arXiv:2603.08094v1 [math.AG] 9 Mar 2026

非阿贝尔拼接法简介

Turgay Akyar 和 Mikhail Shkolnikov

摘要

本文介绍了一种新颖的非阿贝尔拼接法概念。它源于非阿贝尔复相位热带超曲面的实轨迹；相关理论目前已发展得足够成熟，因而可以提出这一衍生方向。尽管非阿贝尔热带几何对于任意复约化群都有意义，但目前对三维群中曲面的热带化已有全面理解的情形是 $\boldsymbol{PGL_2}(\mathbb{C})$ 和 $\boldsymbol{SL_2}(\mathbb{C})$，二者通过二重覆盖密切相关。我们强调，本文旨在公布一个框架，并明确说明其输入；与 Viro 方法相比，这些输入的几何性更强、组合性较弱。该框架用于构造实射影三空间中可能出现的实代数曲面类型，并验证它能够重现次数不超过三的所有已知曲面同痕类型。我们得到关于本原 PGL2 曲面拓扑的两个一般定理，并特别指出：对于固定的、较大于一的次数，这些曲面的欧拉示性数可以不同，且不一定等于相应复曲面的符号差；而根据 Itenberg 的一项结果，对于本原组合拼接法，欧拉示性数则会等于该符号差。

关键词： 拼贴法，PGL2，热带几何，实代数曲面。

1 引言

实代数簇拓扑的研究是一门历史悠久且复杂的学科，可追溯至古代；最早的非平凡实例是平面上圆锥曲线的分类。众所周知，“圆锥曲线”一词指圆锥截线，即平面与由 $z^2 = x^2+y^2$给出的锥体的交集，其中 $(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3$，这是奇异仿射二次曲面的一个例子。因此，“圆锥曲线”和“二次曲线”这两个术语几乎是同义词：每条（仿射）圆锥曲线，无论是非奇异情形下的椭圆、双曲线或抛物线，还是奇异情形下的两条相交直线或一个点，都是二次曲线。缺少的一种情形是“空圆锥曲线”，例如由 $x^2 + y^2 = -1$，给出的情形，以及实仿射平面 $\mathbb{R}^2$中的一对平行线。

作者姓名按字母顺序排列。

然而，可以认为这两条直线在无穷远处相交。在一定程度上，这促使人们通过添加所有此类无穷远处的理想交点，将仿射平面 $\mathbb{R}^2$ 紧化为射影平面 $\mathbb{RP}^2$，从而确保任意两条直线都相交。从这一视角看，所有光滑非空二次曲线在一个八维群$PGL_3(\mathbb{R})$的作用下，现都彼此射影等价；该群是群 $GL_3(\mathbb{R})$ 的射影化，即对缩放取商，其中 3×3 是可逆矩阵。此类矩阵是 $\mathbb{R}^3$ 作为向量空间的线性自同构，而 $\mathbb{RP}^3$ 则实现为 $\mathbb{R}^3$ 的射影化。原来的 $\mathbb{R}^2$ 可以视为平面 $z = 1$ 在投影 $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \frac{\mathbb{R}^3\setminus\{0\}}{\mathbb{R}\setminus\{0\}} = \mathbb{RP}^2$.下的像

实际上，这意味着每个次数为$\sum a_{k、e}x^k y^e = 0$ 的多项式方程

d都可以齐次化为

$$\sum_{k+e\leq d} a_{k,e}x^k y^e z^{d-k-e} = 0,$$

其中每个单项式现在的总次数都是 d。次数为$d > 1$ 的齐次方程必然定义一个奇异曲面（奇异点位于原点），该曲面在缩放变换下保持不变，并且可以将其射影化为 $\mathbb{RP}^2$ 中的一条曲线。如果存在 $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ 使得 $\partial_x f(p) = \partial_y f(p) = \partial_z f(p) = 0$，则称该曲线是奇异的，其中 f 是所考察射影曲线的齐次化定义多项式。注意，根据欧拉恒等式 $d f = \partial_x f + \partial_y f + \partial_z f$，点$p$ 投影到 $\mathbb{RP}^2$中曲线的（奇异）点。如前所述，光滑射影二次曲线彼此都等价，使它们看起来不同的是它们相对于由方程 $z = 0$定义的无穷远直线的相对位置；双曲线与该直线相交两次，抛物线与该直线相切，并在一个点处与其相交，而椭圆在无穷远处没有点。从拓扑上看，光滑射影二次曲线是一个圆，其在 $\mathbb{RP}^2$ 中的补集由一个开圆盘（内部）和一个开M¨比乌斯带（外部）的不交并组成。光滑的 3 次射影曲线，也称为三次曲线，具有两种不同的拓扑类型：要么由一个连通分支组成，该分支与一条直线同痕，即是其连续变形；要么由两个分支组成，与一条直线和一个“卵形”的不交并同痕，其中后一个术语指的是 $\mathbb{R}P^2$中的一个嵌入圆，该嵌入圆与一条光滑的非空射影二次曲线同痕。要构造这样的曲线，只需取一个光滑的（空或非空）二次曲线与一条直线的并集。

四次曲线至多有四个连通分支，且每个分支都是一个卵形。此外，如果一个这样的分支位于另一个分支的内部，那么该四次曲线就没有其他分支。为说明这一点，反设结论不成立，过两个嵌套卵形的内部交集中的一点，以及另一个卵形内部的一点作一条直线。这条直线与这三个卵形中的每一个至少有两个交点，因此至少有六个交点，这与贝祖定理的一个简单情形相矛盾——因为将定义四次多项式限制在这条直线上（在我们的光滑情形下，该直线不包含于四次曲线中），所得多项式至多有四个根。

类似地，也很容易推导出五次情形。每条光滑射影五次曲线都与一条直线（对应的分支传统上称为“伪直线”）和至多六个卵形的并集同痕。此外，如果存在一对嵌套卵形，则连通分支总数必须为 3，这可由同样的贝祖型排除论证得出。

