arXiv:2603.08132v1 [math.DG] 9 Mar 2026

三维空间形式中的反向等周不等式

KOSTIANTYN DRACH、GIL SOLANES 和 KATERYNA TATARKO

Abstract. 一个 λ-凸体是常曲率为 c 的三维空间形式 $M^3(c)$中的紧凸集 K，其边界 ∂K 的法曲率（以弱意义）有一个常数下界 $\lambda > 0$。

在这一类中，我们证明了一个精确反向等周不等式：在 $M^3(c)$中所有λ-凸体里，表面积固定时，体积最小的凸体是 λ-凸透镜，即由曲率为 λ的两个全脐帽围成的区域。此外，这个极小体是唯一的。

这一结果证实了*Borisenko* 猜想在曲率为 $c \neq 0$的三维模型空间中的情形，并补充了该猜想在欧几里得情形 $c = 0$中的近期进展。作为附带结果，我们的方法还为二维双曲空间中相应的反向等周不等式提供了另一种证明。

1. Introduction

设 $n \geqslant 2$，并令 $M^n(c)$ 为具有常截面曲率 $c \in \mathbb{R}$ 的 n 维模型空间。子集 $K \subset M^n(c)$ 称为凸集，是指 K 中任意两点之间的测地线段都包含于 K 中（在球面空间中，我们还假设 K 位于某个开半球内）。若 $K \subset M^n(c)$ 是一个具有非空内部的紧凸子集，则称其为凸体。

对于给定的 $\lambda > 0$，若凸体 $K \subset M^n(c)$ 称为 λ-凸，则边界 ∂K 关于内指法向量的主曲率 k_1，……，k_{n-1} 满足

$$k_i(p) \geqslant \lambda \qquad i = 1, \dots, n-1, \quad \forall p \in \partial K.$$

如果 K 的边界不光滑，那么上述界限应按弱意义理解，我们将在定义中对此作出精确定义 2.1。一个简单但重要的例子是

关键词： λ-凸性；反向等周不等式；内切半径；面积；体积；空间形式。*2020* 年数学主题分类：52A30，52A38，53C40（主要）；52A27，52A40，52B60，53C21（次要）。第一和第二作者分别通过 Agencia Estatal de Investigaci´on 提供的 PID2023-147252NB-I00 和 PID2024-157757NB-I00 基金，以及 Severo Ochoa 和 Maria de Maeztu 研发卓越中心与单位计划（CEX2020-001084-M）获得部分资助。第三作者获得了 NSERC 探索基金（编号 2022-02961）的部分资助。

λ-凸体是所谓的 λ-凸透镜，其区域由两个法曲率为 λ 的全脐超曲面所围成。

过去二十年来， λ-凸体在凸几何和离散几何领域引起了广泛关注，例如 [AAF、AACF、Be、Be2、FRS、JMR、SWY]。尤其是，在研究 Kneser–Poulsen 猜想和等宽体时，自然会遇到这一概念。有关 [BLN、BLNP] 的综述可供读者全面了解 λ-凸性及相关主题。

近年来， λ-凸体类中的反等周问题受到广泛关注。这一方向上的核心未决问题之一，是 Borisenko 提出的如下猜想。我们始终用 $|A|$ 表示带边界 $A^m \subset M^n(c)$ 的紧致子流形的m维体积。

Borisenko 猜想。设 $K \subset M^n(c)$ 是一个 λ-凸体， $n \geqslant 2$，并设$L \subset M^n(c)$ 是一个 λ-凸透镜体。若 $|\partial K| = |\partial L|$，则 $|K| \geqslant |L|$；当且仅当 K 是一个 λ-凸透镜体时，等号成立。

在欧几里得空间中，对于 $n = 2$ ，该猜想已在 [BD2] 中得到证明（另见 [FKV]中的另一种证明）；最近，对于 $n = 3$ ，该猜想也已在 [DT]中得到证明。对于维数$n \geqslant 4$, 该猜想仍完全悬而未决（另见 [HSch] ，作者证明了该猜想的解不可能具有光滑边界）。

在非平坦空间形式中，目前的进展仅限于二维情形：对于所有常曲率二维空间以及某些自然推广情形，该猜想已在 [BD3、Dr1、Bor]中得到完全解决。

在本文中，我们取得了进一步的实质性进展，肯定地证明了非零曲率三维空间形式中的 Borisenko 猜想。结合 [DT], 中的欧几里得情形结果，这就完成了对所有三维空间形式中该猜想的验证。我们的主要结果如下。

主定理 (非平坦空间形式中的反向等周不等式)。 设 $K \subset M^3(c)$, $c \neq 0$ 是一个 λ-凸体，且 $L \subset M^3(c)$ 是一个 λ-凸透镜。若 $|\partial K| = |\partial L|$，则 $|K| \geqslant |L|$；当且仅当 K 是一个 λ-凸透镜时，等号成立。

