arXiv:2603.08149v1 [math.ST] 9 Mar 2026

The W脚规系数：一种基于Copula的反单调性度量

Enrique de Amo[1],David Garc´ıa-Fernandez[2], 和 Manuel ´Ubeda-Flores[1,2]

[1] 阿尔梅里亚大学数学系，西班牙阿尔梅里亚 04120 edeamo@ual.es, mubeda@ual.es,[2] Copula理论与应用研究组，阿尔梅里亚大学，西班牙阿尔梅里亚 04120 dgf992@inlumine.ual.es

摘要。 我们提出W脚规系数 Φ_C，这是一种基于Copula的负关联系数，定义为与反单调Copula W的 L^1距离。我们证明，Gini伽马系数可分解为 $\gamma_C = \frac{2}{3}(\varphi_C + \Phi_C)$，从而将其与Spearman脚规 φ_C联系起来。我们提出一种基于秩的估计量，并通过函数型德尔塔方法证明其强相合性和渐近正态性。蒙特卡洛模拟证实了该估计量在有限样本下的有效性，以及其对负依赖结构的敏感性。

1 引言

基于Copula的方法为建模和度量依赖关系提供了一个自然框架，且不受边缘分布的影响。Spearman 的 ρ、Kendall 的 τ 和 Spearman脚规等经典秩度量，都可以表示为底层连接函数 $[3,8]$ 的泛函。这些系数主要用于量化单调递增关联，提供全局度量，且仅取决于底层连接函数。Kendall 的 τ 和 Spearman 的 ρ 虽然已经能够检测负关联，但它们具有对称性，即正依赖和负依赖采用同一尺度处理。相比之下，Spearman脚规可作几何解释：它是到对角线的 L^1 距离，强调与完全正依赖 $[7]$ 的偏离。这促使我们构造一个互补系数，用以度量与完全负依赖的偏离，也就是到反对角线 $u+v=1$的距离。本文提出这样一种度量，称为 W脚规系数，记作 Φ_C。该系数通过 $C(U,\ 1-U)$ 的分布来定义，其中随机变量对 $(U,\ V)$ 的连接函数为 C。这里，W 表示反单调 copula，它刻画了完全负依赖。

本文其余部分安排如下。第2节回顾连接函数和一致性度量的必要背景。第3节介绍 Φ_C 并确立其主要性质。第4节构建其样本版本并探讨其渐近理论。第5节介绍模拟研究。最后，第6节为结论。

2 预备知识

连接函数 C 是定义在 $[0,1]$上、具有均匀边缘分布的二元分布函数。根据 Sklar 定理 [13],，对于任意具有联合分布函数 H 和边缘分布函数 F 及 G的二元随机向量（X，Y），存在一个连接函数 C（其在 Range $F \times$ Range G 上唯一确定），使得

$$H(x,y) = C(F(x), G(y)), \quad \text{for all } (x,y) \in [-\infty, +\infty]^2;$$

此外，如果边缘分布是连续的，那么连接函数是唯一的。该连接函数完全刻画了 X 与 Y之间的依赖结构，且不受边缘效应 $[3,8]$ 的影响。

在这一框架中，三个连接函数可作为基本基准。独立连接函数定义为 $\Pi(u, v) = uv$ 对所有 $(u,v) \in [0,1]^2$ 均成立；而 Fr´echet-Hoeffding 界为 $W(u,v) = \max\{u + v - 1, 0\}$ 和$M(u,v) = \min\{u,v\}$，对所有 $(u,v) \in [0,1]^2$ 均成立，分别表示完全负依赖和完全正依赖。众所周知，每个 Copula C 都受这两个极端界限约束，满足 $W(u,v) \le C(u,v) \le M(u,v)$，对所有 $(u,v) \in [0,1]^2$ 均成立。

我们回顾一下，一致性度量是一个泛函（定义在 Copula 集合上），满足一组公理 [9]。一个经典例子是 Gini 的 γ，用连接函数 C 表示为

$$\gamma_C = 4 \int_0^1 [C(u,u) + C(u,1-u)] \, \mathrm{d}u - 2,$$

满足 $\gamma_W = -1$、$\gamma_\Pi = 0$ 和 $\gamma_M = 1$（见 [7]）。

Spearman脚规系数——最初由心理学家查尔斯·斯皮尔曼于 [14], 引入，并于 [2] 正式将其用作无序度量——用连接函数定义为

$$\varphi_C = 1 - 3 \int_0^1 \int_0^1 |u - v| \, \mathrm{d}C(u,v), \tag{1}$$

或者，等价地，

$$\varphi_C = 6 \int_0^1 C(u,u) \, \mathrm{d}u - 2$$

（见 $[7,8]$）。Spearman脚规仅取决于连接函数到上界 M 的 L_1 距离，并且是一种弱一致性度量（见 [6]）。

3 The W-脚规系数

受 L^1 表示的 Spearman 脚尺启发——回顾表达式 (1)——，我们引入一个类似的量，用于衡量偏离完全

负依赖的程度。我们的构造记为 Φ_C，并非量化到主对角线 $u = v$ 的 L^1 距离的仿射变换，而是衡量与反对角线 $u + v = 1$ 的偏离程度，即，