一般而言，次数为 d 的射影曲线的分支总数至多为

$$\frac{(d-1)(d-2)}{2}+1,$$

这就是 Harnack 不等式；此外，Harnack 还证明了这一界限在每个次数下都是紧的。上述界限可由克莱因论证优雅地解释：更一般地，通过计算复化关于坐标逐项共轭所给出的对合之商的欧拉示性数，将复化的亏格（即把手的数量；复化是同一方程的复数解集，为一个拓扑曲面）与实轨迹的分支数联系起来。例如，次数 1 和 2 都定义了一个亏格为 0 的复曲线，即一个拓扑二球面，这对应于单个实分支。在次数 3 的情形下，光滑复射影三次曲线在拓扑上是一个环面，即亏格为 1 的曲面，因此实轨迹中至多有 2 个分支。在次数 4 的情形下，光滑复解集是一个亏格为 3 的曲面，因此至多有 4 个分支；而在次数 5 的情形下，亏格为 6，所以至多有 7 个分支，其中包括伪直线。

希尔伯特第十六问题的第一部分关注的是六次（即次数为 6，）曲线的椭圆可能的相对位置，该曲线具有最大分支数，即 11。哈纳克的一般几何构造给出了含一个嵌套与 9 个孤立椭圆的构型。此外，希尔伯特在偶次数情形下给出了类似构造；将其专门化到六次曲线后，得到一种“相反”的构型，其中有一个孤立卵形，以及一个包围另外九个卵形的卵形。他进一步猜想不存在其他拓扑构型。经过长期努力，数十年后古德科夫构造出第三种类型，它多少介于希尔伯特与哈纳克的构型之间：一个卵形包围五个椭圆，其余五个则位于外部。这段引人入胜的故事在奥列格·维罗的一篇文章中得到了优美的记述 [V08]。如今，关于光滑射影曲线的椭圆相对位置问题，在次数不超过 7 时已经清楚，所借助的是各种精巧的禁止方法与构造方法。目前最强有力且最通用的构造是 Viro 组合拼接。

这种方法确实具有很强的组合性，表面上看来似乎与当前问题的连续性质毫无关联。它在曲线的牛顿多边形层面上运作；在射影平面情形下，牛顿多边形是一个顶点为 $(0,\ 0)$、$(d,\ 0)$ 和 $(0,\ d)$ 的三角形。它还利用该多边形的格点三角剖分，其中每个节点的坐标都是整数，并在这些节点上任意分配正负号。利用这些数据，可以在牛顿多边形及其关于坐标轴的四个反射图形的并集上构造一条分段线性曲线；这些图形合在一起构成一个中心对称菱形。将其边界上的对径点识别后，便得到 $\mathbb{RP}^2$ 拓扑上以及由嵌入圆组成的构形。组合拼接法的主定理指出，只要三角剖分满足一个技术性的“凸性”假设，该构形就能由某条次数为 d 的实代数曲线实现，

而且目前尚不清楚这一条件是否必要。用现代术语来说，Viro 拼接法是带有实相位结构的热带曲线的拓扑类型；该定理指出，这种方法能够恢复热带极限附近实曲线的拓扑类型。

Viro 方法的普遍性远不止于 $\mathbb{RP}^2$中的曲线。一方面，人们可以处理一般的光滑环面曲面。另一方面，我们可以任意提高维数，并关注高维环面簇中的超曲面，甚至更一般地，关注其中的热带完全交，参见 [RRS25] ，其中介绍了借助实相位结构在高余维情形下进行拼接的最新进展。

这里一个重要的概念性评注是，在复情形中也可以有类似的拓扑恢复结果，这是 Viro 所猜想的。具体而言，Kerr 与 Zharkov [KZ18]，或 Kim 与 Nisse [KN21], 的定理指出，光滑热带超曲面的复相位增强恢复了相应复超曲面的拓扑。热带光滑性这一概念，在牛顿多面体的对偶剖分层面上，意味着要求该剖分是一个三角剖分，且每个全维子单形都是本原的，并具有最小可能体积，即在二维情形中为$_{1\ 2}$ ，在三维情形中为$_{1\ 6}$ 。这一条件保证了簇在热带极限附近是光滑流形。

满足这种热带光滑性条件的拼接法被称为“本原”拼接法。本原拼接法虽然仍然十分强大，但在构造偶数次超曲面的拓扑类型方面却存在很大的局限性。例如，Itenberg [I97] 观察到，在 $\mathbb{RP}^3$中，本原拼接法的欧拉示性数仅取决于次数；乍看之下，这一结果颇为巧合，因为它恰好等于相应次数的光滑复曲面的符号差，而该曲面被 $\mathbb{CP}^3$ 视为一个拓扑四维流形。Bertrand [B10]利用对不同维数单纯形数量进行计数的同一技术，证明了更高维情形中也存在类似结果。如今，Renaudineau-Shaw 谱序列提供了概念上的解释：该谱序列将实相位热带簇的同调实现为光滑热带簇的（双分次）热带同调 [RS23] 的极限 [IKMZ19] 。

目前，将希尔伯特问题推广到高维簇的研究状况相当不尽如人意。一方面，Harnack 不等式恰当地推广为 Smith-Thom 不等式；通过谱序列论证也可以得到这一不等式，它给出了实轨迹所有贝蒂数之和相对于复化中对应量的精确上界。各个贝蒂数，例如计数连通分支个数的第零个贝蒂数，也有一些关于复化霍奇数的合理上界，但这些上界是否精确尚不清楚。尤其是，已知实五次曲面 $\mathbb{RP}^3$ 的连通分支个数的最佳上界为 25，但迄今构造出的连通分支数最多的例子是 Orevkov 在四分之一世纪前给出的，该例有 23 个连通分支 [O01]。换言之，我们仍不知道是否存在具有 24 个或 25 个连通分支的射影五次曲面。类似地，关于第一贝蒂数，也就是独立闭路的数量，已有一些进展（例如参见 [R15]），但这一问题远未解决。

