arXiv:2603.08141v1 [math.FA] 9 Mar 2026

局部紧群上算子卷积的特征值聚集

Florian Schroth

几何与分析教席，亚琛工业大学，*Pontdriesch 10-12*，亚琛，*52062*，北莱茵-威斯特法伦州，德国

摘要

在量子调和分析框架下，对于一个具有平方可积、不可约酉表示的局部紧群 G，我们分析 G 上的示性函数与表示空间上的一个固定密度算子之间的卷积的特征值分布；这一概念推广了局部化算子。特别地，我们考察这类算子组成的一个序列，以及其特征值中与 1 的距离较小者的渐近数量。我们证明，当且仅当该群是幺模的，且示性函数所对应的集合构成Følner序列时，先前提出的一类渐近行为才会出现。应用这一结果，我们为幂零李群和齐性李群获得了积极结论，并将海森堡群的一个既有结果作为特殊情形重新得到。

关键词： 量子调和分析、局部紧群、Følner序列、算子卷积、局部化算子*2020*年数学主题分类： 43A30, 43A65, 43A07, 47B90, 47A75

1. 引言

在 2023 年的一篇文章中 [12], ， Simon Halvdansson 在一个局部紧群的一般框架下发展了算子卷积理论 G，其中该群带有一个平方可积的不可约酉表示 π。这类卷积的构想可追溯至 Werner [21], ，他在理论量子物理背景下，针对辛空间上的射影酉表示提出了这一想法

电子邮箱： schroth@mathga.rwth-aachen.de (Florian Schroth)

。从纯数学的角度来看，Berge 等人 [1] 将仿射群作为第一个非幺模的例子加以研究；不久之后，Halvdansson 处理了抽象情形。具体而言，他详细分析了群上的复值函数 G与表示空间上的算子之间的卷积 $\mathcal{H}$，以及两个算子之间在 $\mathcal{H}$上的卷积。函数-算子卷积会产生 $\mathcal{H}$ 上的另一个算子，其定义（在弱意义下）为

$$f * T := \int_G f(x)\pi(x)^* T\pi(x)d\mu(x).$$

当 T 的秩为一时，卷积可化为一个文献中已有深入研究的局部化算子（参见，例如 [6], [13], [22]）。算子-算子卷积通过迹定义了 G 上的一个函数：

$$(S * T)(x) := \mathrm{tr}(S\pi(x)^* T\pi(x)).$$

尤其是，在非幺模情形下，这类卷积的可积性问题会变得更加微妙， [1]证明了必须引入容许算子的概念（类似于表示空间中容许向量的概念）。

我们着重探讨 [12],中描述的众多有趣应用之一，即密度算子与示性函数的卷积 $E * S := \chi_E * S$ 的特征值分布。具体而言，若考虑 G 的子集序列 $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 以及$E_k * S$的特征值 $(\lambda_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$，我们关注数量 $\#\{n \mid \lambda_n^{(k)} > 1-\delta\}$ 的渐近行为；该数量统计与 1 距离较小的特征值（特征值始终不超过 1）。海森堡群情形下的此类数量已在 [7] 和 [14], 中得到研究，其中的结果是我们主定理的特例。 [15] 中也有相关工作，研究了在 $(1-\delta, 1]$ 以外区域内的特征值计数，并得到了严格界而非渐近行为。Halvdansson [12, 定理 5.14] 指出，在仿射群情形下，若集合 $E_k := \Gamma_{r_k}(E)$ 是通过一列膨胀将固定集合 $E \subseteq G$ 缩放得到的，则 $\#\{n \mid \lambda_n^{(k)} > 1-\delta\}$ 的渐近增长形式为 $\mathrm{tr}(S)\mu(E_k)$

$$\Gamma_{r_k} : G \to G,\ (x, a) \mapsto (r_k x, a^{r_k}),$$

其中 $\lim_{k\to\infty} r_k = \infty$。我们将证明这一说法不成立：在对群 G和序列 $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 作出温和假设的情况下，

form

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\#\{n \mid \lambda_n^{(k)} > 1-\delta\}}{\operatorname{tr}(S)\mu(E_k)} = 1$$

对所有 $\delta > 0$ 都存在极限，当且仅当 G 是幺模的，且 $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是 Følner序列。

回想一下，单连通、连通的幂零李群是幺模且可和的，我们将第一个蕴含应用于这类群，其中集合 $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 将是相对于某种词度量不断扩大的球。遵循 [12], 中的一条注释，我们还考虑齐性群（包括海森堡群这类分层李群），并对$(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$使用固定集合的膨胀。在幂零情形下，我们对算子卷积的定义作了细微修改，以适用于仅在群中心模意义下平方可积的不可约表示。作为示例，我们随后重新得到海森堡群的相应结果。

本文的组织结构如下：在第 2 节中，我们将概述本文关注的数学对象，不加证明地回顾一些众所周知的事实，并介绍必要的记号。第 3 节简要讨论局部紧群中的 Følner序列，确立主要结果所需的一些事实，并概述如何在幂零李群和齐性李群中构造 Følner序列。在第 4 节中，我们将精确定义算子卷积，回顾 [12], 中展示的一些性质，并补充其他必要内容。此外，我们还介绍一种看待两类算子卷积的方式，将其视为与 π的伴随表示相关的表示论对象。第 5 节将证明主要结果——定理 5.4；第 6 节则说明如何将其应用于幂零李群和齐性李群。

请注意，本文的部分内容，更准确地说，关于算子卷积的详细阐述、定理 5.4 的第一个推论，以及其在分层李群上的应用，源自作者最近完成的硕士论文。

2. 预备知识与记号

2.1. 希尔伯特空间上的迹类算子

在本文全文中，$\mathcal{H}$ 表示定义在复数域 $\mathbb{C}$ 上的可分希尔伯特空间。内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 在 $\mathcal{H}$ 上的记号以及

诱导范数 $\|\cdot\|$均不带下标书写。 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$表示 $\mathcal{H}$ 上配备算子范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$的有界算子空间。若 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，则$T^*$表示 T的伴随算子，而 $|T| := (T^*T)^{1/2}$ 表示其模。若$\psi, \varphi \in \mathcal{H}$，则我们将秩一张量 $\psi \otimes \varphi$ 定义为 $\mathcal{H}$上的算子，它将 $\xi \mapsto \langle \xi, \varphi \rangle \psi$映射为。

对我们而言， $\mathcal{H}$上的迹类也很有意义；从某种意义上说，从通常的函数卷积转向算子卷积时，它将取代 $L^1(G)$。有关以下事实的详细描述和证明，请参见 [18]。固定一个标准正交基$(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ，取 $\mathcal{H}$ ，并定义$\mathcal{S}^1(\mathcal{H})$，将迹类定义为满足下列条件的所有算子 $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ：

$$\|S\|_{\mathcal{S}^1(\mathcal{H})} := \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle |S|\varphi_n, \varphi_n \rangle < \infty.$$

$\mathcal{S}^1(\mathcal{H})$连同迹范数$\|\cdot\|_{\mathcal{S}^1(\mathcal{H})}$ 构成一个巴拿赫空间，也是 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$中的双边范数理想，这意味着对于任意 $S \in \mathcal{S}^1(\mathcal{H})$和 $T \in B(\mathcal{H})$，都有 ST， $TS \in \mathcal{S}^1(\mathcal{H})$以及 $\|ST\|_{\mathcal{S}^1(\mathcal{H})}$ $\|TS\|_{\mathcal{S}^1(\mathcal{H})} \leq \|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}\|S\|_{\mathcal{S}^1(\mathcal{H})}$。对于每个 $S \in \mathcal{S}^1(\mathcal{H})$，其和为

$$\mathrm{tr}(S) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle S\varphi_n, \varphi_n \rangle$$

称为 S 的迹 。它绝对收敛，且 tr 在 $\mathcal{S}^1(\mathcal{H})$ 上定义了一个范数为 1 的有界线性泛函。迹满足交换性，即对于 $S \in \mathcal{S}^1(\mathcal{H})$ 和 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，$\mathrm{tr}(TS) = \mathrm{tr}(ST)$。迹类、迹范数和迹均与所选的标准正交基 $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 无关。

每个秩一张量 $\psi \otimes \varphi$ 都是迹类算子，且

$$\|\psi \otimes \varphi\|_{\mathcal{S}^1(\mathcal{H})} = \|\psi\|\|\varphi\|, \qquad \mathrm{tr}(\psi \otimes \varphi) = \langle \psi, \varphi \rangle.$$

事实上，所有此类张量的张成空间关于迹范数在 $\mathcal{S}^1(\mathcal{H})$ 中稠密，并且我们有如下奇异值分解。这里，$\ell^1(\mathbb{N})$ 表示绝对可和复数序列空间。

定理 2.1。 算子 $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 属于 $\mathcal{S}^1(\mathcal{H})$ 当且仅当存在标准正交基$(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$和$(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ，以及一个非递增序列$(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$ 非负实数，使得

$$S = \sum_{n\in\mathbb{N}} s_n(\psi_n \otimes \varphi_n) \tag{2.1}$$

在强算子收敛意义下。在这种情况下，$(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是唯一的，(2.1)甚至关于 $\|\cdot\|_{\mathcal{S}^1(\mathcal{H})}$收敛，并且有 $\|S\|_{\mathcal{S}^1(\mathcal{H})} = \|(s_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^1}$以及

$$\mathrm{tr}(S) = \sum_{n\in\mathbb{N}} s_n \langle \psi_n, \varphi_n \rangle.$$

如果 S 另外是非负的，那么$(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} =(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和$(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 S的特征值，按重数计。

如果 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$是正规算子，且 ρ 是定义在 T的谱上的有界复值博雷尔函数，我们用 $\rho(T)$表示通过函数演算将 ρ作用于 T 所定义的有界算子。特别地，若 $S \in \mathcal{S}^1(\mathcal{H})$是非负的，特征值为$(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$，并且 ρ 是定义在 $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 上的复值函数，使得$(\rho(s_n))_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$，则 $\rho(S) \in \mathcal{S}^1(\mathcal{H})$ 和

$$\mathrm{tr}(\rho(S)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \rho(s_n). \tag{2.2}$$