$$\Phi_C = a \int_0^1 \int_0^1 |1 - u - v| \, \mathrm{d}C(u, v) + b,$$

其中， a 和 b 是两个实常数。我们对系数进行归一化，使得$\Phi_W = -1$ 且 $\Phi_M = 1/2$——这与对称情形下的值 $\varphi_W = -1/2$和 $\varphi_M = 1$形成对比——。在W下，我们几乎必然有 $V = 1 - U$。因此， $|1 - U - V| = |1 - U - (1 - U)| = 0$，从而

$$\int_0^1 \int_0^1 |1 - u - v| \, \mathrm{d}W(u, v) = 0.$$

因此 $\Phi_W = b$。在 M下，我们几乎必然有 $V = U$，所以 $|1 - U - V| = |1 - 2U|$。因此

$$\int_0^1 \int_0^1 |1 - u - v| \, \mathrm{d}M(u, v) = \int_0^1 |1 - 2u| \, \mathrm{d}u.$$

Now,

$$\int_0^1 |1 - 2u| \, \mathrm{d}u = \int_0^{1/2} (1 - 2u) \, \mathrm{d}u + \int_{1/2}^1 (2u - 1) \, \mathrm{d}u = \frac{1}{2}.$$

由此得 $\Phi_M = \frac{a}{2} + b$。这意味着 $a = 3$ 和 $b = -1$，并得到如下 L^1-表示：

$$\Phi_C = 3 \int_0^1 \int_0^1 |1 - u - v| \, \mathrm{d}C(u, v) - 1. \tag{2}$$

我们给出另一种表示。由于对所有(u, v)，$W(u, v) = (u + v - 1)^+$ 成立——其中 $x^+ = \max(x, 0)$——，因此

$$\int_0^1 \int_0^1 (u + v - 1)^+ \, \mathrm{d}C(u, v) = \int_0^1 \int_0^1 W(u, v) \, \mathrm{d}C(u, v). \tag{3}$$

对于任意两个 Copula C_1 和 C_2，有

$$\int_0^1 \int_0^1 C_1(u, v) \, \mathrm{d}C_2(u, v) = \int_0^1 \int_0^1 C_2(u, v) \, \mathrm{d}C_1(u, v) \tag{4}$$

（见 [8]）。将（4）应用于 $C_1 = W$ 和 $C_2 = C$：

$$\int_0^1 \int_0^1 W(u, v) \, \mathrm{d}C(u, v) = \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) \, \mathrm{d}W(u, v).$$

测度 $\mathrm{d}W$ 支撑于反对角线 $\{(u, 1 - u) : u \in [0, 1]\}$ 上，因为$W(u, v) = \max\{u + v - 1, 0\}$ 在反单调分布下将其全部概率质量集中于 $\{U + V = 1\}$。因此：

$$\int_0^1 \int_0^1 C(u, v) \, \mathrm{d}W(u, v) = \int_0^1 C(u, 1 - u) \, \mathrm{d}u.$$

结合（3）：

$$\int_0^1\int_0^1 (u+v-1)^+ \,\mathrm{d}C(u,v) = \int_0^1 C(u,1-u)\,\mathrm{d}u.$$

最后，由于（U，V）具有均匀边缘分布，$\mathbf{E}_C[U+V]=1$，因此$\mathbf{E}_C[1-U-V]=0$。对于任意可积的 Z，若$\mathbf{E}[Z]=0$，则有$\mathbf{E}[|Z|]=2\mathbf{E}[Z^+]$，从而

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1 |1-u-v|\,\mathrm{d}C(u,v) &= 2\int_0^1\int_0^1 (1-u-v)^+\,\mathrm{d}C(u,v)\\ &= 2\int_0^1\int_0^1 (u+v-1)^+\,\mathrm{d}C(u,v)\\ &= 2\int_0^1 C(u,1-u)\,\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

其中，第二个等式在$\mathbf{E}[1-U-V]=0$时利用了（$1-u-v$）$^+$ = （$u+v-1$）$^+$，即$\mathbf{E}$[（$1-U-V$）$^+$] = $\mathbf{E}$[（$u+v-1$）$^+$]。代入式（2）得

$$\Phi_C = 6\int_0^1 C(u,1-u)\,\mathrm{d}u - 1. \tag{5}$$

下面的例子说明了如何计算高斯Copula族的 Φ_C，并给出了关于参数 θ的闭式表达式。下文中，我们分别用 F 表示标准正态分布函数，用F_θ 表示相关系数为 θ的二元标准正态分布函数，以避免与系数 Φ_C的符号冲突。

例 *1.* 设 $C_\theta(u,\ v) = F_\theta(F^{-1}(u),\ F^{-1}(v))$ 为参数为 $\theta\in[-1,1]$的高斯 copula。将 (5) 中的 $z = F^{-1}(u)$ 代入，得到

$$\int_0^1 C_\theta(u,1-u)\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} F_\theta(z,-z)\,f(z)\,\mathrm{d}z,$$

其中 f 是标准正态密度。引入一个独立的 $Z_3\sim\mathrm{N}(0,\ 1)$，并令 $W_1 = Z_1 - Z_3$，$W_2 = Z_2 + Z_3$，其中 $(Z_1,\ Z_2)\ \sim F_\theta$，可得一个均值为零、方差为 2 的二元正态向量 $(W_1,\ W_2)$，且 $\mathrm{Cov}(W_1,\ W_2)\ =\theta-1$，因此 $\mathrm{Corr}(W_1,\ W_2)\ =(\theta-1)/2$。于是，二元正态分布的象限概率公式 [12] 给出

$$\int_0^1 C_\theta(u,1-u)\,\mathrm{d}u = \mathbb{P}(W_1\le 0,\,W_2\le 0) = \frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}\arcsin\!\left(\frac{\theta-1}{2}\right),$$