如果要了解这些连通分支的相对位置，情况就更加复杂，尤其是在高余维情形下，例如实代数纽结（参见 [B11， MO19],）。对同痕类型的理解远不完整，还需要新的禁阻结果与构造方法。本文提出一种概念上全新的构造方法，灵感来自 Viro 最初的思想，但采用了非阿贝尔热带化 [MS22] 及其相位版本 [SP24]，并对实相位情形作了新颖的呈现。将此方法应用于群 $PGL_2(\mathbb{C})$，可以得到一种关于如何构造 $\mathbb{RP}^3$中的曲面的猜想性方法。该方法与经典方法的风格颇为不同：组合性要弱得多，并将三维几何问题归结为椭球面和双曲面上一对光滑曲线相对位置的问题。

2 $PSL_2(\mathbb{C})$-热带曲面

本节旨在概述在复系数情形下满足 PSL_2 光滑性条件的相位热带曲面的构造。相应的实对应物可通过要求构造数据在 $PSL_2(\mathbb{C})$上的某个给定反全纯对合（又称“实结构”）下保持不变，并取相应的不动点轨迹而得到。

理解 PSL_2-热带曲面这一概念的一种方法，是考察 $PSL_2(\mathbb{K})$中一个曲面在映射下的像的闭包

$$\mathrm{VAL} : PSL_2(\mathbb{K}) \to PSL_2(\mathbb{C}),$$

其中， $\mathbb{K}$ 是一个代数闭非阿基米德域，其剩余域为 $\mathbb{C}$。上述映射可以被理解为“点族的相位热带化”，其利用矩阵伴随概念的显式公式为：

$$\mathrm{VAL}[t^\alpha B + o(t^\alpha)]_{\mathbb{K}^*} = [e^\alpha B + e^{-\alpha}(B^*)^{adj}]_{\mathbb{C}^*}.$$

曲面在该映射下的像的结构描述在 [SP25], 中被提出为猜想，最近在 [B-LS26], 中利用 $PSL_2(\mathbb{C}) \setminus PSU(2)$与$(0,\infty) \times \mathcal{S},$的关键微分同胚得到了证实，其中 $\mathcal{S}$是射影二次曲面 $Q_2(\mathbb{C}) \subset \mathbb{CP}^3 = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Mat}_{2\times 2}\,\mathbb{C})$上的圆丛，由 $\{det = 0\}$给出。 $\mathcal{S}$ 在点 $[B]_{\mathbb{C}^*} \in Q_2(\mathbb{C})$上的纤维为

$$\{[cB]_{\mathbb{R}^*} | c \in U(1) \subset \mathbb{C}^*\}.$$

具体而言，该微分同胚为

$$\begin{aligned} \psi : (0,\infty) \times \mathcal{S} &\longrightarrow PSL_2(\mathbb{C}) \setminus PSU(2) \\ (\alpha, [B]_{\mathbb{R}^*}) &\longmapsto [e^\alpha B + e^{-\alpha}(B^*)^{adj}]_{\mathbb{C}^*}, \end{aligned}$$

因此，在这种对应关系下，描述曲面的像很方便；我们将采用所谓的“本原”情形，并分别处理旧次数和偶数次。

2.1 偶数次本原曲面图

设 $d=2k$ 为偶数次， $0<\gamma_1<...<\gamma_k<+\infty$ 为“临界层”。设 f_0， f_2，……， f_{2k} 为以 2×2 矩阵的元素为变量的复多项式，且 f_j 是次数为 j 的齐次多项式。记 f_j 为该多项式在二次曲面 $Q_2(\mathbb{C})$ 上的限制 —— 它是双次数为（ j， j ）并定义曲线 $C_j \subset Q_2(\mathbb{C})$ 的双齐次多项式。除了在我们的情形中具有最多数量的临界层（即 $k=\frac{d}{2}$ ）之外，本原性假设还要求所有 C_j 都光滑，并且 C_j 与 C_{j+2} 横截。由这些数据构造的拼接多项式定义为 $F_d(B)=\sum(det(B))^{2k-2j}f_j(B)t^{\beta_j}$，其中 β_j 满足：次数为 d 的经典单变量热带多项式

$$T\longrightarrow \max_{j=0,\dots,k}(\beta_j+2jT)$$

根为 γ_1、……、γ_k，每个根的重数均为 2。于是，由 $F_d=0$ 给出的曲面 $S_d\subset PSL_2(\mathbb{K})$ 在 VAL 下的像如下：

$$\left(\bigsqcup_{j=1}^{k}(\gamma_j,\gamma_{j+1})\times\mathcal{S}|_{C_j}\right)\bigsqcup\left(\bigsqcup_{j=1}^{k}\{\gamma_j\}\times Im(\sigma_j)\right)$$

其中 $\gamma_{k+1}=+\infty$，而 $\mathcal{S}|_{C_j}$ 是圆丛 $\mathcal{S}$ 在 C_j 上的限制的全空间， $Im(\sigma_j)$ 是截面 σ_j 的像；该截面 $\mathcal{S}$ 在 $Cj\cup C_{j+1}$ 之外定义为

$$\sigma_j[B]_{\mathbb{C}^*}=\left[\sqrt{\frac{f_j(B)}{f_{j+2}(B)}}B\right]_{\mathbb{R}^*}.$$

VAL(S_d) 在 $\mathbb{CP}^3$ 中的闭包称为本原偶数次 $d=2k$, $PSL_2(\mathbb{C})$-相位热带图示。不难看出，该图示是一个拓扑 4-流形。Ilia Zharkov 曾猜想，该流形与 $\mathbb{CP}^3$ 中一个次数为 d 的光滑复曲面同胚。

