Delahan 的诱导普适性结果的新证明

Jonathan CHAPPELON*

IMAG，蒙彼利埃大学，法国国家科学研究中心，法国蒙彼利埃

2026年3月10日

arXiv:2603.08106v1 [cs.DM] 9 Mar 2026

摘要

我们给出 Delahan 定理的一个简短且自成一体的证明。该定理指出，每个具有 n 个顶点的简单图，都是一个具有 $^{n}{}_{\left(n-1\right)}{}_{2}+1$ 个顶点的 Steinhaus 图的诱导子图。这个新证明是通过考察 Steinhaus 三角形的生成指标集这一概念得到的。

MSC2020：05A10, 05C50, 05C75, 05B30.
关键词：Steinhaus三角形、Steinhaus图、诱导通用性、三角数、二项式矩阵、范德蒙行列式。

1 引言

本文中，n 均为非负整数。非负整数集记为 $\mathbb{N}$。令 t_n 表示 n^{th} 三角数

$$t_n = \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

并令 T_n 为整数三角形

$$\mathrm{T}_n = \left\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \;\middle|\; i+j < n\right\}.$$

一个二元斯坦豪斯三角形（简称***Steinhaus***三角形）的大小 n 是一个由 t_n 个零和一组成的下指三角形 $(a_{i,\ j})_{(i,j)\in \mathrm{T}_n}$，满足与标准帕斯卡三角形模 2 时相同的局部规则，即

$$a_{i,j} \equiv a_{i-1,j} + a_{i-1,j+1} \pmod 2, \tag{1}$$

对所有满足 $i \geqslant 1$ 的 $(i,\ j) \in \mathrm{T}_n$。注意，(0) 和 (1) 是大小为 1 的 Steinhaus 三角形，而 $\emptyset$ 是大小为 0 的 Steinhaus 三角形。图1展示了一个大小为 7 的 Steinhaus 三角形示例

*电子邮件地址：jonathan.chappelon@umontpellier.fr

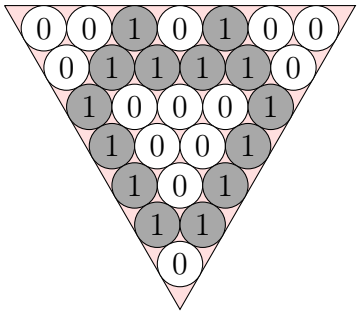


图1：大小为 7 的 Steinhaus 三角形 $\nabla(0010100)$

显然，Steinhaus 三角形 $(a_{i,\ j})_{(i,j)\in \mathrm{T}_n}$ 完全由其首行 $(a_{0,\ j})_{j=0}^{n-1}$ 决定。事实上，对 i 进行归纳并使用 (1)，可得

$$a_{i,j} \equiv \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} a_{0,j+k} \pmod 2, \tag{2}$$

对所有 $(i, j) \in \mathrm{T}_n$，其中二项式系数 $\binom{a}{b}$ 是单项式 X^b在 $(1+X)^a$展开式中的系数；对所有满足 $b \leqslant a$的非负整数 a 和 b，均如此。下文中，首行为序列 S 的 Steinhaus 三角形记作 ∇S。因此，图1中的 Steinhaus 三角形为 $\nabla(0010100)$。

由于大小为 n 的二元斯坦豪斯三角形集合 $\mathcal{ST}(n)$ 在模 2 加法下封闭，因此 $\mathcal{ST}(n)$ 是一个以 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$为底域的向量空间。此外，由于 Steinhaus 三角形由其首行唯一确定，$\mathcal{ST}(n)$ 的维数为 n。

除了这一初等定义之外，Steinhaus 三角形还蕴含着出人意料地丰富的组合结构。特别是，一条经典研究脉络源自 Steinhaus [22] 和 Molluzzo [21], 的工作，探讨 Steinhaus 三角形在何种条件下是平衡的，也就是说，每个符号（或在模扩张中，每个剩余类）出现的次数都相同。在二元情形下，这引出了关于三角形中零和一的分布 [20, 18, 9]的问题。在更一般的形式中，研究者考察模 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 上的 Steinhaus 三角形，并探讨对于适当的大小 [6, 8, 11]，是否存在（或能否明确构造）平衡构型。这推动了人们持续关注 Steinhaus 三角形的结构与代数方面（对称性、线性子空间、模提升等），如 [10], 所示，并为本文的工作提供了广阔的背景。