2.2. 局部紧群上的抽象调和分析

第3、4和5 节的讨论将在局部紧群 G 上进行。为方便起见，本文始终假设 G 是 σ-紧的。此处回顾的结果都是标准结果，例如可参见 [8]。我们用 G 表示 e的单位元。对于$x \in G$ 以及子集 X，$Y \subseteq G$，我们使用以下简写

$$xY := \{xy \mid y \in Y\}, \quad Yx := \{yx \mid y \in Y\}, \quad XY := \{xy \mid x \in X, y \in Y\},$$

$$X^m := \underbrace{X \dots X}_{m\text{-times}}, \quad X^{-1} := \{x^{-1} \mid x \in X\}.$$

$\mathfrak{B}(G)$ 是由 G 的开集生成的博雷尔 σ-代数，而 μ 始终表示 G 的一个固定的右 *Haar* 测度，即 $\mathfrak{B}(G)$ 上满足对所有 $E \in \mathfrak{B}(G)$ 及所有 $x \in G$ 有 $\mu(Ex) = \mu(E)$ 的拉东测度。对于$1 \le p \le \infty$，$L^p(G)$ 表示 G 上关于测度 μ 的 p-勒贝格空间，并配备通常的范数。G 的模函数 定义为

$$\Delta_G : G \to \mathbb{R}_{>0}, x \mapsto \frac{\mu(x^{-1}E)}{\mu(E)}$$

对某个满足 $0 < \mu(E) < \infty$ 的 $E \in \mathfrak{B}(G)$，其中该定义不依赖于 E。Δ_G 是一个连续群同态，并给出替换法则

$$\int_G f(y)d\mu(y) = \int_G \Delta_G(y)f(y^{-1})d\mu(y)$$

and

$$\int_G f(y)d\mu(y) = \Delta_G(x)\int_G f(x^{-1}y)d\mu(y)$$

对于 $f \in L^1(G)$ 和 $x \in G$。若 $\Delta_G \equiv 1$，则称群 G 幺模。

第 4 节中定义算子卷积的关键，是存在一个定义在某个可分希尔伯特空间 G上的平方可积不可约酉表示 $\mathcal{H}$，记作 $\pi: G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$。对于$\psi$, $\varphi \in \mathcal{H}$，我们称函数

$$C_{\psi,\varphi} : G \to \mathbb{C}, x \mapsto \langle \pi(x)\psi, \varphi\rangle$$

为 ψ 和 φ 相对于 π的矩阵系数。若对所有 ψ，$\varphi \in \mathcal{H}$, $C_{\psi,\,\varphi} \equiv 0$ 都推出 $\psi = 0$ 或 $\varphi = 0$，则称 π 为不可约；若存在 ψ，$\varphi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ 使得 $C_{\psi,\,\varphi} \in L^2(G)$，则称其为平方可积。

关于这类表示的下述经典结果归功于 Duflo 和Moore [5]。

定理 2.2。设 π 是G的一个不可约平方可积表示。则存在唯一的稠密定义、自伴的正算子D 作用于 $\mathcal{H}$，其逆算子 D^{-1} 也稠密定义，并且 $C_{\psi,\,\varphi} \in L^2(G)$ 当且仅当 $\psi \in \mathcal{H}$ 且 $\varphi \in \mathrm{dom}(D^{-1})$。对于所有 $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{H}$ 以及 φ_1, $\varphi_2 \in \mathrm{dom}(D^{-1})$，我们有如下正交关系

$$\langle C_{\psi_1,\varphi_1}, C_{\psi_2,\varphi_2}\rangle_{L^2(G)} = \langle \psi_1, \psi_2\rangle\overline{\langle D^{-1}\varphi_1, D^{-1}\varphi_2\rangle}.$$

此外，$\mathrm{dom}(D)$ 在 $\pi(x)$ 作用下保持不变，且

$$\pi(x)D = \Delta_G(x)^{-1/2}D\pi(x)$$

对所有 $x \in G$，均在 $\mathrm{dom}(D)$ 上。

$\mathrm{dom}(D^{-1})$中的元素称为容许向量。

2.3. 幂零李群

在我们的应用中，我们只考虑有限维实李群及相应的有限维实李代数。关于幂零李群的背景知识，参见 [3, 第1.1章、第1.2] 章；关于这类群上的表示，参见 [3, 第4章5], [16]。这些群具有特殊性质，因为指数映射 $\exp_G : \mathfrak{g} \to G$ 在幂零李代数$\mathfrak{g}$ 与相应的单连通、连通幂零李群 G之间构成整体光滑微分同胚，并且 $\lambda \circ \exp_G^{-1}$ （其中 λ 是欧几里得空间 $\mathfrak{g}$上的勒贝格测度）定义了 G上的双边哈尔测度，使该群成为幺模群。此外，幂零群是多项式增长群（参见 [11, 定理 II.4]），因此 [2, 定理 1.1] 指出，对于 e的任意紧对称邻域 V，存在常数 $Q \in \mathbb{N}$和 $c > 0$，使得

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mu(V^k)}{ck^Q} = 1. \tag{2.3}$$

鉴于第4节，对于我们的情形而言，微妙之处在于，没有任何非平凡幂零李群 G 具有平方可积的不可约表示（见 [3, 第 4 章。5]）。这基本上是 Schur 引理和 Weil 积分公式的结果，再加上以下事实： Z，即 G的中心是非紧的。由于中心在此情形下构成障碍，因此将平方可积性条件弱化为仅要求在 G/Z 上的积分，而不是在 G的全部范围上积分，是自然的做法。为使这一点严格化，考虑商映射 q： $G \to G/Z$ 以及 q的一个光滑右逆，我们记作 s： $G/Z \to G$。这样的映射确实存在，构造如下：令 $\mathfrak{z} \subseteq \mathfrak{g}$ 为 Z 的李代数，并令

$$\phi : \mathfrak{g}/\mathfrak{z} \to \mathfrak{g},\ X + \mathfrak{z} \mapsto X - P_{\mathfrak{z}}X,$$

其中， $P_{\mathfrak{z}}$ 是关于 $\mathfrak{z}$的正交投影，该投影是相对于 $\mathbb{R}$-空间 $\mathfrak{g}$上任意选取的内积定义的。由于 G/Z 仍然是一个单连通、连通的幂零李群，且其李代数为 $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$，我们可以定义

$$s := \exp_G \circ \phi \circ \exp_{G/Z}^{-1},$$

它是一个光滑映射，并满足 $q \circ s = \mathrm{id}_{G/Z}$。具有这些性质的映射 s 并不唯一，但在我们的应用中，这通常无关紧要。我们希望利用 s 将定义在 G 上的函数 f 转换为 G/Z 上的函数，方法是通过 $f \mapsto f \circ s$；如果 f 在每个陪集 $xZ \subseteq G$上都是常数，那么 $f \circ s$ 就不会

取决于 s的具体选择。另一个有用的事实是， $q\circ s=\mathrm{id}_{G/Z}$意味着

$$s(\dot{x}\dot{y}^{-1})\in s(\dot{x})s(\dot{y})^{-1}Z \tag{2.4}$$

对所有的 $x,y\in G$，其中 $\dot{x},\dot{y}$ 表示 G/Z 中相应的陪集。因此，s 是一个相差平移 Z 的同态。

有了这些准备，我们称酉表示 π 在 G 上的 $\mathcal{H}$ 模 Z 平方可积， ψ当且仅当存在 $\varphi\in\mathcal{H}\backslash\{0\}$ 使得 $C_{\psi,\varphi}\circ s\in L^2(G/Z)$。注意，该定义不依赖于 s 的选取，因为$|C_{\psi,\varphi}|$在每个陪集上都是常数。事实上，某些单连通、连通的幂零李群具有模 Z平方可积且不可约的表示；其刻画见 [16]。此外，Duflo-Moore 定理也适用于这种情形，而且结论甚至更为简单，因为 G 是幺模的，因此 Duflo-Moore 算子是单位算子的常数倍。

定理 2.3. 若 $\pi:\ G\to\mathcal{U}(\mathcal{H})$ 是 G 的模 Z平方可积的不可约表示，则对所有 ψ、 $\varphi\in\mathcal{H}$，有 $C_{\psi,\varphi}\circ s\in L^2(G/Z)$，并且存在常数 $d>0$ 使得

$$\langle C_{\psi_1,\varphi_1}\circ s, C_{\psi_2,\varphi_2}\circ s\rangle_{L^2(G/Z)}=\langle\psi_1,\psi_2\rangle\overline{\langle d^{-1}\varphi_1, d^{-1}\varphi_2\rangle}$$

对所有 ψ_1、 ψ_2、 φ_1、 $\varphi_2\in\mathcal{H}$。

2.4. 齐性群

关于本小节，我们参阅 [9, A 节]。齐性群 G是一类特殊的单连通、连通幂零李群；它之所以引起我们的兴趣，是因为在 G 上存在一族具有一组有用性质的膨胀。这些膨胀推广了加法群 $\mathbb{R}^k$ 上的数乘以及乘法群 $\mathbb{R}_{>0}$上的幂函数。

定理 2.4. 若 G 是齐性群，则对每一个 $r>0$，存在映射 $\Gamma_r:\ G\to G$，具有下列性质。

(i) 对于每个 $r>0$， Γ_r 都是 G 的李群自同构。

(ii) 映射 $\mathbb{R}_{>0}\to\mathrm{Aut}(G)$ $r\mapsto\Gamma_r$ 是一个群同态。

(iii) 对每个 $x\in G$，映射 $\mathbb{R}_{>0}\to G, r\mapsto\Gamma_r(x)$ 是连续的，且$\lim_{r\downarrow 0}\Gamma_r(x)=e$。