我们的方法还为二维双曲空间中相应的反向等周不等式提供了一种替代证明，该不等式最初由[Dr1]. 得到。

2. Preliminaries

本节旨在回顾凸几何和 λ-凸性的一些一般背景。我们用 $M^n(c)$表示曲率为 c的完备单连通 n维黎曼流形。我们称 $M^n(c)$为空间形式 （曲率为 c）。当 $c = 0$时，该空间形式是标准欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$。当

$c > 0$时，它是标准球面空间 $\mathbb{S}^n(c)$；当 $c < 0$时，它是标准双曲空间 $\mathbb{H}^n(c)$。

对于给定的 $\lambda > 0$，设 $\mathcal{S}_\lambda \subset M^n(c)$ 是法曲率恒等于 λ 的完备全脐超曲面。我们将这类超曲面称为 λ-球面，并用记号 $\mathcal{B}_\lambda$ 表示由 $\mathcal{S}_\lambda$ 围成的凸且拓扑闭区域；我们称 $\mathcal{B}_\lambda$ 为一个 λ-球。注意，在双曲空间 $\mathbb{H}^n(-1)$ 中，λ-球（以及球面）不一定是测地球（或测地球面），如下列分类所示：

(1) 若 $\lambda > 1$，则 $\mathcal{S}_\lambda$ 是半径为 $\coth^{-1}\lambda$ 的测地球面，而 $\mathcal{B}_\lambda$ 是测地球。(2) 若 $\lambda = 1$，则 $\mathcal{S}_\lambda$ 是一个极限球面，而 $\mathcal{B}_\lambda$ 是一个极限球。(3) 最后，若 $0 < \lambda < 1$，则 $\mathcal{S}_\lambda$ 是一个等距超曲面（简称等距面），即到某个全测地超平面距离给定的点的集合。在文献中，等距面也称为超球面。

在 $\mathbb{H}^n(-1)$ 的庞加莱′单位球模型中，λ-球面 $\mathcal{S}_\lambda$ 是单位球与满足以下条件的欧几里得球面的交集：当 $\lambda > 1$ 时位于单位球内；当 $\lambda = 1$ 时与单位球面相切；当 $0 < \lambda < 1$ 时与单位球面以不同于 $\pi/2$ 的角度相交。

2.1. **λ-凸体**。取定 $\lambda > 0$。

定义 2.1（λ-凸体）。凸体 $K \subset M^n(c)$ 称为 λ-凸的，如果对于每个$p \in \partial K$，都存在一个邻域 $U_p \subset M^n(c)$ 以及一个 λ-球面 $\mathcal{S}_\lambda$，该球面经过 p，并且满足

$$U_p \cap \partial K \subset \mathcal{B}_\lambda,$$

其中 $\mathcal{B}_\lambda$ 是相应的 λ-球。

在这种情况下，我们称经过 $p \in \partial K$ 的 $\mathcal{S}_\lambda$ 为一个支撑 λ-球面。

下面的 Blaschke 经典定理将定义 2.1 中的局部条件转化为全局条件。

定理 2.2（布拉施克滚动定理，[Bla，Dr3]）。设 $K \subset M^n(c)$ 为一个 λ-凸体。则对每一个 $p \in \partial K$ 存在一个支撑 λ-球面 $\mathcal{S}_\lambda(p)$ 界定 λ-球 $\mathcal{B}_\lambda(p)$ 使得 $K \subseteq \mathcal{B}_\lambda(p)$。□

最后，我们指出 λ-凸性的一个等价定义，从某种意义上说，它与定义2.1互为对偶。利用定理2.2 可以看出这种等价性（另见 [BD1，关于常曲率空间的引理 7]，以及 [BLNP，关于欧几里得空间中等价性的推论 3。4]）若凸体 $K \subset M^n(c)$满足以下条件，当且仅当它是 λ-凸的：在 K 中任意一对点都可以由一条具有常数测地曲率 λ 的曲线的最短弧连接，且该弧完全位于K内。从这个角度看，λ-凸性是标准凸性概念的一种推广

：如果连接任意两点的线段完全位于凸体内部，我们就称该凸体为凸体。由此可知，整个纺锤超曲面，即连接这两点的所有弧的轨迹，以及由该超曲面围成的区域，都必须位于该凸体内部。

定义 2.3（λ-凸多面体）。 $M^n(c)$ 中的 λ-凸多面体 是一个 λ-凸体，由有限多个 λ- 球 $\mathcal{B}_\lambda$ 的交给出。该 λ- 凸多面体的每个侧面 是相应的 $\mathcal{B}_\lambda$ 与该多面体边界的交。一个侧面的维数为 $n-1$。两个侧面要么不相交，要么相交。在后一种情形中，它们的交称为一个（较低维的）面。维数为 0 和 1 的面分别称为该多面体的 顶点 和棱 。