2.2 奇数次本原曲面图

奇数次的主要结构差异在于，现在所有层都被占据，其中 $\{0\}\times PSU(2)$ 处的部分是某个球面余阿米巴，即 $PSL_2(\mathbb{C})$ 中一个代数曲面在投影下的像

$$\varkappa^o:PSL_2(\mathbb{C})\longrightarrow PSU(2)$$

通过取极分解中的酉部分得到：

$$\varkappa^o[A]_{\mathbb{C}^*}=[A+(A^*)^{adj}]_{\mathbb{R}^*}\in PSU(2).$$

在本原情形下，要求该余阿米巴是某个平面的余阿米巴。这类余阿米巴可以得到完整描述，其中一般情形是 $PSU(2) \simeq \mathbb{RP}^3$ 中某个二次锥的外部：

这一贡献使情况变得更加复杂：这个余阿米巴的闭包与 $(0, \gamma_1) \times C_1$ 的连接显然并不一定构成流形。然而，正如 Ilia Zharkov 所传达的那样，这是合理的；奇数次 PSL_2 相位图的整体拓扑再次与复曲面相同。在应用于实情形时，似乎需要特别关注上述余阿米巴，尤其是因为我们处理的是三种不同的实结构。

$PGL_2(\mathbb{C})$ 上的 3 种实结构

我们构造的一般思路是，在 $PGL_2(\mathbb{C})$ 上固定某个实结构，即一种反全纯对合，也就是 $I: PGL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow PGL_2(\mathbb{C})$，然后考察上一节复相图的 I-实点 D，使得其中涉及的齐次多项式 f_j 关于I保持不变，即 $f_j \circ I = f_j$，也就是在 $D^I = \{p \in D | I(p) = p\}$ 处。

我们提出的主要猜想（将在后续论文中得到完整证明）是：若 D 为本原，则 $D^I \subset PGL_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{RP}^3$ 可实现为相应次数的光滑实代数曲面的一个同痕类型（此外，值得注意的是，当 t 足够大时，退化为 D 的复曲面的实部恰好给出了这样一个曲面的例子）。为此，对于下面将详细讨论的三个优选实结构，我们已能验证上述猜想在 3 次以内成立。此外，我们发现，所有可能的实代数曲面同痕类型都可以通过我们的构造实现。四次的情形，其完整分类在经典文献中已有论述，是我们目前研究的课题。我们希望通过这一技术实现大多数乃至全部类型。此外，若主要猜想成立，我们或许还能构造出一些此前未知的五次曲面类型。

3.1 实结构 I_{T^2}

$PGL_2(\mathbb{C})$ 上的一个明显的实结构实例，由对矩阵每个元素进行基本复共轭给出：

$$I_{T^2} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{\mathbb{C}^*} = \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{bmatrix}_{\mathbb{C}^*}.$$

下标 $T^2 = S^1 \times S^1$ 指的是二次曲面$Q_2(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ 的实轨迹的拓扑，在这种情况下它就是 $\mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^1$；一个与二维拓扑环面 T^2同胚的单叶双曲面。

事实上，这个实结构是 $PGL_2(\mathbb{C})$ 的群自同构，因此其不动点集必然带有群结构。当然，这个群显然是$PGL_2(\mathbb{R})$。它在拓扑上不连通，其分支群同构于 $\{\pm 1\}$，对应于行列式的符号（注意，对于射影化的 2×2 实矩阵，这个符号是良定义的）。极大连通

$PGL_2(\mathbb{R})$ 的子群是 $PSL_2(\mathbb{R})$。后者的拓扑很容易描述：$PSL_2(\mathbb{R}) \simeq S^1 \times D^2$，其中 S^1 是作为 $PSO(2)$ 的极大紧子群出现的，并且

$$D^2 \simeq \mathbb{H}^2 \simeq PSL_2(\mathbb{R})/PSO(2)$$

带有双曲平面的自然结构。换言之，从拓扑上看，$PSL_2(\mathbb{R})$是一个开实心环面，而 $PGL_2(\mathbb{R})$ 是两个此类环面的并。

我们将 $PGL_2(\mathbb{R})$紧化为 $\mathbb{RP}^3$ ——实二阶矩阵空间的射影化由此分解为两个实心环面的并，它们沿着相对于 I_{T^2}的二次曲面的实部相接，也就是环面。这样，我们便重新得到了熟悉的亏格 1 的亨加分解：将实射影三空间视为三维拓扑流形。

回顾一下，亏格为 g 的亨加分解的数据由亏格为 g 的曲面的映射类群中的一个元素构成，该元素用于沿边界粘合两个亏格为 g 的实心把手体。在上述情形中，$g = 1$，并且映射类群为 $SL_2(\mathbb{Z})$。映射类群元素可以从射影三空间的基本几何中求得。具体而言，将分解的边界环面视为双曲面时，它与一个实平面 $\mathbb{RP}^2$ 相交；若固定双曲面与 $\mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^1$. 的一个对应关系，相交结果要么是一条与对角线同痕的曲线，要么是一条与反对角线同痕的曲线。在这两种情况下，这条曲线都是射影平面上的非空光滑圆锥曲线，因此将其分为一个圆盘和一个莫比乌斯带；交换对角线与反对角线时，两者所起的作用也会互换。因此，我们知道，边界上两条实心环面中的(1，1)曲线分别映到(0，1)和(1，2)曲线。结合反对角线对应的类似关系，并注意到(1，1)和(−1，1)构成环面的有理系数第一同调的一组基，便可得到该映射类群元素。