因此

$$\Phi_{C_\theta} = \frac{1}{2}+\frac{3}{\pi}\arcsin\!\left(\frac{\theta-1}{2}\right). \tag{6}$$

特别是，$\Phi_{C_0}\ =\ 0$与 $\Phi_\Pi\ =\ 0$一致，而极限值$\rho\to-1$ 和 $\rho\to 1$ 分别还原为 $\Phi_W=-1$ 和 $\Phi_M=1/2$。

很容易证明 Φ_C 具有以下性质。

1. Φ_C 不是一致性度量（例如， $\Phi_M = 1/2 \neq 1$）。2. $\Phi_\Pi = 0$。3. $\Phi_C = -1$ 当且仅当 $C = W$ 4. 若 C_1 与 C_2 是两个Copula，使得对所有$(u, v) \in [0,1]^2$, 均有 $C_1(u, v) \leq C_2(u, v)$，则 $\Phi_{C_1} \leq \Phi_{C_2}$。5. 对任意Copula C_1、C_2 以及任意 $\alpha \in [0,1]$， $\Phi_{\alpha C_1 + (1-\alpha)C_2} = \alpha\Phi_{C_1} + (1-\alpha)\Phi_{C_2}$。6. $\Phi_{C^T} = \Phi_C$，其中对所有$(u, v) \in [0,1]^2$， $C^T(u, v) = C(v, u)$。7. $\Phi_{\widehat{C}} = \Phi_C$，其中 C 是连接函数 C的生存Copula函数，其对所有$(u, v) \in [0,1]^2$由$\widehat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1-u, 1-v)$给出。8. $\Phi_{\tilde{C}} = -\varphi_C$，其中对所有$(u, v) \in [0,1]^2$， $\tilde{C}(u, v) = u - C(u, 1-v)$。9. 对任意连接函数 C， $\gamma_C = \frac{2}{3}(\varphi_C + \Phi_C)$。

–

我们注意到， $\Phi_C = 1/2$ 并不意味着 $C = M$，如下例所示：

例 *2.* 考虑如下定义的连接函数 C

$$C(u, v) = \begin{cases} \max\left\{\frac{1}{2}, u + v - 1\right\}, & (u, v) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]^2, \\ \min\{u, v\}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

C 的质量均匀分布在两条线段上：一条连接点 (0，0) 与 (1/2，1/2)，另一条连接点 (1/2，1) 与 (1，1/2)。很容易证明 $\Phi_C = 1/2$。

4 样本版本

本节介绍 Φ_C 的样本版本，并建立其渐近性质。设 (X_i, Y_i)，$i = 1, \ldots, n$ 是来自具有连接函数 C的连续二元分布的独立同分布样本，并令 $R_i = \text{rank}(X_i)$ 和 $S_i = \text{rank}(Y_i)$ 分别表示样本中第 i 个观测值的秩。我们定义伪观测值

$$\hat{U}_i = \frac{R_i}{n+1}, \qquad \hat{V}_i = \frac{S_i}{n+1},$$

其取值位于 (0,1) 内，并作为不可观测 Copula自变量 (U_i, V_i) 的基于秩的估计值。分母采用 $n+1$ 而非 n，这是 Copula文献 [5], 中的标准选择，因为它可以避免 0 和 1 处的边界问题，并使伪观测值的边际分布在 $\{1/(n+1), \ldots, n/(n+1)\}$ 上均匀；不过，我们注意到，本节的渐近结果不受这一选择影响。于是， Φ_C 的经验估计量为

$$\widehat{\Phi}_n = \frac{6}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \hat{U}_i - \hat{V}_i\right)^+ - 1,$$

将伪观测值的定义代入后，可得其纯粹基于秩的表示形式

$$\widehat{\Phi}_n = \frac{6}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} (n+1-R_i-S_i)^+ - 1.$$

该表达式的计算十分直接，只需计算秩，并清楚地表明， Φ_n 仅通过秩对（R_i, S_i）依赖于数据，因此在对边缘分布进行严格递增变换后保持不变。

下面的结果确立了经验Hfootrule估计量的强相合性。

定理1。 设(X_i, Y_i)， $i = 1, \ldots, n$为来自具有连接函数 C的连续二元分布的独立同分布样本。则 $\widehat{\Phi}_n$ 几乎处处$\longrightarrow \Phi_C$ 当 $n \to \infty$时成立。

证明。 令 C_n 表示基于伪观测值（U_i, V_i）的经验Copula [1]，其定义为

$$C_n(u,v) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}(\hat{U}_i \le u,\, \hat{V}_i \le v)$$

其中 $\mathbf{1}_S$ 表示集合 S的特征函数。由于

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (1-\hat{U}_i-\hat{V}_i)^+ = \int_0^1 \int_0^1 (1-u-v)^+ \, \mathrm{d}C_n(u,v),$$