当 $n=3$ 时，我们用 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{V}$ 分别表示 λ-凸多面体 K 的棱集与顶点集。对每条棱 $E\in\mathcal{E}$，我们用 β_E 表示在 E 处沿 E相交的那些面的外法线之间的夹角，并用 ℓ_E 表示 E的长度。此外，对每个顶点 $v\in\mathcal{V}$，我们令 $u(K,v)$ 为$T_pM^3(c)$ 的单位球面上由 K 在 v处的单位外法线所覆盖的区域。

定义 2.4（λ-凸透镜）。恰有两个侧面的 λ-凸多面体称为 λ<style id='8}-凸透镜。

3. The Gauss–Bonnet theorem in constant curvature 3-space

本节证明以下适用于 $M^3(c)$ 中 λ-凸多面体的高斯–博内定理版本。

定理 3.1（-凸多面体的高斯–博内定理）。设 $K\subset M^3(c)$ 是一个 λ-凸多面体，其顶点集为 $\mathcal{V}$，棱集为 $\mathcal{E}$。则

$$\left(\lambda^2+c\right)|\partial K|+2\lambda\sum_{E\in\mathcal{E}}\ell_E\cdot\tan\frac{\beta_E}{2}+\sum_{v\in\mathcal{V}}|u(K,v)|=4\pi, \tag{3.1}$$

其中 $|u(K,v)|$ 是 $u(K,v)$的球面面积。

证明。设 $M=M^3(c)$，并令 $\pi\colon SM\to M$为 M的单位切向量球面丛。给定一个凸体 $K\subset M$，令 $N(K)$ 为 K的单位外法向量集合。它是 SM的双Lipschitz子流形。

SM上的局部标架是一组 $e_0,e_1,e_2\colon U\to SM$定义在某个开集$U\subset SM$上，使得 $e_0(\xi)=\xi$ 且 $e_0(\xi)$ $e_1(\xi)$ $e_2(\xi)$是正交归一的 $\forall\xi\in U$。给定这样一个局部标架，考虑由下式定义的微分形式 $\omega_{1,0},\omega_{2,0}\in\Omega^1(SM)$

$$\omega_{1,0}(X)=\langle e_1,\nabla_X e_0\rangle,\qquad \omega_{2,0}(X)=\langle e_2,\nabla_X e_0\rangle,\qquad X\in TSM.$$

这里，TSM表示 SM的切丛，而 ∇是通过 π将 TM的列维-奇维塔联络拉回到 TSM上所得的联络：$SM\to M$。

容易验证，$\omega_{1,\ 0} \wedge \omega_{2,\ 0}$不依赖于 e_1，e_2的选择，因此我们可以定义

$$\mathrm{TC}(K) = \int_{N(K)} \omega_{1,0} \wedge \omega_{2,0}.$$

根据 [AF定理 2.1，13], 泛函 TC 关于 M 的凸体集合上的 Hausdorff 拓扑是连续的。当 ∂K 光滑时，TC(K) 是主曲率乘积 $k_1 k_2$ 的积分。由于 $k_1 k_2 + c$ 等于 ∂K 的黎曼曲率，高斯–博内定理可写为

$$\mathrm{TC}(K) + c|\partial K| = 4\pi. \tag{3.2}$$

由连续性可知，前一个等式对所有凸体 K 都成立，无论其是否光滑。

设 K 是一个 λ-凸多面体，并用 $\mathcal{V}$、$\mathcal{E}$、$\mathcal{F}$分别表示 K 的顶点集、棱集和侧面集。那么

$$\mathrm{TC}(K) = \lambda^2 |\partial K| + \sum_{E \in \mathcal{E}} \int_{N(K) \cap \pi^{-1}(E)} \omega_{1,0} \wedge \omega_{2,0} + \sum_{v \in \mathcal{V}} \int_{N(K) \cap \pi^{-1}(v)} \omega_{1,0} \wedge \omega_{2,0}.$$

最后一个求和中的每一项都是单位球面 $\pi^{-1}(v)$ 上的区域 $u(K,\ v)$ 的面积，该区域由 K 在 v 处的外法向量覆盖。下面考察第二个求和。设$E \in \mathcal{E}$是两个面 F_1、$F_2 \in \mathcal{F}$ 的交集，并设 $\gamma(s)$ $s \in [0, l]$ 是 E 的弧长参数化。用 $\vec{t}(s)$ $\vec{n}(s)$ $\vec{b}(s)$ 表示沿着$\gamma(s)$的弗雷内标架，并令

$$\begin{aligned} e_0 &= -\cos(\alpha)\vec{n} + \sin(\alpha)\vec{b} \\ e_1 &= \sin(\alpha)\vec{n} + \cos(\alpha)\vec{b} \\ e_2 &= \vec{t}. \end{aligned}$$

