 $2q$ for $0<q<1$的多孔分形基底上的多重分形测度。当根据面积刻画块时，所得的块尺寸分布被发现遵循动态标度 [35]。

除了证明 WPSPL 是一种多重分形、无标度且自相似的晶格外，本文的主要目标是研究加权平面随机多孔格点（WPSPL）上的渗流。该模型刻画了多孔介质固有的无序性和随机几何结构。由 q 控制的孔隙率会显著影响整体连通性。具体而言，渗流阈值 p_c 随 q 增大而升高，这表明孔隙率较高时连通性会降低。借助热力学类比，我们将占据概率 p 解释为外部序参量场，并将 $1-p$ 视为有效温度。通过这种映射，我们得以定义渗流的磁化率和比热类比量。随后，我们利用有限尺寸标度估算临界指数 α、β 和 γ。尽管这些指数随 q 连续变化，但它们满足 Rushbrooke不等式 $\alpha+2\beta+\gamma\geq 2$，且对所有 q 都近乎取等，这与静态标度假设 [36] 一致。因此，对于 q 的每个取值，WPSPL 上的渗流都对应一个不同的普适性类，有别于规则平面晶格上的普适性类。

本文结构安排如下。第II节通过在 WPSL 中引入概率性质量损失，介绍加权平面随机多孔晶格（WPSPL），并描述其构造过程及所依据的算法。第III节对该模型进行解析处理和多重分形分析，证明该晶格由无穷多个多重分形测度支配。第IV节确立该晶格在不同系统尺寸和生长阶段下的统计自相似性。第V节给出本文的主要结果：研究 WPSPL 上的键渗流，确定渗流阈值，提取相关临界指数，并讨论由此得到的普适类及其对孔隙率参数 q的依赖性。最后，第VI节进行总结和讨论。

II. WPSPL 的构造

2010年，Hassan等人 提出了加权平面随机晶格 （WPSL），这是一种通过对平面进行随机顺序划分、将其划分为相邻且互不重叠的块而生成的空间填充结构 [32]。开始

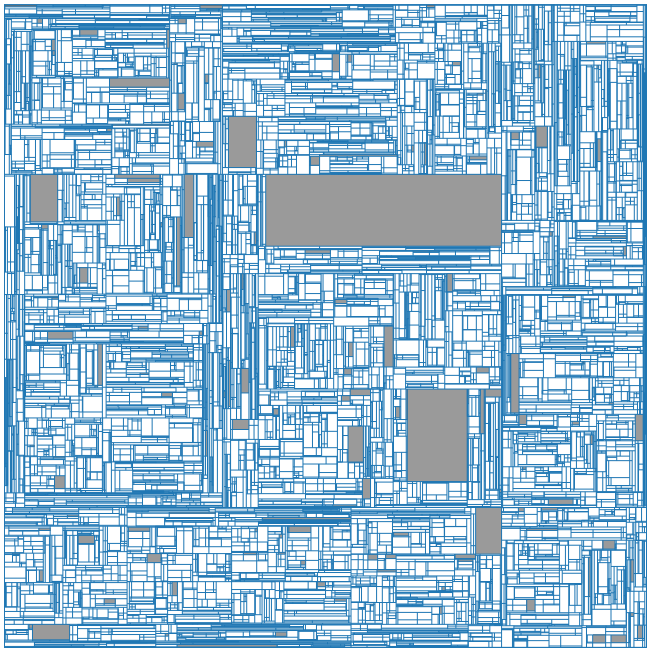


图1：孔隙率参数 p=0.95、t=5000 时随机多孔晶格的快照。阴影单元表示已被删除的单元。

从单位面积正方形出发，初始体首先被划分为四个块。随后，在每一步中，以与其面积成正比的概率选取一个块，并用两条相互垂直的切割线将其再划分为四个更小的块。这种构造称为WPSL2，本质上是无序的，但表现出稳健的统计规律性。值得注意的是，其配位数分布遵循反幂律，这意味着对偶网络是无标度的，度分布为 $P(k)\sim k^{-\gamma}$和 $\gamma=5.66$ [32]。此外，其动力学由无穷多个守恒定律支配，每一个守恒定律都生成一个多重分形测度，从而确立WPSL2为一个多重多重分形系统 [37, 38]。

我们简要介绍加权平面随机多孔晶格 （WPSPL）的构造。WPSPL遵循与WPSL相同的随机细分方案生成，但增加了一条规则：通过按概率移除块来引入孔隙率。从一个单位面积正方形开始，每个选定的块由两条相互垂直的切割线细分为四个更小的块。其中，指定的一个块（其选择是约定性的，不影响可观测量）以概率 q 保留，或以概率$1-q$移除，从而形成空洞。块面积 a_i 作为选择权重，并满足归一化条件 $\sum_{i=1}^{4}a_i=1$。在随后的每一步中，按照与其面积成比例的概率选择一个块（或空洞）。如果选中的是空洞，则不进行细分，时间增加一；否则，重复细分和保留过程。通过这一过程生成的随机多孔晶格，其可调孔隙率由 q控制。

我们描述构造过程中的第 j 步概化形式，

该过程用于构造加权平面随机多孔晶格（WPSPL）。在第 $j-1$ 步，系统由一组平面块组成，每个块均由其面积和状态（占据或空洞）表征。

(i) **块选择**。

(a) 考虑所有存活（非空洞）块的面积集合 $\{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$，其中 N为存活块的数量。令 $M = \sum_{k=1}^{N} a_k \leq 1$ 表示总占据面积。(b) 生成一个在区间 $[0,1]$内均匀分布的随机数 R_1。(c) 若 $R_1 \leq M$，则按其面积选择一个块，即找到满足 $\sum_{k=1}^{n-1} a_k < R_1 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k$的最小整数 n。随后选择面积为 a_n的第 n个块进行细分，并转到步骤(ii)。(d) 若 $R_1 > M$，则所选实体为空洞。在此情况下不进行细分，构型保持不变，系统时间增加一个单位，并转到步骤(i)

(ii) 上述过程确保面积为 a_i 的占据块 i 以如下概率被选中

$$\Pi_i = \frac{a_i}{\sum_k a_k},$$

即，块选择相对于面积具有偏好性。

(iii) **占据块细分**。若选中一个存活块，则应用生成器将其细分为四个较小的块。具体做法是在该块内均匀随机选取一点，并过该点绘制两条相互垂直且平行于块边的直线。该细分产生四个面积任意的相邻子块，并按照固定但任意的约定进行标记（例如，从左上角开始顺时针标记）。

(iv)**保留测试（孔隙度规则）**。四个新创建的子块之一（按约定选取）需接受保留测试。生成一个在 $[0,1]$内均匀分布的随机数 R_2，并将其与保留概率 q进行比较。若 $R_2 \leq q$，则保留该块；否则，以概率$1-q$将其丢弃（转化为空洞）。其余三个子块始终保留。

(v) **构型更新**。将母块从构型中移除，并用四个子块替换；每个子块均被赋予相应的面积和状态（占据或空洞）。相应地更新存活块列表中的标签及其面积。

(vi) **迭代**。将步数计数器 $j \to j+1$加一，然后重复该过程。

子块的标记纯粹是约定性的，并无物理意义，因为它不影响任何可观测量。晶格的代表性快照图（1）展示了生长过程中出现的保留块与空隙的不规则共存。随着晶格随时间 t演化，块的数量 $N(t)$增加，而由于概率性区块移除，总质量（面积）在 $0 < q < 1$ 时减小；仅当 $q = 1$ 时总面积守恒。尽管存在强烈的时空无序，该晶格仍表现出统计自相似性，这通过块面积分布的多重分形性和动态标度体现出来。这些性质确保了空间和时间上的自相似性，这对于研究不同晶格尺寸和生长阶段的渗流至关重要。