可以验证

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (1-\hat{U}_i-\hat{V}_i)^+ = \int_0^1 C_n(u, 1-u) \, \mathrm{d}u + O(n^{-1}), \tag{7}$$

其中， $O(n^{-1})$ 项考虑了伪观测值按 $n/(n+1)$ 缩放所导致的离散化。根据经验Copula的格利文科-坎泰利定理[17]（另见 [1, 11]），$\sup_{(u,v)\in[0,1]^2} |C_n(u,\ v) - C(u,\ v)| \to 0$几乎必然成立。由于映射

$$C \mapsto \int_0^1 C(u, 1-u) \, \mathrm{d}u$$

在一致范数下连续，我们得出

$$\int_0^1 C_n(u,1-u)\,\mathrm{d}u \to \int_0^1 C(u,1-u)\,\mathrm{d}u \quad \text{a.s.},$$

因此 $\widehat{\Phi}_n$ 几乎处处$\longrightarrow \Phi_C$。

在建立相合性之后，我们将重点转向估计量的渐近分布。在连接函数满足温和的正则性条件下，以下定理表明，Φ_n 是渐近正态的——我们回顾一下，经验 *copula* 过程 定义为 $\mathbb{G}_n = \sqrt{n}(C_n - C)$，其中 C_n 表示经验Copula，C 表示真实连接函数。

定理 2。 设(X_i, Y_i)、$i = 1$、……、n为来自具有连接函数 C的连续二元分布的独立同分布样本，其中一阶偏导数 $C_1 = \partial C/\partial u$ 和 $\dot{C}_2 = \partial C/\partial v$ 存在，并且在$(0, 1)^2$上连续。则

$$\sqrt{n}(\hat{\Phi}_n - \Phi_C) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_\Phi^2),$$

其中 $\sigma_\Phi^2 = 36$方差$_C(\, j_C(U, V))$，其中$(U, V) \sim C$以及

$$j_C(u, v) = (1 - u - v)^+ - \int_u^1 \dot{C}_1(s, 1 - s)\, \mathrm{d}s - \int_0^{1-v} \dot{C}_2(s, 1 - s)\, \mathrm{d}s, \qquad (8)$$

对所有$(u, v) \in [0, 1]^2$均成立。

证明。 定义泛函 $T : \mathsf{C} \to \mathbb{R}$ 为

$$T(C) = 6 \int_0^1 C(u, 1 - u)\, \mathrm{d}u - 1,$$

从而 $\widehat{\Phi}_n = T(C_n) + O(n^{-1})$，其中 C_n表示基于伪观测值（U_i, V_i）的经验Copula。

映射 T关于一致范数 $\|\cdot\|_\infty$，在 $l^\infty([0, 1]^2)$ 上是线性且连续的：对于任意 $h \in l^\infty([0, 1]^2)$，

$$|\dot{T}(h)| = 6 \left| \int_0^1 h(u, 1 - u)\, \mathrm{d}u \right| \le 6 \|h\|_\infty < \infty.$$

由于赋范空间上的每个连续线性映射都是Hadamard可微的（事实上是Fr´echet可微的），T 在每个 $C \in \mathsf{C}$ 处都是Hadamard可微的，其导数为

$$\dot{T}_C(h) = 6 \int_0^1 h(u, 1 - u)\, \mathrm{d}u, \quad h \in \ell^\infty([0, 1]^2).$$

在一阶偏导数 $C_1 = \partial C/\partial u$ 和$\dot{C}_2 = \partial C/\partial v$ 存在且在 $(0, 1)^2$，上连续的假设下，根据 $[10, 15]$，可以保证经验 copula 过程 $\mathbb{G}_n = \sqrt{n}(C_n - C)$ 在 $l^\infty([0, 1]^2)$ 中弱收敛到紧高斯过程

$$\mathbb{G}_C(u, v) = \alpha_C(u, v) - \dot{C}_1(u, v)\, \alpha_C(u, 1) - \dot{C}_2(u, v)\, \alpha_C(1, v),$$

其中 α_C 是一个 C-布朗桥，即具有如下协方差的中心高斯过程
$\mathrm{Cov}\big(\alpha_C(u_1, v_1),\ \alpha_C(u_2, v_2)\big) = C(\min\{u_1, u_2\},\ \min\{v_1, v_2\}) - C(u_1, v_1)\ C(u_2, v_2)$。

Since $\widehat{\Phi}_n = T(C_n) + O(n^{-1})$, we have

$$\sqrt{n}\,(\widehat{\Phi}_n - \Phi_C) = \sqrt{n}\,(T(C_n) - T(C)) + O(n^{-1/2}).$$

由函数型德尔塔方法 [4, 16], , 我们得到

$$\sqrt{n}\,(T(C_n) - T(C)) \xrightarrow{d} \dot{T}_C(\mathbb{G}_C) = 6\int_0^1 \mathbb{G}_C(u, 1-u)\,\mathrm{d}u.$$

右侧是一个中心高斯随机变量，因为它是高斯过程 $\mathbb{G}_C$ 的连续线性泛函。代入 $\mathbb{G}_C$ 的表达式并应用 Fubini定理,

$$\begin{aligned} &6\int_0^1 \mathbb{G}_C(u, 1-u)\,\mathrm{d}u \\ &\quad = 6\int_0^1 \Big[\alpha_C(u, 1-u) - \dot{C}_1(u, 1-u)\,\alpha_C(u, 1) - \dot{C}_2(u, 1-u)\,\alpha_C(1, 1-u)\Big]\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