3.2 实结构 $I_\emptyset$

另一个实结构同样是 $PGL_2(\mathbb{R})$ 的群自同构，由 $I_\emptyset[A]_{\mathbb{C}^*} = [(A^*)^{-1}]_{\mathbb{C}^*}$. 给出。其实际轨迹为 $PSU(2)$，完全不与二次曲面$Q_2(\mathbb{C})$相交，因此索引 $\emptyset$ 对应的二次曲面的实轨迹为空。

这种实结构对我们的目的几乎毫无用处：在偶数次本原图 $D \in PGL_2(\mathbb{C})$ 的情形下，相对于 $I_\emptyset$ 的实轨迹为空，因为没有球面余阿米巴的贡献；而在奇次数情形下，我们只会看到一个 $I_\emptyset$-实平面的余阿米巴，它是 $\mathbb{RP}^3 \simeq PSU(2)$ 中的一个平面。

3.3 实结构 I_{S^2}

我们将讨论的第三种实结构是 I_{S^2} : $PGL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow PGL_2(\mathbb{C})$，由 $I_{S^2}[A]_{\mathbb{C}^*} = [A^*]_{\mathbb{C}^*}$ 给出。同样，指标 S^2 对应于关于此实结构的二次曲面 $Q_2(\mathbb{C})$ 的实轨迹的拓扑。重要的是，I_{S^2} 并不是 $PGL_2(\mathbb{C})$ 的群自同构（而是反自同构），因此不能期望其实际轨迹是一个子群。显然，该实轨迹经紧化后，可实现为厄米 2×2 矩阵空间的射影化。二次曲面的实轨迹，即 S^2 ，将这个射影空间分割成

两个非同胚的连通分支，其中一个是开三维球，可与 $\mathbb{H}^3$等同，而另一个分支则不可缩。就矩阵而言，这些分支分别对应于定号和不定号的非退化厄米矩阵——同样，这两种情况可由行列式的符号区分。我们可以如图 1 所示表示这种分解。

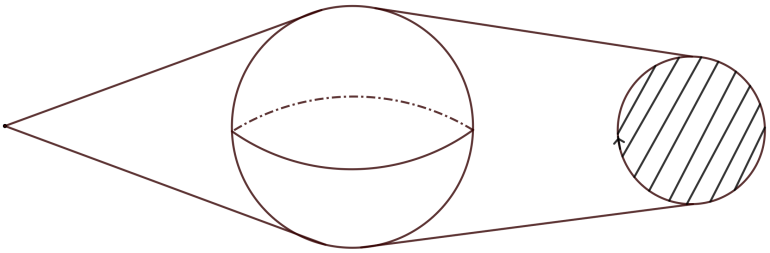


图 1 </style}相对于 I_{S^2}.， $PGL_2(\mathbb{C})$ 的实轨迹示意图

这里，右侧的“锥体”以 $\mathbb{RP}^2$ 结束，即不定矩阵被看作

$$[0,1]\times S^2 \Big/ (1,p)\sim(1,-p)\,,$$

左侧的锥体则终止于一个点，即底部；中间的层表示 S^2.

4 实 $PGL_2(\mathbb{C})$-相位图的拓扑

在本节中，我们研究 D^I 的拓扑，其中 $I\in\{I_{T^2},I_\emptyset,I_{S^2}\}$。为此，我们需要分别考虑由上一节介绍的每个实结构产生的实轨迹。

我们首先回顾初始数据。注意， $\mathcal{S}$ 的实部是基于 $Q(\mathbb{R})$ 的实 S^0-丛；换句话说，位于点 $[B]_{\mathbb{C}^*}$ 上的纤维由两个实点组成，即 $[B]_{\mathbb{R}^*}$ 和 $[iB]_{\mathbb{R}^*}$。

对于每个临界层，给定一组选定的双齐次多项式 f_j andf_{j+2}，截面 σ_j 会根据比值 f_j/f_{j+2} 的符号，在该临界层上 $C_j\cup C_{j+2}$ 的外部的每个连通分支上唯一确定一个符号；这是定义在 $\mathbb{RP}^1\times\mathbb{RP}^1$ 上的良定义概念。取闭包后，会得到一个额外的临界层：它通过交换 $PGL_2(\mathbb{R})$ 的另一个连通分支内部预先指定的符号，以与 $\left\lfloor\sqrt{f_j(B)\,f_{j+2}(B)}^{B}\right\rceil_{\mathbb{R}^*}$ 相对应。

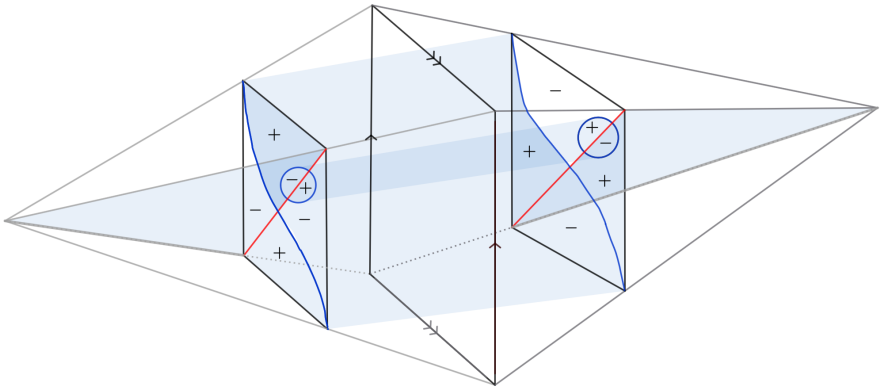


图 2 该图以两个端点而非一个点和一个 S^1的方式表示次数 3 的 $D^{I_{T^2}}$ 。在这个具体例子中，临界层上有一条（1,1）曲线（红色）和一条（3,3）曲线（蓝色），它们交于四点；此外，还为两条曲线并集补集的每个连通分支选定了一个符号。

