arXiv:2603.08129v1 [math.GR] 9 Mar 2026

具有自同构群 $\mathcal{S}_n$ 和 $\mathcal{A}_n$的手性地图比例

Jiyong Chen 和 Yi Xiao Tang

摘要。可定向正则地图是定向曲面中高度对称的图的嵌入。其中，手性地图是指那些与其镜像不构成同构的地图。

我们证明，当 $n \to \infty$ 时，对于自同构群为 $\mathcal{S}_n$ 或 $\mathcal{A}_n$ 的可定向正则地图，手性是普遍现象：在这两个族中，手性地图的比例都趋于 1。我们还得到了自同构群为 $\mathcal{S}_n$ 或 $\mathcal{A}_n$ 的可定向正则超地图的相应渐近结果。

关键要素是一个精确的渐近生成结论：如果从 $\mathcal{S}_n$ 中均匀随机地选取一个对合，然后再从 $\mathcal{S}_n$ 中独立且均匀随机地选取一个元素，则这两个元素生成 $\mathcal{S}_n$ 和 $\mathcal{A}_n$ 的概率分别在 $n \to \infty$ 趋于$\frac{3}{4}$和$\frac{1}{4}$。

关键词：可定向正则地图、手性地图、超地图、比例、对称群和交错群

2020年数学学科分类：57M15, 05C10, 05E18, 20B25。

1. 引言

一个定向地图（或简称地图）$\mathcal{M}$ 是将图 Γ 嵌入定向曲面 $\mathcal{S}$ 的一种方式，使得 $\mathcal{S} \setminus \Gamma$ 的每个连通分支都同胚于一个开圆盘。地图 $\mathcal{M}$ 的一个自同构是顶点、边和面的集合上的一个置换，它由保定向同胚诱导，且该同胚也保持顶点、边和面不变。地图 $\mathcal{M}$的自同构群记作 Aut($\mathcal{M}$)，是由 $\mathcal{M}$的所有自同构构成的群。若一个地图$\mathcal{M}$ 的 Aut($\mathcal{M}$) 在关联顶点-边对的集合上传递，则称其为可定向正则地图。

对可定向正则地图的研究历史悠久，可追溯到伯恩赛德等人19世纪末的工作；时至今日，它们仍然是广受研究的一类组合结构。感兴趣的读者可参阅综述论文 [20] 及其中的参考文献，以了解更多细节。

如果存在一个反定向同胚，它保持支撑曲面的顶点、边和面不变，则称该地图为可反射的。手性地图是不可反射的可定向正则地图。关于手性地图已有大量研究；例如参见 [3, 6–9]。

根据手性地图和可反射地图的定义，人们会预期，在给定的地图类别中（例如，按曲面的亏格或自同构群加以限定），可反射地图的比例应当相对较小，因为

日期：2026年3月10日。

可反射性要求额外的对称条件。球面上不存在手性可定向正则地图，而环面上既有无穷多个可反射可定向正则地图，也有手性地图。对于双曲型曲面，Macbeath 构造了无穷多个在 [17,18] 中达到 Hurwitz界的可定向正则地图。这些地图中没有一个是手性的。自然会产生这样的问题：在给定的可定向正则地图族中，手性地图的比例是多少？一种方法是考察具有给定自同构群的可定向正则地图族。这引出了以下问题。

问题 1.1. 设 $\mathcal{F}$ 是一族有限群。对于群 $G \in \mathcal{F}$，令 $\mathbb{P}_{ch}(G)$表示所有以 G 为自同构群的可定向正则地图中，手性地图所占的比例（按同构分类）。当 $|G| \to \infty$ 时，$\mathbb{P}_{ch}(G)$ 的渐近行为是什么？

给定有限群 G，若一对元素 $(x,\ y) \in G \times G$ 满足 $|x| = m$ 和 $|y| = n$，则称其为 G 的 $(m,\ n)$ 对；若进一步假设 $\langle x,\ y\rangle = G$，则称其为 G 的 $(m,\ n)$ 生成对。我们用 $*$ 表示未指定的阶。可定向正则地图与其自同构群 G 以及一个 $(2,\ *)$ 生成对 G 之间存在众所周知的对应关系。具体而言，给定群 G 及其一个 $(2,\ *)$ 生成对 $(x,\ y)$，存在唯一一个与之对应的可定向正则地图，记为 $\mathcal{M}(G,\ x,\ y)$。反过来，任意一个以 G 为自同构群的可定向正则地图 $\mathcal{M}$，都同构于某个 $(2,\ *)$ 生成对 $(x,\ y)$ 所对应的 $\mathcal{M}(G,\ x,\ y)$。两个地图 $\mathcal{M}(G,\ x_1,\ y_1)$ 和 $\mathcal{M}(G,\ x_2,\ y_2)$ 同构，当且仅当存在群自同构 $\tau \in \mathrm{Aut}(G)$，使得 $(x_1^\tau,\ y_1^\tau) = (x_2,\ y_2)$。此外，地图 $\mathcal{M}(G,\ x,\ y)$ 可反射，当且仅当存在群自同构 $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$，使得 $(x^\sigma,\ y^\sigma) = (x,\ y^{-1})$。若不存在这样的自同构，则该地图 $\mathcal{M}(G,\ x,\ y)$ 及相应的生成对 $(x,\ y)$ 称为手性。更多详情见 [12]。

令 $\Delta(G)$ 表示 G 的 $(2,*)$-生成对集合，并令 $\Delta_{ch}(G)$ 表示其中手性 $(2,*)$-生成对构成的子集。考虑 $\mathrm{Aut}(G)$ 在集合 $\Delta(G)$ 上的作用。容易看出，两个地图 $\mathcal{M}(G,x_1,y_1)$ 和 $\mathcal{M}(G,x_2,y_2)$ 同构，当且仅当它们属于同一个 $\mathrm{Aut}(G)$-轨道。注意，该作用是半正则的。因此

$$\mathbb{P}_{ch}(G) = \frac{|\Delta_{ch}(G)|/|\mathrm{Aut}(G)|}{|\Delta(G)|/|\mathrm{Aut}(G)|} = \frac{|\Delta_{ch}(G)|}{|\Delta(G)|}.$$

这一简单观察告诉我们，为了计算 $\mathbb{P}_{ch}(G)$，只需计算 $\Delta_{ch}(G)$ 和 $\Delta(G)$ 的大小。

文献 [13] 证明，所有非阿贝尔单群都由一个对合和一个素数阶元素生成。因此，每个非阿贝尔单群都是某个可定向正则地图的自同构群。对于给定的非阿贝尔单群族，或者更一般地，对于给定的几乎单群族，考察问题 1.1 很有意思。结合 [14, 定理 1.1] 与文献 [3], 中的结果可知，对于任意单群 G，比例 $\mathbb{P}_{ch}(G) = 0$ 当且仅当 G 同构于 $\mathcal{A}_7$、$\mathrm{PSL}_2(q)$、$\mathrm{PSL}_3(q)$或 $\mathrm{PSU}_3(q)$。文献 [8]证明，对于每一种给定的双曲型，都存在一个自同构群为 $\mathcal{A}_n$ 或 $\mathcal{S}_n$ 的手性地图，其中某个 n成立。更多构造见 [4] 。

本文回答了关于对称群和交错群的问题 1.1。具体而言，我们证明以下定理。

定理 1.2. 对于上文定义的手性地图比例 $\mathbb{P}_{ch}(\mathcal{S}_n)$ 和 $\mathbb{P}_{ch}(\mathcal{A}_n)$，有

$$1-\mathbb{P}_{ch}(\mathcal{S}_n),\ 1-\mathbb{P}_{ch}(\mathcal{A}_n)\in O\left(4^n\cdot n^{-0.25n}\right),$$

因此，

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}_{ch}(\mathcal{S}_n)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}_{ch}(\mathcal{A}_n)=1.$$

可定向正则超地图理论是地图理论的推广。此类超地图与其自同构群的生成对之间也存在类似的对应关系。具体而言，对于任意有限群 G 以及任意一个 $(*,*)$-生成对 (x,y)（即对元素阶数没有限制），都可以关联到唯一的可定向正则超地图 $\mathcal{H}(G,x,y)$。反过来，每个自同构群为 G 的可定向正则超地图 $\mathcal{H}$，都同构于某个生成对 (x,y) 对应的 $\mathcal{H}(G,x,y)$。可反射条件也类似： $\mathcal{H}(G,x,y)$ 可反射，当且仅当存在 $\sigma\in \mathrm{Aut}(G)$，使得 $(x^\sigma,y^\sigma)=(x^{-1},y^{-1})$。若超地图可定向正则且不可反射，则称其为手性地图。详情请见 [5]。

在 [16], Lucchini 和 Spiga 提出了问题 1.1 的一个超地图版本。他们还证明，对于任意单群 G，比例 $\mathbb{P}_{ch\text{-}\mathcal{H}}(G)=0$ 当且仅当 G 同构于 $\mathrm{PSL}_2(q)$。这里， $\mathbb{P}_{ch\text{-}\mathcal{H}}(G)$ 表示自同构群为 G 的所有可定向正则超地图中，手性超地图所占的比例。本文也回答了 Lucchini 和 Spiga 关于对称群和交错群的问题，具体见下述定理。

定理 1.3。 对于上述定义的手性超地图比例 $\mathbb{P}_{ch\text{-}\mathcal{H}}(\mathcal{S}_n)$ 和 $\mathbb{P}_{ch\text{-}\mathcal{H}}(\mathcal{A}_n)$，有

$$1-\mathbb{P}_{ch\text{-}\mathcal{H}}(\mathcal{S}_n),\ 1-\mathbb{P}_{ch\text{-}\mathcal{H}}(\mathcal{A}_n)\in O\left(10^n\cdot n^{0.5-0.5n}\right),$$

因此，

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}_{ch\text{-}\mathcal{H}}(\mathcal{S}_n)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}_{ch\text{-}\mathcal{H}}(\mathcal{A}_n)=1.$$