我们证明这等于

$$6\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}}[j_C(\hat{U}_i, \hat{V}_i) - \mathbb{E}_C j_C]$$

在分布意义下，通过识别影响函数。利用 α_C 的协方差结构以及表示式

$$\alpha_C(u, v) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \big[\mathbf{1}(\hat{U}_i \le u, \hat{V}_i \le v) - C(u, v)\big],$$

可以计算得

$$\begin{aligned} 6\int_0^1 \mathbb{G}_C(s, 1-s)\,\mathrm{d}s \overset{d}{=} \frac{6}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \Big[&(1 - \hat{U}_i - \hat{V}_i)^+ - \int_{\hat{U}_i}^1 \dot{C}_1(s, 1-s)\,\mathrm{d}s \\ &- \int_0^{1-\hat{V}_i} \dot{C}_2(s, 1-s)\,\mathrm{d}s - \mathbb{E}_C[j_C(U, V)]\Big], \end{aligned}$$

其中 j_C 由式（8）给出。还需验证 $\mathbb{E}_C[j_C(U, V)] = 0$。利用 Fubini定理,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_C\left[\int_U^1 \dot{C}_1(s, 1-s)\,\mathrm{d}s\right] &= \int_0^1\int_0^1\int_u^1 \dot{C}_1(s, 1-s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}C(u, v) \\ &= \int_0^1 \dot{C}_1(s, 1-s)\left(\int_0^s\int_0^1 \mathrm{d}C(u, v)\right)\mathrm{d}s \\ &= \int_0^1 \dot{C}_1(s, 1-s)\,s\,\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

并通过分部积分,

$$\int_0^1 s\,\dot{C}_1(s, 1-s)\,\mathrm{d}s = \Big[s\,C(s, 1-s)\Big]_0^1 - \int_0^1 C(s, 1-s)\,\mathrm{d}s - \int_0^1 s\,(-1)\,\dot{C}_2(s, 1-s)\,\mathrm{d}s,$$

˙将其与对 C_2 项的类似计算以及恒等式结合起来

$$\mathbb{E}_C[(1-U-V)^+] = \int_0^1 C(u,1-u)\,\mathrm{d}u$$

（由（5））给出 $\mathbb{E}_C[j_C(U,V)] = 0$。

因此，$\sqrt{n}(\widehat{\Phi}_n - \Phi_C)$的渐近分布即为

$$\frac{6}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} j_C(U_i,V_i),$$

根据经典中心极限定理，其依分布收敛于

$$\mathcal{N}(0,\ 36\,\mathrm{Var}_C(j_C(U,V))).$$

令 $\sigma_\Phi^2 = 36\,\mathrm{Var}_C(\ j_C(U,V))$即完成证明。

注 *1.* 定理 2 中 C 的一阶偏导数的连续性，是经验 copula 过程$\mathbb{G}_n = \sqrt{n}(C_n - C)$收敛所依据的标准正则性假设。Clayton Copula（对于$\theta > 0$）、高斯 copula（对于 $|\rho| < 1$）和 Gumbel copula（对于 $\theta \geq 1$）均满足该条件，且它们都用于第5节。边界情形 $\rho = 1$ （连接函数 M）并不满足该条件，因为 M 没有密度。因此，该情景的模拟结果纯属说明性，且不在定理 2 的范围内。

定理 2 给出了 σ_Φ^2 的闭式渐近方差，但在实践中必须根据数据进行估计。自然的代入估计量是用其样本对应量替代未知期望 $\mathbb{E}_C(1-U-V)^+$，从而得到变换后的伪观测值 $\{(1-\hat{}U_i-\hat{}V_i)^+\}$ 的样本方差。该估计量是强相合估计量，可直接用于构造 Φ_C 的渐近置信区间。

命题 1。统计量

$$\widehat{\sigma}_\Phi^2 = \frac{36}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[\hat{j}_n(\hat{U}_i,\hat{V}_i) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\hat{j}_n(\hat{U}_k,\hat{V}_k)\right]^2$$

是 σ_Φ^2 的强相合估计量，其中

$$\hat{j}_n(u,v) = (1-u-v)^+ - \int_u^1 \hat{\dot{C}}_{n,1}(s,1-s)\,\mathrm{d}s - \int_0^{1-v} \hat{\dot{C}}_{n,2}(s,1-s)\,\mathrm{d}s,$$

$\hat{}$ $\hat{}$且 $\dot{C}_{n,1}$, $\dot{C}_{n,2}$ 分别是 $\dot{C}_1$ 和 $\dot{C}_2$ 的相合估计量。 Φ_C 的渐近100(1 − α)% 置信区间为

$$\hat{\Phi}_n \pm z_{\alpha/2}\,\frac{\hat{\sigma}_\Phi}{\sqrt{n}},$$

其中 $z_{\alpha/2}$ 是/2 分位数$\mathcal{N}(0,\ 1)$的上/2 分位数。

证明。 设 $\hat{} Z_i = \hat{} j_n(\hat{} U_i, \hat{} V_i)$。由于 $\hat{}\dot{C}_{n,\ 1} \to \dot{C}_1$ 和 $\hat{}\dot{C}_{n,\ 2} \to \dot{C}_2$ 几乎必然一致收敛，因此 $\hat{} j_n(u,\ v) \to j_C(u,\ v)$ 在 $[0,1]^2$ 上几乎必然一致收敛，从而

$$\hat{Z}_i \xrightarrow{a.s.} j_C(U_i, V_i) =: Z_i.$$

由于 j_C 在 $[0,1]^2$, 上有界，序列 $\{\hat{} Z_i^2\}$ 是一致可积的。根据强大数定律,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{Z}_i^2 \xrightarrow{a.s.} \mathbf{E}_C[j_C(U,V)^2], \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{Z}_i \xrightarrow{a.s.} \mathbf{E}_C[j_C(U,V)] = 0,$$