III. 随机多孔晶格的多重分形性质

在本节中，我们通过分析处理该模型的若干方面，运用平面碎裂动力学来理解当尺寸被视为动力学变量 [39–41]时块尺寸的影响。我们用长度 x 和宽度 y来表征剩余的块，并定义块尺寸分布 $f(x,y,t)$，使得$f(x,y,t)dxdy$给出长度和宽度分别处于 $[x, x+dx]$ 和 $[y, y+dy]$范围内的块的数量。其演化服从主方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y,t)}{\partial t} &= -xyf(x,y,t) + (3+q) \\ &\times \int_x^\infty \int_y^\infty f(x_1,y_1,t)dx_1dy_1.\end{aligned} \tag{1}$$

第一项表示因碎裂而损失尺寸为 (x,y) 的块，第二项则表示尺寸为 $(x_1 > x, y_1 > y)$ 的块带来的增益。因子 $(3+q)$ 体现了这一点：新生成的四个矩形中，始终保留三个，第四个则以 q 的概率保留。

由于这一过程具有随机性和几何复杂性，$f(x,y,t)$ 通常难以求得精确解。沿用 Krapivsky 和 Ben-Naim 的方法，我们转而考虑二维梅林变换

$$M(m,n;t) = \int_0^\infty \int_0^\infty x^{m-1} y^{n-1} f(x,y;t)\, dx\, dy, \tag{2}$$

其离散对应形式为 $\sum_i x_i^{m-1} y_i^{n-1}$ [42]。这一变换编码了晶格的整体几何信息，使我们无需明确知道 $f(x,y,t)$，便能够提取其标度性质。将这一定义代入描述 $f(x,y;\,t)$ 演化的速率方程后，可得到以下矩方程层级：

$$\frac{dM(m,n;t)}{dt} = \left(\frac{3+q}{mn} - 1\right) M(m+1, n+1; t). \tag{3}$$

该方程的一个显著结果是存在无穷多个非平凡守恒定律：形如 $M(m,(3+q)/m;\,t)$ 的所有矩，对于任意 m，都保持与时间无关。这些守恒量立即表明，其背后存在深层的多重分形结构。

为求解矩层次，我们迭代生成 $M(m,\ n;\,t)$ 的所有时间导数，并将其代入 $M(m,\ n;\,t)$ 关于 $t=0$ [43] 的泰勒级数展开中，以应用查尔斯比方法。通过这一过程，可得到以广义超几何函数表示的精确解，

$$M(m,n;t) = {}_2F_2(a_+,a_-;m,n;-t)\,, \tag{4}$$

在长时极限下，它简化为渐近形式

$$M(m,n;t) \sim t^{-a_-}, \tag{5}$$

其中

$$a_- = \frac{m+n}{2} - \sqrt{\left(\frac{m-n}{2}\right)^2 + (3+q)}. \tag{6}$$

这种渐近行为概括了 WPSL 的全部标度内容。

与不变矩 $M(m,(3+q)/m;\,t)$ 相关联的守恒测度为第 i 个块赋予权重

$$p_i = x_i^{[(3+q)/m]-1} y_i^{m-1} \quad \text{or} \quad x_i^{m-1} y_i^{[(3+q)/m]-1}, \tag{7}$$

这可以自然地解释为一种概率。相应的配分函数为

$$Z_k = \sum_i p_i^q. \tag{8}$$

将该量表示为梅林矩的形式，我们得到

$$Z_k = M\big([(3+q)/m-1]k+1,(m-1)k+1;t\big). \tag{9}$$

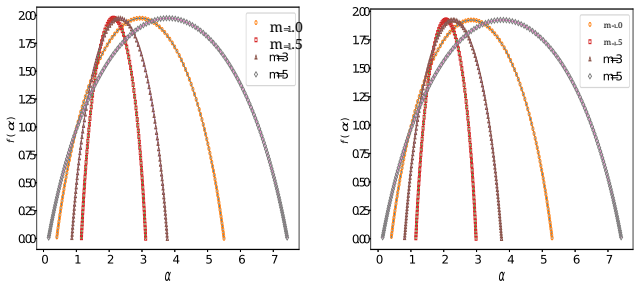
利用 $M(m,n;\,t)$ 的渐近形式，可得 Z_q 的长时间行为：

$$Z_k(t) \sim t^{\frac{1}{2}\left[\sqrt{((3+q)/m-m)^2k^2+16}-((3+q)/m+m-2)k+2\right]}. \tag{10}$$

为用几何术语表达这种标度，我们遵循 Feder 提出的多重分形分析步骤，引入一种自然的标尺

$$\delta(t) = \sqrt{\frac{M(2,2;t)}{M(1,1;t)}} \sim t^{-1/2}, \tag{11}$$

其中表示时间 t [44] 时平均块面积的平方根。



(a) (b)

图2： $f(0.85$ α $m=1$ 1.5 3 5 $q=$ $(k))$ 谱分别针对 (a) $q=0.95$ 和 (b)，在各情况下均显示 ,,, 和 。在所有图中，最大值均出现在 $k=0$，对应于支撑集的分形维数，与理论预测一致。

用 δ 取代时间后，配分函数呈现标准的多重分形形式

$$Z_k(\delta) \sim \delta^{-\tau(k,m)}, \tag{12}$$

其中质量指数为

$$\begin{aligned}\tau(k,m) \;&=\; \sqrt{((3+q)/m-m)^2k^2+4(3+q)} \\ &-\; \big(((3+q)/m+m-2)k+2\big).\end{aligned} \tag{13}$$

质量指数满足基本的多重分形约束 $\tau(0,m)=2(\sqrt{3+q}-1)$，对于 $0<q<1$，该值始终小于嵌入空间的维数 2，因此骨架是分形。另一方面，我们看到 $\tau(1,m)=0$，这符合概率归一化的要求。其勒让德变换为

$$\tau(k,m) = -\alpha k + f(\alpha), \quad \text{where} \quad \alpha = -\frac{d\tau(k,m)}{dk}, \tag{14}$$

得到多重分形谱

$$f(\alpha(k),m)) = \frac{16}{\sqrt{((3+q)/m-m)^2k^2+4(3+q)}} - 2. \tag{15}$$

对于固定的 q和 m的几个取值，图2展示了谱 $f(\alpha(k)\ m)$。在所有情况下，谱均严格凹，并在 $k=0$处达到最大值 $2(\sqrt{3+q}-1)$，对应于WPSPL的分形维数。值得注意的是，$f(\alpha,\ m)$的函数形式显式依赖于 m，这表明存在一族相互交织的多重分形谱，而非单一的普适谱。

多重分形性为理解加权平面随机多孔晶格（WPSPL）中的标度和自相似性提供了一个自然框架，其中无序是内在属性，并由动态过程产生。与以单一标度指数为特征的规则晶格或简单分形不同，WPSPL 通过随机碎裂和移除不断演化，形成强烈的空间

异质性，体现在块尺寸、质量和连通性方面。因此，在粗粒化过程中，不同区域的标度行为各不相同，单一分形维数因而不足以描述这种结构。在 WPSPL 中，多重分形性描述了局域测度（如块质量、面积或权重）在多个长度尺度上的分布。至关重要的是，多重分形性解释了 WPSPL 的统计自相似性。尽管单个快照看起来极不规则，但在单一构型内经过适当重标度后，其统计性质仍保持不变。

IV. 自相似性质

要将 WPSPL 框架用于渗流研究，首先必须确认不同尺寸的晶格快照具有自相似性，就像几何相似的三角形一样。图 1 展示了长时极限下形成的复杂结构：存留下来的块构成异质图案，其间散布着空隙。这自然引出一个问题：在适当的重标度下，不同时刻生成的构型在统计上是否等价？在物理学中，自相似性可分为空间自相似性和时间自相似性。通过证明 WPSPL 不仅具有多重分形性，还呈现出多重分形性的无限层级，空间自相似性已得到确立。为确立时间自相似性，我们现在证明块面积–尺寸分布遵循动态标度。动态标度为检验时间自相似性提供了严格标准，也为识别演化系统中的标度不变行为提供了稳健框架 [37, 45, 46]。