定理 1.2（分别为定理 1.3）的证明依赖于一个 $(2,*)$-对（分别为 $(*,*)$-对）生成整个群 $\mathcal{S}_n$ 或 $\mathcal{A}_n$ 的概率。Dixon 在 [10] 中证明，对于 $\mathcal{S}_n$ 中的一个 $(*,*)$-对，生成 $\mathcal{S}_n$ 或 $\mathcal{A}_n$ 的概率随 $n\to\infty$ 趋于 1。在 [15], 中，Liebeck 和 Shalev 证明，$\mathcal{A}_n$ 中的一个 $(2,*)$-对生成 $\mathcal{A}_n$ 的概率随 $n\to\infty$ 趋于 1。然而，对于一个 $(2,*)$-对生成 $\mathcal{S}_n$ 的概率，目前还没有类似的结果。我们在下面的引理中证明，当 n 趋于 ∞ 时， $\mathcal{S}_n$ 中的一个 $(2,*)$-对几乎必然生成 $\mathcal{S}_n$ 或 $\mathcal{A}_n$。因此，生成 $\mathcal{S}_n$ 和 $\mathcal{A}_n$ 的概率分别趋于 $\frac{3}{4}$ 和 $\frac{1}{4}$。我们的证明采用了 [10] 中使用的策略。

定理 1.4。从 $\mathcal{S}_n$ 中随机选取一个对合，再随机选取一个额外元素，这两个元素生成 $\mathcal{S}_n$ 或 $\mathcal{A}_n$ 的概率在 $n\to\infty$时趋近于1 。特别地，这样一对元素生成 $\mathcal{S}_n$ 和 $\mathcal{A}_n$ 的概率分别趋近于$\frac{3}{4}$ 和$\frac{1}{4}$。

本文结构如下。第 2 节介绍一些预备知识，主要涉及计数方法。第 3 节证明定理 1.4，这是证明定理 1.2 的关键。最后一节证明我们的主要结果，即定理 1.2 和定理 1.3。

2. 预备知识

本节将介绍一些有用的事实和引理，以及后文将用到的基本计数方法。

2.1. $\mathcal{S}_n$ 的大小以及对合集合 $\mathcal{I}_n$。

下面的引理是斯特林公式的一个精细版本，后文将频繁使用。

引理 *2.1. </style}*对于 $n \geq 1$，我们有

$$\frac{\sqrt{2\pi n}n^n}{e^n} < n! < \frac{1.1\sqrt{2\pi n}n^n}{e^n}. \tag{2.1}$$

证明。 Robbins 在 [19]中证明，对于任意整数 $n \geq 1$，存在 $r_n \in \left(\frac{1}{12n+1}, \frac{1}{12n}\right)$使得

$$n! = \sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n}e^{r_n}.$$

因此，对于 $n \geq 1$,

$$\frac{\sqrt{2\pi n}n^n}{e^n} \leq n! < \sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n}e^{\frac{1}{12}} < \frac{1.1\sqrt{2\pi n}n^n}{e^n}.$$

至此证明完毕。 □

此后，我们始终用 $\mathcal{I}_n$ 表示 $\mathcal{S}_n$ 中的对合集合，并用 $I(n)$ 表示 $\mathcal{I}_n$ 的基数。下面的引理给出关于 $I(n)$ 的若干基本事实。

引理 2.2. 关于 $I(n)$ 的下列陈述成立：

（1）[1,定理 2。1] 函数 $I(n)$ 满足递推关系

$$I(n) = I(n-1) + (n-1)(I(n-2)+1), \tag{2.2}$$

初始条件为 $I(0) = I(1) = 0$.

(2) $[1,$ 定理 2.2$]$ $I(n) + 1 = n![x^n]e^{x+0.5x^2}$.(3) $[1,$定理 8.1$]\lim_{n\to\infty} \frac{I(n)}{\frac{1}{\sqrt{2}}n^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{n}{2}+\sqrt{n-\frac{1}{4}}}} = 1.$ $\lim_{n\to\infty} \frac{I(n+1)}{\frac{1}{\sqrt{2}}n^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{n}{2}+\sqrt{n-\frac{1}{4}}}} =$

利用该引理中陈述的基本事实，我们得到以下关于$I(n)$的若干进一步性质。

引理 2.3. 关于 $I(n)$ 的下列陈述成立：

(1) 对于 $n \geq 2$，我们有 $(1+I(n))^2 \geq 2n!$。

(2) 对于 $n \geq 7$，我们有

$$\frac{I(n)}{I(n-1)} < \sqrt{n+\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}.$$

(3) 对于 $n \geq 3$，我们有

$$\frac{I(n)}{I(n-1)} > \sqrt{n-\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}.$$

(4) 我们有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{I(n)}{I(n-1)} = 1.$$

(5) 对于 $n \geq 10$ 和 $2 \leq i \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$，我们有 $I(i+1)I(n-i-1) < I(i)I(n-i)$。 —

证明。我们首先证明命题 (1)。直接计算表明，它对$n = 2$，3，4 成立。对于 $n \geq 5$，假设命题 (1) 对 $n-1$和 $n-2$ 成立。则

$$\begin{aligned} 1 + I(n) &= 1 + I(n-1) + (n-1)(I(n-2)+1) \\ &\geq \sqrt{2}\sqrt{(n-1)!} + (n-1)\sqrt{2}\sqrt{(n-2)!} \\ &= \sqrt{2}\sqrt{(n-1)!}(1+\sqrt{n-1}) \\ &> \sqrt{2}\sqrt{(n-1)!}\sqrt{n} = \sqrt{2n!}. \end{aligned}$$

这就证明了命题 (1)。

现在，我们通过对 n 归纳，同时证明陈述 (2) 和 (3)。使用 Magma [2] 直接计算可知，陈述 (2) 对 $7 \leq n \leq 21$ 成立，而陈述 (3) 对 $3 \leq n \leq 21$成立。对于 $n > 21$，假设这两个陈述对 $n-1$ 和 $n-2$均成立。注意，当 $n > 21$时，陈述 (1) 蕴含

$$\begin{aligned} I(n-1) &> \sqrt{2(n-1)!} - 1 \\ &> \sqrt{(n-1)(2n-4)(3n-9)\cdots(8n-64)} - 1 \\ &> (n-1)^4 - 1 > (n-1)^3. \end{aligned} \tag{2.3}$$

由方程 (2.2)，可得

$$\begin{aligned} \frac{I(n)}{I(n-1)} &= 1 + \frac{n-1}{\frac{I(n-1)}{I(n-2)}} + \frac{n-1}{I(n-1)} < 1 + \frac{n-1}{\frac{I(n-1)}{I(n-2)}} + \frac{1}{(n-1)^2} \\ &< 1 + \frac{n-1}{\sqrt{n-\frac{7}{4}}+\frac{1}{2}} + \frac{1}{(n-1)^2}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

我们可以验证，对于 $n \geq 20$，

$$\frac{1}{2} + \frac{n-1}{\sqrt{n-\frac{7}{4}}+\frac{1}{2}} + \frac{1}{(n-1)^2} < \sqrt{n+\frac{1}{4}}. \tag{2.5}$$

结合 (2.4) 和 (2.5)，我们得到 $\frac{I(n)}{I(n-1)} < \frac{1}{2} + \sqrt{n+\frac{1}{4}}$.

另一方面，

$$\frac{I(n)}{I(n-1)} = 1 + \frac{n-1}{\frac{I(n-1)}{I(n-2)}} + \frac{n-1}{I(n-1)}$$

$$> 1 + \frac{n-1}{\frac{I(n-1)}{I(n-2)}} > 1 + \frac{n-1}{\sqrt{n-\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}}$$
$$= \sqrt{n - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2}.$$

这证明了陈述 (2) 和 (3)。

结论 (4) 可由结论 (2) 和 (3) 立即推出。现在证明结论 (5)。注意， $Q(7) > Q(6) > Q(5)$。对于 $n \geq 7$，由结论 (2) 和 (3) 可得

$$Q(n+1) > \sqrt{n + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} > Q(n).$$

至此，结论 (5) 得证。

最后，我们证明结论 (6)。直接计算可得 $Q(3) = Q(4) = Q(6) = 3$。由结论 (5)，对于 $n \geq 10$ 和 $2 \leq i \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$，有 $Q(i+1) < Q(n-i)$。因此 $I_{(i+1)}\, I_{(i)} < I_{(n-i)}\, I_{(n-i-1)}$，这意味着 $I(i+1)I(n-i-1) < I(i)I(n-i)$。至此，结论 (6) 得证。 □

2.2. **生成函数与系数估计**。

在本小节中，我们回顾一些关于组合生成函数的预备知识（更多详情见[11] ）。序列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的普通生成函数（OGF）是形式幂级数 $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$。我们用 $[z^n]A(z)$表示 $A(z)$中 z^n 的系数。本文将频繁使用普通生成函数方法。下面的引理 2.4 是解析组合学中的一个标准练习，将用于估计幂级数的系数。

引理 2.4。 设 $f(z)$ 是圆盘 $|z| < R$上的全纯复函数，其中$R > 0$。对任意 $0 < r < R$, 令 $M(f, r) =$上确界$_{|z|=r}\, |f(z)|$。则

$$\left|[z^n]f(z)\right| \leq \frac{M(f,r)}{r^n}.$$

此外，若对所有 $n \in \mathbb{N}$都有 $[z^n]f(z) \geq 0$，则

$$[z^n]f(z) \leq \frac{f(r)}{r^n}.$$

证明。 由柯西积分公式,

$$|[z^n]f(z)| = \left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz\right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi r\, M(f,r)}{r^{n+1}} = \frac{M(f,r)}{r^n}.$$