简单图是一个二元组 $G = (V,\ E)$，其中 V 是有限顶点集，$E \subset \binom{V}{2}$ 是由不同顶点组成的无序对构成的集合（不含自环和重边）。对于 $W \subset V$，诱导子图 $G[W]$ 是顶点集为 W 且

$$E(G[W]) = \{\{u, v\} \in E \mid u, v \in W\}.$$

换言之，它包含 G 中两个端点都在 W 中的所有边，不包含其他边。

一个***Steinhaus***图的阶数 $n \geqslant 1$ 是一个简单图，其邻接矩阵的上三角部分是一个大小为 $n-1$的Steinhaus三角形。对于任意长度为 $n-1$的零和一序列$S = (a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots,\ a_{n-1})$，其对应的Steinhaus图 G($S$) 是一个阶数为 n 的简单图，其邻接矩阵 M(S) $= (a_{i,\ j})_{1\leqslant i,\ j\leqslant n}$ 满足

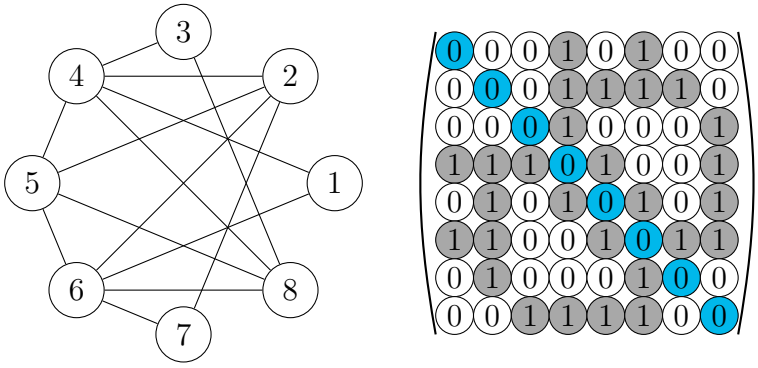
i) $a_{i,j} = a_{j,i}$, for all $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, (symmetry)

ii) $a_{i,\,i} = 0$，对所有 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$均成立，（零对角线）

iii) $a_{1,\,j} = a_{j-1}$，对所有 $j \in \{2, 3, \ldots, n\}$（序列 S）

iv) $a_{i,\,j} \equiv a_{i-1,\,j-1} + a_{i-1,\,j}$（模 2），对所有满足 $2 \leqslant i < j \leqslant n$ 的整数 i，j（∇S的局部规则）。

例如，对于 $S =$（0010100），Steinhaus图 G(S) 及其邻接矩阵 M(S) 如图 2 所示。



G(0010100)　　M(0010100)

图 2：Steinhaus图 G(0010100) 及其邻接矩阵 M(0010100)

阶为 n 的 Steinhaus 图集合记作 $\mathcal{SG}(n)$。显然，$\mathcal{SG}(n)$与 $\mathcal{ST}(n-1)$之间存在自然对应。因此，集合 $\mathcal{SG}(n)$是一个在 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上的 $n-1$维向量空间。

关于 Steinhaus 图的一个经典问题，是研究具有某些图性质的 Steinhaus 图，例如二部划分 [14, 15, 5], 、平面性 [17]或正则性 [13, 2, 1, 7]。关于 Steinhaus 图的综述见 [16]。

Molluzzo问题关注 Steinhaus 三角形内部的分布性质，而图论视角则为 Steinhaus 图这一类图中的嵌入和普适性 提出了另一类问题。该方向的一个里程碑定理由 Delahan 提出：对于每个 $n \geqslant 1$，每个有 n 个顶点的简单图都是某个有 $t_{n-1}+1$ 个顶点的 Steinhaus 图的诱导子图。等价地，阶为 $t_{n-1}+1$ 的 Steinhaus 图族是 n-诱导普适的。

对于任意正整数 n，顶点集 $\{1, 2, \ldots, n\}$上所有简单图的集合记为 $\mathcal{G}_n$。在 [12], 中已证明，$\mathcal{G}_n$ 与$\mathcal{SG}$（$t_{n-1}+1$）之间存在一个同构。

定理 **em 1.1** (Delahan [12]). 设 n 为一个正整数。我们考虑 n-子集

$$W_n = \{t_i + 1 \mid i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\}$$

$\{1, 2, \ldots, t_{n-1}+1\}$的。然后，线性映射

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{SG}(t_{n-1}+1) & \longrightarrow & \mathcal{G}_n \\ G & \longmapsto & G[W_n] \end{array}$$

是一个同构。因此，任何阶数为 n 的简单图都同构于一个阶数为 $t_{n-1}+1$ 的 *Steinhaus* 图的诱导子图。

Delahan 定理表明，从精确的诱导意义上说，Steinhaus 图“足够大”，能够包含所有 n 个顶点的图。本文旨在通过考察 Steinhaus 三角形的生成指标集这一概念，为 Delahan 的诱导普适性定理给出一种新的、简短且自成一体的证明。

本文安排如下。第 2 节介绍 Steinhaus 三角形的生成指标集，并通过模 2 可逆性对其进行刻画。第 3 节具体研究某些二项式子式，并证明相关行列式为奇数。最后，在第 4 节综合第 2 节和第 3 节的结果，证明 Delahan 定理。