定理 1 *Let $X \subset \mathbb{CP}^3$ be a complex smooth surface of degree d and D be the $PGL_2(\mathbb{C})$ - phase diagram of degree d, obtained with the initial data described above. If D is I_{T^2}-real and $d = 2k+1$, then the Euler characteristic is bound to*

$$\chi(\overline{D^{I_{T^2}}}) \in [1, \sigma(X)] \cap (2\mathbb{Z}+1)$$

In the even case and D being real I_{T^2}-real, where $d = 2k$,

$$\chi(\overline{D^{I_{T^2}}}) \in [0, \sigma(X)] \cap 2\mathbb{Z}.$$

Moreover, for $I_\emptyset$-real D

$$\chi(\overline{D^{I_\emptyset}}) = \begin{cases} 0, \text{ if } d \text{ is even} \\ 1, \text{ if } d \text{ is odd.} \end{cases}$$

Lastly, for I_{S^2}-real D

$$d \geq \chi(\overline{D^{I_{S^2}}}) \geq d + \sigma(X) \text{ with } \chi(\overline{D^{I_{S^2}}}) \equiv d \pmod 2.$$

Proof 我们先计算偶次数情形下的 $\chi(D^{I_{T^2}})$ 。首先注意，在任意两个连续临界层γ_j 和γ_{j+1}之间，实轨迹由圆柱片构成，其底面是双次数为

$$C_{j+1}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^1$$

（$2j+2, 2j+2$）的实光滑曲线。由于这些圆柱片在拓扑上是圆柱体，因此不会对欧拉示性数作出贡献。因此，在计算 χ时，主要贡献来自临界层本身的表现，以及奇次数情形下额外的余阿米巴贡献。

决定临界层 γ_{j+1} 上计算的一般原理如下：将一个临界层与其在 $PGL_2(\mathbb{R})$ 的另一个连通分支中的反射取并集，即可重构实二次曲面（曲线的交点计数两次）

$$Q(\mathbb{R}) \cong \mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^1.$$

由此，对于 $j>1$，我们得到如下形式的贡献

$$\chi(Q(\mathbb{R}))+\chi\big(C_j(\mathbb{R})\big)+\chi\big(C_{j+1}(\mathbb{R})\big)-\chi\big(C_j(\mathbb{R})\cap C_{j+1}(\mathbb{R})\big)\,.$$

情形 $j=1$ 是例外：在第一个临界层，只有曲线 C_1 出现，因此反射不会带来额外贡献。因此，我们得到

$$\chi(X)=\sum_{j=0}^{k-1}\big(\chi(\mathbb{RP}^1\times\mathbb{RP}^1)+\chi(C_j)+\chi(C_{j+1})-\chi(C_j\cap C_{j+1})\big),$$

其中，对于每个 $j>0$，C_j 是 $\mathbb{RP}^1\times\mathbb{RP}^1$ 中的一条双次数为 $(2j,2j)$ 的光滑曲线，而 C_0 是空集。我们可以写成 $0\le\chi(C_l\cap C_{l+1})\le 2(2j)(2j+2)$。于是得到

$$0\ge\chi(X)\ge-\sum_{l=0}^{k-1}2(2j)(2j+2)=\frac{-8k^3+8k}{3}=\frac{-d^3+4d}{3}.$$

注意，下界恰好就是所声称的符号差 $\sigma(X)$；结合横截条件，我们可以说 $\chi(C_l\cap C_{l+1})$ 总是偶数。因此，我们得到了所需的计数。

在情形 $d=2k+1$ 中，类似的计算同样适用。唯一的区别是，还必须计入余阿米巴带来的贡献，即一个圆和一个孤立点：

$$\chi(X)=\chi(S^1)+\chi(\{point\})+\sum_{l=0}^{k-1}\big(\chi(\mathbb{RP}^1\times\mathbb{RP}^1)+\chi(C_l)+\chi(C_{l+1})-\chi(C_l\cap C_{l+1})\big),$$

其中，对于每个 l，C_l 是 $\mathbb{RP}^1\times\mathbb{RP}^1$ 中的一条双次数为 $(2l+1,2l+1)$ 的光滑曲线。我们可以写成 $0\le\chi(C_l\cap C_{l+1})\le 2(2l+1)(2l+3)$。于是得到

$$\begin{aligned}1\ \ge\ \chi(X)\ \ge\ 1-\sum_{l=0}^{k-1}2(2l+1)(2l+3)&=\frac{-8k^3-12k^2+2k+3}{3}=-\frac{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}{3}\\&=-\frac{(d-2)d(d+2)}{3}\\&=-\frac{d(d^2-4)}{3}.\end{aligned}$$

与第一部分类似的论证表明，我们再次得到了所需的公式 .

$\chi(D^{I_\emptyset})$的计算源于这样一个事实：在偶数次情形下，$D^{I_\emptyset}=\emptyset$；而在奇次数情形下，余阿米巴效应仅贡献一个实平面。

对于最后一个不等式 $d\ge\chi(D^{I_{S^2}})\ge d-\sigma(X)$，我们可以将其与此前对 $\chi(D^{I_{S^2}})$的计算进行比较。

在每个临界层，$\chi(\mathbb{RP}^1\times\mathbb{RP}^1)$的贡献都被 $\chi(S^2)$的非平凡贡献所取代。由于 $\chi(S^2)=2$，这为$\chi(D^{I_{S^2}})$带来了额外的 $2k$ 贡献。此外，在奇数情形下，一个圆被一份 $\mathbb{RP}^2$所取代，从而额外贡献 $\chi(\mathbb{RP}^2)=1$。因此，在两种情形下，$d=2k$ 或 $d=2k+1$，额外贡献总量均为 d。由此得证所述不等式。

□

作为附注，我们补充说明，上述欧拉示性数的所有取值都是可实现的；这一点以及其他内容将在我们的下一篇文章中详细说明。

定理 2 *D^I is $\overline{a}$ topological surface for $I \in \{I_{T^2}, I_\emptyset, I_{S^2}\}$ and D being I-real.*