如果对所有 n都有 $[z^n]f(z) \geq 0$，那么对于满足 $|z| = r$ 的任意 z，我们有

$$M(f,r) = \sup_{|z|=r} |f(z)| \leq \sum_{n\geq 0} [z^n]f(z)\, r^n = f(r),$$

从而 $[z^n]f(z) \leq f(r)/r^n$。 □

应用引理 2.4，我们得到以下两个生成函数中 x^n 的系数的上界，如下一个引理所示。

引理 2.5。 对于任意正整数 n，我们有

$$[x^n]e^{x+0.5\cdot x^2} \le \frac{3^n}{n^{0.5n}} \quad and \quad [x^n]e^{x+0.25\cdot x^2} \le \frac{2^n}{n^{0.5n}}.$$

证明。 对于 $n \ge 8$，应用引理 2.4，其中 $f(z) = e^{z+bz^2}$和 $r = \sqrt[n]{2b}$，可得

$$[x^n]e^{x+bx^2} \le \frac{e^{\sqrt{\frac{n}{2b}}+0.5n}}{\left(\frac{n}{2b}\right)^{0.5n}}.$$

由于 $n \ge 8$，我们有 $\sqrt[n]{2b} \le \sqrt[n]{4b}$，因此

$$[x^n]e^{x+bx^2} \le \frac{e^{\left(\frac{1}{4\sqrt{b}}+0.5\right)n}}{\left(\frac{n}{2b}\right)^{0.5n}} = \frac{e^{\left(\frac{1}{4\sqrt{b}}+0.5\right)n}(2b)^{0.5n}}{n^{0.5n}} = \frac{\left(e^{\left(\frac{1}{4\sqrt{b}}+0.5\right)}\sqrt{2b}\right)^n}{n^{0.5n}}.$$

令 $g(b) = e^{\left(\frac{1}{4\sqrt{b}}+0.5\right)}\sqrt{2b}$。直接计算可得 $g\left(\frac{1}{2}\right) < 3$和 $g\left(\frac{1}{4}\right) < 2$。因此，所需的不等式对 $n \ge 8$成立。也可直接验证它们对 $1 \le n \le 7$成立，证明完毕。□

我们以介绍两个特殊生成函数系数之间的关系来结束本节。

引理 2.6. 设 $A(x) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_n x^n$ 与 $B(x) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} b_n x^n$ 为两个具有实系数的形式幂级数。假设

$$b_n = \sum_{\sum_{i=1}^{\infty} ik_i = n} \frac{a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_m^{k_m} \cdots}{k_1! k_2! \cdots k_m! \cdots}.$$

对 $n \ge 1$ 成立。则对 $n \ge 2$，我们有

$$b_n = a_n + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k a_k b_{n-k}.$$

证明。 考虑生成函数

$$\begin{aligned} B(n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\sum_{i=1}^{\infty} ik_i = n} \frac{a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_m^{k_m} \cdots}{k_1! k_2! \cdots k_m! \cdots} \right) x^n \\ &= \sum_{k_1, k_2, \ldots \in \mathbb{N}} \frac{(a_1 x)^{k_1} (a_2 x^2)^{k_2} \cdots (a_m x^m)^{k_m} \cdots}{k_1! k_2! \cdots k_m! \cdots} \\ &= \prod_{m \ge 1} \left(\sum_{k_m = 0}^{\infty} \frac{(a_m x^m)^{k_m}}{k_m!} \right) = e^{a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m + \cdots}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

比较 x^n 的系数可得

$$b_n = [x^n] e^{a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m + \cdots}.$$

对方程（2.6）两边求导，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} nb_n x^{n-1} = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n\right)\left(a_1 + 2a_2 x + \cdots + ma_m x^{m-1} + \cdots\right).$$

比较 x^{n-1} 的系数，我们得到

$$nb_n = na_n + \sum_{k=1}^{n-1} ka_k b_{n-k}.$$

除以 n 即完成证明。 □

3. The $(2,*)$-generating probability for $\mathcal{S}_n$

本节我们旨在证明定理 1.4。等价地，我们需要计算 $(2,*)$-生成对在 $\mathcal{S}_n$ 的所有 $(2,*)$-对中所占的比例。如引言所述，我们遵循 Dixon 在 [10] 中的策略。更确切地说，我们首先在第 3.1 小节计算生成 $\mathcal{S}_n$ 的非传递子群的 $(2,*)$-对的比例。然后在第 3.2 小节计算生成非本原子群的 $(2,*)$-对的比例。最后，在第 3.3 小节中，利用关于 $\mathcal{S}_n$ 的本原子群的若干经典结果，我们证明随机 $(2,*)$-对生成 $\mathcal{S}_n$ 或 $\mathcal{A}_n$ 的概率随着 $n \to \infty$ 趋于 1。该结果直接蕴含定理 1.4。

3.1. **非传递对的比例**。

回顾一下， $\mathcal{I}_n$ 表示 $\mathcal{S}_n$ 中的对合集，而 $I(n)$表示 $\mathcal{I}_n$的基数。对于 $n \geq 3$，令 $\mathbb{P}_{\text{int}}(n)$表示 $\mathcal{I}_n \times \mathcal{S}_n$ 中生成非传递子群的$(2,*)$-对的比例。也就是说，

$$\mathbb{P}_{\text{int}}(n) = \frac{\left|\{(x,y) \in \mathcal{I}_n \times \mathcal{S}_n \mid \langle x,y\rangle \leq \mathcal{S}_n \text{ is intransitive}\}\right|}{|\mathcal{I}_n \times \mathcal{S}_n|}.$$

下面的引理给出了 $\mathbb{P}_{\text{int}}$的递推公式；这里将 $\mathbb{P}_{\text{int}}(1)$和 $\mathbb{P}_{\text{int}}(2)$定义为0，以使公式简洁。

引理 3.1。 下面的等式成立。

$$\mathbb{P}_{\text{int}}(n) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1}(i+1)I(i) + \frac{n}{2}\sum_{i=2}^{n-2} I(i)I(n-i) - \sum_{i=1}^{n-1} iI(i)(1+I(n-i))\mathbb{P}_{\text{int}}(i)}{nI(n)}$$

证明。 我们将集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ 记为 $[n]$。设 $\mathcal{P} = \{\Omega_1, \Omega_2, \ldots\}$ 是 $[n]$的一个划分，并假设对于每个 $1 \leq i \leq n$， $\mathcal{P}$ 中都有 k_i 个大小为 i的部分。我们首先枚举 $\mathcal{S}_n$ 中满足其生成的群的轨道构成划分 $\mathcal{P}$的 $(2,*)$-对的数量。设 (x,y) 是 $\mathcal{S}_n$的一个 $(2,*)$-对，它生成的非传递子群的轨道集合为 $\mathcal{P}$。对于 $\langle x,y\rangle$ 的任意长度为 i的轨道 $\Omega \in \mathcal{P}$，其在 Ω 上的限制对 $(x|_\Omega, y|_\Omega)$ 可视为 $(\mathcal{I}_i \cup \{1\}) \times \mathcal{S}_i$中的一个传递对。于是 $x|_\Omega$ 要么是一个对合，要么是恒等元；若为后者，则 $y|_\Omega$ 必须

是一个 i-循环。因此，生成传递子群的对 $(x|_\Omega, y|_\Omega)$ 的数量为

$$(1-\mathbb{P}_{\mathrm{int}}(i))I(i)i!+(i-1)!.$$

由此可得，满足以下条件的数对 $(x,\ y)\in(\mathcal{I}_n\cup\{1\})\times\mathcal{S}_n$ 的数量为：$\langle x,\ y\rangle$ 的轨道构成划分 $\mathcal{P}$

$$\prod_{i=1}^{n}\Big((1-\mathbb{P}_{\mathrm{int}}(i))I(i)i!+(i-1)!\Big)^{k_i}=\prod_{i=1}^{n}(i-1)!^{k_i}\prod_{i=1}^{n}\Big((1-\mathbb{P}_{\mathrm{int}}(i))iI(i)+1\Big)^{k_i}.$$

现在请注意，上述计数仅取决于参数 $k_1,\ k_2,\ \ldots\ldots,\ k_n$，而具有相同参数的 $[n]$ 的划分数为 $n!/\Big(\prod_{i=1}^{n}k_i!\ \prod_{i=1}^{n}i!^{k_i}\Big)$.由此得到

$$\begin{aligned}(I(n)+1)n!=&|(\mathcal{I}_n\cup\{1\})|\cdot|\mathcal{S}_n|\\&=\sum_{\sum_{i=1}^{n}ik_i=n}\left(\prod_{i=1}^{n}(i-1)!^{k_i}\prod_{i=1}^{n}((1-\mathbb{P}_{\mathrm{int}}(i))iI(i)+1)^{k_i}\frac{n!}{\prod_{i=1}^{n}k_i!\prod_{i=1}^{n}i!^{k_i}}\right)\\&=\sum_{\sum_{i=1}^{n}ik_i=n}\left(\prod_{i=1}^{n}\Big((1-\mathbb{P}_{\mathrm{int}}(i))iI(i)+1\Big)^{k_i}\frac{n!}{\prod_{i=1}^{n}k_i!\prod_{i=1}^{n}i^{k_i}}\right)\\&=n!\sum_{\sum_{i=1}^{n}ik_i=n}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{\Big(\frac{(1-\mathbb{P}_{\mathrm{int}}(i))iI(i)+1}{i}\Big)^{k_i}}{k_i!}\right).\end{aligned}$$