$\widehat{}$其中，最后一个等式成立是因为 j_C 是 Φ_n的影响函数，且其中心化。因此,

$$\widehat{\sigma}_\Phi^2 \xrightarrow{a.s.} 36\,\mathbf{E}_C[j_C(U,V)^2] = 36\,\mathrm{Var}_C(j_C(U,V)) = \sigma_\Phi^2.$$

置信区间由定理 2 和斯卢茨基定理得出（例如，参见[16]）。

作为定理 2 的直接应用，可以构造一个针对完全负依赖假设的正式检验。考虑原假设 $H_0:\ C = W$ 等价地， $H_0:\ \Phi_C = -1$。由于 $\Phi_W = -1$ 和 $\widehat{\Phi}_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \Phi_C$，一个自然的检验统计量为

$$T_n = \frac{\sqrt{n}\,(\widehat{\Phi}_n + 1)}{\widehat{\sigma}_\Phi},$$

其中， $\widehat{\sigma}_\Phi$ 是命题 1 中给出的 σ_Φ 的相合估计量。在 H_0下，定理 2 和斯卢茨基定理给出 $T_n \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0,1)$, 因此，当 $T_n > z_\alpha$时，在渐近显著性水平 α 下拒绝 H_0，其中 z_α是 $\mathrm{N}(0,1)$ 的上侧 α 分位数。注意，这是一个单侧检验，因为对于所有连接函数 C， $\Phi_C \geq -1$ 均成立，且仅在 W处取等号。

影响函数将泛函对底层分布受到微小扰动时的敏感程度形式化。具体而言，若向 C中混入比例为 ε 、集中于单点（u， v）的点质量，形成混合分布

$$C_\varepsilon = (1-\varepsilon)\,C + \varepsilon\,\delta_{(u,v)},$$

其中， $\delta_{(u,v)}$ 是位于（u， v）处的单位点质量，影响函数衡量泛函的一阶效应:

定义 1. 泛函 Φ 在 C 处的影响函数为

$$\mathrm{IF}((u,v);\,\Phi,\,C) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\Phi_{C_\varepsilon} - \Phi_C}{\varepsilon}.$$

Φ_C 的影响函数可利用其线性性质显式计算。

命题 2。 对于任意连接函数 C 以及任意 $(u, v) \in [0,1]^2$,

$$\mathrm{IF}((u,v);\Phi,C) = 6\, j_C(u,v),$$

其中， j_C 由(8)给出。

证明。 令 $C_\varepsilon = (1-\varepsilon)C + \varepsilon\,\delta_{(u,v)}$，其中 $\delta_{(u,v)}$是位于 $(u,v) \in [0,1]^2$处的单位点质量。根据定义,

$$\mathrm{IF}((u,v);\Phi,C) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\Phi_{C_\varepsilon} - \Phi_C}{\varepsilon}.$$

由于 $T(C) = 6\int_0^1 C(u, 1-u)\,\mathrm{d}u - 1$关于 C是线性的，因此

$$\Phi_{C_\varepsilon} = T(C_\varepsilon) = (1-\varepsilon)\,T(C) + \varepsilon\,T(\delta_{(u,v)}),$$

因此

$$\frac{\Phi_{C_\varepsilon} - \Phi_C}{\varepsilon} = T(\delta_{(u,v)}) - T(C) = 6(1-u-v)^+ - 1 - \Phi_C.$$

利用 (5),

$$\Phi_C = 6\,\mathbf{E}_C[(1-U-V)^+] - 1,$$

从而

$$\mathrm{IF}((u,v);\Phi,C) = 6\left[(1-u-v)^+ - \mathbf{E}_C[(1-U-V)^+]\right].$$

因此，这是已知边缘泛函 T的影响函数。对于基于秩$\widehat{\ }$的估计量 Φ_n，通过秩估计边缘分布会引入额外项。具体而言，在 C 中加入位于（u， v）的点质量，也会扰动两个边缘分布，而该扰动对T 的一阶影响由 j_C中的修正项所刻画。利用阿达马导数的链式法则进行标准计算可得

$$\mathrm{IF}((u,v);\Phi,C) = 6\, j_C(u,v),$$

由此完成证明。

由于（$1-u-v$）$^+$ 在 $[0,1]^2$, 上有界，命题 2 中得到的影响函数自然有界，这意味着我们获得了形式化的稳健性保证。

$\widehat{\ }$**定理 3**。 Φ_n 的影响函数一致有界：对所有（u、 v） $\in [0,1]^2$ 以及所有在（0, 1）上具有连续偏导数 $\dot{C}_1$ 和 $\dot{C}_2$ 的连接函数 C^2,

$$|\mathrm{IF}((u,v);\Phi,C)| = 6\,|j_C(u,v)| \le 12.$$

$\widehat{\ }$因此， Φ_n 具有 *Hampel* 意义下的稳健性，这意味着单个离群的 $\widehat{\ }$观测值不会使 Φ_n 的取值变化超过 $12/n$。