Proof 对于实结构 $I_\emptyset$，根据上述讨论无需证明。对于其他情形，由于临界层之间的区域是圆柱形的，只需分析临界层处发生的情况，并且在 d 为奇数的情形下，还需分析两端。在后一种情形中，我们可能有一个点，或 S^1 或 $\mathbb{RP}^2$，但其中每一种都具有D^I中那些对象的圆柱形邻域。

取临界层 γ_l中的一个实点 $[B]_{\mathbb{R}^*} \overline{\in D^I}$。该元素位于临界层的某个连通分支中。如果它不属于边界（该边界包含于 $C_l \cup C_{l+1}$中），那么它就是该连通分支的内点。在这种情况下，存在一个$[B]_{\mathbb{R}^*}$ 的邻域，完全包含于 D^I中。

因此，唯一非平凡的情形是$[B]_{\mathbb{C}^*}$ 位于边界上。我们还可以进一步假设，$[B]_{\mathbb{C}^*}$ 是曲线 C_l 和 C_{l+1}的一个横截交点，因为其余边界情形都相对容易处理。

现在考虑一条路径 α_1，它从 C_l 上的一点出发，通向 C_{l+1} 上的一点，并在局部覆盖 D^I中 $[B]_{\mathbb{R}^*}$ 周围的一个四分之一圆盘。从其端点出发，我们可以在圆柱体上、也就是 $(\gamma_j,\ \gamma_{j+1})\times\mathcal{S}\big|_{C_{j+1}}$ 的实轨迹上，沿着 $[B]_{\mathbb{R}^*}$ 周围另取一条路径 α_2，并使其终止于临界层 γ_j上 C_{l+1} 的一点。

类似地，在同一临界层上，沿路径 α_3，我们可以在相对于 $[B]_{\mathbb{R}^*}$ 与起点相对的位置得到另一个四分之一圆盘。最后，沿着临界层 γ_{j-1} 和 γ_j 之间圆柱体上一条围绕半圆盘的路径 α_4，我们可以返回起点。在这种情况下，D^I 中由 $\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3 \cup \alpha_4$ 围成的区域给出了点 $[B]_{\mathbb{R}^*}$ 的一个欧几里得邻域。□

要确定 $D^{I_{T^2}}$ 是否连通，只需了解临界层上发生的情况。在 $d = 3$ 的情形下，只有一个临界层 γ_1。假设我们取两个点 $[B_1]_{\mathbb{R}^*}$ 和 $[B_2]_{\mathbb{R}^*}$，它们位于临界层 γ_1 上两个不同的连通分支中。从包含 $[B_1]_{\mathbb{R}^*}$ 的连通分支出发，我们经过该分支边界上的某个分支（例如 $C_{3,\ 1}$，它属于 C_3），穿过其上的圆柱体到达反射层；然后从那里利用该层上的一个连通分支到达包含 $[iB_2]_{\mathbb{R}^*}$ 的连通分支的边界。最后，我们以类似的方式返回 γ_1，并构造一条通往 $[B_2]_{\mathbb{R}^*}$ 的路径。

Remark 1 $\overline{D^{I_{T^2}}}$ 与 $d = 3$连通。

如果我们考虑具有空 I_{S^2}-实轨迹的曲线 C_1 和 C_3 来构造 $D^{I_{S^2}}$，则在 $\overline{\gamma_1}$处有 S^2，在其反射处有 $\emptyset$，并且在锥体的右端有 $\mathbb{RP}^2$。因此，我们有如下备注。

Remark 2 For $d = 3$, $\overline{D^{I_{S^2}}} = S^2 \sqcup \mathbb{RP}^2$ with $\chi(\overline{D^{I_{S^2}}}) = 3$.

让我们检查一下，对于较小的次数，我们的图示能够构造出哪些拓扑曲面。初始实曲线为空时，$D^{I_{S^2}}$ 基本上是 $d = 1$ 的一个 $\mathbb{RP}^2$，而一个带有 $\chi = 2$ 的连通空间则是 $d = 2$ 的一个$D^{I_{T^2}}$。$\mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^1$ 是 $d = 2$的一个$D^{I_{T^2}}$

欧拉示性数 $\chi(D^{I}{}_{T^2})$ 可以取集合 $\{1,-1,-3,-5\}$中的任意值，该集合在定理 1 中提及，因为很容易在 $\mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^1$ 中构造出双次数为 (1，1) 和 (3，3) 的光滑曲线，使其具有 2、3、4 或 6 个横截交点。结合注记 1和 2，可得以下结果：

Remark 3 次数不超过 3 的光滑曲面的所有同伦类型，都可以通过 PGL_2 拼接构造实现。

5 讨论

我们想先回答读者此时或许最直接会提出的问题，即我们的构造目前处于什么状态，以及我们为何在此阶段提出它。一方面，我们相当确信主要猜想是正确的，也就是说，原始 PGL_2 拼接构造所产生的一切，确实都对应于 $\mathbb{RP}^3$中某个光滑实代数曲面的同痕类型。其可信之处在于，我们可以直接对较低次数的情形进行验证，而且这一验证很容易复现；尤其是，我们特别努力使构造清晰明了，便于从事实代数几何、低维拓扑或几何拓扑等领域的任何人使用。尽管我们已经设想了几种证明该猜想的方案，但完整证明仍然缺失，或许还需要相当长的时间才能得以完成；而从较为审慎谨慎的角度来看，该论断最终也可能被证明是错误的。只需给出一个具体的图：一个次数为 d 的原始 PGL2 图，它不对应于任何次数为 d的实代数曲面的同痕类型。我们因此邀请读者尝试这样做。