令 $a_i=\frac{\Big((1-\mathbb{P}_{\mathrm{int}}(i))iI(i)+1\Big)^{i}}{i!}$，并令 $b_i=I(i)+1$ 对于 $i\in\mathbb{N}^+$。根据引理 2.6, 我们得到关于 $I(n)$ 的如下递推公式：

$$\begin{aligned}n(I(n)+1)&=na_n+\sum_{k=1}^{n-1}(I(n-k)+1)ka_k\\&=(1-\mathbb{P}_{\mathrm{int}}(n))nI(n)+1+\sum_{k=1}^{n-1}(I(n-k)+1)((1-\mathbb{P}_{\mathrm{int}}(k))kI(k)+1)\\&=(1-\mathbb{P}_{\mathrm{int}}(n))nI(n)+1+n-1+\sum_{k=1}^{n-1}I(n-k)+\sum_{k=1}^{n-1}(1-\mathbb{P}_{\mathrm{int}}(k))kI(k)\\&\quad+\sum_{k=1}^{n-1}kI(k)I(n-k)-\sum_{k=1}^{n-1}kI(k)I(n-k)\mathbb{P}_{\mathrm{int}}(k)\\&=\sum_{k=1}^{n}kI(k)-\sum_{k=1}^{n}kI(k)\mathbb{P}_{\mathrm{int}}(k)+n+\sum_{k=1}^{n-1}I(k)+\frac{n}{2}\sum_{k=2}^{n-2}I(k)I(n-k)\\&\quad-\sum_{k=1}^{n-1}kI(k)I(n-k)\mathbb{P}_{\mathrm{int}}(k)\\&=nI(n)+n-nI(n)\mathbb{P}_{\mathrm{int}}(n)+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)I(k)+\frac{n}{2}\sum_{k=2}^{n-2}I(k)I(n-k)\end{aligned}$$

$$-\sum_{k=1}^{n-1} kI(k)\mathbb{P}_{\text{int}}(k)(1+I(n-k)).$$

在上述等式两边同时加上 $nI(n)\mathbb{P}_{\text{int}}(n) - nI(n) - n$，我们得到 t

$$nI(n)\mathbb{P}_{\text{int}}(n) = \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)I(k) + \frac{n}{2}\sum_{k=2}^{n-2} I(k)I(n-k) - \sum_{k=1}^{n-1} kI(k)\mathbb{P}_{\text{int}}(k)(1+I(n-k)).$$

两边同时除以 $nI(n)$即可得到该结果。 □

利用该递推公式，我们给出 $\mathbb{P}_{\text{int}}(n)$的上下界。

定理 3.2. 对任意正常数 ε，存在整数 N，使得对任意$n > N$,

$$\frac{1-\varepsilon}{n^{1.5}} < \mathbb{P}_{\text{int}}(n) < \frac{2.5+\varepsilon}{n^{0.5}}.$$

证明. 由引理 2.3(6)，对 $n \geq 10$，下列不等式成立。

$$I(2)I(n-2) > I(3)I(n-3) > \ldots > I(\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor)I(\lceil\frac{n-1}{2}\rceil). \tag{3.7}$$

由方程 (2.2),

$$\begin{aligned} I(n+1) - I(2) &= \sum_{i=2}^{n}(I(i+1) - I(i)) = \sum_{i=2}^{n} i\,(I(i-1)+1) \\ &= \frac{(n+1)n}{2} - 1 + \sum_{i=1}^{n-1}(i+1)I(i). \end{aligned}$$

这给出

$$\sum_{i=1}^{n-1}(i+1)I(i) = I(n+1) - \frac{(n+1)n}{2}. \tag{3.8}$$

现在，根据引理 3.1,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\text{int}}(n) &\leq \frac{\sum_{i=1}^{n-1}(i+1)I(i) + \frac{n}{2}\sum_{i=2}^{n-2} I(i)I(n-i)}{nI(n)} \\ &< \frac{I(n+1) - \frac{(n+1)n}{2} + \frac{n}{2}\Big(2I(2)I(n-2) + (n-5)I(3)I(n-3)\Big)}{nI(n)} \\ &< \frac{I(n+1) + \frac{n}{2}\Big(2I(n-2) + (3n-15)I(n-3)\Big)}{nI(n)} \\ &= \frac{Q(n+1)}{n} + \frac{1}{Q(n-1)Q(n)} + \frac{1.5n-7.5}{Q(n-2)Q(n-1)Q(n)}, \end{aligned}$$

其中 $Q(n) = \frac{I(n)}{I(n)-I(n-1)}$ 如引理 2.3 中所定义，第一行由 $\mathbb{P}_{\mathrm{int}}(n) \geq 0$ 这一事实推出，第二行则由不等式 3.7 和方程 3.8 推出。根据引理 2.3(4),

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to\infty}} n^{0.5}\mathbb{P}_{\mathrm{int}}(n) &\leq \lim_{n\to\infty} n^{0.5}\left(\frac{Q(n+1)}{n} + \frac{1}{Q(n-1)Q(n)} + \frac{1.5n-7.5}{Q(n-2)Q(n-1)Q(n)}\right)\\ &= 1 + 1.5 = 2.5.\end{aligned}$$

这意味着，对于任意正数常数 ε，都存在一个整数 N_1，使得对于任意 $n > N_1$, $\mathbb{P}_{\mathrm{int}}(n) \leq (2.5+\varepsilon)n^{-0.5}$.

另一方面，由于 $\mathbb{P}_{\mathrm{int}}(n) \leq 1$，我们有

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\mathrm{int}}(n) =& \frac{\sum_{i=1}^{n-1}(i+1)I(i) + \frac{n}{2}\sum_{i=2}^{n-2} I(i)I(n-i)}{nI(n)} - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{iI(i)(1+I(n-i))\mathbb{P}_{\mathrm{int}}(i)}{nI(n)}\\ \geq& \frac{\sum_{i=1}^{n-1}(i+1)I(i) + \frac{n}{2}\sum_{i=2}^{n-2} I(i)I(n-i) - \sum_{i=1}^{n-1} iI(i)(1+I(n-i))}{nI(n)}\\ =& \frac{\sum_{i=2}^{n-1} I(i)}{nI(n)} > \frac{I(n-1)}{nI(n)}.\end{aligned}$$

根据引理 2.3(4),

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{I(n-1)}{nI(n)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{nQ(n)} = \frac{1}{n^{1.5}}.$$

由此可知，对于任意正数常数 ε，都存在一个整数 N_2，使得对于任意 $n > N_2$, $\mathbb{P}_{\mathrm{int}}(n) \geq (1-\varepsilon)n^{0.5}$. 证明完毕。 □

3.2. **不可约对的比例**。

在本小节中，我们旨在证明传递但非本原的数对所占比例很小。令 $\mathbb{P}_{\mathrm{imp}}(n)$ 表示满足 x 和 y 生成一个非本原群的数对 $(x,y) \in \mathcal{I}_n \times \mathcal{S}_n$ 所占的比例。也就是说

$$\mathbb{P}_{\mathrm{imp}}(n) = \frac{\left|\{(x,y) \in \mathcal{I}_n \times \mathcal{S}_n | \langle x,y\rangle \text{ is transitive and imprimitive}\}\right|}{|\mathcal{I}_n \times \mathcal{S}_n|}.$$

引理 3.3. 以下不等式成立：

$$I(n)\mathbb{P}_{\mathrm{imp}}(n) \leq 2\cdot n^{0.5}\sum_{1<m<n,\ m|n}\left(m^{0.5m}\cdot(1+I(\frac{n}{m}))^m 0.8^m\right).$$

证明。回顾一下， $\mathcal{B}$ 的划分称为非平凡块系，当且仅当 $\mathcal{B}$ 中的所有部分大小相同，且大于 1、小于 n。如果 $\langle x,\ y\rangle$ 是

传递且非本原的，那么存在一个 $[n]$ 的非平凡块系 $\mathcal{B}$，它在 x，y的作用下保持不变。特别地，我们有 $1 < m < n$ 和 $m \mid n$。令

$$\Theta_n = \{(x, y) \in \mathcal{I}_n \times \mathcal{S}_n \mid \langle x, y\rangle \text{ preserve some non-trivial block system of } [n]\}.$$

由此立即得到 $|\mathcal{I}_n| \cdot |\mathcal{S}_n| \cdot \mathbb{P}_{\text{imp}}(n) \leq |\Theta_n|$ 以及

$$|\Theta_n| \leq \sum_{1<m<n,\ m|n} \left(\sum_{|\mathcal{B}|=m} |\{(x, y) \in \mathcal{I}_n \times \mathcal{S}_n \mid x, y \text{ preserve } \mathcal{B}\}| \right).$$

下文中，为简化表达，我们始终用 d 表示 n/m。现在，设 $\mathcal{B} = \{\Omega_1, \Omega_2 \ldots \Omega_m\}$ 是一个非平凡块系。我们需要枚举保持 $\mathcal{B}$不变的 $(2, *)$-对的数量。注意，所有保持 $\mathcal{B}$不变的置换构成 $\mathcal{S}_n$的一个子群 $H \cong \mathcal{S}_d \wr \mathcal{S}_m$。设 x 是 H中的一个对合。于是 x 在 $\mathcal{B}$上诱导出一个置换 $x_{\mathcal{B}}$。假设 $x_{\mathcal{B}}$ 是 p 个不相交对换的乘积。也就是说，$x_{\mathcal{B}}$ 交换 p 对块，并固定剩余的 $m - 2p$ 个块。如果 x 交换两个块 Ω_i 和 Ω_j，那么 x 在 $\Omega_i \cup \Omega_j$ 上的作用由 Ω_i 与 Ω_j之间的一个双射唯一确定。如果 x 固定一个块 Ω_k，那么 $x|_{\Omega_k}$ 或者是恒等元，或者是一个对合。选择要交换的 p 对块有 $\frac{m!}{(m-2p)!\ 2^p p!}$ 种方法。这给出

$$\begin{aligned}
&|\{(x, y) \in \mathcal{I}_n \times \mathcal{S}_n \mid x, y \text{ preserve } \mathcal{B}\}| = |H| \cdot |\mathcal{I}_n \cap H| \\
=&(d!)^m \cdot m! \cdot \left(\left(\sum_{p=0}^{\lfloor 0.5m \rfloor} \frac{m!}{(m-2p)!2^p p!} \cdot (d!)^p \cdot (1 + I(d))^{m-2p} \right) - 1 \right) \\
<&(d!)^m \cdot m! \cdot \left(\sum_{p=0}^{\lfloor 0.5m \rfloor} \frac{m!}{(m-2p)!2^p p!} \cdot (d!)^p \cdot (1 + I(d))^{m-2p} \right) \\
=&(d!)^m \cdot (m!)^2 \cdot (1 + I(d))^m \left(\sum_{p=0}^{\lfloor 0.5m \rfloor} \frac{1}{(m-2p)!p!} \cdot \left(\frac{d!}{2(1 + I(d))^2} \right)^p \right) \\
<&(d!)^m \cdot (m!)^2 \cdot (1 + I(d))^m \left(\sum_{p=0}^{\lfloor 0.5m \rfloor} \frac{0.25^p}{(m-2p)!p!} \right) \qquad (3.9) \\
=&(d!)^m \cdot (m!)^2 \cdot (1 + I(d))^m [x^m] e^{x+0.25x^2} \\
<&(d!)^m \cdot (m!)^2 \cdot (1 + I(d))^m \frac{2^m}{m^{0.5m}}, \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