2 生成指标集

如果知道 $\mathcal{ST}(n)$ 中所有 $(i,j) \in A$ 对应的值 $a_{i,j}$，便能唯一确定整个 Steinhaus 三角形 $(a_{i,j})_{(i,j)\in \mathrm{T}_n}$，且 A 的大小是最小的，那么 T_n 的子集 A 就称为 $\mathcal{ST}(n)$ 的 生成指标集；也就是说，子集 A 使下述线性映射成为同构：

$$\begin{array}{rccc} \pi_A: & \mathcal{ST}(n) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2^{|A|} \\ & (a_{i,j})_{(i,j)\in \mathrm{T}_n} & \longmapsto & (a_{i,j})_{(i,j)\in A} \end{array}$$

其中 $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$。由于 $\dim \mathcal{ST}(n) = n$，我们推得，$\mathcal{ST}(n)$ 的生成指标集的基数始终为 n。由 (2) 可知，大小为 n 的 Steinhaus 三角形的顶行指标集，即

$$A_T = \{(0,0),(0,1),\ldots,(0,n-1)\},$$

是 $\mathcal{ST}(n)$ 的一个生成指标集。注意，对于所有 $S \in \mathbb{Z}_2^n$，$\pi_{A_T}^{-1}(S) = \nabla S$。由此可知，集合 A 是 $\mathcal{ST}(n)$ 的生成指标集，当且仅当线性映射

$$\pi_A \circ \pi_{A_T}^{-1} : \mathbb{Z}_2^n \longrightarrow \mathbb{Z}_2^n$$

是一个自同构。例如，$\mathcal{ST}(3)$ 的 16 个生成指标集（在二面体群 D_3 的作用下有 4 个）如图3所示，其中若某个圆盘的位置属于生成指标集，则该圆盘为黑色，否则为白色。此外，图4给出了 T_3 的四个 3-子集，它们不是 $\mathcal{ST}(3)$ 的生成指标集。

由于右侧指标集

$$A_R = \{(0,n-1),(1,n-2),\ldots,(n-1,0)\}$$

和左侧指标集

$$A_L = \{(0,0),(1,0),\ldots,(n-1,0)\}$$

大小为 n 的 Steinhaus三角形 ∇ 的右侧指标集和左侧指标集，分别可视为 ∇ 的 120° 次和 240° 次旋转的顶行指标，因此 A_R 和 A_L 也都是 $\mathcal{ST}(n)$ 的生成指标集。因此，Steinhaus三角形中的每个元素都可以表示为其首行、右侧或左侧各项的函数。

对于满足 $b \leqslant a$ 的任意非负整数 a 和 b，二项式系数 $\binom{a}{b}$ 表示从一个包含 a 个元素的集合中选取 b 个元素的方法数。在此，我们将这一记号扩展为：对于所有满足 $b<0$ 或 $b>a$ 的整数 b，假设 $\binom{a}{b} = 0$。对于这一推广，帕斯卡恒等式