(iv) 令 μ 表示 G 上的哈尔测度。则存在 $Q \in \mathbb{N}$，称为 G 的齐性维数，使得

$$\mu(\Gamma_r(E)) = r^Q \mu(E)$$

对所有 $E \in \mathfrak{B}(G)$ 以及 $r > 0$。

3. Følner序列

对于局部紧群 G，一个得到广泛研究的性质是可 *amen* 性。等价刻画有很多（参见 [17]），然而在我们的语境中，***Følner***序列最值得关注。

定义 3.1。(i) 对于具有 $0 < \mu(E) < \infty$ 的集合 $E \in \mathfrak{B}(G)$，定义

$$\beta_E : G \to [0,1],\ x \mapsto 1 - \frac{\mu(E \cap Ex^{-1})}{\mu(E)} = \frac{\mu(E \setminus Ex^{-1})}{\mu(E)}.$$

(ii) 设 $(E_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{B}(G)$ 是满足对所有$k \in \mathbb{N}$均有 $0 < \mu(E_k) < \infty$ 的一个序列。若 $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 在 G 的每个紧子集上一致收敛于 0，则称其为一个***Følner***序列。

(iii) 若 $(E_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{B}(G)$ 满足对所有 $k \in \mathbb{N}$ 均有 $0 < \mu(E_k) < \infty$，且 $(\beta_{E_k})_{k\in\mathbb{N}}$ 仅在某个集合 $X \subseteq G$ 上逐点收敛于 0，则称 $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 在 X 上逐点 ***Følner***。

这一概念最初由 Følner 针对离散群提出，见 [10]，并且事实证明，G 是可和的，当且仅当 G中存在一个 Følner 序列。本节的首要目标是证明，定义3.1(ii) 中对局部一致收敛的要求可以大幅放宽。

命题 3.2。设 G 连通，且 $(E_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{B}(G)$ 满足 $0 <\mu(E_k) < \infty$ 对所有 $k \in \mathbb{N}$ 均成立。那么，以下三个条件等价。

(a) $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 在 e 的某个邻域上几乎处处逐点 ***Følner***

(b) $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 在 G 上逐点 ***Følner***。

(c) $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是 ***Følner*** 序列。

证明需要以下两个辅助命题。

引理 3.3。 设 $E \in \mathfrak{B}(G)$ 满足 $0 < \mu(E) < \infty$。则

$$\beta_E(xy) \leq \beta_E(x) + \beta_E(y)$$

对所有 $x, y \in G$。

证明。 注意到我们有如下集合包含关系

$$E \setminus E(xy)^{-1} \subseteq (E \setminus Ex^{-1}) \cup (E \setminus Ey^{-1})x^{-1}$$

对所有 x, $y \in G$。取测度，利用右不变性，并除以$\mu(E_k)$，即可得到所述结论。 □

下一个引理可由引理 3.3 立即推出。

引理 3.4。 设$(E_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{B}(G)$ 满足 $0 < \mu(E_k) < \infty$ 对所有 $k \in \mathbb{N}$成立。任取 $X, Y \subseteq G$。若 $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 在 $X \cup Y$ 上是逐点 ***Følner*** 的，则在 XY 上也如此。

命题 3.2 的证明。(c) $\Longrightarrow$ (a) 显然，因此假设 (a) 成立。于是存在 e 的一个紧对称邻域 V，以及一个集合 $X \subseteq V$，满足 $\mu(X) = \mu(V)$，使得 $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 在 X 上是逐点 Følner 的。由于 V 对称，我们有 $X^{-1} \subseteq V$；又因为 X 在 V 中是满测度的，X^{-1} 也如此。因此，$X \cap X^{-1}$ 是对称的，具有正测度，且 $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 在 $X \cap X^{-1}$ 上是逐点 Følner 的。由 Steinhaus 定理，$U := (X \cap X^{-1})^2$ 是 e 的一个邻域；根据引理 3.4，$(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 在 U 上是逐点 Følner 的。由于 G 连通，$G = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} U^m$，因此对引理 3.4 作归纳可知，$(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 在 G 上是逐点 Følner 的。

现在假设 (b)，并令 $K \subseteq G$ 为具有正测度的紧集。利用引理3.3中的变量代换，我们得到

$$\beta_{E_k}(x) \leq \beta_{E_k}(y) + \beta_{E_k}(xy^{-1})$$

对所有 x, $y \in K$ 和 $k \in \mathbb{N}$。对 K 取平均可得

$$\begin{aligned}
\beta_{E_k}(x) &\leq \mu(K)^{-1} \int_K \beta_{E_k}(y) + \beta_{E_k}(xy^{-1}) d\mu(y) \\
&= \mu(K)^{-1} \left(\int_K \beta_{E_k} d\mu + \int_{xK^{-1}} \Delta_G(y) \beta_{E_k}(y) d\mu(y) \right) \qquad (3.1) \\
&\leq \mu(K)^{-1} \left(\int_K \beta_{E_k} d\mu + \left(\max_{y \in KK^{-1}} \Delta_G(y) \right) \int_{KK^{-1}} \beta_{E_k} d\mu \right),
\end{aligned}$$

这里用到了连续函数 Δ_G 在紧集 KK^{-1}上取得最大值这一事实。我们知道，每个 β_{E_k} 都不超过 1 ，并且逐点收敛到 0，这是因为 $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是逐点Følner。因此，根据控制收敛定理，3.1式右端在$k \to \infty$时趋于 0 。由于该表达式不依赖于 $x \in K$，我们在 $(\beta_{E_k})_{k\in\mathbb{N}}$ 上有一致收敛 K。

□

注 3.5. 若 G 在命题 3.2 的设定中不连通，则蕴含关系 (b) $\Longrightarrow$(c) 仍然成立；然而，一般而言，(a) 仅蕴含该序列在单位连通分支 G_0 （即 G 的单位连通分支）上是逐点 Følner 的（或者，更一般地，在 G 的、由 e 的给定邻域生成的开子群上）。

鉴于我们的目标是将主要定理应用于幂零李群与齐性李群，我们现在概述如何在这些情形下构造 Følner序列。在一般的幂零情形中，我们考虑关于 G 上某个固定词度量的不断增大的球，并依赖于 G 是多项式增长群这一事实。

引理 3.6. 设 G 为幂零李群， V 为 G 中 e 的紧对称邻域。则 $(V^k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是一个 *Følner*序列。

证明。 令 $x \in V$，并注意到，对任意 $k \in \mathbb{N}$，都有 $V^{k-1} \subseteq V^k$ 和 $V^{k-1}x \subseteq V^k$，因此 $V^{k-1} \subseteq V^k \cap V^k x^{-1}$。于是，

$$1 \geq \frac{\mu(V^k \cap V^k x^{-1})}{\mu(V^k)} \geq \frac{\mu(V^{k-1})}{\mu(V^k)} = \frac{\mu(V^{k-1})}{c(k-1)^Q} \frac{ck^Q}{\mu(V^k)} \left(\frac{k-1}{k}\right)^Q,$$

根据（2.3），右侧的每一项在 1 当 $k \to \infty$若 $Q \in \mathbb{N}$ 且 $c > 0$选择恰当时趋于 V 是 e的一个邻域，命题 3.2 便可推出 $(V^k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是一个 Følner序列。

□

如果 G还具有齐次性，那么膨胀使我们能够连续地缩放一个固定集合，因此在这里构造 Følner序列甚至更加容易。

引理 3.7。 设 G 是一个带有膨胀 $(\Gamma_r)_{r>0}$的齐性群。设 $E \subseteq G$ 具有有限的非零测度，并且 $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是一个正实数序列，满足 $\lim_{k\to\infty} r_k = \infty$。则 $(\Gamma_{r_k}(E))_{k\in\mathbb{N}}$ 是 G 中的 *Følner*序列。

证明。 该证明所需的背景知识包含在定理 2.4 中。利用 (i)、(ii) 和 (iv) 中的内容，我们可以重写

$$\mu(\Gamma_r(E)\cap\Gamma_r(E)x)=\mu(\Gamma_r(E\cap E\Gamma_{r^{-1}}(x)))=r^Q\mu(E\cap E\Gamma_{r^{-1}}(x))$$

对于所有 $r>0$ 和 $x\in G$，以及

$$\mu(\Gamma_r(E))=r^Q\mu(E),$$

如果 Q G $_{k\to\infty}\Gamma_{r_k^{-1}}\ x\ =$ 是 的齐性维数。第 e $x\in G$ (iii) 部分断言，对于每个 ，lim ( )，因此

$$|\mu(E)-\mu(E\cap E\Gamma_{r_k^{-1}}(x))|\le\int_E|\chi_E(y)-\chi_E(y\Gamma_{r_k^{-1}}(x)^{-1})|d\mu(y)$$

由 $L^1(G)$ 中右平移的连续性可知收敛于 0。因此，综合以上各点，

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\mu(\Gamma_{r_k}(E)\cap\Gamma_{r_k}(E)x)}{\mu(\Gamma_{r_k}(E))}=\lim_{k\to\infty}\frac{\mu(E\cap E\Gamma_{r_k^{-1}}(x))}{\mu(E)}=1.$$

□

4. 算子卷积

在本节及下一节中，设 G 为一个局部紧的 σ-紧群， π 为 G 在可分希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的平方可积不可约表示。本文研究的主要对象是 G 上的复值函数与 G 上的有界算子之间的卷积，我们将在本节后半部分讨论这一问题。另一个同样不可或缺的对象，是迹类算子与 $\mathcal{H}$ 上的有界算子之间的一类卷积。这里所需的许多性质已经可以在 [12，的第 3]，节中找到，因此我们将不加证明地陈述它们。如有需要引入新的内容，我们将给出证明。首先，我们利用右 Haar 测度回顾两个函数之间通常的卷积。

定义 4.1. 设 $f,g\in L^1(G)$。则卷积 $f*g:\ G\to\mathbb{C}$ 定义为

$$(f*g)(x):=\int_G f(y)g(xy^{-1})d\mu(y)$$

对所有 $x\in G$。

受此定义中第二个函数所必需的平移启发，我们利用酉表示，定义算子关于 G 中一个元素的平移。设

$$\alpha : G \times \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}),\ (x, T) \mapsto \alpha_x(T) := \pi(x)^* T \pi(x).$$