其中，不等式 (3.9) 和不等式 (3.10) 分别由引理 2.3(1) 和引理 2.5 得出。此外，我们有

$$\begin{aligned}
n! \cdot I(n) \cdot \mathbb{P}_{\text{imp}}(n) =& |\mathcal{I}_n| \cdot |\mathcal{S}_n| \cdot \mathbb{P}_{\text{imp}}(n) \leq |\Theta_n| \\
&< \sum_{1<m<n,\ m|n} \left(\sum_{|\mathcal{B}|=m} (d!)^m \cdot (m!)^2 \cdot (1 + I(d))^m \frac{2^m}{m^{0.5m}} \right)
\end{aligned}$$

$$< \sum_{1<m<n,\ m|n} \left(n! \cdot m! \cdot (1+I(d))^m \frac{2^m}{m^{0.5m}} \right).$$

将上述不等式两边除以 $n!$，并应用引理 2.1，可得

$$\begin{aligned} I(n) \cdot \mathbb{P}_{\text{imp}}(n) &< \sum_{1<m<n,\ m|n} \left(1.1\sqrt{2\pi m} \cdot \frac{m^m}{e^m} \cdot (1+I(d))^m \frac{2^m}{m^{0.5m}} \right) \\ &< 1.1\sqrt{\pi} \cdot n^{0.5} \sum_{1<m<n,\ m|n} \left(m^{0.5m} \cdot (1+I(d))^m \frac{2^m}{e^m} \right) \\ &< 2 \cdot n^{0.5} \sum_{1<m<n,\ m|n} \left(m^{0.5m} \cdot (1+I(d))^m 0.8^m \right). \end{aligned}$$

证明至此完成。 □

现在，应用引理 3.3，我们可以对充分大的 n，得到 $\mathbb{P}_{\text{imp}}(n)$ 的上界。

定理 3.4. 存在一个整数 N，使得对于 $n > N$，我们有

$$\mathbb{P}_{\text{imp}}(n) < 3n \cdot 0.83^n \cdot e^{-\sqrt{n}}.$$

证明。与前一个引理的证明类似，令 $d = n/m$。由引理 2.2(3)，存在一个整数 N_1，使得对于任意 $d \geq N_1$，

$$0.99 < \frac{I(d)}{\frac{1}{\sqrt{2}} d^{0.5d} e^{-0.5d+\sqrt{d}-0.25}} \quad \text{and} \quad \frac{1+I(d)}{\frac{1}{\sqrt{2}} d^{0.5d} e^{-0.5d+\sqrt{d}-0.25}} < 1.01.$$

令 $N_2 = \max\{N_1, 100\}$，并令

$$G(n,d) = (\frac{n}{d})^{0.5n/d} \cdot (1+I(d))^{n/d} 0.8^{n/d} = m^{0.5m} \cdot (1+I(d))^m 0.8^m.$$

如果 $d \geq N_2$，那么

$$\begin{aligned} G(n,d) &< m^{0.5m} \cdot (\frac{1.01 \cdot 0.8}{\sqrt{2} \cdot e^{0.25}} d^{0.5d} e^{-0.5d+d/\sqrt{100}})^m \\ &< m^{0.5m} \cdot 0.45^m (d^{0.5d} e^{-0.5d+d/\sqrt{100}})^m \\ &< m^{0.5m} \cdot 0.45^m ((\frac{n}{m})^{0.5d} 0.68^d)^m \\ &< 0.68^n \cdot n^{0.5n} \cdot m^{0.5m-0.5n} \cdot 0.45^m. \end{aligned}$$

对于给定的 n，通过求导可知，函数 $m^{0.5m-0.5n} \cdot 0.45^m$ 在区间 $[2, n/N_2]$ 上于 $m = 2.$ 处取得最大值。也就是说

$$G(n,d) < 0.68^n \cdot n^{0.5n} \cdot 2^{1-0.5n} \cdot 0.45^2 = (0.45^2 \cdot 2)(\frac{0.68}{\sqrt{2}})^n \cdot n^{0.5n} < 0.41 \cdot 0.5^n \cdot n^{0.5n}. \tag{3.11}$$

如果 $d < N_2$，那么 $G(n,\ d) < (0.5n)^{0.25n} \cdot (1 + I(N_2))^{0.5n}$，因为 $m \leq 0.5n$。注意，存在一个整数 $N > N_2$，使得对于 $n > N$，我们有

$$1 + I(N_2) < n^{0.02} \quad \text{and} \quad 0.5^{0.25n} n^{0.26n} < 0.41 \cdot 0.5^n \cdot n^{0.5n}.$$

由此可得

$$G(n,d) < (0.5n)^{0.25n} \cdot (n^{0.02})^{0.5n} = 0.5^{0.25n} n^{0.26n} < 0.41 \cdot 0.5^n \cdot n^{0.5n}$$

由此得到 $n > N$ 和 $d < N_2$.

现在，由于 n 的正因子个数至多为 $2 \cdot n^{0.5}$，根据引理 3.3，我们有

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\mathrm{imp}}(n) &\leq \frac{1}{I(n)} \cdot 2 \cdot n^{0.5} \sum_{1<d<n,\ d|n} G(n,d) = \frac{1}{I(n)} \cdot 4n \cdot \left(0.41 \cdot 0.5^n \cdot n^{0.5n}\right) \\
&< \frac{0.99}{\frac{1}{\sqrt{2}} n^{0.5n} e^{-0.5n+\sqrt{n}-0.25}} \cdot 4n \cdot \left(0.41 \cdot 0.5^n \cdot n^{0.5n}\right) \\
&< (0.99 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{0.25} \cdot 0.41 \cdot 4) \cdot \frac{n \cdot 0.5^n \cdot n^{0.5n} \cdot e^{0.5n}}{n^{0.5n} e^{\sqrt{n}}} \\
&< 3n \cdot 0.83^n \cdot e^{-\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

3.3. $\mathcal{A}_n$ 和 $\mathcal{S}_n$的生成对比例。

为了证明定理 1.4，我们需要考虑在 $\mathcal{S}_n$中既不生成 $\mathcal{S}_n$ 也不生成 $\mathcal{A}_n$的 $(2,*)$-对的比例。为此，我们需要以下两个由 Dixon 和 Jordan 证明的关键引理。

引理 3.5. [10, 引理 3] 对于素数 $q \leq n-3$，定义 $\mathcal{C}_{q,\ n}$ 为 $\mathcal{S}_n$ 中所有置换的集合，这些置换的循环分解恰有一个长度为 q 的循环，且其余所有循环的长度均与 q互素。令 $\mathcal{T}_n = \bigcup_q \mathcal{C}_{q,\ n}$，其中并集遍及所有满足 $(\ln n)^2 \leq q \leq n-3$ 的素数 q。那么存在一个整数 N，使得对所有 $n > N$， $\mathcal{S}_n$ 中属于 $\mathcal{T}_n$的元素比例至少为 $1 - 3^{-4/\ln\ln n}$。

引理 3.6. [21,定理 13.9] $\mathcal{S}_n$ 的本原子群等于 $\mathcal{A}_n$或 $\mathcal{S}_n$ ，只要它包含至少一个 q-循环置换，其中 q 是某个素数 $q \leq n-3$。

现在我们证明， $\mathcal{S}_n$ 的几乎所有 $(2,*)$-对都生成 $\mathcal{A}_n$ 或 $\mathcal{S}_n$。

定理 3.7. 设 $\mathbb{P}_{\mathrm{AS}}(n)$ 表示 $\mathcal{S}_n$ 中生成$\mathcal{A}_n$ 或 $\mathcal{S}_n$的$(2,*)$-对的比例。那么，当 n充分大时，有 $\mathbb{P}_{\mathrm{AS}}(n) \geq 1 - 1.5^{-\ln\ln n}$。

证明。 由定理 3.2，存在一个整数 N_1 ，使得对任意 $n > N_1$，都有

$$\mathbb{P}_{\mathrm{int}}(n) \leq \frac{2.6}{\sqrt{n}}.$$

由定理 3.4，存在一个整数 N_2 ，使得对任意 $n > N_2$，都有

$$\mathbb{P}_{\mathrm{imp}}(n) \leq 3n \cdot 0.83^n \cdot e^{-\sqrt{n}} < \frac{0.4}{\sqrt{n}}.$$

根据引理 3.5，存在一个整数 N_3 ，使得对于任意 $n > N_3$，满足条件 $y \in \mathcal{T}_n$ 的 $(2,*)$-对 (x,y) 所占的比例至少为 $1 - 3^{-4/\ln\ln n}$。注意，还存在一个

整数 N_4，使得对于任意 $n > N_4$，$1 - \frac{3}{\sqrt{n}} - \frac{4}{3\ln\ln n} > 1 - \frac{1.5}{\ln\ln n}$。因此，取 $N = \max\{N_1, N_2, N_3, N_4\}$，我们有

$$\mathbb{P}_{\mathrm{AS}}(n) \geq 1 - \frac{4}{3\ln\ln n} - \mathbb{P}_{\mathrm{int}}(n) - \mathbb{P}_{\mathrm{imp}}(n) > 1 - \frac{1.5}{\ln\ln n},$$