$$\binom{a}{b} = \binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b}$$

对于所有正整数 a 和所有整数 b 都成立。

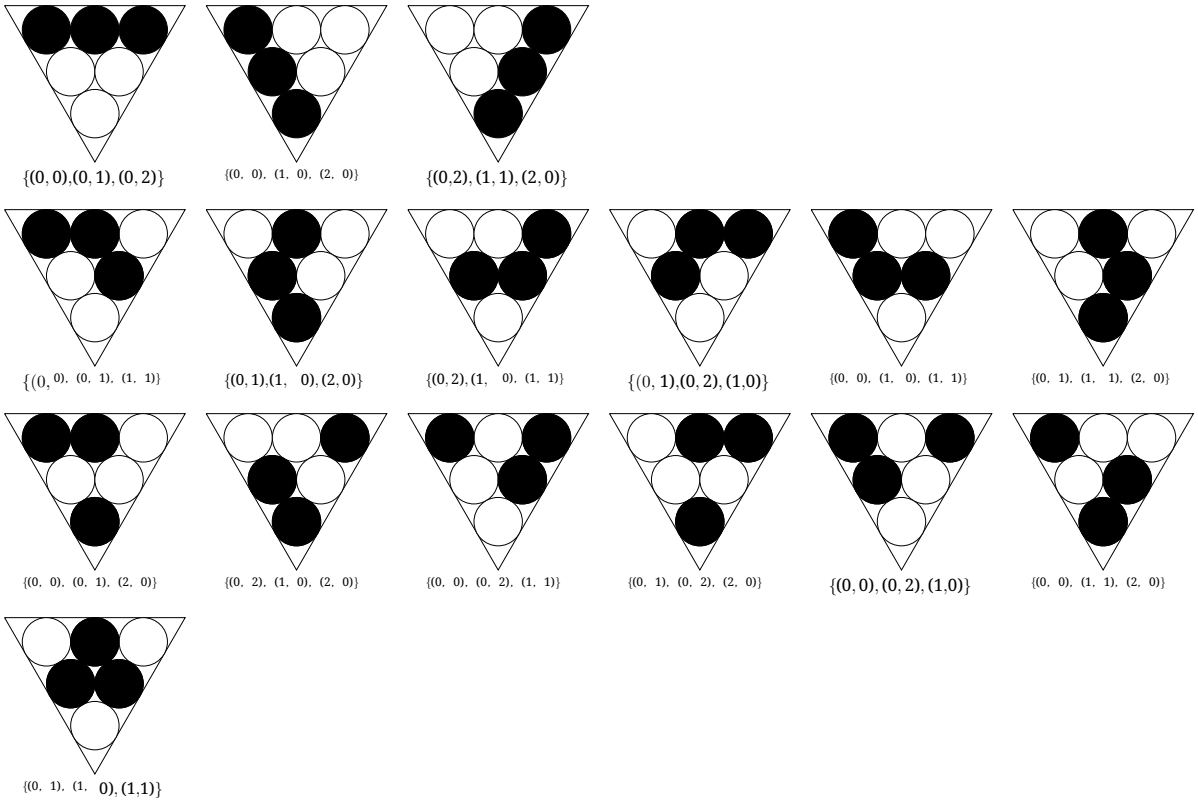


图3： $\mathcal{ST}(3)$ 的生成指标集

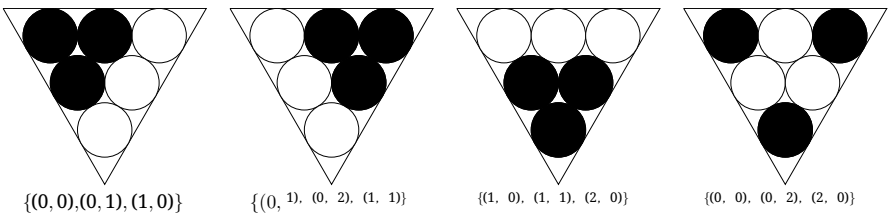


图4：T_3 中不是 $\mathcal{ST}(3)$的生成指标集的3-子集

Lemma 2.1. 设$(a_{i,j})_{(i,j)\in \mathrm{T}_n}$ 是大小为 n的二元斯坦豪斯三角形。于是，我们有 e

$$a_{i,j} \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \binom{i}{k-j} a_{0,k} \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1-(i+j)}{k-i} a_{k,n-1-k} \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \binom{j}{k-i} a_{k,0} \pmod 2$$

对所有$(i, j) \in \mathrm{T}_n$。

证明。 对 i 使用(1)进行归纳。 □

命题 2.2. 设 $A = \{(i_0, j_0)、(i_1, j_1).....、(i_{n-1}, j_{n-1})\}$ 是T_n的一个 n元子集。则集合 A 是 $\mathcal{ST}(n)$ 的生成指标集，当且仅当矩阵

$$\mathbf{M}_{\boldsymbol{A}} = \left(\binom{i_k}{\ell - j_k} \right)_{0\leqslant k,\ell \leqslant n-1}$$

模2可逆。

证明。 由引理 2.1可知,

$$a_{i_k,j_k} \equiv \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{i_k}{\ell - j_k} a_{0,\ell} \pmod 2,$$

对所有 $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ 均成立。因此

$$\pi_A \circ \pi_{A_T}^{-1}(S) \equiv S.\mathbf{M}_{\boldsymbol{A}}^{\intercal} \pmod 2,$$

对所有 $S \in \mathbb{Z}_2^n$ 均成立。最后，线性映射 $\pi_A \circ \pi_{A_T}^{-1}$ 是自同构，当且仅当矩阵 $\mathbf{M}_{\boldsymbol{A}}$ 模 2 可逆。 □

生成指标集的概念以及命题 2.2 的结果在 [3, 4, 10] 中出现在更一般的背景下。文中还证明，$\mathcal{ST}(n)$ 的生成指标集构成一个拟阵，称为模 2 [3, 4] 帕斯卡拟阵。

3 二项式矩阵的子拟阵

本节考虑无限二项式矩阵

$$\mathbf{B} = \left(\binom{i}{j} \right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}.$$

对应于行 $0 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ 和列 $0 \leqslant b_1 < b_2 < \cdots < b_n$ 的 n 阶子矩阵 记为

$$\mathbf{B}\begin{bmatrix} a_1, a_2, \ldots, a_n \\ b_1, b_2, \ldots, b_n \end{bmatrix} = \left(\binom{a_i}{b_j} \right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

命题 3.1. 对于任意递增序列 n 非负整数 $0 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_n$，我们有

$$\det \mathbf{B}\begin{bmatrix} a_1, a_2, \ldots, a_n \\ 0, 1, \ldots, n-1 \end{bmatrix} = \frac{\Delta(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{\prod_{k=0}^{n-1} k!},$$