只有通过这一点，卷积才会依赖于所选的表示。因此，我们汇总了本节后续论证所需的 α 的性质，以便之后说明这些结果可以推广到幂零李群的情形。以下所有结论都很容易证明。

命题 4.2。 *(i)* α 在 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$上定义了 G 的右群作用，即 $\alpha_e(T) = T$，且 $\alpha_x(\alpha_y(T)) = \alpha_{yx}(T)$，其中 x、$y \in G$ 和 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。

(ii) 对每个 $x \in G$，α_x 都是酉共轭。特别地，范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$ 和 $\|\cdot\|_{\mathcal{S}^1(\mathcal{H})}$ 在 α_x 下保持不变。

(iii) 对每个 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，映射 $G \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ $x \mapsto \alpha_x(T)$ 是强连续的。

(iv) 对于 $x \in G$和 ψ_1、ψ_2、φ_1、$\varphi_2 \in \mathcal{H}$，我们有

$$\langle \alpha_x(\varphi_2 \otimes \varphi_1)\psi_1, \psi_2 \rangle = C_{\psi_1,\varphi_1}(x)\overline{C_{\psi_2,\varphi_2}(x)}.$$

4.1. 算子-算子卷积

定义 4.3。 设 $S \in \mathcal{S}^1(\mathcal{H})$ 且 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。则卷积$S * T$： $G \to \mathbb{C}$ 定义为

$$(S * T)(x) := \mathrm{tr}(S\alpha_x(T))$$

对所有 $x \in G$。

该定义部分受到通常函数卷积定义的启发。将第二个函数进行平移，替换为对 α_x 第二个算子的作用，而积分则变为迹。这是 Segal 早期提出的一个重要思想 [19], 它贯穿整个截面，使我们能够将许多结果视为已知函数卷积结果的类似形式。

我们引用 [12, 引理 3.10、引理 3.11]。

引理 4.4。令 $S \in \mathcal{S}^1(\mathcal{H})$ 和 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。

(i) 我们有 $S * T \in L^\infty(G)$，其中$\|S * T\|_{L^\infty(G)} \leq \|S\|_{\mathcal{S}^1(\mathcal{H})}\|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$。

(ii) 若 S和 T均为非负，则 $S * T$也为非负。

此外，我们需要两个算子之间卷积的连续性。这让人联想到这样一个事实：可积函数与有界函数的卷积是连续的，只要将 $L^\infty(G)$视为对应于 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$，并将 $L^1(G)$视为对应于 $\mathcal{S}^1(\mathcal{H})$。

引理4.5。 设 $S \in \mathcal{S}^1(\mathcal{H})$ 和 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。则 $S * T$ 是连续的。

证明。 设 $S = \sum_{n\in\mathbb{N}} s_n(\psi_n \otimes \varphi_n)$ 是 S 的奇异值分解，如定理2.1所述。由于级数

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} s_n(\psi_n \otimes \varphi_n)\alpha_x(T)$$

按迹范数收敛，因此我们可以将卷积分配到求和项中，于是

$$(S * T)(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} s_n((\psi_n \otimes \varphi_n) * T)(x) \tag{4.1}$$

对所有 $x \in G$均成立。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们有

$$((\psi_n \otimes \varphi_n) * T)(x) = \mathrm{tr}(\alpha_x(T)\psi_n \otimes \varphi_n) = \langle T\pi(x)\psi_n, \pi(x)\varphi_n\rangle,$$

其在 $x \in G$ 上连续，因为 π 是强连续的，而 T 是有界的。此外，根据引理4.4（i），函数（$\psi_n\otimes\varphi_n$）$*T$有界于$\|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$，因此 $S*T$是连续的，因为级数（4.1）一致收敛。

□

另一个重要问题是卷积$S*T$的可积性。在幺模情形下，正如 Werner [21] 在其关于这一主题的第一篇论文中所述，两个迹类算子之间的卷积确实属于 L^1（G）。然而，如果 G 不是幺模的，问题就更加微妙，需要引入 [1]中提出的可容许算子这一概念。回忆一下，D 表示与 π相关联的 Duflo-Moore 算子。

定义 4.6. 若 A 将 dom(D) 映入 dom(D^{-1})，且稠密定义的算子 $D^{-1}AD^{-1}$ 可延拓为 $\mathcal{H}$ 上的迹类算子，则称算子 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 为容许算子。我们用 $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ 表示 $\mathcal{H}$ 上全体容许算子的集合。

事实上，这将可容许性的概念从表示空间的元素加以推广 $\mathcal{H}$：对任意 ψ, $\varphi \in \mathcal{H}\setminus\{0\}$，算子 $\psi\otimes\varphi$是容许的当且仅当 ψ，$\varphi \in \mathrm{dom}(D^{-1})$ （参见 [12, 命题 4.7]）。

作者未能完全理解 [12], 中所给出的下述命题的证明，因此为完整起见，我们改用 [1]中针对仿射群这一特殊情形所给出的论证。

定理 4.7. 设 $S \in \mathcal{S}^1(\mathcal{H})$ 且 $A \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$。则 $S * A \in L^1(G)$ 满足

$$\|S * A\|_{L^1(G)} \leq \|S\|_{\mathcal{S}^1(\mathcal{H})}\|D^{-1}AD^{-1}\|_{\mathcal{S}^1(\mathcal{H})}$$

and

$$\int_G S * A\, d\mu = \mathrm{tr}(S)\,\mathrm{tr}(D^{-1}AD^{-1}).$$

证明. 设 $R \in \mathcal{S}^1(\mathcal{H})$ 为 $D^{-1}AD^{-1}$ 的扩张， $R = \sum_{n\in\mathbb{N}} r_n(\psi_n \otimes\varphi_n)$ 为奇异值分解。我们分三步进行，对 S考虑越来越一般的迹类算子，从最简单的情形开始。

步骤 1：对 $S = \xi \otimes \eta$ 证明该断言，其中 ξ、$\eta \in \mathrm{dom}(D)$。对固定的 $x \in G$，我们有

$$\begin{aligned}(S * A)(x) &= \mathrm{tr}((\xi \otimes \eta)\alpha_x(A)) \\ &= \langle \alpha_x(A)\xi, \eta\rangle \\ &= \langle A\pi(x)\xi, \pi(x)\eta\rangle.\end{aligned}$$

由定理 2.2 （Duflo-Moore）的第二部分， $\pi(x)\xi$ 与 $\pi(x)\eta$ 是 $\mathrm{dom}(D)$ 的元素，因此此处我们可以写成 $A = DRD$ 与

$$\begin{aligned}(S * A)(x) &= \langle RD\pi(x)\xi, D\pi(x)\eta\rangle \\ &= \Delta_G(x)\langle R\pi(x)D\xi, \pi(x)D\eta\rangle \\ &= \Delta_G(x)\sum_{n\in\mathbb{N}} r_n\langle(\psi_n \otimes \varphi_n)\pi(x)D\xi, \pi(x)D\eta\rangle \\ &= \Delta_G(x)\sum_{n\in\mathbb{N}} r_n\langle\alpha_{x^{-1}}(D\xi \otimes D\eta)\psi_n, \varphi_n\rangle. \qquad (4.2)\end{aligned}$$

W我们考虑最后一个和式中某一项的 L^1-范数，并代入

利用模函数求逆。命题 4.2的 (iv) 部分随后给出

$$\begin{aligned}
&\int_G |\Delta_G(x)\langle \alpha_{x^{-1}}(D\xi \otimes D\eta)\psi_n, \varphi_n\rangle| d\mu(x) \\
&= \int_G |\langle \alpha_x(D\xi \otimes D\eta)\psi_n, \varphi_n\rangle| d\mu(x) \\
&= \langle |C_{\psi_n, D\eta}|, |C_{\varphi_n, D\xi}|\rangle_{L^2(G)} \\
&\leq \|C_{\psi_n, D\eta}\|_{L^2(G)} \|C_{\varphi_n, D\xi}\|_{L^2(G)} \\
&= \|\psi_n\| \|D^{-1}D\eta\| \|\varphi_n\| \|D^{-1}D\eta\| \\
&= \|\xi\| \|\eta\|,
\end{aligned}$$

再次由定理 2.2。对所有 $n \in \mathbb{N}$求和后，我们便得到

$$\|S * A\|_{L^1(G)} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} r_n \|\xi\| \|\eta\| = \|\xi \otimes \eta\|_{\mathcal{S}^1(\mathcal{H})} \|R\|_{\mathcal{S}^1(\mathcal{H})}.$$

对于积分恒等式，我们只需对式（4.2）进行积分；控制收敛定理与已证明的可积性使我们能够交换求和与积分。再作与上文相同的变量代换，并再次应用定理 2.2，即可得到

$$\begin{aligned}
\int_G S * A \, d\mu &= \int_G \Delta_G(x) \sum_{n\in\mathbb{N}} r_n \langle \alpha_{x^{-1}}(D\xi \otimes D\eta)\psi_n, \varphi_n\rangle d\mu(x) \\
&= \int_G \sum_{n\in\mathbb{N}} r_n C_{\psi_n, D\eta}(x) \overline{C_{\varphi_n, D\xi}(x)} d\mu(x) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} r_n \langle C_{\psi_n, D\eta}, C_{\varphi_n, D\xi}\rangle_{L^2(G)} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} r_n \langle \psi_n, \varphi_n\rangle \langle D^{-1}D\xi, D^{-1}D\eta\rangle \\
&= \operatorname{tr}(\xi \otimes \eta) \operatorname{tr}(R).
\end{aligned}$$