我们仅以面积来刻画每个块，忽略几何细节，从而将问题简化为有效的一维尺寸分布。我们将$C(a,t)\ da$定义为时间 t时面积处于区间 $[a, a+da]$ 内的块数，该值通过以宽度 δa对面积进行分箱并除以 δa归一化而数值求得。存活块的总面积衰减为

$$\int_0^\infty a\, C(a,t)\, da = M(2,2;t) \sim t^{-(2-\sqrt{3+q})}, \qquad (16)$$

而块的总数则增长为

$$\int_0^\infty C(a,t)\, da = M(1,1;t) \sim t^{(\sqrt{3+q}-1)}. \qquad (17)$$

它们分别对应于矩 $M(2,2;t)$和$M(1,1;t)$，从而在微观块统计与宏观标度行为之间建立直接连边。综合来看，这些量表明演化中的块面积分布如何同时刻画总质量的耗减与块的增殖

在随机生长过程中。

为检验块面积分布 $C(a,t)$ 是否呈现动态标度，我们借助 Buckingham Π 定理 [47] 进行量纲分析。由式 (5) 可知，存活块的平均面积按 $\langle a(t)\rangle \sim t^{-1}$ 标度，这意味着时间设定了面积的自然尺度。因此， a

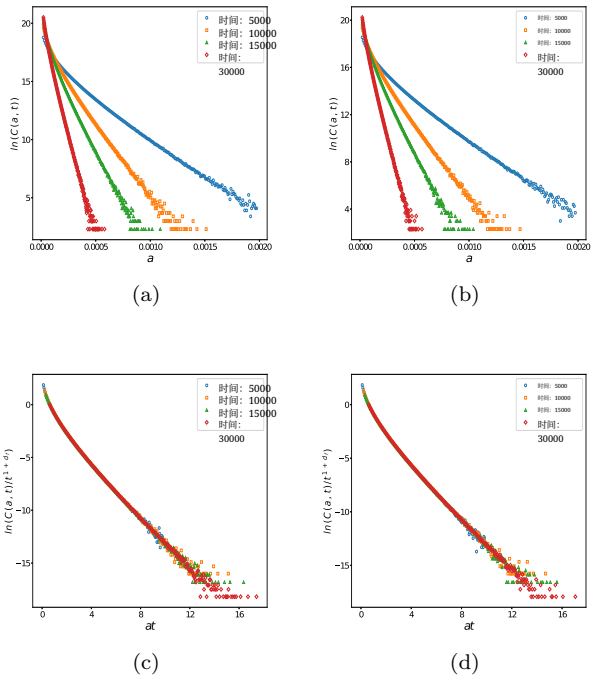


图 3：面积分布函数

$C\ a\ t$ a $t\ =$ (,) 5000 10 000 15 000 30,000 $q\ =\ 0.95$ 的自然对数绘制为关于的函数，其中,,,,和：(a) 和 (b) $q\ =\ 0.85$。在这两种情况下，曲线在尾部区域近似呈线性，表明该分布具有指数形式。使用图（3a）和图（3b）中的相同数据，绘制无量纲量 $\ln\left(C(a,t)\ t^{-\sqrt{3+q}}\right)$ 与 at 的关系，其中 (c) 对应 $q\ =\ 0.95$，(d) 对应 $q\ =\ 0.85$。可以观察到图（3）中所示不同曲线实现了极好的塌缩。

与 t 并非相互独立，且 $C(a,t)$ 的依赖关系可归结为单一无量纲变量

$$\xi = at. \qquad (18)$$

因此，一致性要求 $C(a,t)$ 按照 $C(a,t)\ \sim t^{\theta}$ 进行标度，从而可以定义无量纲分布

$$\Pi = \frac{C(a,t)}{t^{\theta}}. \qquad (19)$$

这确立了动态标度，即 $C(a,\ t)$ 折叠到单一标度变量 $\xi = at$ 的普适函数上。

根据定义，无量纲量在底层有量纲变量重标度时保持不变。因此，如果时间 t 按任意因子进行重标度，Π 的数值必须保持不变。尽管如此， Π 仍可能依赖于无量纲控制参数 ξ，因此我们可以写成

$$\Pi \sim \phi(\xi), \qquad (20)$$

其中 $\phi(\xi)$ 是一个无量纲函数。将式（19）中 Π 的定义代入式（20），可得

分布函数的动态标度形式,

$$C(a,t) \sim t^{\theta}\phi(at), \tag{21}$$

其中 $\phi(\xi)$表示标度函数， θ 为一个先验未知的标度指数。

指数 θ 由晶格的分形维数 d_f 决定，而该维数实际上是测度 $\{p_i\}$ 所分布的底层骨架的维数。块的数目按照式(17)呈代数增长。引入标尺 $\delta \sim t^{-1/2}$后，式(17)可改写为标准分形形式

$$N(\delta) \sim \delta^{-d_f}, \tag{22}$$

由此我们可确定

$$d_f = \sqrt{3+q} - 1. \tag{23}$$

分布的第 d_f阶矩是一个守恒量，这一守恒性唯一地确定了标度指数 θ [48, 49]的值。施加该约束可得

$$\theta = 1 + d_f. \tag{24}$$

因此，块面积分布遵循动态标度形式

$$C(a,t) \sim t^{\sqrt{3+q}}\phi(at). \tag{25}$$

这一结果具有明确且可检验的含义。如图（3a）和图（3b）所示，对于 $q = 0.95$ 和 $q = 0.85$，在不同时间 t 绘制 $C(a,\ t)$与 a 的关系图，将会.....

接下来，我们考察面积分布 $C(a,\ t)$对 a的显式依赖关系。将$\ln\left(C(a,\ t)t^{-\sqrt{3+q}}\right)$ 相对于at 作图（图（3c）、3d），可将图（3a）和图（3b）中的所有曲线塌缩到单一主曲线 $\phi(\xi)$上，从而为动态标度和时间自相似性提供有力证据。塌缩后的曲线在尾部呈线性，斜率等于 t，这意味着

$$\phi(a) \sim e^{-at}, \tag{26}$$

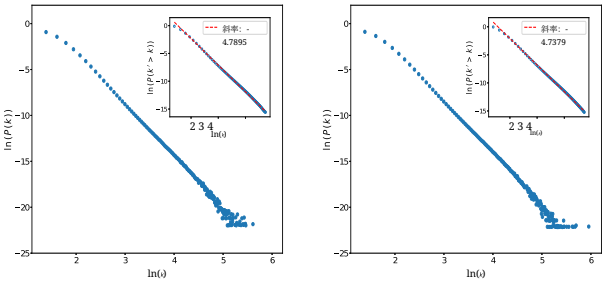
从而得到

$$C(a,t) \sim t^{\sqrt{3+q}}e^{-at}. \tag{27}$$

这表明，尽管有量纲量随时间变化，无量纲分布仍保持不变。因此， $C(a,\ t)$遵循动态标度，不同时间的晶格快照具有自相似性。

V. WPSPL 的无标度性质

这里我们关注 WPSPL 中块的配位数分布。在正则方格晶格中，配位数是恒定的，且等于



(a) (b)

图4：双重 WP-SPL 网络的度分布 $P(k)$ 在双对数尺度下显示于（a）中，其中 $q = 0.85$；在（b）中，其中 $q = 0.95$。数据点是对 50000 个独立实现取平均得到的。在两种情况下，分布均近似呈线性，表明存在幂律行为。然而，重尾意味着对于较大的 k，统计数据较为不足，因此直接从 $P(k)$ 估计指数并不可靠。为缓解这一问题，插图展示了使用相同数据计算得到的累积度分布 $P(k' > k)$，因为它消除了重尾，从而能够更可靠地估计标度指数。随后，将从累积分布测得的指数加一，即可得到 $P(k)$ 的指数。

4。相比之下，WPSPL 中的配位数既不恒定，也无法用某个典型平均值来描述；相反，它是一个随时间演化的随机量。因此，WPSPL 中的配位数无序属于退火型。若将每个块的中心视为一个节点，并将相邻两个块之间的公共边界视为一条连边，则形成的结构就是 WPSPL 的对偶网络（DWPSPL）。在这种表示中，块的配位数对应于关联节点的度。将生长算法的每一步定义为一个时间单位，并施加周期性边界条件，我们测量具有 k 个最近邻的块所占的比例， $N_k(t)\ N(t)$，其中 $N_k(t)$ 是配位数为 k 的块数，而 $N(t)$ 是具有任意配位数的块的总数。在网络表示中， $P(k) = N_k(t)\ N(t)$ 因此对应于 DWPSPL 的度分布。