其中 $\Delta(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ 是 t_{n-1} 个差的乘积

$$\Delta(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_j - a_i).$$

证明。 首先，根据定义，我们有

$$\det \mathbf{B}\begin{bmatrix} a_1, a_2, \ldots, a_n \\ 0, 1, \ldots, n-1 \end{bmatrix} = \det\left(\binom{a_i}{j-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \begin{vmatrix} \binom{a_1}{0} & \binom{a_1}{1} & \cdots & \binom{a_1}{n-1} \\ \binom{a_2}{0} & \binom{a_2}{1} & \cdots & \binom{a_2}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{a_n}{0} & \binom{a_n}{1} & \cdots & \binom{a_n}{n-1} \end{vmatrix}.$$

由于对于所有 $i,\ j \in \{1, 2, \ldots, n\}$，我们有

$$\binom{a_i}{j-1} = \frac{(a_i)_{j-1}}{(j-1)!},$$

其中 $(a_i)_{j-1}$ 是下降阶乘

$$(a_i)_{j-1} = \prod_{k=0}^{j-2}(a_i - k),$$

我们得到

$$\det \mathbf{B}\begin{bmatrix} a_1, a_2, \ldots, a_n \\ 0, 1, \ldots, n-1 \end{bmatrix} = \det\left(\frac{(a_i)_{j-1}}{(j-1)!}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \begin{vmatrix} \frac{(a_1)_0}{0!} & \frac{(a_1)_1}{1!} & \cdots & \frac{(a_1)_{n-1}}{(n-1)!} \\ \frac{(a_2)_0}{0!} & \frac{(a_2)_1}{1!} & \cdots & \frac{(a_2)_{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{(a_n)_0}{0!} & \frac{(a_n)_1}{1!} & \cdots & \frac{(a_n)_{n-1}}{(n-1)!} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} k!} \det((a_i)_{j-1})_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

此外，由于对于所有 $i,\ j \in \{1, 2, \ldots, n\}$，我们有

$$(a_i)_{j-1} = a_i(a_i - 1)\cdots(a_i - j + 2) = {a_i}^{j-1} + \sum_{k=0}^{j-2} s(j-1, k){a_i}^k,$$

其中 $s(j-1,\ k)$ 是第一类斯特林数，由此可得

$$\det((a_i)_{j-1})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \begin{vmatrix} (a_1)_0 & (a_1)_1 & \cdots & (a_1)_{n-1} \\ (a_2)_0 & (a_2)_1 & \cdots & (a_2)_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_n)_0 & (a_n)_1 & \cdots & (a_n)_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & {a_1}^2 & \cdots & {a_1}^{n-1} \\ 1 & a_2 & {a_2}^2 & \cdots & {a_2}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & {a_n}^2 & \cdots & {a_n}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

由于该范德蒙德矩阵的行列式对应于 $\Delta(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$，我们得出

$$\det \mathbf{B}\begin{bmatrix} a_1, a_2, \ldots, a_n \\ 0, 1, \ldots, n-1 \end{bmatrix} = \frac{\Delta(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{\prod_{k=0}^{n-1} k!},$$

如所宣布。 □

除命题 3.1 中的 Vandermonde 型求值之外，关于二项式子式还有大量丰富的结果。特别地，Gessel 与 Viennot 借助不相交路径，给出了二项式系数矩阵任意子式的组合解释，并与杨表及钩长公式相关联 [19]。

对于 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ 是前 n 个三角数这一特殊情形，即对所有 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$，均有 $a_i = t_{i-1}$，我们得到以下结果

命题 3.2. 对于前 n 个三角数，有

$$\det \mathbf{B}\begin{bmatrix} t_0, t_1, \ldots, t_{n-1} \\ 0, 1, \ldots, n-1 \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^{n-1} (2i-1)^{n-i}.$$

证明。 首先，根据差的乘积的定义，有

$$\Delta(t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n-1} (t_j - t_i).$$

对于任意非负整数 i 和 j，显然有

$$t_j - t_i = \frac{j(j+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2} = \frac{(j-i)(j+i+1)}{2}.$$

由此可得

$$\begin{aligned} \Delta(t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}) &= \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{i=0}^{j-1} \frac{(j-i)(j+i+1)}{2} = \prod_{j=1}^{n-1} \frac{(2j)!}{2^j} = \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{j} \frac{2i(2i-1)}{2} \\ &= \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{j} i(2i-1) = \prod_{j=1}^{n-1} j! \prod_{i=1}^{j} (2i-1) = \left(\prod_{j=1}^{n-1} j! \right) \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{j} (2i-1) \\ &= \left(\prod_{j=1}^{n-1} j! \right) \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i}^{n-1} (2i-1) = \left(\prod_{j=1}^{n-1} j! \right) \prod_{i=1}^{n-1} (2i-1)^{n-i}. \end{aligned}$$