这就完成了证明。 □

为证明定理 1.4，我们还需要知道 $\mathcal{I}_n$ 中偶置换的比例。这个比例为 0.5 似乎是一个众所周知的事实。然而，我们在文献中没有找到明确的陈述。因此，我们在下文给出证明。

引理 3.8. *$\mathcal{I}_n$ 中偶置换的比例趋于1 2，当 $n \to \infty$ - .*

证明。注意，偶置换是由偶数个不相交对换相乘得到的置换。因此

$$\begin{aligned}|\mathcal{I}_n \cap \mathcal{A}_n| &= \sum_{t=1}^{\lfloor 0.25n \rfloor} \frac{n!}{(n-4t)!(2t)!2^{2t}} = \frac{n!}{2}\Big(\sum_{k=1}^{\lfloor 0.5n \rfloor} \frac{0.5^k}{(n-2k)!k!} + \sum_{k=1}^{\lfloor 0.5n \rfloor} \frac{(-0.5)^k}{(n-2k)!k!}\Big) \\ &= \frac{n!}{2}([x^n]e^{x+0.5x^2} + [x^n]e^{x-0.5x^2}) - 1.\end{aligned}$$

由引理 2.2(2)，我们有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{|\mathcal{I}_n \cap \mathcal{A}_n|}{|\mathcal{I}_n|} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!\Big(\frac{[x^n]e^{x+0.5x^2}+[x^n]e^{x-0.5x^2}}{2}\Big) - 1}{n![x^n]e^{x+0.5x^2} - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\Big(\frac{[x^n]e^{x+0.5x^2}+[x^n]e^{x-0.5x^2}}{2}\Big)}{n![x^n]e^{x+0.5x^2}} \\ &= 0.5 + 0.5 \lim_{n\to\infty} \frac{[x^n]e^{x-0.5x^2}}{[x^n]e^{x+0.5x^2}}.\end{aligned}$$

设 $f(z) = e^{z-0.5z^2}$。那么对于任意 $r > 0$,

$$M(f,r) := \sup_{|z|=r} |f(z)| = \sup_{\theta\in[0,2\pi)} \left|f(re^{i\theta})\right| = \sup_{\theta\in[0,2\pi)} e^{-(r\cos\theta)^2 + r\cos\theta + 0.5r^2} < e^{0.5r^2+0.25}.$$

将 $r = \sqrt{n}$ 代入引理 2.4，可得 $\left|[z^n]f(z)\right| \leq \frac{e^{0.5n+0.25}}{n^{0.5n}}$. 注意到

$$\left|\frac{[x^n]e^{x-0.5x^2}}{[x^n]e^{x+0.5x^2}}\right| \leq \frac{n!\frac{e^{0.5n+0.25}}{n^{0.5n}}}{[x^n]e^{x+0.5x^2}},$$

由引理 2.2(2) 和引理 2.2(3),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!\frac{e^{0.5n+0.25}}{n^{0.5n}}}{[x^n]e^{x+0.5x^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n}\frac{e^{0.5n+0.25}}{n^{0.5n}}}{\frac{n^{0.5n}}{\sqrt{2}}e^{-0.5n+\sqrt{n}-0.25}} = 0.$$

因此，$\lim_{n\to\infty} \frac{[x^n]e^{x-0.5x^2}}{[x^n]e^{x+0.5x^2}} = 0$. 因此

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\mathcal{I}_n \cap \mathcal{A}_n|}{|\mathcal{I}_n|} = 0.5 + 0.5 \lim_{n\to\infty} \frac{[x^n]e^{x-0.5x^2}}{[x^n]e^{x+0.5x^2}} = 0.5,$$

由此证明完成。 □

定理 *1.4* 的证明。 定理的前半部分直接由定理 3.7 得出。

设 $\mathbb{P}_{\mathrm{A}}(n)$ 和 $\mathbb{P}_{\mathrm{S}}(n)$ 分别为生成 $\mathcal{A}_n$ 和 $\mathcal{S}_n$ 的 $(2, *)$-对的比例。则 $\mathbb{P}_{\mathrm{S}}(n) \leq 1 - \frac{|\mathcal{I}_n \cap \mathcal{A}_n||\mathcal{A}_n|}{|\mathcal{I}_n||\mathcal{S}_n|}$ 和 $\mathbb{P}_{\mathrm{A}}(n) \leq \frac{|\mathcal{I}_n \cap \mathcal{A}_n||\mathcal{A}_n|}{|\mathcal{I}_n||\mathcal{S}_n|}$。由引理 3.8，得 $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{\mathrm{A}}(n) \leq \frac{1}{4}$ 和 $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{\mathrm{S}}(n) \leq \frac{3}{4}$.。由定理 3.7，得 $\lim_{n\to\infty}(\mathbb{P}_{\mathrm{A}}(n) + \mathbb{P}_{\mathrm{S}}(n)) = 1.$。因此，

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{\mathrm{A}}(n) = \lim_{n\to\infty}(\mathbb{P}_{\mathrm{A}}(n) + \mathbb{P}_{\mathrm{S}}(n) - \mathbb{P}_{\mathrm{S}}(n)) = \lim_{n\to\infty}(\mathbb{P}_{\mathrm{A}}(n) + \mathbb{P}_{\mathrm{S}}(n)) - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{\mathrm{S}}(n) \geq \frac{1}{4}.$$

这给出 $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{\mathrm{A}}(n) = \frac{1}{4}$.。类似地，我们有 $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{\mathrm{S}}(n) = \frac{3}{4}$，由此完成证明。□

注意， $\mathcal{S}_n$ 中属于 $\mathcal{A}_n$ 的$(2, *)$-对的比例也趋近于$\frac{1}{4}$。由此得到以下推论。

推论 3.9。在 $\mathcal{A}_n$ 中随机选取一个对合，再随机选取一个额外元素，它们生成 $\mathcal{A}_n$ 的概率在 $n \to \infty$时趋近于1 。

备注 3.10. Liebeck 和 Shalev 在 [15]中证明了推论 3.9。定理 1.4 为这一结果提供了另一种证明。从本小节的证明可以很容易看出，给定定理 3.7 和引理 3.8，推论 3.9 只是初等微积分中的一道简单练习。然而，反过来则不成立。我们尝试从推论 3.9 和引理 3.8 推导定理 3.7，但均未成功。

4. Proportion of chiral maps and chiral hypermaps

本节中，我们证明定理 1.2 和定理 1.3。

4.1. 手性地图。

在本小节中，我们旨在证明定理 1.2。根据引言中的讨论，我们只需证明，当 n 趋于无穷大时， $\mathcal{S}_n$ 的反射对称 $(2, *)$-生成对所占比例趋于 0。我们先处理自同构群为 $\mathcal{S}_n$ 的情形。令 $\mathcal{G}_n$ 为 $\mathcal{S}_n$ 的 $(2, *)$-生成对集合，并令 $\mathcal{R}_n$ 为对应于反射对称地图的 $(2, *)$-生成对集合。也就是说

$$\mathcal{G}_n = \{(x, y) \in \mathcal{I}_n \times \mathcal{S}_n | \langle x, y\rangle = \mathcal{S}_n\}, \mathcal{R}_n = \left\{(x, y) \in \mathcal{G}_n | \text{存在 } g \in \mathrm{Aut}(\mathcal{S}_n), \text{使得 } x^g = x, y^g = y^{-1}\right\}.$$

注意，自同构群为 $\mathcal{S}_n$ 的手性地图所占比例 $\mathbb{P}_{ch}(n)$ 等于 $1 - \frac{|\mathcal{R}_n|}{|\mathcal{G}_n|}$。那么定理 1.2 等价于

$$\frac{|\mathcal{R}_n|}{|\mathcal{G}_n|} \in O(4^n \cdot n^{-0.25n}). \tag{4.12}$$

为了证明方程 4.12，我们将扩展可反射三元组集合 $\mathcal{R}_n^{\mathrm{ex}}$定义如下，

$$\mathcal{R}_n^{\mathrm{ex}} := \left\{(g, x, y) \in \mathcal{I}_n \times \mathcal{I}_n \times \mathcal{S}_n | x^g = x, y^g = y^{-1}\right\}.$$

以下引理给出了 $|\mathcal{R}_n^{\mathrm{ex}}|$ 与 $|\mathcal{R}_n|$之间的关系。

引理 4.1. 设 $n > 6$ 是一个整数，并假设 $(x, y) \in \mathcal{R}_n$。那么存在 $g \in \mathcal{I}_n$ 使得 $x^g = x$, $y^g = y^{-1}$。此外，我们有

$$|\mathcal{R}_n| \leq |\mathcal{R}_n^{\mathrm{ex}}| = n! \cdot (I(n) + 1) \cdot \sum_{q=1}^{\lfloor 0.5n \rfloor} S(n, q),$$

其中 $S(n,q) = \frac{|\mathcal{I}_n \cap \mathbf{C}_{\mathcal{S}_n}(\sigma_q)|}{|\mathbf{C}_{\mathcal{S}_n}(\sigma_q)|}$, $\sigma_q = (1,2)(3,4)\ldots(2q-1,2q)$ 对 $1 \leq q \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

证明。设 $(x, y) \in \mathcal{R}_n$. 。存在 $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{S}_n)$，使得 $x^\phi = x$ 且 $y^\phi = y^{-1}$. 。由于 $n > 6$, 我们有 $\mathrm{Aut}(\mathcal{S}_n) \cong \mathcal{S}_n$. 。换言之，群 $\mathcal{S}_n$ 的每个自同构都是内自同构。因此，存在 $g \in \mathcal{S}_n$ 使得对于任意 $t \in \mathcal{S}_n$. ，都有 $gtg^{-1} = t^\phi$ 。特别地，我们有 $gxg^{-1} = x$ 和 $gyg^{-1} = y^{-1}$。于是 $g^2 x (g^2)^{-1} = x$ 且 $g^2 y (g^2)^{-1} = y$，这意味着 $g^2 \in \mathbf{C}_{\mathcal{S}_n}(x) \cap \mathbf{C}_{\mathcal{S}_n}(y)$。由于$\langle x, y \rangle = \mathcal{S}_n$，我们有 $g^2 \in \mathbf{Z}(\mathcal{S}_n)$。因此 $g^2 = 1$。这就完成了引理第一部分的证明。