步骤 2：证明以下结论：$S = \xi \otimes \eta$ 其中 ξ，$\eta \in \mathcal{H}$ 均为任意取值。由于 $\operatorname{dom}(D)$ 在 $\mathcal{H}$ 中稠密，我们可以找到序列 $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$，$(\eta_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \operatorname{dom}(D)$，使得 $\lim_{k\to\infty} \xi_k = \xi$ 且 $\lim_{k\to\infty} \eta_k = \eta$。于是 $(\xi_k \otimes \eta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 在迹范数下收敛到 $\xi \otimes \eta$，因为该双线性映射

$$\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{S}^1(\mathcal{H}), (\psi, \varphi) \mapsto \psi \otimes \varphi$$

是有界的。根据引理 4.5，算子-算子卷积是连续的；引理 4.4 (i) 随即推出

$$\lim_{k\to\infty} (\xi_k \otimes \eta_k) * A = (\xi \otimes \eta) * A$$

一致地。进一步，这个序列是 $L^1(G)$ 中的柯西序列，因为

$$\begin{aligned}\|(\xi_k \otimes \eta_k) * A - (\xi_l \otimes \eta_l) * A\|_{L^1(G)} &\leq \|(\xi_k \otimes (\eta_k - \eta_l)) * A\|_{L^1(G)} + \|((\xi_k - \xi_l) \otimes \eta_l) * A\|_{L^1G)} \\ &\leq (\|\xi_k\|\|\eta_k - \eta_l\| + \|\xi_k - \xi_l\|\|\eta_l\|)\|R\|_{\mathcal{S}^1(\mathcal{H})}\end{aligned}$$

对所有 $k,\ l \in \mathbb{N}$，由步骤 1 可知。因此 $(\xi \otimes \eta) * A \in L^1(G)$，而所声称的范数不等式和积分恒等式均可由步骤 1 应用于每个 $(\xi_k \otimes \eta_k) * A$ 得出；此外，由 $((\xi_k \otimes \eta_k) * A)_{k\in\mathbb{N}}$ 收敛到 $(\xi \otimes \eta) * A$ 的 L^1- 收敛性也可得出。步骤 3：证明任意 $S \in \mathcal{S}^1(\mathcal{H})$ 的情形。

设 $S = \sum_{n\in\mathbb{N}} s_n(\xi_n \otimes \eta_n)$ 是一个奇异值分解。与引理 4.5 的证明一样，我们有

$$(S * A)(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} s_n((\xi_n \otimes \eta_n) * A)(x) \tag{4.3}$$

对所有 $x \in G$ 均成立。于是，立即得到

$$\|S*A\|_{L^1(G)} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} s_n\|(\xi_n\otimes\eta_n)*A\|_{L^1(G)} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} s_n\|\xi_n\|\|\eta_n\|\|R\|_{\mathcal{S}^1(\mathcal{H})} = \|S\|_{\mathcal{S}^1(\mathcal{H})}\|R\|_{\mathcal{S}^1(\mathcal{H})}$$

由步骤 2 可知。由此，我们可以对 (4.3) 积分，并应用控制收敛定理，得到

$$\begin{aligned}\int_G S * A\, d\mu(x) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} s_n \int_G (\psi_n \otimes \varphi_n) * A\, d\mu(x) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} s_n \langle \psi_n, \varphi_n\rangle \operatorname{tr}(R) \\ &= \operatorname{tr}(S)\operatorname{tr}(R)\end{aligned}$$

根据步骤 2 中的积分恒等式。 □

4.2. 函数-算子卷积

对于函数与算子之间的卷积，我们考虑两种情形。

定义 4.8. 设 $f \in L^1(G)$ 和 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。那么卷积$f * T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 定义为满足下列条件的唯一有界算子

$$\langle (f * T)\psi, \varphi\rangle = \int_G f(x)\langle \alpha_x(T)\psi, \varphi\rangle d\mu(x)$$

对所有 ψ， $\varphi \in \mathcal{H}$。

此定义成立，因为右侧关于 $(\psi$， $\varphi)$ 是双线性的，且有上界 $\|f\|_{L^1(G)}$ $\|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}\|\psi\|\|\varphi\|$。同一上界还表明

$$\|f * T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq \|f\|_{L^1(G)}\|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}.$$

定义 4.9。 设 $g \in L^\infty(G)$ 和 $A \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$。则卷积 $g * A$按定义4.8定义。

在这种情况下，良定义性及以下界

$$\|g * A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq \|g\|_{L^\infty(G)}\|D^{-1}AD^{-1}\|_{\mathcal{S}^1(\mathcal{H})} \tag{4.4}$$

已在 [12, 引理 4.12] 中证明，而证明本质上是定理 4.7的一个应用。以下内容包含在 [12, 命题 3.4、命题 3.5、引理 3.6、命题 3.12]中。

引理 4.10。 *(i)* 若 $f \in L^1(G)$ 且 $S \in \mathcal{S}^1(\mathcal{H})$，则 $f * S \in \mathcal{S}^1(\mathcal{H})$，并且

$$\|f * S\|_{\mathcal{S}^1(\mathcal{H})} \leq \|f\|_{L^1(G)}\|S\|_{\mathcal{S}^1(\mathcal{H})}$$

and

$$\mathrm{tr}(f * S) = \mathrm{tr}(S)\int_G f d\mu.$$

(ii) 如果 $f \in L^1(G)$ 和 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 均为非负，那么 $f * T$ 也是非负的。

(iii) 设 f、 $g \in L^1(G)$、 $S \in \mathcal{S}^1(\mathcal{H})$ 与 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。则

$$(f * S) * T = f * (S * T)$$

and

$$(f * g) * T = f * (g * T).$$

特别地，由 (iii) 给出的结合律展示了这三类卷积之间的相互作用，并表明算子卷积的新定义是恰当的。与 (ii) 和 (iii) 类似的陈述可在定义4.9的框架下加以表述，而无需太多额外工作；不过，我们仅限于主要结果所需的材料。

我们想简要概述本节所讨论的算子卷积与 π的伴随表示之间的联系。

注释 4.11. 我们用 $\mathcal{S}^2(\mathcal{H})$表示 $\mathcal{H}$ 上算子的希尔伯特–施密特类，该空间配备内积 $\langle S,T\rangle_{\mathcal{S}^2(\mathcal{H})}:=\mathrm{tr}(ST^*)$，其中 $S,T\in\mathcal{S}^2(\mathcal{H})$，从而使其成为希尔伯特空间（关于 $\mathcal{S}^2(\mathcal{H})$及其与迹类关系的细节，见 [18]）。 π 的伴随表示 是 G 在 $\mathcal{S}^2(\mathcal{H})$上的酉表示，定义为

$$\mathrm{Ad}_\pi : G\to\mathcal{U}(\mathcal{S}^2(\mathcal{H})),\ \mathrm{Ad}_\pi(x)T:=\pi(x)T\pi(x)^*.$$

Ad_π 有时也写成张量积 $\pi\otimes\bar{\pi}$。

若 $S,T\in\mathcal{S}^2(\mathcal{H})$，则它们的乘积属于迹类，因此我们可以定义卷积 $S*T$，类似于定义 4.3。但此时

$$(S*T)(x)=\mathrm{tr}(S\pi(x)^*T\pi(x))=\mathrm{tr}(\mathrm{Ad}_\pi(x)(S)T)=\langle\mathrm{Ad}_\pi(x)S,T^*\rangle_{\mathcal{S}^2(\mathcal{H})},$$

这是 S 与 T^* 关于伴随表示的矩阵系数。因此，每个算子 $A\in\mathcal{S}^2(\mathcal{H})\cap\mathcal{A}(\mathcal{H})$在经典意义下对于表示$\mathrm{Ad}_\pi$ 都是可容许的，但反之一般不成立。

此外，如果 $f\in L^1(G)$ 且 $S\in\mathcal{S}^2(\mathcal{H})$，我们可以考虑 Ad_π 的积分表示，它在 $\mathcal{B}(\mathcal{H})(\mathcal{S}^2(\mathcal{H}))$ 中表示 $L^1(G)$。根据定义，有

$$\begin{aligned}
\langle\mathrm{Ad}_\pi(f)(S)\psi,\varphi\rangle &= \mathrm{tr}(\mathrm{Ad}_\pi(f)(S)(\psi\otimes\varphi))\\
&= \langle\mathrm{Ad}_\pi(f)S,\varphi\otimes\psi\rangle_{\mathcal{S}^2(\mathcal{H})}\\
&= \int_G f(x)\langle\mathrm{Ad}_\pi(x^{-1})S,\varphi\otimes\psi\rangle_{\mathcal{S}^2(\mathcal{H})}\,d\mu(x)\\
&= \int_G f(x)\,\mathrm{tr}(\alpha_x(S)(\psi\otimes\varphi))d\mu(x)\\
&= \int_G f(x)\langle\alpha_x(S)\psi,\varphi\rangle d\mu(x)\\
&= \langle(f*S)\psi,\varphi\rangle
\end{aligned}$$

对所有 ψ, $\varphi \in H$因此 $f * S = \mathrm{Ad}_\pi(f)S$。对于单模情形，这一点在 [4, 截面 A。4] 中也有所注意。

根据这些观察，本节的一些结果可以通过应用关于酉表示的矩阵系数和积分表示的已知事实来获得；然而，这将我们限制在可积函数和希尔伯特-施密特算子的范围内，而一般来说，这些类别的限制过于严格。

请记住，稍后我们希望将主要结果应用于幂零李群，在这些群中，表示仅在相对于中心的商群上平方可积。我们注意到以下内容。

注 4.12. 设 G 是一个单连通、连通的幂零李群， π 是一个模中心平方可积的不可约表示 Z。我们断言，将 G 替换为 G/Z，即可将本节中提到的每个结论迁移过去。为此，设 χ： $G \to \mathbb{T}$ 是确定 $\pi|_Z$作用的特征，固定一个商映射 s 的光滑右逆，如第2.3节所述，并定义

$$\dot{\alpha} : G/Z \times \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}),\ (\dot{x}, T) \mapsto \dot{\alpha}_{\dot{x}}(T) := \alpha_{s(\dot{x})}(T) = \pi(s(\dot{x}))^* T \pi(s(\dot{x})).$$