证明。 根据命题 2，$\mathrm{IF}((u,v);\Phi,C) = 6\,j_C(u,v)$，其中 j_C 由式 (8) 给出。我们分别对每一项进行界定。首先，对于所有 $(u,v) \in [0,1]^2$，$(1-u-v)^+ \in [0,1]$。其次，由于 $\dot{C}_1(s,t) = \partial C(s,t)/\partial s$ 是一个条件分布函数，因此对于所有 $(s,t) \in [0,1]^2$，它满足 $\dot{C}_1(s,t) \in [0,1]$，从而

$$0 \le \int_u^1 \dot{C}_1(s, 1-s)\,\mathrm{d}s \le \int_u^1 1\,\mathrm{d}s = 1-u \le 1.$$

类似地，$\dot{C}_2(s,t) \in [0,1]$ 意味着

$$0 \le \int_0^{1-v} \dot{C}_2(s, 1-s)\,\mathrm{d}s \le \int_0^{1-v} 1\,\mathrm{d}s = 1-v \le 1.$$

因此，对于所有 $(u,v) \in [0,1]^2$ 以及所有连接函数 C，都有 $j_C(u,v) \in [-2,1]$，从而得到$j_C(u,v)| \le \max\{2,1\} = 2$，于是

$$|\mathrm{IF}((u,v);\Phi,C)| \le 12.$$

$\widehat{\ }$有限样本界可由 Φ_n的单步表示推出：将一个观测值 $(\hat{U}_j, \hat{V}_j)$ 替换为任意点 $(u,v) \in [0,1]^2$，最多会使 $\widehat{\Phi}_n$变化

$$\frac{1}{n} \sup_{(u,v)\in[0,1]^2} |\mathrm{IF}((u,v);\Phi,C)| \le \frac{12}{n}.$$

5 模拟研究

$\widehat{\ }$我们通过蒙特卡洛实验研究 Φ_n 的有限样本表现，并将其与 Spearman 足尺估计量 $\widehat{\varphi}_n$ 进行比较。本研究旨在评估其在正依赖和负依赖$\widehat{\ }$结构下的表现，因为 Φ_n 专门用于衡量与完全负依赖的偏离程度。

从以下连接函数族中生成样本量为 $n \in \{100、200、500\}$ 的样本：

– Clayton（$\theta = 2,\ 5$）：正依赖，且下尾集中较强；Kendall 的 $\tau = \theta/(\theta+2)$ 分别为 $\tau = 0.500$ 和 $\tau = 0.714$。– 高斯（$\rho = -0.9,\ -0.7,\ -0.3,\ 1$）：涵盖弱、中等和强负依赖，以及完全正依赖。情景 $\rho = 1$（连接函数 M）作为边界情景纳入。– Gumbel（$\theta = 3,\ 5$）：正依赖，且上尾集中较强；Kendall 的 $\tau = 1 - 1/\theta$ 分别为 $\tau = 0.667$ 和 $\tau = 0.800$。– Frank（$\theta = -5,\ -10$）：负依赖，具有对称尾部行为；纳入该模型是为了专门评估 Φ_n 对 Clayton 或 Gumbel 未能涵盖的反单调结构的敏感性。