在图（4）中，我们使用对 50000 个独立实现取平均的数据，绘制了 ln $P(k)$ 与 ln k 的关系曲线。所得曲线近似呈线性，表明度分布遵循幂律

$$P(k) \sim k^{-\gamma}. \tag{28}$$

然而，该分布呈现重（肥）尾，这是无标度网络的典型特征，对应于连接高度密集的枢纽节点。尾部区域的数据稀疏，使得直接估计指数 γ 并不可靠。为减少这种噪声，我们还计算了累积分布 $P(k' > k)$ [50]。图 (4) 的插图展示了 ln $P(k' > k)$ 与 ln k

的关系图，使用的是相同的数据。在这种表示中，尾部波动会自然平滑，因此可以更可靠地估计标度指数。

对插图中 $\ln P(k' > k)$ 的曲线进行线性拟合，得到当 $q = 0.85$ 时斜率为 $\gamma - 1 = 4.7895$，当 $q = 0.95$时斜率为 $\gamma - 1 = 4.7379$。这表明，图4中的度分布遵循幂律，其指数分别为 $\gamma = 5.7895$和 $\gamma = 5.7379$，对应于 $q = 0.85$ 和 $q = 0.95$。我们进一步观察到，随着 q 增加，当 $q = 1$ [32, 33]时，指数降低至 $\gamma = 5.66$。Barab´asi 认为，幂律度分布源于优先连接，这通常被描述为“富者愈富”机制 [51, 52]。WPSPL 的增长动力学包含类似的因素。在该模型中，只有当某个节点的邻近块被选中进行细分时，该节点才会获得新的连边。因此，配位数较大的节点获得额外连边的概率更高。这实际上导致了度的优先增长。利用这一间接优先连接规则，我们于2016年提出了中介驱动连接网络。我们证明，所得网络确实是无标度的，其指数谱取决于新加入节点连接到网络时所具有的连边数量 [53, 54]。

VI. 随机键渗流

为了在 WPSPL 上实现键渗流，我们首先定义其对偶表示。仿照正则方格晶格的构造，我们将一个格点与每个存留块的中心相关联，并将一条键与相邻块之间的共享边界相关联。由此得到由键连接的位点所构成的对偶网络，键渗流可在其上自然定义。然而，与正则晶格不同，每个格点所携带的权重等于其所代表块的面积。因此，由占据键形成的簇并非以位点数目表征，而是以其总面积表征，该总面积等于属于该簇的所有位点的面积之和。

一旦构造出 WPSPL 的对偶，便为每个格点分配一个唯一标签 $i = 1,2,3,\ldots$，以便追踪每条键的端点，并无歧义地识别每条键所连接的那一对位点。完成该标记过程后，最初将所有键移除，使系统从包含 N 个孤立位点的构型开始，每个位点都携带与其所代表的块相对应的关联面积。随后按照 Newman–Ziff（N-Z）算法 [55, 56]实现键的占据。具体而言，先将所有键随机化，再逐一重新占据。每添加一条键后，动态更新各簇，并且簇的大小不由位点数目定义，而由属于该簇的位点所关联的面积之和定义。

尽管WPSPL在统计上具有自相似性，但其本质上是无序的；因此，在给定时间 t，键的总数会因实现而异。因此，必须针对每个对偶格子分别确定键的数量。所有可观测量均通过对大量独立实现取平均获得。为提高效率，我们在固定的 t 下，对每个实现进行多次渗流运行——1000次独立的 Newman-Ziff (NZ) 运行——随后对10000个独立实现重复这一过程。NZ算法直接给出可观测量X_n 关于占据键（或位点）数量 n的函数。所得数据随后用于卷积关系

$$X(p) = \sum_{n=1}^{N} p^n (1-p)^{N-n} X_n, \tag{29}$$

这使得对于任意占据概率 p，都可以获得 $X(p)$。与给定 p 下每个 n 相关的二项权重因子，会通过卷积 [15]，自动纳入，从而为 $X(p)$生成平滑且分辨良好的曲线。

A. 贯通概率 $W(p)$

为计算贯通概率，我们进行 Ω 次相互独立的渗流实现。在每次实现中，键依次被占据，并记录首次出现贯通簇时的占据数 $n_c^{(i)}$。贯通概率定义为

$$W(n,N) = \frac{1}{\Omega} \sum_{i=1}^{\Omega} \Theta\left(n - n_c^{(i)}\right), \tag{30}$$

其中，n表示占据键的数量，$n_c^{(i)}$表示第 i次实现的贯通阈值，$\Theta(x)$为Heaviside阶跃函数。因此，$W(n, N)$表示与实现相关的贯通阈值 n_c的累积分布。

计算出 $W(n, N)$后，即可将其代入公式（29），得到贯通概率 $W(p, N)$。针对不同系统尺寸的数值模拟得到如图5所示的曲线，这些曲线在一个共同点附近相交。该交点为估计临界占据概率 p_c提供了稳健方法：对于有限 N，$W_{\mathrm{span}}(p)$是解析的，并且可以展开为多项式，因此不存在精确交点。然而，在热力学极限下，近似交点收敛于 p_c，此时有限尺寸修正可以忽略。因此，该交点不仅反映了几何结构，还标志着渗流转变及其普适临界行为。

$W(p)$ 随 p 变化的曲线有一个显著特征：随着系统尺寸 L 增大，曲线会系统性地向临界点 p_c 偏移。在 p_c两侧，所有点都逐渐靠近该点，其中 $p < p_c$ 且 W较小时（p, L），偏移更为明显。可以通过以下方式量化这种有限尺寸偏移：在固定的 W处画一条水平线，此处曲线间距最大，然后测量每个 L对应的距离 $p_c - p$。对 $p_c - p$ 与 L 作双对数图，得到

$$p_c - p \sim L^{-1/\nu}. \tag{31}$$

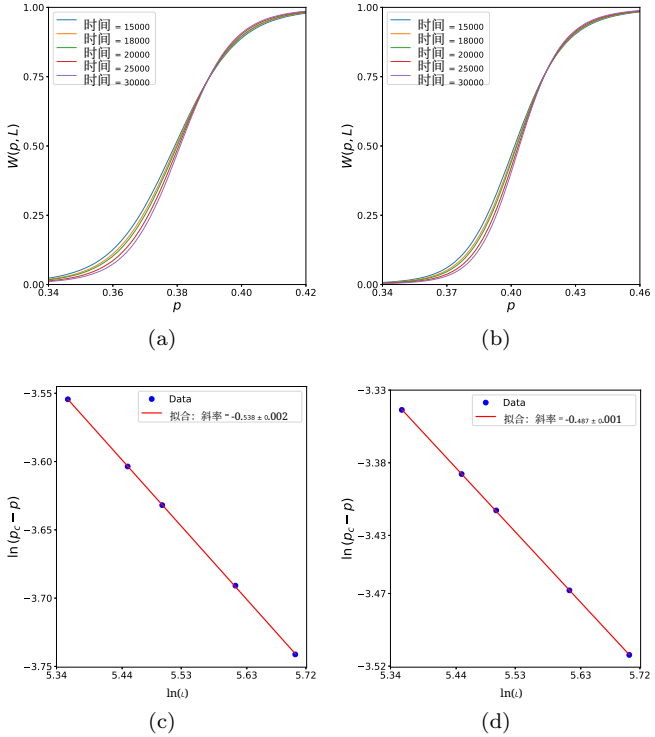


图5：展示了 WPSPL 上键渗流的贯通概率 $W(p,\ L)$ 随 p 变化的曲线，涵盖块保留概率为 (a) $q = 0.90$ 和 (b) $q = 0.85$时的不同系统尺寸。根据模拟，估算得到的渗流阈值为 $p_c = 0.389389$ （对应 $q = 0.90$ ）和 $p_c = 0.416496$ （对应 $q = 0.85$）。(c) 和 (d) 分别展示了 $q = 0.90$ 和 $q = 0.85$下 $\log(p_c - p)$ 关于 $\log L$ 的曲线。由此得到的斜率给出了关联长度指数 $1/\nu = 0.538 \pm 0.002$ （对应 $q = 0.90$ ），以及 $1/\nu = 0.487 \pm 0.001$ （对应 $q = 0.85$）。方程（31）表明，在热力学极限 $L \to \infty$下，所有有限尺寸估计都收敛于 p_c，而跨越概率则趋近于阶跃函数：

$$\lim_{L\to\infty} W(p, L) = \begin{cases} 0, & p < p_c, \\ 1, & p \geq p_c. \end{cases} \tag{32}$$