由于

$$\alpha_{xz}(T) = \pi(xz)^* T \pi(xz) = \overline{\chi(z)}\chi(z)\pi(x)^* T \pi(x) = \alpha_x(T) \tag{4.5}$$

对所有 $x \in G$， $z \in Z$我们看到 α 在 Z的平移下保持不变，因此$\dot{\alpha}$ 不依赖于截面的具体选择 s。此外， $\dot{\alpha}$ 具备命题 α 中针对 4.2所描述的全部性质：(i) 源于关于 α 的相应事实，以及（2.4）和（4.5）；(ii) 显然成立；(iii) 源于 s的连续性；若将矩阵系数替换为其与 s的复合，则 (iv) 也成立——这正是定理 2.3以及定理 4.7的证明能够保持不变所必需的条件。这样，我们便可以相对于 π 定义算子卷积，使用 $\dot{\alpha}$ 而非 α ，并且所有结果都相应成立。

5. 主要结果

如引言所述，我们现在希望分析函数-算子卷积序列 $(E_k * S)_{k\in\mathbb{N}}$ 的特征值，其中 $E * S$ 是与示性函数 $\chi_E * S$ 的卷积的简写。对于每个 $k \in \mathbb{N}$, E_k 都将是 G 的一个可测子集，且 $0 < \mu(E_k) < \infty$，而 S 是如下定义的密度算子。

定义 5.1。 满足 $\mathrm{tr}(D^{-1}SD^{-1}) = 1$ 的非负算子 $S \in \mathcal{S}^1(\mathcal{H}) \cap \mathcal{A}(\mathcal{H})$ 称为密度算子。

因此，密度算子结合了可容许性（根据定理4.7，它使算子-算子卷积可积），以及属于迹类这一性质（根据引理 4.10 (i)，它使与可积函数的卷积仍为迹类）。值得注意的是，我们的论证在仅假设 $\mathrm{tr}(D^{-1}SD^{-1})$ 为正而非等于1时仍然成立，而这将使特征值累积于 $\mathrm{tr}(D^{-1}SD^{-1})$以下，而非 1以下。不过，为了便于论证，也因为从历史上看，密度算子一直是这样定义的（例如参见 [20]），我们仍采用定义5.1。

下一个引理是定理 5.4其中一个方向的基础。

引理 5.2。 设 $T \in \mathcal{S}^1(\mathcal{H})$ 非负且非零，满足 $\|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq 1$，其特征值为 $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$。再设 $\rho : [0,1] \to \mathbb{R}$ 是一个有界博雷尔函数，满足 $|\rho(t)| \leq t$，对所有 $t \in [0,1]$均成立。那么 $\rho(T)$ 仍为迹类，并且

$$\frac{\mathrm{tr}(\rho(T))}{\mathrm{tr}(T)} \leq 1 - \frac{\#\{n \mid \lambda_n > 1-\delta\}}{\mathrm{tr}(T)}(1 - \delta - \sup_{1-\delta<t\leq 1} \rho(t))$$

对于每个 $\delta > 0$。

证明。 由于 T 是非负的且满足 $\|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq 1$，所有特征值都位于 $[0,1]$, 中，因此可通过函数演算良好定义 $\rho(T)$。根据假设，对于所有 $t \in [0,1]$, $|\rho(t)| \leq t$， ρ 显然保持 $[0,1]$, 中序列的可和性，因此 $\rho(T) \in \mathcal{S}^1(\mathcal{H})$。现在考虑分解

$$\mathrm{tr}(\rho(T)) = \sum_{\lambda_n \leq 1-\delta} \rho(\lambda_n) + \sum_{\lambda_n > 1-\delta} \rho(\lambda_n).$$

对于第一项，我们再次利用关于 ρ 的假设，得到

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda_n \leq 1-\delta} \rho(\lambda_n) &\leq \sum_{\lambda_n \leq 1-\delta} \lambda_n \\
&= \mathrm{tr}(T) - \sum_{\lambda_n > 1-\delta} \lambda_n \\
&\leq \mathrm{tr}(T) - \#\{n \mid \lambda_n > 1-\delta\}(1-\delta),
\end{aligned}$$

而第二项的上界为

$$\sum_{\lambda_n>1-\delta} \rho(\lambda_n) \leq \#\{n \mid \lambda_n > 1-\delta\} \sup_{1-\delta<t\leq 1} \rho(t).$$

相加并除以 $\mathrm{tr}(T) \neq 0$，即可得到结论。 □

在着手证明主要结果之前，我们还需要一个技术步骤，而这部分内容可以在 [12, 引理 5.16、引理 5.18]

引理 5.3。设 S 是一个密度算子。

(i) 函数 $h_S := \mathrm{tr}(S)^{-1}(S * S)$ 定义良好、连续、非负、对称且可积，总积分为1，并且满足$h_S(e) > 0$。

(ii) 对任意满足 $\mu(E) < \infty$ 的 $E \in \mathfrak{B}(G)$，有

$$\mathrm{tr}((E * S)^2) = \mathrm{tr}(S) \int_G h_S(x)\mu(E \cap x^{-1}E)d\mu(x)$$

证明。密度算子 S 是非负、非零且属于迹类，因此$\mathrm{tr}(S) > 0$。因此，h_S 根据引理4.4(ii) 和引理4.5定义良好、非负且连续。它是对称的，因为

$$(S * S)(x^{-1}) = \mathrm{tr}(S\pi(x)S\pi(x)^*) = \mathrm{tr}(S\pi(x)^*S\pi(x))$$

对所有 $x \in G$ 根据迹的交换性，$\int_G h_S d\mu = 1$ 可由定理 4.7推出，而观察到 $h_S(e) = \text{迹}(S^2) > 0$ 即可得出 (i) 部分。

对于第（ii）部分，我们首先取 $y \in G$ 和一个标准正交基（φ_n）$_{n\in\mathbb{N}}$

关于 $\mathcal{H}$，并计算

$$\begin{aligned}(S*(E*S))(y) &= \mathrm{tr}(S\alpha_y(E*S)) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}}\langle S\alpha_y(E*S)\varphi_n,\varphi_n\rangle \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}}\int_E \langle \alpha_x(S)\pi(y)\varphi_n,\pi(y)S\varphi_n\rangle d\mu(x) \\ &= \int_E \sum_{n\in\mathbb{N}}\langle S\alpha_{xy}(S)\varphi_n,\varphi_n\rangle d\mu(x) \\ &= \int_E \mathrm{tr}(S\alpha_{xy}(S))d\mu(x) \\ &= \mathrm{tr}(S)\int_E h_S(xy)d\mu(x),\end{aligned}$$

其中，交换求和与积分的次序是合理的，因为根据控制收敛定理，被积函数有界于$\|S\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}\|S\|_{\mathcal{S}^1(\mathcal{H})}$，且 E 的测度有限。利用引理 4.10 **(iii)** 中的结合律，

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}((E*S)^2) &= ((E*S)*(E*S))(e) \\ &= (\chi_E*(S*(E*S)))(e) \\ &= \mathrm{tr}(S)\left(\chi_E*\left(\int_E h_S(x(\cdot))d\mu(x)\right)\right)(e) \\ &= \mathrm{tr}(S)\int_E\int_E h_S(xy^{-1})d\mu(x)d\mu(y).\end{aligned}$$

内层积分的右不变性以及富比尼定理的应用随后得到

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}((E*S)^2) &= \mathrm{tr}(S)\int_E\int_G \chi_E(xy)h_S(x)d\mu(x)d\mu(y) \\ &= \mathrm{tr}(S)\int_G h_S(x)\int_E \chi_E(xy)d\mu(y)d\mu(x) \\ &= \mathrm{tr}(S)\int_G h_S(x)\mu(E\cap x^{-1}E)d\mu(x).\end{aligned}$$

□

现在，我们终于可以证明算子序列$((E_k * S))_{k\in\mathbb{N}}$的特征值的渐近行为与底层群的基本性质之间的关系。

定理 5.4。设 G 是一个局部紧连通群，具有一个在可分希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的平方可积不可约表示 π。设 S 是 $\mathcal{H}$ 上的密度算子，且 $(E_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{B}(G)$ 是一个集合序列，满足 $0 < \mu(E_k) < \infty$ 对所有 $k \in \mathbb{N}$ 均成立。那么，对每个 $k \in \mathbb{N}$，$E_k * S$ 都是非负迹类算子，其特征值为 $(\lambda_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [0,1]$。此外，以下两个陈述等价。

(a) G 是幺模的，且 $(E_k^{-1})_{k\in\mathbb{N}}$ 是 ***Følner*序列。**

(b) 对每个 $\delta \in (0,1)$，都有

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\#\{n \mid \lambda_n^{(k)} > 1-\delta\}}{\operatorname{tr}(S)\mu(E_k)} = 1.$$

第一个蕴含的证明本质上应用了 Halvdansson 的一个想法 [12, 引理5。19]。

证明。首先，我们记

$$C_\delta^{(k)} := \frac{\#\{n \mid \lambda_n^{(k)} > 1-\delta\}}{\operatorname{tr}(S)\mu(E_k)}$$

对于 $\delta \in (0,\ 1)$ 以及 $k \in \mathbb{N}$。每个单独的 $E_k * S$ 的性质都可由引理4.10 和界（4.4）推出，其形式为

$$\|E_k * S\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \le \|\chi_{E_k}\|_{L^\infty(G)} \|D^{-1}SD^{-1}\|_{\mathcal{S}^1(\mathcal{H})} \le 1$$

在这种情况下，这是因为 S 是一个密度算子。现在假设 **(a)**，固定 $\delta \in$ **(0, 1)** 和 $k \in \mathbb{N}$，并考虑函数

$$\theta : [0,1] \to [\delta-1, \delta),\ t \mapsto \begin{cases} -t, & \text{if } 0 \le t \le 1-\delta \\ 1-t, & \text{if } 1-\delta < t \le 1 \end{cases}.$$