利用命题 3.1，我们得出

$$\det \mathbf{B}\begin{bmatrix} t_0, t_1, \ldots, t_{n-1} \\ 0, 1, \ldots, n-1 \end{bmatrix} = \frac{\Delta(t_0, t_1, \ldots, t_{n-1})}{\prod_{k=0}^{n-1} k!} = \prod_{i=1}^{n-1} (2i-1)^{n-i},$$

如前所述。 □

由于根据命题 3.2，它们的行列式均为奇数，因此我们知道，形如

$$\mathbf{B}\begin{bmatrix} t_0, t_1, \ldots, t_{n-1} \\ 0, 1, \ldots, n-1 \end{bmatrix}$$

的矩阵对所有正整数 n 都是模 2 可逆的。

4 Delahan 结果的证明

利用生成指标集的概念，容易看出定理 1.1 是下述结果的直接推论

定理 4.1。集合

$$A_n = \{(t_s, t_{r+1} - t_s - 1) \mid 0 \leqslant s \leqslant r \leqslant n-2\}$$

是 $\mathcal{ST}(t_{n-1})$ 的生成指标集。

首先，集合 A_n 可以视为

$$A_n = \{(i_k, j_k) \mid k \in \{0, 1, \ldots, t_{n-1} - 1\}\},$$

其中

$$i_k = t_s \quad \text{and} \quad j_k = t_{r+1} - t_s - 1,$$

当 $k = t_r + s$ 与 $0 \leqslant s \leqslant r \leqslant n-2$ 时。然后我们考虑由下式定义的、大小为 t_{n-1} 的方阵 $\mathbf{M}_{A_n}$

$$\mathbf{M}_{A_n} = \left(\binom{i_k}{\ell - j_k} \right)_{0 \leqslant k, \ell \leqslant t_{n-1}-1}.$$

定理 4.1 的证明基于以下

引理 4.2. 矩阵 $\mathbf{M}_{A_n}$ 是一个分块下三角矩阵，其方形对角块的大小为 1、2、.....、$n-1$

$$\mathbf{B}\begin{bmatrix} t_0, t_1, \ldots, t_r \\ r, r-1, \ldots, 0 \end{bmatrix},$$

对所有 $r \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$。

例如，$\mathbf{M}_{A_5}$ 的分块下三角结构如图 5 所示。

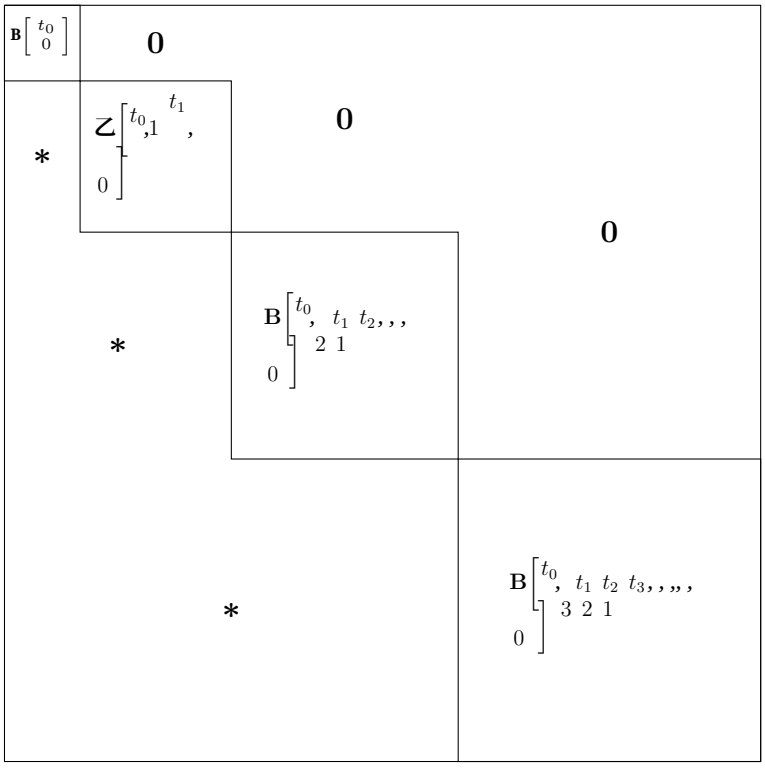


图 5：矩阵 $\mathbf{M}_{A_5}$ 的结构

证明。 设 $r \in \{0,1,\ldots,n-2\}$。我们可以看到这 $r+1$ 行

$$R_{t_r},\ R_{t_r+1},\ \ldots,\ R_{t_r+r}$$

具有特定形式。对于 $k = t_r + s$ 且满足 $s \in \{0,1,\ldots,r\}$，我们知道 $i_k = t_s$ 和 $j_k = t_{r+1} - t_s - 1$。于是，

$$R_{t_r+s} = \left(\binom{t_s}{\ell - t_{r+1} + t_s + 1}\right)_{0 \leqslant \ell \leqslant t_{n-1}-1}$$