方程 (31) 还启发我们引入无量纲标度变量 $(p - p_c)L^{1/\nu}$。将 $W(p)$ 对 $(p_c - p)L^{1/\nu}$作图后，所有不同曲线都塌缩到一条普适曲线上，如图 (6a) 和 (6b) 所示，分别对应 $q = 0.90$ 和$q = 0.85$。

B. 渗流中的热力学响应函数类比

比热和磁化率是两个基本的热力学响应函数，用于量化系统对其外部控制参-

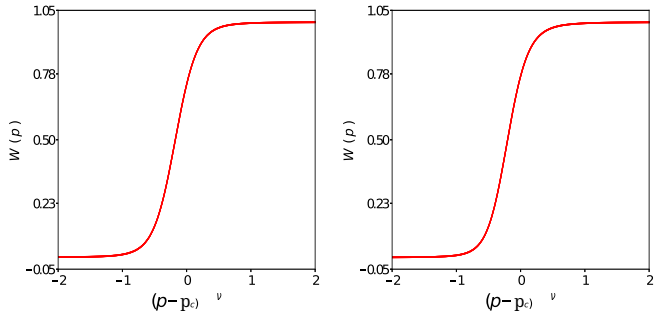


图 6：我们在面板 (a) 和 (b) 中分别绘制了 $W(p)$ 随 $(p_c - p)L^{1/\nu}$ 的变化曲线，其中参数为 $q = 0.90$ 和 $q = 0.85$ 。可以看到，图 5a 和图 5b 中所有不同的曲线分别坍缩到各自的普适标度曲线上。

数变化的响应。它们被定义为适当热力学量的导数，在相变和临界现象的研究中发挥着核心作用 [36]。在热力学中，在外部参数固定时，比热定义为

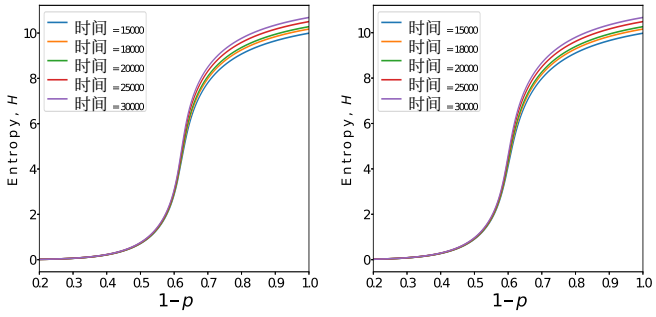
$$C = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right), \tag{33}$$

它量化热涨落，其起源纯粹是热力学的。另一方面，磁化率衡量序参量对其共轭外场 h 的响应，而该外场倾向于增强系统的有序性。它定义为

$$\chi = \left(\frac{\partial \langle O \rangle}{\partial h}\right)_T, \tag{34}$$

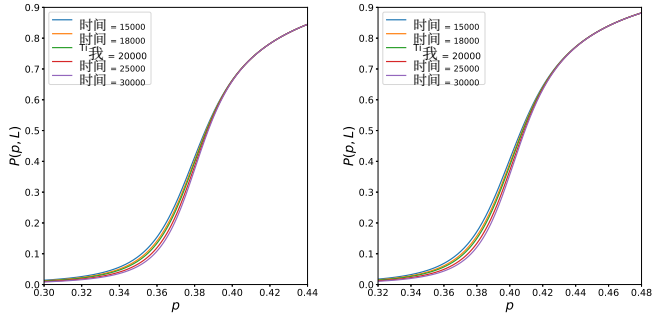
其中，$\langle O \rangle$ 表示序参量。比热探测系统的热响应，而磁化率探测序参量对其共轭场的响应。二者都是热力学响应函数，蕴含着多体系统集体行为的重要信息。

在渗流理论中，一个关键挑战是在非热框架下构造有意义的热力学响应函数类比——具体而言，即比热和磁化率。在平衡系统中，比热测量无序（熵）对温度变化的响应，通常温度越高，有序性越低。将这一概念转化到渗流中，需要为随机连通性定义明确的熵概念，并在不存在热涨落的情况下确定一个模拟温度的控制参数。一旦这些问题得到解决，便可以研究渗流阈值附近无序的演化及其临界行为。同样，还必须定义磁化率的类比量，以量化渗流序参量对外场的响应，从而完善热力学类比，并实现渗流的统一标度描述。

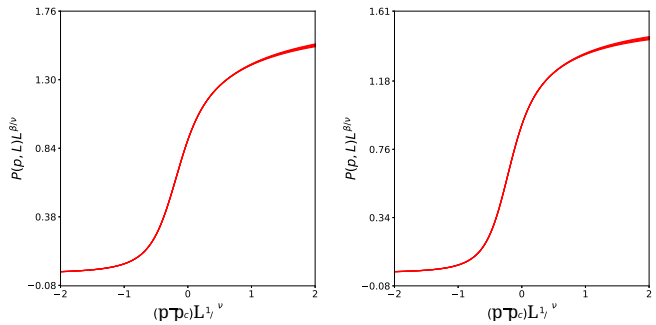


(a) (b)

图 7：熵 H 随不同系统尺寸和 q 取值绘制为 $(1-p)$ 的函数：(a) $q = 0.90$ 和 (b) $q = 0.85$。



(a) (b)



(c) (d)

图 8：序参量 $P(p,\ L)$ 随 p 变化的关系，其中 (a) 为 $q = 0.90$，(b) 为 $q = 0.85$。面板 (c) 和 (d) 分别展示了 $P(p,\ L)L^{-\beta/\nu}$ 随 $(p_c - p)L^{1/\nu}$ 变化的曲线，对应于 $q = 0.90$ 和 $q = 0.85$。我们观察到，(a) 和 (b) 中所有不同的曲线分别塌缩到各自的普适标度曲线上。

C. 熵和序参量

我们考虑随机键渗流，其中每个格点最初都构成一个大小为 1 的孤立簇。随着键被占据，各个簇不断合并并增长。在任意阶段，设有 k 个不同的簇，其大小为 s_1、s_2、……、s_k。在微正则描述下，与这一簇结构相符的构型数为

$$\Omega_k = \frac{N!}{s_1!, s_2! \cdots s_k!}, \tag{35}$$

得到玻尔兹曼熵

$$S_k = \ln \Omega_k, \tag{36}$$

其中 $k_B = 1$。利用斯特林近似，每个格点的熵可化简为

$$\frac{S_k}{N} = -\sum_{i=1}^{k} \mu_i \ln \mu_i, \tag{37}$$

其中 $\mu_i = s_i/N$ 表示簇选取概率。式（37）在形式上与香农熵完全相同，为渗流中每个格点的无序程度提供了归一化度量。图（7）展示了不同系统尺寸下，H 随 $1-p$变化的关系。与热力学相变类似，熵呈现出从低熵有序相到高熵无序相的 S 形交叉变化。这种密切对应表明，$1-p$ 是渗流中温度的自然类比，这与其非负性以及对无序程度的单调调控作用相一致。