现在我们证明这个引理的第二部分。注意，根据 $\mathcal{R}_n^{\mathrm{ex}}$的定义和本引理的第一部分, $|\mathcal{R}_n| \leq |\mathcal{R}_n^{\mathrm{ex}}|$ 成立。此外，对于任意具有 q个轮换的 $g \in \mathcal{I}_n$ ，满足 $gyg^{-1} = y^{-1}$ 的元素 $y \in \mathcal{S}_n$ 的个数，恰好等于满足 gy 的元素 $y \in \mathcal{S}_n$ 的个数，而后者的阶为 1 或 2。因此，满足 $gyg^{-1} = y^{-1}$的元素$y \in \mathcal{S}_n$的个数为 $I(n)+1$。满足$gxg^{-1} = x$的元素 $x \in \mathcal{I}_n$ 的个数为 $|\mathcal{I}_n \cap \mathbf{C}_{\mathcal{S}_n}(\sigma_q)|$。根据伯恩赛德引理，$\mathcal{S}_n$ 中具有 q 个轮换的对合有$\frac{n!}{|\mathbf{C}_{\mathcal{S}_n}(\sigma_q)|}$个。因此我们有

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}_n^{\mathrm{ex}}| &= \sum_{q=1}^{\lfloor 0.5n \rfloor} \frac{n!}{|\mathbf{C}_{\mathcal{S}_n}(\sigma_q)|} (I(n)+1) |\mathcal{I}_n \cap \mathbf{C}_{\mathcal{S}_n}(\sigma_q)| \\ &= n! \cdot (I(n)+1) \cdot \sum_{q=1}^{\lfloor 0.5n \rfloor} S(n,q). \end{aligned}$$

这就证明了该引理的第二部分。 □

下面两个引理旨在给出 $S(n,q)$的一个上界。

引理 4.2. 对于 $1 \leq q \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, 以下不等式成立：

$$S(n,q) < [x^q] e^{x + 0.25x^2} [x^{n-2q}] e^{x + 0.5x^2}.$$

证明. 根据定义和伯恩赛德引理,

$$S(n,q) = \frac{|\mathcal{I}_n \cap \mathbf{C}_{\mathcal{S}_n}(\sigma_q)|}{|\mathbf{C}_{\mathcal{S}_n}(\sigma_q)|} = \frac{|\mathcal{I}_n \cap \mathbf{C}_{\mathcal{S}_n}(\sigma_q)|}{(n-2q)! 2^q q!}. \tag{4.13}$$

现在我们计算 $|\mathcal{I}_n \cap \mathbf{C}_{\mathcal{S}_n}(\sigma_q)|$.注意， $|\mathcal{I}_n \cap \mathbf{C}_{\mathcal{S}_n}(\sigma_q)|$等于群（$\mathbf{Z}_2 \wr \mathcal{S}_q$）中的对合数。 $\times \mathcal{S}_{n-2q}$. $\mathcal{S}_{n-2q}$ 中的对合数为$I(n-2q)$，而$\mathbf{Z}_2 \wr \mathcal{S}_q$ 中的对合数为

$$\sum_{t=0}^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} \frac{q!}{(q-2t)! 2^t t!} \cdot 2^t \cdot 2^{q-2t} - 1$$

$$
\begin{aligned}
&= q!2^q \sum_{t=0}^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} \frac{0.25^t}{(q-2t)!t!} - 1 \\
&= q!2^q [x^q] e^{x+0.25x^2} - 1 = q![x^q] e^{x^2+2x} - 1.
\end{aligned}
$$

He因此我们得到，群 $(\mathbf{Z}_2 \wr \mathcal{S}_q) \times \mathcal{S}_{n-2q}$ 中的对合数为

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{I}_n \cap \mathbf{C}_{\mathcal{S}_n}(\sigma_q)| &= q![x^q] e^{x^2+2x} \Big(I(n-2q) + 1 \Big) - 1 \\
&= q![x^q] e^{x^2+2x} (n-2q)! [x^{n-2q}] e^{x+0.5x^2} - 1 \\
&< q!(n-2q)! [x^q] e^{x^2+2x} [x^{n-2q}] e^{x+0.5x^2}.
\end{aligned}
$$

由等式 (4.13)，可得

$$
\begin{aligned}
S(n,q) &< \frac{q!(n-2q)![x^q] e^{x^2+2x} [x^{n-2q}] e^{x+0.5x^2}}{(n-2q)! 2^q q!} \\
&= [x^q] e^{0.25x^2+x} [x^{n-2q}] e^{x+0.5x^2}.
\end{aligned}
$$

证明完毕。 □

引理 4.3。 对于 $1 \le q \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$，我们有

$$
S(n,q) < \left(\frac{2}{9} \right)^q \cdot \frac{3^{1.25n}}{n^{0.25n}}.
$$

证明。 由引理 4.2，我们有 $S(n,\ q) < [x^q] e^{x+0.25x^2} [x^{n-2q}] e^{x+0.5x^2}$。由引理 2.5 可知

$$
S(n,q) < \frac{2^q}{q^{0.5q}} \cdot \frac{3^{n-2q}}{(n-2q)^{0.5(n-2q)}} = \left(\frac{2}{9} \right)^q \cdot 3^n \cdot \frac{1}{q^{0.5q} (n-2q)^{0.5(n-2q)}}.
$$

设 $f(x) = \frac{1}{2} x \ln x$，其中 $x \ge 1$。由其导数可知，$f(x)$ 是严格递增、正且凸的函数。根据詹森不等式，我们有

$$
f(q) + f(n-2q) \ge \frac{3}{2} \left(\frac{2}{3} f(q) + \frac{1}{3} f(n-2q) \right) \ge \frac{3}{2} f\left(\frac{n}{3} \right).
$$

这给出 $q^{0.5q} (n-2q)^{0.5(n-2q)} = e^{f(q)+f(n-2q)} \ge e^{1.5f(\frac{n}{3})} = \binom{n}{3}^{0.25n}$，并且

$$
S(n,q) < \left(\frac{2}{9} \right)^q \cdot 3^n \cdot \frac{1}{\left(\frac{n}{3} \right)^{0.25n}} = \left(\frac{2}{9} \right)^q \cdot \frac{3^{1.25n}}{n^{0.25n}}.
$$

至此，证明完成。 □

现在，我们可以给出定理 1.2 的证明。

定理 *1.2* 的证明。根据定理 1.4，存在一个整数 N_1，使得对于任意$n > N_1$,

$$
|\mathcal{G}_n| > (0.75 - 0.001) \cdot |\mathcal{I}_n| \cdot |\mathcal{S}_n| \quad \text{and} \quad (I(n)+1) < (1+0.001) I(n).
$$

于是，由引理 4.1 可得

$$\frac{|\mathcal{R}_n^{\mathrm{ex}}|}{|\mathcal{G}_n|} \leq \frac{1}{0.749} \cdot \frac{n! \cdot (I(n)+1) \cdot \sum_{q=1}^{\lfloor 0.5n \rfloor} S(n,q)}{|\mathcal{I}_n| \cdot |\mathcal{S}_n|} < \frac{1.001}{0.749} \cdot \sum_{q=1}^{\lfloor 0.5n \rfloor} S(n,q).$$

应用引理 4.2 可得

$$\frac{|\mathcal{R}_n^{\mathrm{ex}}|}{|\mathcal{G}_n|} < \frac{1.001}{0.749} \cdot \sum_{q=1}^{\lfloor 0.5n \rfloor} \left(\frac{2}{9}\right)^q \cdot \frac{3^{1.25n}}{n^{0.25n}} < \frac{1.001}{0.749} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{(3^{1.25})^n}{n^{0.25n}} < 0.4 \cdot 4^n \cdot n^{-0.25n}. \quad (4.14)$$

注意，$\mathbb{P}_{\mathrm{ch}}(\mathcal{S}_n) = 1 - \frac{|\mathcal{R}_n|}{|\mathcal{G}_n|} > 1 - \frac{|\mathcal{R}_n^{\mathrm{ex}}|}{|\mathcal{G}_n|}$ 由此可得

$$1 - \mathbb{P}_{ch}(\mathcal{S}_n) \in O\big(4^n \cdot n^{-0.25n}\big) \quad \text{and} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{\mathrm{ch}}(\mathcal{S}_n) = 1.$$

关于 $\mathbb{P}_{\mathrm{ch}}(\mathcal{A}_n)$ 的结果可以由关于 $\mathbb{P}_{\mathrm{ch}}(\mathcal{S}_n)$ 的结果推出。令 $\mathcal{G}_n^{\mathcal{A}}$ 为 $\mathcal{A}_n$ 的 $(2,*)$-生成对集合，并令 $\mathcal{R}_n^{\mathcal{A}}$ 为对应于反射对称地图的 $(2,*)$-生成对集合。也就是说

$$\mathcal{G}_n^{\mathcal{A}} = \{(x,y) \in \mathcal{I}_n \times \mathcal{A}_n | \langle x,y\rangle = \mathcal{A}_n\},$$
$$\mathcal{R}_n^{\mathcal{A}} = \left\{(x,y) \in \mathcal{G}_n^{\mathcal{A}} | \text{there exists } g \in \mathsf{Aut}(\mathcal{A}_n), \text{ such that } x^g = x, y^g = y^{-1}\right\}.$$