θ 有界、博雷尔可测，并且保持$[0,1]$中序列的可和性，因为任意 ℓ^1-序列的项最终都属于 $[0, 1-\delta]$，其中我们

有 $|\theta(t)| = t$。因此，算子 $\theta(E_k * S)$ 定义良好且属于迹类，并且我们有

$$\operatorname{tr}(\theta(E_k * S)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \theta(\lambda_n^{(k)}) = \#\{n \mid \lambda_n^{(k)} > 1-\delta\} - \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n^{(k)},$$

其中

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n^{(k)} = \operatorname{tr}(E_k * S) = \mu(E_k)\operatorname{tr}(S)$$

根据引理 4.10 (i)。对于 $|\theta|$，我们考虑其多项式上界

$$\sigma : [0,1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto m_\delta\, t(1-t),$$

其中 $m_\delta := \max\{\delta^{-1}, (1-\delta)^{-1}\}$。事实上，对于 $t \in [0, 1-\delta]$,

$$|\theta(t)| = t \le t \cdot \frac{1-t}{\delta} \le \sigma(t),$$

并且对于 $t \in (1-\delta,\ 1]$,

$$|\theta(t)| = 1 - t \le (1-t)\frac{t}{1-\delta} \le \sigma(t).$$

因此，$|\theta| \le \sigma$，且我们有

$$\begin{aligned}
&|\#\{n \mid \lambda_n^{(k)} > 1-\delta\} - \mu(E_k)\operatorname{tr}(S)| \\
=\ &|\operatorname{tr}(\theta(E_k * S))| \\
\le\ &\operatorname{tr}(|\theta|(E_k * S)) \\
\le\ &\operatorname{tr}(\sigma(E_k * S)) \\
=\ &m_\delta \left(\operatorname{tr}(E_k * S) - \operatorname{tr}((E_k * S)^2)\right) \\
=\ &m_\delta \left(\mu(E_k)\operatorname{tr}(S) - \operatorname{tr}(S)\int_G h_S(x)\mu(E_k \cap x^{-1}E_k)d\mu(x)\right),
\end{aligned}$$

w这里我们使用了引理5.3 （ii）在最后一步。除以 $\operatorname{tr}(S)\mu(E_k)$ 得到

$$|C_\delta^{(k)} - 1| \le m_\delta \left(1 - \int_G h_S(x)\frac{\mu(E_k \cap x^{-1}E_k)}{\mu(E_k)}d\mu(x)\right). \tag{5.1}$$

因为 G 是幺模的，哈尔测度在反演下不变，因此

$$\frac{\mu(E_k \cap x^{-1}E_k)}{\mu(E_k)} = \frac{\mu(E_k^{-1} \cap E_k^{-1}x)}{\mu(E_k^{-1})},$$

且右侧被以下值控制：1并且逐点收敛到1 因为$(E_k^{-1})_{k\in\mathbb{N}}$ 是一个 Følner序列。由于 h_S 是可积的，且总积分为1根据引理 5.3 (i)，由控制收敛定理可得

$$\lim_{k\to\infty} \int_G h_S(x) \frac{\mu(E_k \cap x^{-1}E_k)}{\mu(E_k)} d\mu(x) = \int_G h_S(s) d\mu(x) = 1.$$

结合（5.1），我们得到（b）。

现在，我们假设（b），并对每个算子 $E_k * S$ 及函数 ρ 应用引理 5.2：$[0,1] \to \mathbb{R}, t \mapsto t(1-t)$。对于每个 $\delta \in (0, 1/2)$，我们有 $\sup_{1-\delta<t\leq 1} \rho(t) = (1-\delta)\delta$，因此，考虑到 $\mathrm{tr}(E_k * S) = \mu(E_k)\,\mathrm{tr}(S)$ 且 $\int_G h_S d\mu = 1$，我们得到

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_G h_S(x) \left(1 - \frac{\mu(E_k \cap x^{-1}E_k)}{\mu(E_k)}\right) d\mu(x) \\
&= 1 - \mu(E_k)^{-1} \int_G h_S(x) \mu(E_k \cap x^{-1}E_k) d\mu(x) \\
&= \frac{\mathrm{tr}(E_k * S) - \mathrm{tr}((E_k * S)^2)}{\mathrm{tr}(E_k * S)} \\
&= \frac{\mathrm{tr}(\rho(E_k * S))}{\mathrm{tr}(E_k * S)} \\
&\leq 1 - C_\delta^{(k)}(1 - \delta - (1-\delta)\delta) \\
&= 1 - (1-\delta)^2 C_\delta^{(k)},
\end{aligned}$$

其中第三行用到了引理 5.3 (ii)，第五行用到了引理5.2。根据假设，最右侧收敛到 $2\delta - \delta^2$ 当 $k \to \infty$时，并且δ 可以任意小。因此，若记

$$\tilde{\beta}_{E_k} : G \to [0,1],\ x \mapsto 1 - \frac{\mu(E_k \cap x^{-1}E_k)}{\mu(E_k)}$$

对每个 $k \in \mathbb{N}$，于是

$$\lim_{k\to\infty} \int_G h_S \tilde{\beta}_{E_k} d\mu(x) = 0. \tag{5.2}$$

˜由于被积函数非负，我们可以找到一个子序列 $(\beta_{E_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ ，使得˜($h_S\beta_{E_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ 几乎处处逐点收敛到 0。根据引理 5.3 (i)，由于 h_S 连续且 h_S $(e) > 0$ ，存在 e 在 G 中的一个对称邻域 V，使得 h_S 在 V 上严格为正。因此，$(\beta_{E_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ 在 V 上几乎处处逐点收敛到 0。此外，对所有 $x \in G$ 和 $j \in \mathbb{N}$，我们有

$$1 - \Delta_G(x) = 1 - \frac{\mu(x^{-1}E_{k_j})}{\mu(E_{k_j})} \leq \tilde{\beta}_{E_{k_j}}(x).$$

令 $j \to \infty$ ，则在 V 上几乎处处有 $\Delta_G(x) \geq 1$ ；由 Δ_G 的连续性可知，该等式在 V 上处处成立。但由于 V 是对称的，因此对每个 $x \in V$，都有 $\Delta_G($ $x) \geq 1$ ，且 $\Delta_G(x)^{-1} = \Delta_G(x^{-1}) \geq 1$ ，所以 $(\Delta_G)|_V \equiv 1$。 Δ_G 是同态，而 V 生成连通群 G，因此 $\Delta_G \equiv 1$，且 G 是幺模的。由此我们知道

$$\tilde{\beta}_{E_k}(x) = \beta_{E_k^{-1}}(x^{-1})$$

对所有 $x \in G$，因此我们将逆元代入（5.2）并利用h_S 的对称性，得到

$$\lim_{k\to\infty} \int_G h_S\beta_{E_k^{-1}} d\mu = 0.$$

现在选取 $\varepsilon > 0$ 和 e 的一个邻域 W，使得 $h_S|_W \geq \varepsilon$，因此

$$\lim_{k\to\infty} \int_W \beta_{E_k^{-1}} d\mu \leq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\varepsilon} \int_W h_S\beta_{E_k^{-1}} d\mu = 0. \tag{5.3}$$

此外，令 K 为 e 的一个紧对称邻域，使得 $K^2 \subseteq W$。重用命题3.2证明中的不等式（3.1），可得

$$\begin{aligned}\beta_{E_k^{-1}}(x) &\leq \mu(K)^{-1} \left(\int_K \beta_{E_k^{-1}} d\mu + \left(\max_{y\in KK^{-1}} \Delta_G(y) \right) \int_{KK^{-1}} \beta_{E_k^{-1}} d\mu \right) \\ &\leq \mu(K)^{-1} \left(1 + \max_{y\in KK^{-1}} \Delta_G(y) \right) \int_W \beta_{E_k^{-1}} d\mu\end{aligned}$$

对所有 $x \in K$，因为 $K \subseteq KK^{-1} = K^2 \subseteq W$。因此，$(E_k^{-1})_{k\in\mathbb{N}}$ 在 K 上由（5.3）可知是逐点 Følner，而命题 3.2 进而断言，$(E_k^{-1})_{k\in\mathbb{N}}$ 已经是一个 Følner序列。

□

特别地，对于一个连通群 G ，若其具有平方可积的不可约表示，则只有当 G 是幺模且可和时，才可能出现 (b) 中描述的渐近特征值行为。这意味着以下关于 [12, 定理 5。14] 仿射群的断言不成立。

注 5.5。 为了得到等价刻画，我们假设 G是连通的。然而，即使情况并非如此，蕴含关系 (a) $\Longrightarrow$(b) 仍然成立。此外，如果 G 仅仅是几乎连通的（即 G/G_0 是紧的，其中 G_0 是单位连通分支），那么 (b) 仍然蕴含幺模性，但 $(E_k^{-1})_{k\in\mathbb{N}}$ 只能根据注 G_0 3.5保证是 上的 Følner序列。

注 5.6。 本节同样适用于以下情形： G 是一个单连通、连通的幂零李群，其表示仅在模中心意义下平方可积 Z。定义 5.1 中引入的密度算子概念 5.1 甚至变得明显更加简单，因为G 是幺模的；密度算子恰好是满足 S 的非负迹类算子 $\mathrm{tr}(S) = d^2$，其中 d 是定理 2.3中的常数。引理 5.2 完全没有提及该群，而引理 5.3 仅使用了算子卷积以及 α 的性质，而我们已经在第 4 节证明了这些性质可以迁移。最后请注意，定理 5.4 的证明仅依赖于算子卷积的性质，以及通过引理 5.3所隐含使用的表示，因此可以立即将定理 5.4 应用于 G/Z 上在注 4.12中讨论的修正算子卷积。

6. 幂零李群的应用

本节将转向一种情形，在这种情形下，定理5.4 的第一个推论给出了肯定的结果。从这里开始，设 G 是一个单连通、连通的幂零李群，其中心为 Z ，且 π 是 G 在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的一个不可约表示，满足 π 模 Z平方可积。设 μ表示商群 G/Z上的哈尔测度；该商群同样是单连通、连通的幂零李群。