渗流与热相变之间的深刻联系由 Kasteleyn 和 Fortuin 建立，他们将渗流映射到 q 态 Potts模型，从而在奇异极限 $q \to 1$ [57, 58] 下得到键渗流。在这一框架中，最大簇的相对大小，

$$P(p, L) = \frac{S_{\max}}{N}, \tag{38}$$

可作为序参量，类似于磁性系统中的磁化强度。对于 $p < p_c$，所有簇都保持有限，并且在热力学极限下 $P \to 0$。对于 $p > p_c$，会出现一个宏观（巨型）簇，且序参量会连续增长，

$$P \sim (p - p_c)^{\beta}, \tag{39}$$

其中，β 是相应的临界指数。这种连续的起始过程与顺磁态—铁磁态相变极为相似，充分确立了渗流作为二级相变的一种几何实现。在传统磁性系统中，外磁场 h 通过使自旋取向一致来增强全局有序。类似地，提高键的占据概率 p 会促进渗流中的连通性和长程有序。图（8）展示了不同系统尺寸下 P（$p,\ L$）随 p 的变化，表明P 随 p单调增加。这种对应关系自然表明，p在渗流中扮演着类似序参量场的角色。

D. 有限尺寸标度与临界指数

确定序参量、磁化率和比热的临界指数——分别记为 β、 γ和α——是本研究的核心目标。这些指数刻画连续相变附近可观测量的奇异行为，并确定其普适类。解析方法能够给出热力学极限下这些指数的数值，而实验和模拟则局限于有限系统。有限尺寸标度（FSS）克服了这一限制，它将有限系统的行为与渐近临界行为联系起来。在 p_c附近，磁化率和比热等量的发散会受到系统尺寸的截断，从而产生展宽并发生偏移的峰；这些峰随 L 的标度行为编码了其内在奇异性。因此，FSS为从有限尺寸数据中提取临界指数提供了一套系统方法。

有限尺寸标度（FSS）的理论基础源自 Buckingham 的 Π 定理 [45]。设 $F(p, L)$ 是一个依赖于控制参数 p 和线性系统尺寸 L的可观测量。在临界点 p_c附近，相关的标度场为 $(p - p_c)$ 和 $L^{-1/\nu}$，二者具有相同的标度维数。因此，在临界点附近，$(p - p_c)$ 可以吸收到 L 中，从而得到

$$F(p, L) \sim F(L), \tag{40}$$

with

$$F(L) \sim L^{a/\nu}, \tag{41}$$

其中， a 是与 F相关的临界指数。

这种量纲分析自然导出无量纲标度变量

$$\xi = (p - p_c)L^{1/\nu}, \tag{42}$$

以及重标度后的可观测量

$$\phi = FL^{-a/\nu}. \tag{43}$$

由于 ϕ 是无量纲的，它只能依赖于无量纲变量 ξ，由此得到有限尺寸标度形式

$$F(p, L) \sim L^{a/\nu}\phi_F\left((p - p_c)L^{1/\nu}\right), \tag{44}$$

其中， ϕ_F 是表征可观测量 F [17, 59, 60]的普适标度函数。

渗流中的序参量最早也由 Fisher 和 Essam 于 1961年 引入，他们将其定义为最大簇的相对大小 $P(t, N) = S_{\max}/N$，并发现其行为类似于磁性系统中的磁化强度 [6]。后来，Kasteleyn 和 Fortuin（1969–1972年）通过随机团簇模型表明，渗流对应于 Potts模型的 $q \to 1$ 极限[57, 58]。这些贡献确立了 $P(p, L)$ 作为渗流理论中的标准序参量。

如果将渗流序参量 P 绘制为外场的函数，它会呈现典型的 S 形曲线；在此情形下，外场即占据概率 p。

已知序参量 $P(p, L)$遵循有限尺寸标度形式

$$P(p, L) \sim L^{-\beta/\nu}\,\phi_P\Big((p - p_c)L^{1/\nu}\Big), \tag{45}$$

其中， $\phi_P(x)$是一个普适标度函数。由于已针对孔隙率参数 q的每个取值，独立地通过贯通概率确定了关联长度指数 ν，因此可以直接对这一标度关系进行数值检验。具体而言，将 $P(p, L)L^{\beta/\nu}$ 作为$(p - p_c)L^{1/\nu}$的函数绘图，可得到 $q = 0.90$ 的最优估计值 $\beta/\nu = 0.092$ 以及 $q = 0.85$的最优估计值$\beta/\nu = 0.075$ 。如图（8c、8d）所示，所得曲线极好地塌缩到一条主曲线上，从而证实了有限尺寸标度假设的有效性。

值得强调的是，标度变量$P(p, L)L^{\beta/\nu}$和$(p - p_c)L^{1/\nu}$均为无量纲量。这立即意味着，在临界点处有渐近关系 $P \sim L^{-\beta/\nu}$，而在相变附近则有$(p - p_c) \sim L^{-1/\nu}$。结合这些结果可得标准的幂律行为

$$P(p, L) \sim (p - p_c)^{\beta}, \tag{46}$$

由此可利用独立确定的 β/ν 和 $1/\nu$ 提取临界指数 β。这种行为与顺磁-铁磁相变附近磁化强度的标度行为直接类似，进一步印证了将 P 视为渗流相变适当序参量的解释。如此高质量的数据塌缩提供了严格的一致性检验，并有力验证了提取出的临界指数，确认观测到的标度忠实地反映了热力学极限下的行为。

根据公式（33）的定义，我们采用香农熵 H 测量比热。请注意，这与序参量有相似之处：序参量量化了随机选取的格点属于最大簇的概率。类似地，香农熵刻画了每次尝试中的不确定性或无知。在公式（33）中用 H 替换 S，即可得到渗流的比热，如图（9）所示，它是 $q = 0.90$和 $q = 0.85$ 条件下 p 的函数。为确定相应的指数 α，我们采用有限尺寸标度（FSS）假设：

$$C(p, L) \sim L^{\alpha/\nu}\,\phi_C\big((p - p_c)L^{1/\nu}\big), \tag{47}$$

其中， ϕ_C 是比热的普适标度函数。按照与序参量相同的步骤，我们计算不同 q值下的 α/ν。由于 ν 已知，绘制 $C(p, L)L^{-\alpha/\nu}$ 与 $(p-p_c)$ $L^{1/\nu}$ 的关系图，可得到出色的数据塌缩，如图（9c）和（9d）所示。利用 $C \sim L^{\alpha/\nu}$中的关系式 $(p-p_c)$ $\sim L^{-1/\nu}$，我们立即得到

$$C(p, L) \sim (p - p_c)^{-\alpha}. \tag{48}$$

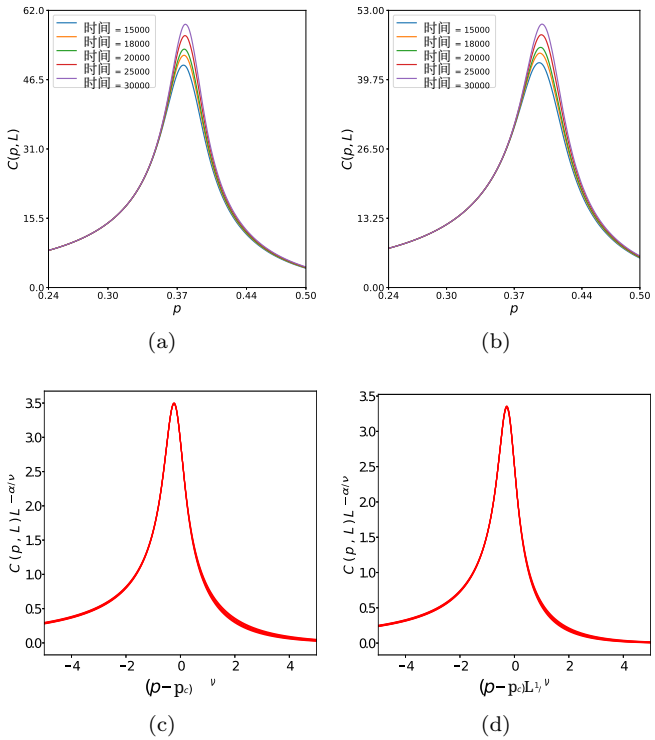


图 9：图中展示了不同系统尺寸下比热 $C(p, L)$ 随 p 的变化曲线：(a) 对应 $q = 0.90$，(b) 对应 $q = 0.85$，体现了孔隙率的影响。(c) 和 (d) 展示了相应的有限尺寸标度图，$C(p, L)L^{-\alpha/\nu}$ 对 $(p - p_c)L^{1/\nu}$ 作图后呈现出极佳的数据塌缩。这证实了数值获得的临界指数 α/ν 和 $1/\nu$ 的取值是最优的。