令 β为内法向量 N_1, N_2 与 F_1, F_2之间的夹角。对于 $-\beta/2 \leqslant \alpha \leqslant \beta/2$，有 $e_0 \in N(K)$。

由于

$$\begin{aligned} \nabla e_0 &= e_1 d\alpha - \cos(\alpha)\nabla\vec{n} + \sin(\alpha)\nabla\vec{b} \\ \nabla\vec{t} &= k\, ds\, \vec{n} \\ \nabla\vec{n} &= -k\, ds\, \vec{t} \\ \nabla\vec{b} &= 0, \end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned} \omega_{1,0} &= d\alpha \\ \omega_{2,0} &= k\cos(\alpha) ds \\ \omega_{1,0} \wedge \omega_{2,0} &= k\cos(\alpha) d\alpha \wedge ds. \end{aligned}$$

积分可得

$$\int_{N(K)\cap\pi^{-1}(E)} \omega_{1,0}\wedge\omega_{2,0} = \int_0^l \int_{-\beta/2}^{\beta/2} k\cos(\alpha)d\alpha ds = 2k\,\ell\,\sin\frac{\beta}{2}.$$

另一方面，我们有

$$\lambda = \langle\frac{d\vec{t}}{ds}, N_1\rangle = k\langle\vec{n}, N_1\rangle = k\cos\frac{\beta}{2}.$$

因此，

$$\int_{N(K)\cap\pi^{-1}(E)} \omega_{1,0}\wedge\omega_{2,0} = 2\lambda\ell\tan\frac{\beta}{2}.$$

综上，我们得到

$$\mathrm{TC}(K) = \lambda^2|\partial K| + 2\lambda\sum_{E\in\mathcal{E}}\ell_E\tan\frac{\beta_E}{2} + \sum_{v\in\mathcal{V}}|u(K,v)|\,.$$

结合（3.2），我们得到（3.1）。 □

4. Inner parallel bodies and variation of the surface area

对于凸体 $K\subset M^n(c)$，令 $r(K)$表示其内切半径（即包含在 K中的最大球的半径）。对于每个 $t\geq 0$，距离 K_t 处的内平行体 t定义为

$$K_t := \{x\in M^n(c) : B(x,t)\subseteq K\}\,,$$

其中 $B(x,\ t)\subset M^n(c)$ 是以 $x\in M^n(c)$ 为中心、半径为t的闭测地球。注意，对于 $t>r(K)$，为空。此定义与欧几里得空间中内平行集的标准定义一致。对于 $c=0$， K_t 的体积与表面积之间的以下关系由 [Ma]得出。

定理4.1。 若 K_t 是凸体$K\subset M^n(c)$的距离为 $t\geqslant 0$ 处的内平行体， $n\geqslant 2$，则

$$|K| = \int_0^{r(K)} |\partial K_t|\,dt. \tag{4.1}$$

证明。 设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是包含 K 的 $M^n(c)$ 的一个局部坐标图，并且黎曼度量为 $ds^2 = (h(x))^2(dx_1^2+\cdots+dx_n^2)$，其中 $h(x) = {}^{2}{}_{(1+c|x|^2)}$。考虑函数 $f\colon K\to\mathbb{R}$，定义为 $f(x) = d_M(x,\partial K)$，即从 x 到 ∂K 的黎曼距离。显然，

$$d_M(y,\partial K)\leq d_M(y,x)+d_M(x,\partial K),\qquad d_M(x,\partial K)\leq d_M(x,y)+d_M(y,\partial K)$$

对任意 x， $y \in K$，可得

$$|f(x) - f(y)| = |d_M(x, \partial K) - d_M(y, \partial K)| \leq d_M(x, y). \tag{4.2}$$

对于一致常数 C我们有 $d_M(x, y) < C|y - x|$对所有 $x, y \in K$，因此f 是利普希茨的。因此我们可以应用余面积公式 [Fe, 3.2.12] 得到

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) Jf(x) dx = \int_0^{r(K)} \int_{\partial K_t} g(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) dt \tag{4.3}$$

其中 $\mathcal{H}^{n-1}$ 是关于欧几里得度量的豪斯多夫测度， Jf 是 f的欧几里得雅可比， g 是任意可积函数。

由拉德马赫定理， f在几乎每一个 $x \in K$处可微。给定这样的 x，注意到 $Jf(x) \leq h(x)$由（4.2）。此外，若 $\gamma(t)$是实现 $d_M(x, \partial K)$的测地线（即使得 $\gamma(0) = x$ 且 $\gamma(f(x)) \in \partial K$），则

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\gamma(t)) = -1.$$

由此可得 $Jf(x) = {}^{1}_{|\gamma'(0)|} = h(x)$。因此，取 $g(x) = (h(x))^{n-1}$，等式（4.3）变为

$$|K| = \int_K (h(x))^n \, dx = \int_0^{r(K)} \int_{\partial K_t} (h(x))^{n-1} \, d\mathcal{H}^{n-1}(x) dt = \int_0^{r(K)} |\partial K_t| dt.$$