由于对于 $l \geqslant t_{r+1}$，$l - t_{t+1} + t_s + 1 > t_s$，我们知道最后 $t_{n-1} - t_{r+1}$列中的系数均为零。此外，第 $(t_{r+1} - 1 - l)^{\text{th}}$ 列中的系数为

$$\binom{t_s}{t_s - l} = \binom{t_s}{l}$$

对于所有 $l \in \{0,1,\ldots,t_{r+1}-1\}$均成立。因此，对应于 $r+1$ 行R_{t_r}，$R_{t_r+1},\ldots,R_{t_r+r}$ 以及 $r+1$列 C_{t_r}，$C_{t_r+1},\ldots,C_{t_r+r}$的子矩阵为

$$\mathbf{B}\begin{bmatrix} t_0, t_1, \ldots, t_r \\ r, r-1, \ldots, 0 \end{bmatrix}.$$

因此，矩阵 $\mathbf{M}_{A_n}$ 是一个分块下三角矩阵，其方形对角块为$\mathbf{B}\begin{bmatrix} t_0, & t_1 & \ldots & t_r \\ r & r-1 & \ldots & \end{bmatrix}$,,,,,0，对所有 $r \in \{0,1,\ldots,n-2\}$均成立，大小为 1，2,..., $n-1$。 □

定理 *4.1* 的证明。 由引理 4.2 可知，矩阵 $\mathbf{M}_{A_n}$ 是一个分块下三角矩阵，其对角块为方形矩阵 $\mathbf{B}\begin{bmatrix} t_0, & t_1 & \ldots & t_r \\ r & r-1 & \ldots & \end{bmatrix}$,,,,,0，对所有 $r \in \{0,1,\ldots,n-2\}$ 均成立。

利用命题 3.2，可得

$$\det \mathbf{B}\begin{bmatrix} t_0, t_1, \ldots, t_r \\ r, r-1, \ldots, 0 \end{bmatrix} = (-1)^{\left\lfloor \frac{r+1}{2} \right\rfloor} \det \mathbf{B}\begin{bmatrix} t_0, t_1, \ldots, t_r \\ 0, 1, \ldots, r \end{bmatrix} = (-1)^{\left\lfloor \frac{r+1}{2} \right\rfloor} \prod_{i=1}^{r} (2i-1)^{r+1-i},$$

对所有 $r \in \{0,1,\ldots,n-2\}$ 均成立。因此，

$$\det \mathbf{B}\begin{bmatrix} t_0, t_1, \ldots, t_r \\ r, r-1, \ldots, 0 \end{bmatrix} \equiv 1 \pmod 2$$

因此，矩阵 $\mathbf{B}\begin{bmatrix} t_0, & t_1 & \ldots & t_r \\ r & r-1 & \ldots & \end{bmatrix}$,,,,,0 模 2 可逆，对所有 $r \in \{0,1,\ldots,n-2\}$ 均成立。

由于所有对角块均为满秩，我们可以推知矩阵 $\mathbf{M}_{A_n}$ 满秩且模 2 可逆。由命题 2.2 可知，A_n 是 $\mathcal{ST}(t_{n-1})$ 的生成指标集。

□

现在我们可以证明 Delahan 的诱导普适性定理了。

定理 *1.1* 的证明。设 n 为一个正整数。我们考虑 n 元子集

$$W_n = \{t_i + 1 \mid i \in \{0,1,\ldots,n-1\}\}$$

$\{1,2,\ldots,t_{n-1}+1\}$的。对于任意 $G \in \mathcal{G}_{t_{n-1}+1}$，若$(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant t_{n-1}+1}$ 是其邻接矩阵，且

$$\nabla_1 = (a_{i+1,i+j+2})_{(i,j) \in \mathrm{T}_{t_{n-1}}}$$

其上三角部分，则 $G[W_n]$ 的邻接矩阵为$\left(a_{t_i+1,t_j+1}\right)_{0\leqslant i,j\leqslant n-1}$，且其上三角部分为

$$\nabla_2 = \left(a_{t_i+1,t_{i+j+1}+1}\right)_{(i,j)\in \mathrm{T}_n}.$$

三角形 ∇_2 因此可视为由 $\nabla_1 =$($b_{i,\ j}$)$^{(i,j)\in \mathrm{T}_{t_{n-1}}}$ 定义的子三角形:

$$\nabla_2 = (b_{i,j})_{(i,j)\in A_n},$$

其中指标集为 $A_n \subset \mathrm{T}_{t_{n-1}}$。令 γ 为一个同构，它将每个大小为 T_n、由零和一组成的三角形映射为 $\mathcal{G}_n$ 的简单图，该图的邻接矩阵以上三角部分为此三角形；并令 θ 为典范同构

$$\begin{array}{rccc} \theta: & \mathcal{SG}(t_{n-1}+1) & \longrightarrow & \mathcal{ST}(t_{n-1}) \\ & G(S) & \longmapsto & \nabla S \end{array}$$