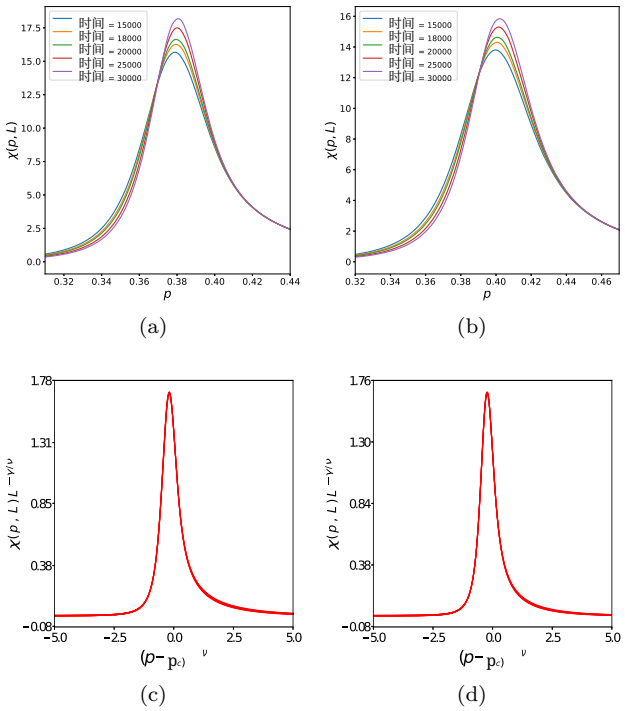


图1：图中展示了不同系统尺寸下磁化率 χ随占据概率 p 变化的曲线，其中 (a) 对应 $q = 0.90$，(b) 对应 $q = 0.85$。面板 (c) 和 (d) 展示了 $\chi(p, L)L^{-\gamma/\nu}$ 对 $(p-p_c(L))L^{1/\nu}$ 的相应有限尺寸标度图。数据的出色塌缩表明，估算得到的临界指数比 γ/ν 和 $1/\nu$ 与理论预期一致。

数据塌缩的质量可作为一致性检验，用以验证所估算的指数 α的准确性。表中列出了不同 q 下 α 的取值。这一关系表明，与连续热相变类似，渗流中的比热在临界点附近遵循幂律发散。

遵循 Fisher 和 Essam [61] 的生成函数表述，以及 Kasteleyn 和 Fortuin [57, 58]，的相关考虑，可以将渗流中的自由能类比量定义为每个晶格位点上的簇数，它对应于簇大小分布的零阶矩。具体而言，该量可表示为

$$n(p) = \sum_{s=1}^{N} n_s(p), \tag{49}$$

其中，$n_s(p)$ 表示占据概率为 p 时大小为 s 的有限团簇数密度。$n(p)$ 关于 p 的二阶导数通常被视为比热的类比量。在方格晶格上，该量对应的临界指数 α为负值，这与已知结果一致。

相比之下，簇尺寸分布的二阶矩

定义了磁化率，它衡量随机选取的格点所属簇的期望大小。该量可写为

$$S(p) \propto \sum_{s=1}^{N} s^2 n_s(p), \tag{50}$$

并且，当从下方趋近渗流阈值时，它按照幂律发散

$$S(p) \sim (p_c - p)^{-\gamma}, \tag{51}$$

这与连续相变附近热力学磁化率的发散直接类似。这些表述仅适用于有限团簇。因此，在超临界区域，必须从式 50 中 χ 的定义里排除贯穿分量；否则，磁化率仍会平凡地发散。由此得到的指数 γ 非常大，严重违反了预期应作为等式成立的 Rushbrooke标度关系。

这些问题促使 Hassan等人 [34] 将磁化率重新定义为序参量的导数：

WPSPL	p_c	β	γ	α	$\alpha+2\beta+\gamma$
q=1.00	0.3474	0.194	0.757	0.861	2.007
q=0.90	0.3894	0.170	0.782	0.931	2.053
q=0.85	0.4165	0.155	0.809	0.977	2.091

表 I：当磁化率按式 50 中的 $S(t)$ 测量，且 $S(t) \sim (t_c - t)^{-\Gamma}$ 并按照式??所示随系统尺寸进行有限尺寸标度时，临界性质的预期值；此外还列出了我们用此方法确定的逆参与率值。

关于控制参数 p的参数，得到

$$\chi(p) = \frac{dP(p)}{dp}. \tag{52}$$

该定义在热力学上是一致的，并解决了传统二阶矩定义的不足：它仅在 p_c 处发散，且对于方形和加权平面随机晶格，Rushbrooke不等式近似取等 [34]。随后研究表明，同一公式也适用于演化图上的随机渗流和竞争渗流模型 [62]。我们采用这一公式，并计算不同 q下的 $\chi(p,\ L)$，如图（10a）和（10b）所示，其中 $q = 0.9$ 和0.85分别对应两种情况。其行为与比热十分相似。应用有限尺寸标度，我们绘制了$\chi(p,\ L)L^{-\gamma/\nu}$随（$p - p_c$）$L^{1/\nu}$的变化，并获得了极佳的数据塌缩效果（图（10c）和（10d））。由此得到临界发散

$$\chi(p) \sim |p - p_c|^{-\gamma}, \tag{53}$$

完全类似于连续相变处磁化率的发散。

VII. 总结与讨论

本文研究了加权平面随机多孔晶格（WP-SPL）上的键渗流。该基底具有几何无序，其孔隙度由参数 q 控制。尽管 WPSPL 具有随机且多孔的性质，但在不同生长阶段中仍表现出稳健的统计自相似性。这一特性使该晶格尤其适用于渗流研究，并可与传统规则晶格进行有意义的比较。WPSPL 具有若干非平凡的结构特征：它在局部呈多重分形，其全局（豪斯多夫）维数随 q 连续变化，且其配位数分布具有尺度无关性，遵循幂律形式。这些性质使 WPSPL 不属于标准欧几里得晶格的范畴，并且从先验角度看，暗示了出现非传统临界行为的可能性。

通过确定渗流阈值并计算序参量和熵，我们为这一本质上非热的系统构建了热力学一致的温度和外场类比量。将这些类比量代入比热和磁化率的定义后，我们利用有限尺寸标度分析提取了临界指数 α、 β和 γ 。结果表明，WPSPL上的渗流临界行为对孔隙率参数 q十分敏感。具体而言，我们发现，降低 q 会使比热指数 α 和磁化率指数 γ增大，而序参量指数 β 则系统性地减小。临界指数的这种连续变化表明，与常规二维格点不同，WPSPL并不属于单一普适类。

这一发现拓展了我们先前的研究结果：无孔隙加权平面随机晶格（$q = 1$）本身就已不属于二维渗流的标准普适类。本研究表明，引入孔隙率后，几何无序、多重分形性和无标度连通性与渗流转变相耦合，进一步丰富了临界行为。尽管观察到了非普适性，Rushbrooke不等式$\alpha + 2\beta + \gamma \geq 2$仍为一致性检验提供了重要依据；该不等式可由一般标度论证导出。对于所研究的所有 q 取值，该不等式均成立，且各项之和非常接近2；正如静态标度假设 [36]所预期的那样，其结果趋于等号。这证实了尽管普适类随 q连续变化，底层的标度框架仍然完好。

综上所述，我们的结果凸显了晶格几何和整体维数在决定临界行为中的核心作用。WPSPL 是一个极具说服力的例子，表明几何调控能够使临界指数连续变化，同时不违背基本标度关系。这为研究复杂基底上的渗流和临界现象开辟了新途径；这些基底在无序、无标度、自相似和多重分形晶格及其多孔对应晶格之间连续过渡。