□

By [DT，定理 B],如果 K 是一个 λ-凸体，且 L 是一个 λ-凸透镜，则 n

$$r(K) \geqslant r(L) \quad \text{provided} \quad |\partial K| = |\partial L|, \tag{4.4}$$

等号成立当且仅当 K 是一个 λ-凸透镜。在二维情形中，这一结果由 [Mi] 证明，后来又由 [Dr2]推广到亚历山德罗夫空间。

我们需要回顾 [DT第 3 节1], 的结果，其中推导了欧几里得空间中内平行 λ-凸多面体的变分公式。对于模型空间，证明过程类似；我们仅给出一些关键步骤。

根据 [Gr推论 33], ，凸多面体 K_t 的内平行体 λ-凸多面体 K 是一个 $\lambda(t)$-凸多面体，其

$$\lambda'(t) = \lambda(t)^2 + c.$$

我们将 K_t 的棱集记为 $\mathcal{E}(t)$。与前面一样，给定 $E \in \mathcal{E}(t)$，我们用 ℓ_E 表示 E 的长度，用 β_E 表示 E 处外法线之间的夹角。

定理 4.2（内平行多面体的表面积的变分）。若 $K \subset M^n(c)$ 是一个 λ-凸多面体，则除有限个 $t_0 \in [0, r(K)]$，

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} |\partial K_t| = -(n-1)\lambda(t_0)\cdot|\partial K_{t_0}| - 2\sum_{E\in\mathcal{E}(t_0)} \ell_E \cdot \tan\frac{\beta_E}{2}.$$

证明。证明步骤参照 [DT第 3 节。1]。假设 K_t 在所有 t 附近 t_0具有相同的组合结构；除有限多个 $t_0 \in [0, r(K)]$外，均满足此条件。

如果 $F_i(t)$ 是 K_t 的第 i 个光滑面，那么只需证明以下结论即可：

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} |F_i(t)| = -(n-1)\lambda(t_0)\cdot|F_i(t_0)| - \sum_j \ell_{E_{ij}} \cdot \tan\frac{\beta_{E_{ij}}}{2}, \tag{4.5}$$

其中求和遍及所有与 $F_i(t_0)$相邻的棱 E_{ij}。

对于 $t > s > t_0$，令 $F_i(t, s)$ 表示距 $F_i(t)$ 为 $t-s$ 的外平行超曲面；即，

$$F_i(t,s) = \{\exp_x((t-s)N(x)) : x \in F_i(t)\},$$

其中，$\exp_x$ 是指数映射，而 $N(x)$是在 x处垂直于 $F_i(t)$的外法向量。再令 $\widetilde{F}_i(t) = F_i(t, t_0)$，并注意到 $F_i(t)$是固定完备全脐超曲面$\mathcal{B}_{i,t_0}$ 中的一个凸多面体，其曲率为 $\lambda(t_0)$，且包含 $F_i(t_0)$。由面积公式的第一变分可得

$$\frac{d}{ds}|F_i(t,s)| = (n-1)\lambda(s)|F_i(t,s)|.$$

在前面的常微分方程中求解 $|F_i(t, s)|$ 在 $s = t_0$ 处的值，得到

$$|\widetilde{F}_i(t)| = |F_i(t,t_0)| = |F_i(t)|\exp\left((n-1)\int_{t_0}^{t}\lambda(u)du\right).$$

由此可得

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} |\widetilde{F}_i(t)| = (n-1)\lambda(t_0)\cdot|F_i(t_0)| + \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} |F_i(t)|. \tag{4.6}$$

另一方面，对于族 $t \mapsto F_i(t) \subset \mathcal{B}_{i,t_0}$ 我们可以应用 [DT，定理 3。3] 得出结论，方法与 [DT，引理 3。6], 相同：

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} |\widetilde{F}_i(t)| = -\sum_j \ell_{E_{ij}} \cdot \tan\frac{\beta_{E_{ij}}}{2}.$$

与（4.6）比较可得（4.5）。至此证明完成。 □

5. Proof of the Main Theorem

现在我们可以建立主要结果了。

首先假设 $K \subset M^3(c)$, $c \neq 0$ 是一个 λ-凸多面体，且 L 是一个 λ-凸透镜，使得 $|\partial K| = |\partial L|$。考虑函数 $f_K(t) := |\partial K_t|$, $t \in [0, r(K)]$ 和 $f_L(t) := |\partial L_t|$。注意， L_t 是一个 $\lambda(t)$-凸透镜。