显然,

$$\gamma \circ \pi_{A_n} \circ \theta(G) = G[W_n],$$

对所有 $G \in \mathcal{SG}(t_{n-1}+1)$ 均成立。最后，由于根据定理 4.1，A_n 是 $\mathcal{ST}(t_{n-1})$的生成指标集，我们推得 π_{A_n}，因此 $\gamma \circ \pi_{A_n} \circ \theta$ 二者都是同构。 □

参考文献

[1] Maxime Augier 和 Shalom Eliahou。奇偶正则Steinhaus图。*Math. Comp.*, 77(263)：1831–1839，2008。

[2] CraigBailey 和 WayneDymacek。正则 Steinhaus 图。*Congr. Numer.*，66:45– 47，1988。第十九届东南组合学、图论与计算会议（美国路易斯安那州巴吞鲁日，1988）。

[3] André Barbé 和 Fritz von Haeseler。帕斯卡拟阵：拟群定义的元胞自动机构型生成集的归宿。*Theoret. Comput.Sci.*，325(2):171–214，2004。

[4] André Barbé 和 Fritz von Haeseler。框架元胞自动机：构型、生成集及相关拟阵。*Discrete Math.*，309(6):1222–1254，2009。

[5] Gerard J. Chang、Bhaskar DasGupta、Wayne M. Dymàček、Martin Fürer、Matthew Koerlin、Yueh-Shin Lee 和 Tom Whaley。二部施泰因豪斯图的刻画。*Discrete Math.*，199(1-3):11–25，1999。

[6] Jonathan Chappelon。关于 Molluzzo 有限循环群中 Steinhaus 三角形问题。*Integers*，8(1):A37，2008。29 页。

[7] Jonathan Chappelon。奇数度正则Steinhaus图。离散数学，309(13):4545–4554，2009。

[8] Jonathan Chappelon。模奇数生成平衡斯坦豪斯图形的整数全序列。组合理论杂志 *A* 辑，118(1)：291–315，2011。

[9] Jonathan Chappelon。周期平衡二进制三角形。离散数学与理论计算机科学，19(3)：论文 13，2017。[10] Jonathan Chappelon。对称二进制施泰因豪斯三角形与奇偶规则 Steinhaus 图。组合理论杂志 *A* 辑，187：论文编号 105561，共 56 页，2022。[11] Jonathan Chappelon。平衡施泰因豪斯三角形。arXiv:2508.05159，共 109 页，2025。[12] Franz A. Delahan。Steinhaus 图中的诱导嵌入。图论杂志，29(1)：1–9，1998。[13] Wayne M. Dymacek。Steinhaus 图。载于 第十届东南组合学、图论与计算会议论文集（佛罗里达大西洋大学，佛罗里达州博卡拉顿，*1979* 年），数值学大会，XXIII–XXIV，第 399–412 页。数学实用论丛，马尼托巴省温尼伯，1979。[14] Wayne M. Dymacek。二部施泰因豪斯图。离散数学，59(1-2)：9–20，1986。[15] Wayne M. Dymacek 和 Tom Whaley。用于二部施泰因豪斯图的生成字符串。离散数学，141(1-3)：95–107，1995。[16] Wayne M. Dymàček、Matthew Koerlin 和 Tom Whaley。Steinhaus 图综述。载于组合学、图论与算法，第 *I*、*II* 卷（密歇根州卡拉马祖，*1996* 年），第 313–323 页。New Issues Press，密歇根州卡拉马祖，1999。[17] Wayne M. Dymàček、Jean-Guy Speton 和 Tom Whaley。平面施泰因豪斯图。载于第三十一届东南国际组合学、图论与计算会议论文集（佛罗里达州博卡拉顿，*2000* 年），第 144 卷，第 193–206 页，2000。[18] Shalom Eliahou 和 Delphine Hachez。关于 Steinhaus 有关二进制序列的问题。实验数学，13(2)：215–229，2004。[19] Ira Gessel 和 Gérard Viennot。二项式行列式、路径与钩长公式。数学进展，58(3)：300–321，1985。[20] Heiko Harborth。用正负号解决 Steinhaus 问题。组合理论杂志 *A* 辑，12：253–259，1972。[21] John C. Molluzzo。Steinhaus 图。载于图论及其应用（国际会议论文集，西密歇根大学，密歇根州卡拉马祖，*1976* 年），数学讲义第 642 卷，第 394–402 页。施普林格，柏林，1978。[22] Hugo Steinhaus。初等数学一百题。Basic Books, Inc. 出版社，纽约，1964。Martin Gardner 作序。