[1] Paul J. Flory。 *Journal of the American Chemical Society*，63 11：3083–3090，1941年。[2] S. R. Broadbent 和 J. M. Hammersley。 *Mathemati-cal Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*，53：629–641，1957年。

[3] C. Domb 和 M. F. Sykes。 *Proceedings of the Royal Society of London A* 240 214 228, 1957 ，：–。

[4] M. E. Fisher。 *Reports on Progress in Physics*，30:615–730，1967。[5] M. F. Sykes 和 J. W. Essam。 *Journal of Mathematical*

Physics，5:1117–1127，1964。[6] J. W. Essam。 *Reports on Progress in Physics*，43(7):833–912，1980。[7] Leo P. Kadanoff。 *Statistical Physics: Statics Dynamics and Renormalization* 。 2000 World Scientific，。[8] Kenneth G. Wilson。 *Reviews of Modern Physics*，47:773–840，1975。[9] Kenneth G. Wilson 和 J. Kogut。*Physics Reports*，12 2 75 199，1974（）：–。[10] Kenneth G. Wilson。*Scientific American*，241(2):158–179，1979。[11] Michael N. Barber。 *Finite-Size Scaling*。Academic Press，1983。[12] Shang-Keng Ma。 *Modern Theory of Critical Phenomena*。Benjamin，马萨诸塞州雷丁，1976。[13] Dietrich Stauffer 和 A mnon Aharony。 *Introduction to Percolation Theory* 2 1994 。Taylor & Francis，nd版，。[14] Muhammad Sahimi。 *Applications of Percolation Theory*。Taylor & Francis，1994。[15] Robert M. Ziff。 *Physical Review Letters* 103 045701, , ：。[16] 2009 Armin Bunde 和 Shlomo Havlin，编者。 *Fractals and Disordered Systems* 。 Springer-Verlag，柏林，海德堡，第2版，1996。[17] H. Eugene Stanley。 *Rev. Mod. Phys.*，71:S358–S366，1999。[18] M. E. J. Newman。 *Physical Review E*，66:016128，2002。[19] Reuven Cohen、Shlomo Havlin 和 Daniel ben Avraham。 *Physical Review Letters*，91:247901，2003。[20] Cristopher Moore 和 M. E. J. Newman。 *Physical Review E* 61 5678 5682, 2000 ，：–。[21] Yamir Moreno、Romualdo Pastor-Satorras 和 Alessandro Vespignani。*The European Physical Journal B*，26 521 529，2002：–。[22] Stefano Boccaletti 等。 *Physics Reports* 424 175 308, , ：–。[23] 2006 Mirko Residori、Suvendu Mandal、Axel Voigt 和 Christina Kurzthaler。 *Phys. Rev. Research*，7 012032，2025：L。[24] Seongmin Kim、Daihui Wu 和 Yilong Han。 *Nature Communications* 16 11410, 2025 ，：。[25] Alessandro Vespignani。 *Nature Physics*，8:32–39，2012。[26] Sergey N. Dorogovtsev 等。 *Reviews of Modern Physics*，80 1275 1335，2008：–。[27] W. O. Kermack 和 A. G. McKendrick。 *Proceedings of the Royal Society A* 115 700 721, 1927 ，：–。[28] Albert-L´aszl´o Barab´asi。 *Science*，325:412–414，2009。[29] Ciro Cattuto 等。 *PLoS ONE*，5(7):e11596，2010。[30] I. Bautista、L. Cunqueiro、J. Dias de Deus 和 C. Pajares。 *Physical Letters B*，715:230–233，2012。[31] Sergei F. Shandarin、J. V. Sheth 和 V. Sahni。 *MonthlyNotices of the Royal Astronomical Society*，353(1):162–178，2004。[32] M. K. Hassan、M. Z. Hassan 和 N. I. Pavel。*Journal of Physics* 12 093045, 2010 *New* ，：。[33] MK Hassan、MZ Hasan 和 NI Pavel。 *Journal of Physics: Conference Series* 297 012010, 2011 ，：。[34] MK Hassan、D Alam、ZI Jitu 和 MM Rahman。*Physical Review E* 96 5 050101 2017 ，（）：（R），。[35] T Mitra 和 K Hassan。 *The European Physical Journal Special Topics* 230 21 3835 3844, 2021 ，（）：–。[36] H.E. Stanley。 *Introduction to phase transitions and critical phenomena* .牛津大学出版社，牛津和纽约，1971年。[37] M. K. Hassan、M. Z. Hassan 和 N. I. Pavel。 *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 44 175101, , ：。[38] F. 2011 R. Dayeen 和 M. K. Hassan。 *Chaos Solitons & Fractals* , , ：。[39] 91 228, 2016 G. J. Rodgers 和 M. K. Hassan。 *Physical Review E*，50:3458，1994年。[40] P. L. Krapivsky、S. Redner 和 E. Ben-Naim。 *A Kinetic View of Statistical Physics* 。剑桥大学出版社，纽约，2010年。[41] M. K. Hassan。 *Physical Review E*，54:1126，1996年。[42] P. L. Krapivsky 和 E. Ben-Naim。 *Physical Review E*，50 3502: –3514，1994年。[43] A. Charlesby。 *Proceedings of the Royal Society of London.* , ：–。[44] J. *Series A* 224 120 128, 1954 Feder。 *Fractals*。普莱纳姆出版社，纽约，1988年。[45] Santo Banerjee、M. K. Hassan、Sayan Mukherjee 和 A. Gowrisankar。 *Fractal Patterns in Nonlinear Dynamics and Applications* 2019 。CRC出版社，博卡拉顿，。泰勒-弗朗西斯集团。[46] T. Mitra、T. Hossain、S. Banerjee 和 M. K. Hassan。*Chaos Solitons & Fractals*，145:110790，2021年。[47] G. I. Barenblatt。 *Scaling Self-similarity and Intermediate Asymptotics* , , 。剑桥大学出版社，。1996 [48] M. K. Hassan 和 J. Kurths。 *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 315 1 2 342 352, 2002 ，（-）：–。[49] M. Kamrul Hassan、N. I. Pavel、R. K. Pandit 和 J¨urgen Kurths。 *Chaos Solitons & Fractals*，60:31–39，2014年。[50] R´eka Albert 和 Albert-Laszlo Barabasi。 *Reviews of Modern Physics* 74 1 47 97, 2002 ，（）：–。[51] Dimitris Achlioptas、Raissa M. D'Souza 和 Joel Spencer。 *Science*，323:1453–1455，2009年。[52] Albert-L´aszl´o Barab´asi。 *Nature Physics*，8:14–16，2012年。[53] Md Kamrul Hassan、Liana Islam 和 Syed Arefinul Haque。*Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 469 23 30, 2017 ，：–。[54] D. Sarker、L. Islam 和 M. K. Hassan。 *Chaos Solitons & Fractals* 132 109591, 2020 , , ：。[55] M. E. J. Newman 和 R. M. Ziff。 *Physical Review Letters*，85 19 4104 4107，2000（）：–。[56] M. E. J. Newman 和 R. M. Ziff。 *Physical Review E*，64 1 016706，2001（）：。[57] P. W. Kasteleyn 和 C. M. Fortuin。 *Physical Society of Japan Journal Supplement* 26 11, 1969 ，：。[58] C. M. Fortuin 和 P. W. Kasteleyn。 *Physica* 57 536, , ：。[59] D. 1972 P. Landau 和 K. Binder。 *A Guide to Monte Carlo Simulations in Statistical Physics* 。剑桥大学出版社，剑桥，2000年。[60] V. Privman，编者。 *Finite Size Scaling and Numerical Simulation of Statistical Systems* 。World Scientific，新加坡，1990年。[61] M. E. Fisher 和 J. W. Essam。 *J. Math. Phys.*，2 19，1961年 609: –。[62] M. M. H. Sabbir 和 M. K. Hassan。 *Physical Review E*，97 050102 2018年：(R)，。