我们声称

$$f_K(t) \geqslant f_L(t), \qquad \forall\, t \in [0, r(L)], \tag{5.1}$$

并且除非 $[0, r(L)]$在某个非空开区间上，否则该不等式在此区间上是严格的；若 K 是一个透镜。后一断言由（4.4）得出。根据（4.1），这一断言立即推出主定理所需的不等式，同时也给出了等号情形的刻画。因此，剩下的就是证明（5.1）。

令 ℓ_t^* 为透镜 L_t唯一一条棱的长度， β_t^* 为该棱处两个面的外法向量之间的夹角。将高斯–博内定理（定理 3.1）应用于 L_t 可得

$$(\lambda(t)^2 + c)|\partial L_t| + 2\lambda(t)\ell_{t_0}^* \cdot \tan\frac{\beta_{t_0}^*}{2} = 4\pi.$$

在（ $K = K_t$ 3.1）中取 并与前一个等式比较，我们推出

$$\sum_{E \in \mathcal{E}(t_0)} \ell_E \cdot \tan\frac{\beta_E}{2} \leqslant \ell_{t_0}^* \cdot \tan\frac{\beta_{t_0}^*}{2},$$

对每个 $t_0 \in [0, r(L)]$ 满足$|\partial K_{t_0}| = |\partial L_{t_0}|$的情形均成立，且除非$K$ 是一个透镜，否则该不等式是严格的。将定理 4.2 应用于 K_t 和 L_t 在 $t = t_0$处，便可得出

$$f_K'(t_0) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=t_0} |\partial K_t| \geqslant \frac{d}{dt}\bigg|_{t=t_0} |\partial L_t| = f_L'(t_0), \tag{5.2}$$

对每个 $t \in [0, r(L)]$ 满足 $|\partial K_t| = |\partial L_t|$的情形均成立，并且，除非 K 是一个透镜，否则该不等式仍是严格的。特别地，由于 $|\partial K| = |\partial K_0| = |\partial L| = |\partial L_0|$，且若 K不是一个透镜，我们可得 $f_K(t) > f_L(t)$ 在某个小的右邻域内成立$t \in [0, \varepsilon)$ 。现在假设（5.1）不成立。那么存在一个最小的 t_0 使得 $f_K(t) \geqslant f_L(t)$ $t \in [0, t_0]$ 并且

$$f_K(t_0) = f_L(t_0), \quad f_K'(t_0) \leqslant f_L'(t_0).$$

这与（5.2）矛盾。因此，断言（5.1）得证，并由此完成了在 K 是一个 λ-凸多面体时主定理的证明。

最后，如果 K 是任意一个 λ-凸体，则可通过 [DT，第 3 小节。3] 中的论证，直接通过逼近得出。该构造纯粹基于度量，不依赖外围空间的曲率，只依赖于式（4.4）的刚性情形。□

6. Proof of the reverse isoperimetric inequality in $\mathbb{H}^2(-1)$

本节将展示我们的方法如何为以下定理提供另一种证明；该定理最初由 [Dr1]:

定理 6.1. 若 $K \subset \mathbb{H}^2(-1)$ 是一个 λ-凸体，且 $L \subset \mathbb{H}^2(-1)$ 是一个 λ-凸透镜，使得 $|\partial K| = |\partial L|$，则 $|K| \geqslant |L|$。此外，当且仅当 K 是一个 λ-凸透镜时，等号成立。

证明. 与主定理的证明一样，我们只需考虑 K是一个 λ-凸多边形的情形。设 $e_0, \dots, e_{m-1}$ $(m \geqslant 2)$ 是 K 的边，β_i 是 e_i 与 e_{i+1} 公共顶点处外法向量之间的夹角（指标按模 m 取值）。同样，设 β^* 是 L各顶点处边的外法向量之间的夹角。

我们有

$$\beta_i \leqslant \beta^*, \quad \forall i. \tag{6.1}$$

事实上，对于固定的 i，根据布拉施克滚动定理，K 包含于集合 L（无论其是否紧），该集合是两个支撑 λ-球的交集，这两个球构成边 e_i 和 e_{i+1}。因此，根据单调性，$|\partial K| \leqslant |\partial L|$ 且 $|\partial L| \leqslant |\partial L|$。我们注意到，$\beta_i$ 是 L的一个顶点处两边外法线之间的夹角。由于 L 的周长随 β_i单调不减，我们得到 $\beta_i \leqslant \beta^*$.