6.1. 词度量球的应用

商群 G/Z 是幺模的，并且根据引理 3.6，我们知道 G/Z中的 Følner序列，因此定理 5.4适用。考虑到备注5.6 ，且 $d > 0$ 是定理 2.3 中的常数，我们明确陈述幂零李群的结果。

定理 6.1。 设 S 是 $\mathcal{H}$ 上的密度算子， V 是 G/Z中单位元的一个紧对称邻域。若$(\lambda_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ 表示算子 $V^k * S$的特征值，则

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\#\{n \mid \lambda_n^{(k)} > 1-\delta\}}{d^2\dot{\mu}(V^k)} = 1$$

对每个 $\delta \in (0,1)$。

注意，这里无需对 Følner序列取逆，因为 V假设为对称。

6.2. 膨胀的应用

与上一小节类似，我们讨论商群 G/Z 额外满足齐性的情形，如第 2.4 节所述。令 $\dot{(\Gamma_r)_{r>0}}$ 表示 G/Z 上的膨胀，并令 Q 表示齐性维数。于是，我们可以将定理 5.4 应用于引理 3.7 中构造的 Følner序列，从而得到以下结论。

定理 6.2。 设 S 是 $\mathcal{H}$ 上的密度算子， $E \subseteq G/Z$ 满足 $0 < \dot{\mu}(E) < \infty$，且$(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是正实数序列，并且 $\lim_{k\to\infty} r_k \to\infty$。若$(\lambda_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ 表示算子 $\dot{\Gamma}_{r_k}(E) * S$的特征值，则

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\#\{n \mid \lambda_n^{(k)} > 1-\delta\}}{d^2\dot{\mu}(E)r_k^{\dot{Q}}} = 1$$

对每个 $\delta \in (0,\ 1)$。

由于$(\dot{\Gamma}_{r_k}(E)^{-1})_{k\in\mathbb{N}} = (\dot{\Gamma}_{r_k}(E^{-1}))_{k\in\mathbb{N}}$根据引理 3.7也是一个 Følner序列，因此也不必对 Følner序列求逆。离散极限也可以替换为连续的$\lim_{r\to\infty}$，因为我们考虑的是趋于 ∞的任意实数序列。

此时，我们希望将海森堡群 $\mathbb{H}^1$作为一个特例来考察。它是维数最低的非阿贝尔单连通、连通幂零李群。我们在此将其定义为流形 $\mathbb{R}^3$ ，其群运算为

$$(x,y,z)(x',y',z') := (x+x', y+y', z+z'+xy').$$

中心 Z 由所有形如 (0，0， z) 的元素构成的子群给出， $z \in \mathbb{R}$，因此 $\mathbb{H}^1/Z \cong \mathbb{R}^2$ 是二维阿贝尔李群。在

特别地，$\mathbb{H}^1/Z$ 上的哈尔测度就是二维勒贝格测度，记为 λ_2，膨胀定义为 $\Gamma_r(x,\ y) = (rx,\ ry)$，其中 $(x,\ y) \in G/Z$ 且 $r > 0$。一个合适的表示是希尔伯特空间 $L^2(\mathbb{R})$ 上的 $\mathbb{H}^1$ 的薛定谔表示 π，其定义为

$$\pi(x,y,z)\psi(u) := e^{2\pi i(z+yu)}\psi(u+x)$$

对于 $\psi \in L^2(\mathbb{R})$、$(x,y,z) \in \mathbb{H}^1$ 和 $u \in \mathbb{R}$。可以证明它在模 Z 的意义下是不可约且平方可积的，其中 $d = 1$。因此，定理 6.2 可表述如下：设 $S \in \mathcal{S}^1(L^2(\mathbb{R}))$，且 $\operatorname{tr}(S) = 1$ 并且 $E \subseteq \mathbb{R}^2$ with $0 < \lambda_2(E) < \infty$。若 $(\lambda_n^{(r)})_{n\in\mathbb{N}}$ 表示算子 $rE * S$ 的特征值序列，则

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\#\{n \mid \lambda_n^{(r)} > 1-\delta\}}{\lambda_2(E) r^2} = 1.$$

这一特定事实也在 [7, 推论 2.2] 中得到证明，采用的是一种不同且更一般的方法；不过，该结论仅在 $S = \varphi \otimes \varphi$ for $\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$ 的情形下成立。[14, 定理 4.4] 将其推广到了任意密度算子，采用的方法与我们类似，但限于 $\mathbb{H}^1$ 且使用薛定谔表示的情形。

数据可用性

本文所述研究未使用任何数据。

致谢

我谨向 Hartmut Führ 致谢，感谢他在本文及此前的硕士论文撰写过程中给予的悉心指导与监督，并提出了宝贵建议。

参考文献

[1]Berge, E., Berge, S.M., Luef, F., Skrettingland, E., 2022. 仿射量子调和分析。《函数分析杂志》282，109327。网址：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022123621004092, doi: https://doi.org/10.1016/j.jfa.2021.109327。

[2] Breuillard, E., 2014. 多项式增长局部紧群的几何与大球的形状。《群、几何与动力学》8，669–732。网址：https://ems.press/journals/ggd/articles/12769, doi:10.4171/GGD/244.[3] Corwin, L., Greenleaf, F., 1990.《幂零李群的表示及其应用：第1卷，第1部分，基础理论与示例》。剑桥高等数学研究丛书，剑桥大学出版社。网址：https://books.google.de/books?id=H2e1tVW8WrMC.[4]Dawson, M., Dewage, V., Mitkovski, M., Ólafsson, G., 2025. 单位球无权Bergman空间上的量子调和分析。《积分方程与算子理论》97，23。网址：https://link.springer.com/article/10.1007/ s00020-025-02803-z, doi:10.1007/s00020-025-02803-z.[5]Duflo, M., Moore, C.C., 1976. 关于非幺模局部紧群的正则表示。《函数分析杂志》21，209–243。网址：https://api.semanticscholar.org/CorpusID: 120350914, doi:10.1016/0022-1236(76)90079-3.[6]Esmaeelzadeh, F., 2023. 局部紧阿贝尔群上与Stockwell变换相关的局部化算子。《伪微分算子与应用杂志》14，67。网址：https://doi.org/10.1007/s11868-023-00560-4, doi:10.1007/s11868-023-00560-4.[7] Feichtinger, H.G., Nowak, K., 2001. Gabor–Toeplitz局部化算子的Szegő型定理。《密歇根数学杂志》49，13–21。网址：https://doi.org/10.1307/mmj/1008719032, doi:10.1307/ mmj/1008719032.[8] Folland, G., 2016.《抽象调和分析教程》。数学教材丛书，CRC出版社。网址：https://books.google.de/books? id=z-GYCgAAQBAJ.[9] Folland, G.B., Stein, E.M., 1982. 齐性群背景，载于：《齐性群上的Hardy空间》（MN-28），第28卷。普林斯顿大学出版社，第1–61页。网址：http://www.jstor.org/stable/ j.ctv17db3q0.5, doi:10.1515/9780691222455。

[10] Følner, E., 1955年。《关于具有完全 Banach 均值的群》。Mathematica Scandinavica 3, 243–254。网址：http://eudml.org/doc/165592, doi:https://doi.org/10.7146/math.scand.a-10442。[11] Guivarc'h, Y., 1973年。《多项式增长与调和函数的周期》。法国数学会通报 101, 333–379。网址：http://eudml.org/doc/87214。[12]Halvdansson, S., 2023年。《局部紧群上的量子调和分析》。《泛函分析杂志》285, 110096。网址：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022123623002537，doi:https://doi.org/10.1016/j.jfa.2023. 110096。[13] Li, J., Wong, M. W., 2014年。《脊波变换的局部化算子》。数学建模与自然现象 9, 194–203。网址：https://doi.org/10.1051/mmnp/20149513，doi:10.1051/mmnp/20149513。[14] Luef, F., Skrettingland, E., 2020年。《累积 Cohen 类分布与混合态局部化算子》。Constructive Approximation 52, 31–64。网址：https://doi.org/10.1007/ s00365-019-09465-2, doi:10.1007/s00365-019-09465-2。[15] Mari, F.D., Feichtinger, H.G., Nowak, K., 2002年。《时频局部化算子的统一特征值估计》。伦敦数学会杂志 65, 720–732。网址：https://academic.oup.com/jlms/article/65/3/720/801005，doi:10.1112/S0024610702003101。[16] Moore, C.C., Wolf, J.A., 1973年。《幂零群的平方可积表示》。美国数学会汇刊 185, 445–462。网址：http://www.jstor.org/stable/1996450, doi:10. 2307/1996450。[17] Runde, V., 2020年。《可和局部紧群》，载于：《可和 Banach 代数：概览》。施普林格纽约。施普林格数学专著，第21–55页。doi:10.1007/978-1-0716-0351-2_1.[18]Schatten, R., 2013年。《完全连续算子的范数理想》。数学及其边界领域成果。第1辑，Springer Berlin Heidelberg。网址：https://books.google.de/books?id=sq-SBwAAQBAJ。

[19] Segal, I.E., 1953年。抽象积分的非交换扩张。数学年刊 57, 401–457。网址：http://www.jstor.org/stable/1969729，doi：10.2307/1969729。[20]Stulpe, W., 2009年。密度算子，载于：《量子物理学纲要》。Springer Berlin Heidelberg，柏林，海德堡，第166–169页。网址：https://doi.org/10.1007/978-3-540-70626-7_52，doi：10.1007/978-3-540-70626-7_52。[21] Werner, R., 1984年。相空间上的量子调和分析。数学物理学杂志 25, 1404–1411。网址：https://doi.org/10.1063/1.526310，doi：10.1063/1.526310。[22] Wong, M.W., 2002年。小波变换与局部化算子。第136卷，收录于算子理论：进展与应用。Birkhäuser Basel。doi：10.1007/978-3-0348-8217-0。