此外，在这一研究领域发展的早期阶段进行此类探索，或许能发现此前未知的同痕类型（请记住，从五次开始，我们甚至不知道曲面的连通分支可能有多少个），并为大次数下单个贝蒂数提供更优的渐近下界。此类尝试之所以可行，一个原因在于，与标志性的 Viro 组合拼接相比，我们的构造显然性质迥异：其中几乎不涉及组合学；相反，我们将问题降维为研究二次曲面上光滑且横截相交的曲线之间的相对位置。尽管这一般绝非易事，但它似乎仍比曲面的空间几何更容易处理。

我们试图让读者相信，我们的构造还有其他优点：也就是说，对于固定的次数，本原 PGL_2 拼接法的欧拉示性数可以变化；这与 Viro 原始拼接受 Itenberg 定理约束形成鲜明对比，该定理指出，其欧拉示性数始终等于相应复曲面的符号差。对此，一个合理的问题是：我们是否只是通过转换术语，人为制造这种区别？回答这个问题的关键，在于理解组合原始性条件的几何意义：给定一个经典热带超曲面，其牛顿多面体的对偶剖分是本原的，当且仅当对于

每个复超曲面族，其一般成员都是光滑的，而且同胚于纤维化在我们起初所考虑的热带超曲面之上的相位热带超曲面，正如 Kerr 和 Zharkov，以及 Kim 和 Nisse 的定理所表明的那样。在我们的情形中，本原性的概念源自将这一原则外推至 PGL_2 情形：我们期待最终能用这样一句普遍格言来描述它："本原相位热带化恢复拓扑类型。"

参考文献

[V08] Viro，O. 从第十六希尔伯特问题到热带几何。《日本数学杂志》，3(2)，185-214。（2008）。https://doi.org/10.1007/s11537- 008-0832-6

[RRS25] Rau, J., Renaudineau, A., Shaw, K. 高余维热带簇上的实相位结构与拼接。《国际数学研究通知》，2025(20)，rnaf312。（2025）。https://doi.org/10.1093/imrn/rnaf312[KZ18] Kerr, G., Zharkov, I. 相位热带超曲面。《几何与拓扑》，22(6)，3287-3320。（2018）。https://doi.org/10.2140/gt.2018.22.3287[KN21] Kim,Y. R., Nisse,M. 热带相位超曲面的自然拓扑流形结构。《韩国数学会杂志》，58(2)，451-471。（2021）。https://doi.org/10.4134/JKMS.j200132[I97] Itenberg, I. 实代数T曲面的拓扑。马德里康普顿斯大学数学杂志。10（增刊）：131-152，参考文献19篇。（1997）[B10] Bertrand, B. 本原T超曲面与极大曲面的欧拉示性数。《朱西厄数学研究所杂志》，9(1)，1-27。（2010）https://doi.org/10.1017/S1474748009000152[RS23] Renaudineau, A., Shaw, K. 热带极限附近实超曲面的贝蒂数上界´。《法国高等师范学校科学年报》。（2023）。https://dx.doi.org/10.24033/asens.2547[IKMZ19] Itenberg, I., Katzarkov, L., Mikhalkin, G., Zharkov, I. 热带同调。《数学年刊》，374(1)，963-1006。（2019）。https://doi.org/10.1007/s00208-018-1685-9[O01] Orevkov, S. Yu. "具有23个连通分支的实五次曲面。"《法国科学院院报——数学辑》333，第2期，115-118。（2001）https://doi.org/10.1016/S0764-4442(01)02013-4[R15]Renaudineau, A. 具有45个把手的实六次曲面。《数学杂志》，281(1)，241-256。（2015）。https://doi.org/10.1007/s00209-015-1482-z

[B11]Bj¨orklund, J. 低次数实代数纽结。《纽结理论及其应用》，20(09)，1285-1309。（2011）。https://doi.org/10.1142/S0218216511009248[MO19] Mikhalkin, G., Orevkov, S. 极大扭绕的实代数链环。《数学发明》，216(1)，125-152。（2019）。https://doi.org/10.1007/s00222-018-0844-7

[MS22]Mikhalkin, G., Shkolnikov, M. 非交换合点集。伦敦数学会会刊，54(2)，335-368。（2022）。https://doi.org/10.1112/blms.12622

[SP24] Shkolnikov, M., Petrov, P. PSL2 相位热带化导论。载于《保加利亚科学院学报》（第 77 卷，第 10 期，第 1425-1432 页）。（ 2024 ）。https://doi.org/10.7546/CRABS.2024.10.01

[B-LS26] Bengus-Lasnier, A., Shkolnikov, M. 相位热带化的纤维。arXiv 预印本 arXiv:2601.18519。（2026）。https://doi.org/10.48550/arXiv.2601.18519

[SP25] Shkolnikov, M.,PetrovP.PSL2 热带化与曲面上的直线，《第29届G¨okova几何-拓扑会议论文集》，第1–17页，（2025）。

致谢

Turgay Akyar感谢ICMS-Sofia和Ernesto Lupercio提供了支持性的研究环境。Mikhail Shkolnikov谨致谢Grigory Mikhalkin、Peter Petrov、Ilia Zharkov以及Andrei Bengus-Lasnier的宝贵讨论。

本工作得到西蒙斯基金会资助，项目 [SFI-MPS-T-Institutes-00007697], 保加利亚共和国教育与科学部，项目[DO1-239/10.12.2024], 以及国家科学基金、保加利亚共和国教育与科学部根据合同 [KP-06-N92/2] 对第二作者的资助。

保加利亚科学院数学与信息学研究所，Akad. G. Bonchev，索非亚 1113，保加利亚；中东技术大学数学系，06800 安卡拉，土耳其 t.akyar[at]math.bas.bg 保加利亚科学院数学与信息学研究所，Akad. G. Bonchev，索非亚 1113，保加利亚 m.shkolnikov[at]math.bas.bg