对 K应用二维高斯-博内定理，得到

$$2\pi = -|K| + \lambda|\partial K| + \sum_{i=0}^{m-1} \beta_i. \tag{6.2}$$

类似地，对于透镜形区域 L，高斯–博内公式给出

$$2\pi = -|L| + \lambda|\partial L| + 2\beta^*.$$

因此，我们得出

$$\sum_{i=0}^{m-1} \beta_i \leqslant 2\beta^*, \qquad \text{whenever} \quad |\partial K| = |\partial L| \quad \text{and} \quad |K| \leqslant |L|. \tag{6.3}$$

与主定理的证明一样，令 K_t 为 K 在距离 $t \in [0, r(K)$处的内平行体，并类似地令 L_t。注意，K_t 是一个 m_t边形，且$m_t \leqslant m$。回顾，$r(L) \leqslant r(K)$，条件是 $|\partial K| = |\partial L|$ （见（4.4））。

由于对于每个 t，K_t 和 L_t 都是 λ_t-凸的（其中 λ_t 可根据 t 和外围空间的曲率显式计算），我们可以指定

(6.3) 对每个 $t_0 \in [0, r(L)]$:

$$\sum_{i=0}^{m_{t_0}-1} \beta_{i,t_0} \leqslant 2\beta^*_{t_0}, \qquad \text{whenever} \quad |\partial K_{t_0}| = |\partial L_{t_0}| \quad \text{and} \quad |K_{t_0}| \leqslant |L_{t_0}|. \tag{6.4}$$

这里，$\beta_{i,\ t}$、 $i \in \{0, \dots, m_t - 1\}$ 和 $\beta_{*,\ t}$ 分别是 K_t 和 L_t 的对应角。

根据定理 4.2,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} |\partial K_t| - \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} |\partial L_t| = 2\tan\frac{\beta^*_{t_0}}{2} - 2\sum_{i=0}^{m_{t_0}-1} \tan\frac{\beta_{i,t_0}}{2} \tag{6.5}$$

对每个满足 $|\partial K_{t_0}| = |\partial L_{t_0}|$的 $t_0 \in [0, r(L)]$ 。

注意， $2x^{-1}\tan(\frac{x}{2})$ 是一个单调递增函数，其定义域为 $x \in [0, \pi)$。假设 $|\partial K_{t_0}| = |\partial L_{t_0}|$ 且 $|K_{t_0}| \leqslant |L_{t_0}|$，结合（6.1）和（6.4），可得

$$\sum_{i=0}^{m_{t_0}-1} \tan\frac{\beta_{i,t_0}}{2} = \sum_{i=0}^{m_{t_0}-1} \frac{\beta_{i,t_0}}{2} \cdot \frac{2}{\beta_{i,t_0}} \tan\frac{\beta_{i,t_0}}{2} \leqslant \frac{2}{\beta^*_{t_0}} \tan\frac{\beta^*_{t_0}}{2} \sum_{i=0}^{m_{t_0}-1} \frac{\beta_{i,t_0}}{2} \leqslant 2\tan\frac{\beta^*_{t_0}}{2}.$$

结合（6.5），得到

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} |\partial K_t| \geqslant \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} |\partial L_t| \quad \text{for every} \quad t_0 \in [0, r(L)] \quad \text{such that} \quad |\partial K_{t_0}| = |\partial L_{t_0}| \quad \text{and} \quad |K_{t_0}| \leqslant |L_{t_0}|. \tag{6.6}$$

此外，如果最后一个不等式$|K_{t_0}| \leqslant |L_{t_0}|$ 也严格成立，那么第一个不等式也是严格的。

为导出矛盾，假设 $|K| < |L|$。那么我们可以应用 (6.6) 得出

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} |\partial K_t| > \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} |\partial L_t|.$$

因此，在 0 的某个右邻域内，函数 $t \mapsto |\partial L_t|$ 的图像位于函数$t \mapsto |\partial K_t|$ 的图像下方。如果这对所有 $t \in [0, r(L)]$, 都成立，那么我们就能得出 $|K| \geqslant |L|$，这与假设矛盾。因此，必定存在最小的$t_1 > 0$ 使得

$$|\partial K_{t_1}| = |\partial L_{t_1}| \quad \text{and} \quad \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_1} |\partial K_t| \leqslant \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_1} |\partial L_t| \tag{6.7}$$

并且，在 t_1的右邻域内， $t \mapsto |\partial L_t|$ 的图像位于 $t \mapsto |\partial K_t|$ 的图像上方。根据 t_1的选取，我们知道

$$\int_0^{t_1} |\partial K_t| dt \geqslant \int_0^{t_1} |\partial L_t| dt.$$

因此，利用假设 $|K| < |L|$,

$$|K_{t_1}| = |K| - \int_0^{t_1} |\partial K_t| dt < |L| - \int_0^{t_1} |\partial L_t| dt = |L_{t_1}|.$$

因此，在 $t = t_1$ 时，我们有 $|K_{t_1}| < |L_{t_1}|$ 且 $|\partial K_{t_1}| = |\partial L_{t_1}|$。因此，根据（6.6），必有 $\frac{d}{dt}\big|_{t=t_1} |\partial K_t| \succ \frac{d}{dt}\big|_{t=t_1} |\partial L_t|$。这与（6.7）中的不等式矛盾。这一最终矛盾证明了 $|K| \geqslant |L|$。