注意，对于 $n \geq 6$，$\mathsf{Aut}(\mathcal{A}_n) \cong \mathcal{S}_n$。由引理 4.1 中使用的相同论证可得 $|\mathcal{R}_n^{\mathcal{A}}| \leq |\mathcal{R}_n^{\mathrm{ex}}|$。由定理 1.4，存在一个整数 $N > \max\{N_1, 6\}$，使得对于任意 $n \geq N$，

$$\frac{|\mathcal{G}_n|}{|\mathcal{I}_n| \cdot |\mathcal{S}_n|} < 0.75 + 0.001 \quad \text{and} \quad \frac{|\mathcal{G}_n^{\mathcal{A}}|}{|\mathcal{I}_n| \cdot |\mathcal{S}_n|} > 0.25 - 0.001.$$

由不等式 4.14 可得

$$\begin{aligned} 1 - \mathbb{P}_{\mathrm{ch}}(\mathcal{A}_n) = \frac{|\mathcal{R}_n^{\mathcal{A}}|}{|\mathcal{G}_n^{\mathcal{A}}|} &< \frac{|\mathcal{R}_n^{\mathrm{ex}}|}{|\mathcal{G}_n^{\mathcal{A}}|} = \frac{|\mathcal{I}_n| \cdot |\mathcal{S}_n|}{|\mathcal{G}_n^{\mathcal{A}}|} \cdot \frac{|\mathcal{G}_n|}{|\mathcal{I}_n| \cdot |\mathcal{S}_n|} \cdot \frac{|\mathcal{R}_n^{\mathrm{ex}}|}{|\mathcal{G}_n|} \\ &< \frac{0.751}{0.249} \cdot 0.4 \cdot 4^n \cdot n^{-0.25n} < 1.3 \cdot 4^n \cdot n^{-0.25n}. \end{aligned}$$

这给出

$$1 - \mathbb{P}_{ch}(\mathcal{A}_n) \in O\big(4^n \cdot n^{-0.25n}\big) \quad \text{and} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{\mathrm{ch}}(\mathcal{A}_n) = 1,$$

至此，证明完成。 □

4.2. **手性超地图**。

如引言中所述，超地图理论与地图理论类似。要考察自同构群为 G 的手性超地图的比例，我们只需计算 G 的 $(*,*)$-生成对中可被群自同构反转的比例。更具体地说，我们需要计算以下比例 $\mathbb{P}_{ch\text{-}\mathcal{H}}(G) = 1 - |\mathcal{HR}(G)|/|\mathcal{HG}(G)|$，其中 $\mathcal{HG}(G)$ 是 G 的 $(*,*)$-生成对集合，并且

$$\mathcal{HR}(G) = \left\{(x,\ y) \in \mathcal{HG}(G) \mid \text{存在 } g \in \mathsf{Aut}(G), \text{ 使得 } x^g = x^{-1},\ y^g = y^{-1}\right\}.$$

定理 *1.3* 的证明。设 $G = \mathcal{A}_n$ 或 $\mathcal{S}_n$，其中 $n > 6$。那么， G 的自同构群由 $\mathcal{S}_n$的共轭作用诱导，并且 G 可以自然地嵌入 $\mathcal{S}_n$。对于任意一对 $(x,\ y) \in \mathcal{HR}(G)$，根据引理 4.1 中的相同论证，存在唯一的对合 $g = g_{x,\ y} \in \mathcal{S}_n$ 使得 $x^g = x^{-1}$ 且 $y^g = y^{-1}$。此外，$(xg)^2 = (yg)^2 = 1$。现在，设定 $\mathcal{I}_n^- = \mathcal{I}_n \cup \{1\}$, 并定义一个函数

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathcal{HR}(G) & \to & \mathcal{I}_n \times \overline{\mathcal{I}}_n \times \overline{\mathcal{I}}_n \\ & (x,y) & \mapsto & (g_{x,y}, xg_{x,y}, yg_{x,y}). \end{array}$$

显然， Φ 是一个单射。因此， $|\mathcal{HR}(G)| \leq |\mathcal{I}_n \times \mathcal{I}_n \times \mathcal{I}_n|^- < (I(\overline{n}) + 1)^3$。根据 [10, 推论], , 存在一个整数 $N_1 > 6$, 使得对任意 $n > N_1$,

$$\mathcal{HG}(\mathcal{S}_n) > (0.75 - 0.001) \cdot (n!)^2 \quad \text{and} \quad \mathcal{HG}(\mathcal{A}_n) > (1 - 0.001) \cdot (\frac{n!}{2})^2$$

注意，由引理 2.1、引理 2.2 和引理 2.5,

$$\begin{aligned} \frac{(I(n)+1)^3}{(n!)^2} &= \frac{(n![x^n]e^{x+0.5x^2})^3}{(n!)^2} = n!([x^n]e^{x+0.5x^2})^3 < \frac{1.1\sqrt{2\pi n}n^n}{e^n} \cdot (\frac{3^n}{n^{0.5n}})^3 \\ &= (1.1 \cdot \sqrt{2\pi}) \cdot n^{0.5-0.5n} \cdot (\frac{3^3}{e})^n < 2.8 \cdot n^{0.5-0.5n} \cdot 10^n. \end{aligned}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned} 1 - \mathbb{P}_{ch\text{-}\mathcal{H}}(\mathcal{S}_n) &= \frac{|\mathcal{HR}(\mathcal{S}_n)|}{|\mathcal{HG}(\mathcal{S}_n)|} < \frac{1}{0.749} \cdot 2.8 \cdot n^{0.5-0.5n} \cdot 10^n, \quad \text{and} \\ 1 - \mathbb{P}_{ch\text{-}\mathcal{H}}(\mathcal{A}_n) &= \frac{|\mathcal{HR}(\mathcal{A}_n)|}{|\mathcal{HG}(\mathcal{A}_n)|} < \frac{4}{0.999} \cdot 2.8 \cdot n^{0.5-0.5n} \cdot 10^n. \end{aligned}$$

由此可得

$$1 - \mathbb{P}_{ch\text{-}\mathcal{H}}(\mathcal{S}_n), 1 - \mathbb{P}_{ch\text{-}\mathcal{H}}(\mathcal{A}_n) \in O\left(n^{0.5-0.5n} \cdot 10^n\right),$$

这就完成了证明。 □

致谢。 作者谨向 Hongyi Huang 博士和 Yan Zhou Zhu 博士致以谢意，感谢他们提出宝贵意见并进行有益的讨论。本研究获得中央高校基本科研业务费专项资金（编号：20720240136）资助。

参考文献

[1] T.Amdeberhan 与 V. Moll。对合及其后裔。组合学杂志，6(4):483–508，2015。[2] W. Bosma、J. Cannon 与 C. Playoust。Magma 代数系统。I. 用户语言。符号计算杂志，24(3-4):235–265，1997。[3] A. Breda d'Azevedo 与 D. A. Catalano。SL(3, K) 与 PSL(3, K) 对每个有限域 K 的强映射对称性。代数及其应用杂志，20(4):论文号 2150048，10，2021。[4] A. Breda d'Azevedo 与 D. A. Catalano。关于具有交错群与对称群的伪 Hurwitz 映射的手性。代数杂志，658:798–820，2024。[5] A. Breda d'Azevedo、G. Jones、R. Nedela 与 M. Škoviera。地图与超地图的手性群。代数组合杂志，29(3):337–355，2009。[6] A. Breda d' Azevedo 与 G. A. Jones。小亏格的全手性映射与超地图。代数杂志，322(11):3971–3996，2009。[7] E. Bujalance、M. D. E. Conder 与 A. F. Costa。伪实黎曼曲面与手性正则映射。美国数学会会刊，362(7):3365–3376，2010。

[8] M. D. E. Conder、V. Hucíková、R. Nedela 与 J. Širáň。给定双曲型的手性地图。伦敦数学会会刊，48(1):38–52，2016。[9] M. D. E. Conder、J. Širáň 与 T. W. Tucker。正则映射的亏格、可反射性与单纯性。欧洲数学会杂志（*JEMS*），12(2):343–364，2010。[10] J. D. Dixon。生成对称群的概率。数学杂志，110:199–205，1969。[11] P. Flajolet 与 R. Sedgewick。解析组合学。剑桥大学出版社，剑桥，2009。[12] G. A. Jones 与 D. Singerman。可定向曲面上的映射理论。伦敦数学会会刊 *(3)*，37(2):273–307，1978。[13] C. S. H. King。由一个对合与一个素数阶元素生成有限单群。代数杂志，478:153–173，2017。[14] D. Leemans 与 M. W. Liebeck。手性多面体与有限单群。伦敦数学会会刊，49(4):581–592，2017。[15] M. W. Liebeck 与 A. Shalev。经典群、概率方法与 (2,3)-生成问题。数学年刊 *(2)*，144(1):77–125，1996。[16] A. Lucchini 与 P. Spiga。非阿贝尔单群上的超地图与强对称生成集。电子组合学杂志，30(3):论文号 3.13，8，2023。[17] A. M. Macbeath。关于 Hurwitz 定理。格拉斯哥数学协会会刊，5:90–96，1961。[18] A. M. Macbeath。线性分式群的生成元。载于数论（纯粹数学专题讨论会会议录，第 *XII* 卷，休斯敦，得克萨斯州，*1967*），第 14–32 页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1969。[19] H. Robbins。关于斯特林公式的一个注记。美国数学月刊，62:26–29，1955。[20] J. Širáň。曲面上的映射能有多对称？载于*2013*组合学综述，伦敦数学会讲义系列第 409 卷，第 161–238 页。剑桥大学出版社，剑桥，2013。[21] H. Wielandt。有限置换群。学术出版社，纽约-伦敦，1964。由 R. Bercov 译自德文。

J. Chen，厦门大学数学科学学院，中华人民共和国厦门 361005

电子邮箱地址：chenjy1988@xmu.edu.cnY.X.Tang，厦门大学数学科学学院，中华人民共和国厦门 361005电子邮箱地址：cj11789@163.com