等号情形的证明与 [DT] 相同（利用 [Dr2] 中不等式的刚性）。□

Remark。 请注意，上述证明不适用于二维球面，因为在这种情形下，面积 $|K|$ 在高斯–博内公式（6.2）中出现时符号不同。

References

[AF] S. Alesker、J. H. G. Fu，《流形上的赋值理论：III. 一般情形下的乘法结构》，Trans. Amer. Math. Soc. 360(4), (2008), 1951–1981.[AAF] S. Artstein-Avidan、D. I. Florentin，《球体体的深入研究》，(2025)，https:// arxiv.org/abs/2505.09200.[AACF] S. Artstein-Avidan、A. Chor、D. Florentin，《球体体这一类的等距变换完整分类》，Bull. London Math. Soc. 57 (2025), 3691–3698.[Be] K. Bezdek，《从 Kneser–Poulsen 猜想到球多面体》，European Journal of Combinatorics, 29(8) (2008), 1820–1830.[Be2] K. Bezdek，《照明纺锤凸体并使等宽球面集合的体积最小化》，Discret. Comput. Geom. 47(2) (2012), 275–287.[BLN] K. Bezdek、Z. L´angi、M. Nasz´odi，《球的交理论精选主题》，Discrete Applied Mathematics 382 (2026) 60–82.[BLNP] K. Bezdek、Z. L´angi、M. Nasz´odi、P. Papez，《球多面体》，Discrete Comput. Geom. 38 (2007), no. 2, 201–230.[Bla] W. Blaschke，《圆与球》，de Gruyter，柏林，1956.[Bor] A. Borisenko，《二维亚历山德罗夫空间中的反向等周不等式》，Proc. Amer. Math. Soc. 145 (2017), 4465–4471.[BD1] A. Borisenko、K. Drach，《法曲率有下界的超曲面与球面的接近程度》，Sb. Math. 204:11 (2013), 1565–1583.[BD2] A. Borisenko、K. Drach，《曲率有下界的曲线的等周不等式》，Math. Notes 95 (2014), no. 5, 590–598.[BD3] A. Borisenko、K. Drach，《球面上有界曲率曲线的极值性质》，J. Dyn. Control Syst. 21 (2015), no. 3, 311–327.[Dr1] K. Drach，《关于罗巴切夫斯基平面上 λ-凸月牙的等周性质》，Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr., Mat. Pryr. Tekh. Nauky (2014), no. 11, 11–15 (arXiv:1402.2688).[Dr2] K. Drach，《二维亚历山德罗夫空间中凸域的内切半径估计》，Anal. Geom. Metr. Spaces 6 (2018), no. 1, 165–173.

[Dr3] K. Drach, 《有界曲率黎曼流形中的布拉施克滚动定理》, (2024), https://arxiv.org/abs/2404.02739.[DT] K. Drach、K. Tatarko, 《曲率约束下的反向等周问题》, (2023), https://arxiv.org/abs/2303.02294.[FRS] F. Fodor、N. Robock、A. Sagmeister, 《常曲率平面中球凸体的 P ´al 等内宽不等式》, (2026), https://arxiv.org/abs/2602.19300.[Fe] H. Federer, 《几何测度论》, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153, 施普林格, 1969.[FKV] F. Fodor、A. Kurusa、V. V´ıgh, 《超凸集的不等式》, Adv. Geom. 16 (2016), no. 3, 337–348.[Gr] A. Gray, 《管》, Progr. Math. 221, Birkhäuser 2024.¨ HSch[D. M. Hamdy、J. Scheuer, 《反向等周问题最优解的两个性质》, (2025), https://arxiv.org/abs/2511.02688.] JMR[T. Jahn、H. Martini、C. Richter, 《闵可夫斯基空间中的球凸体》, Pacific J. Math. 289 (2) (2017), 287–316.] Mi[A. Milka, 《有界曲率曲线大小的估计》, Ukrain. Geom. Sb. 21 (1978), 88–91.] Ma[G. Matheron, 《腐蚀的 Steiner 公式》, J. Appl. Prob. 15 (1978), 126–135.] SWY ´C. Sch[utt、E.M. Werner、D. Yalikun, 《球凸体的浮体》, J. London Math. Soc. 112 (2025), e70387.

Universitat de Barcelona, Gran Via de les Corts Catalanes, 585, 08007 Barcelona,Spain

Centre de Recerca Matemàtica, Edifici C, Campus de Bellaterra, 08193 Bel-laterra, Barcelona, Spain电子邮件地址: kostiantyn.drach@ub.edu

Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, 08193 Bel-laterra, Barcelona, Spain

Centre de Recerca Matemàtica, Edifici C, Campus de Bellaterra, 08193 Bel-laterra, Barcelona, Spain电子邮件地址: gil.solanes@uab.cat

Department of Pure Mathematics, University of Waterloo, Waterloo, ON, N2L 3G1, Canada电子邮件地址: ktatarko@uwaterloo.ca