对于每种情景，进行 $B = 10^4$ 次独立重复试验。真实值 Φ_C 的计算方法如下：高斯连接函数的真实值通过解析方法计算，具体为

			真实值		$\widehat{\Phi}_n$			$\widehat{\varphi}_n$		
连接函数	参数	n	Φ_C	φ_C	Mean	Bias	SD	Mean	Bias	SD
Clayton	$\theta = 5$	100	0.46021	0.70433	0.44363	−0.01658	0.01822	0.70091	−0.00342	0.03715
		200			0.45170	−0.00851	0.01277	0.70211	−0.00222	0.02621
		500			0.45671	−0.00350	0.00798	0.70329	−0.00104	0.01651
Clayton	$\theta = 2$	100	0.36175	0.48528	0.34511	−0.01664	0.03905	0.48515	−0.00013	0.05468
		200			0.35366	−0.00809	0.02747	0.48553	+0.00025	0.03851
		500			0.35866	−0.00309	0.01712	0.48602	+0.00074	0.02427
高斯	$\rho = -0.9$	100	−0.69075	−0.45223	−0.69429	+0.00246	0.03330	−0.43601	+0.01622	0.01874
		200			−0.69507	+0.00168	0.02322	−0.44376	+0.00847	0.01286
		500			−0.69598	+0.00077	0.01469	−0.44884	+0.00339	0.00821
高斯	$\rho = -0.7$	100	−0.47019	−0.35622	−0.47232	−0.00213	0.05150	−0.34115	+0.01507	0.03676
		200			−0.47104	−0.00085	0.03629	−0.34854	+0.00768	0.02594
		500			−0.47013	+0.00006	0.02270	−0.35294	+0.00328	0.01633
高斯	$\rho = -0.3$	100	−0.17569	−0.15854	−0.18226	−0.00657	0.06361	−0.14537	+0.01317	0.05665
		200			−0.17809	−0.00240	0.04502	−0.15140	+0.00714	0.04001
		500			−0.17697	−0.00128	0.02864	−0.15603	+0.00251	0.02546
高斯	$\rho = 1$	100	0.50000	1.00000	0.48515	−0.01485	0.00000	1.00000	0.00000	0.00000
		200			0.49254	−0.00746	0.00000	1.00000	0.00000	0.00000
		500			0.49701	−0.00299	0.00000	1.00000	0.00000	0.00000
Gumbel	$\theta = 5$	100	0.47573	0.79239	0.45967	−0.01606	0.01243	0.78737	−0.00502	0.02623
		200			0.46752	−0.00821	0.00860	0.78953	−0.00286	0.01811
		500			0.47246	−0.00327	0.00534	0.79127	−0.00112	0.01131
Gumbel	$\theta = 3$	100	0.43301	0.65496	0.41662	−0.01639	0.02418	0.65197	−0.00299	0.04041
		200			0.42493	−0.00808	0.01719	0.65353	−0.00143	0.02812
		500			0.42956	−0.00345	0.01060	0.65389	−0.00107	0.01774
Frank	$\theta = -5$	100	−0.44055	−0.35321	−0.44120	−0.00065	0.04999	−0.33734	+0.01587	0.03843
		200			−0.44078	−0.00023	0.03602	−0.34448	+0.00873	0.02740
		500			−0.44078	−0.00023	0.02250	−0.35001	+0.00320	0.01722
Frank	$\theta = -10$	100	−0.65396	−0.45189	−0.65107	+0.00289	0.03314	−0.43540	+0.01649	0.01944
		200			−0.65223	+0.00173	0.02299	−0.44350	+0.00839	0.01356
		500			−0.65336	+0.00060	0.01426	−0.44838	+0.00351	0.00836

表1：在所选连接函数族、参数值和样本量 n 下，对 Φ_n 和 $\widehat{\varphi}_n$ 进行 10^4 次蒙特卡洛重复试验所得的经验均值、偏差和标准差。高斯 copula 的真实值 Φ_C 可通过式（6）精确得到；其余真实值则通过数值积分获得。

由式 (6) 给出的闭式表达式，以及针对 Clayton、Gumbel 和 Frank 族采用高精度数值积分（2×10^6 个求积点）得到的结果。φ_C 的真实值也以类似方式近似。各估计量的经验均值、偏差和标准差记录于表1中，由此可以得出若干结论。

1. 首先，随着 n 增大，两种估计量的偏差都较小且持续减小，这证实了定理1中确立的强相合性。Φ_n 的偏差在正依赖情形下为负（Clayton、Gumbel、高斯$\rho = 1$），而在负依赖情形下则可忽略或略为正值（高斯 $\rho \in \{-0.9, -0.7, -0.3\}$、Frank），这反映了非对称归一化$\Phi_W = -1$, $\Phi_M = 1/2$。从理论上看，经验Copula的光滑泛函通常具有 $O(n^{-1})$ 偏差；然而，伪观测值按 $n/(n+1)$ 缩放所引入的离散化会带来额外影响，而表中观察到的衰减与 $O(n^{-1})$ 阶速率相符。例如，对于参数为 $\theta = 5$, 的 Clayton 连接函数， Φ_n 的偏差从 $n = 100$ 时的 -0.01658 降至 $n = 200$ 时的 -0.00851（比值$\approx 0.51 \approx 1/2$），再降至 $n = 500$ 时的 -0.00350（比值 $\approx 0.21 \approx 1/5$），与 $O(n^{-1})$ 阶衰减相符。

2. 其次，Φ_n 标准差在所有情景下均以与$O(n^{-1/2})$相符的速率下降，这与定理 2 的预测一致。例如，对于参数为 $\theta = -5$ 的 Frank 连接函数，标准差从$n = 100$ 时的 0.04999 降至 $n = 200$ 时的 0.03602（比率 $\approx 0.72 \approx 1/\sqrt{2}$），并降至 $n = 500$时的 0.02250（比率 $\approx 0.45 \approx 1/\sqrt{5}$）。
3. 第三，最值得注意的是，在负依赖条件下，Φ_n 的偏差明显小于 φ_n 的偏差（按绝对值计），且其标准差相当或更小。对于参数为 $\rho = -0.9$ 的高斯 copula，在 $n = 100$ 时， Φ_n 的偏差为 $+0.00246$，而 φ_n 的偏差为 $+0.01622$——大六倍以上。这反映出 Φ_n 在其专门适用的参数空间区域（即接近反单调界 W的区域）具有更高的精度。同样，对于参数为 $\theta = -10$ 的 Frank 连接函数，在 $n = 100$ 时， Φ_n 的偏差为 $+0.00289$，而 φ_n 的偏差为 $+0.01649$。

4. 第四，边界情形 $\rho = 1$ （连接函数 M）值得特别说明。由于 M 不满足定理 2 的光滑性假设（其偏导数在 $(0,1)^2$ 上不连续），渐近正态性结论并不适用，因此该情景的模拟结果仅供说明。此情形下， Φ_n 的标准差恰好为零，因为当 $V = U$ 几乎必然成立时，对于所有满足 $R_i > (n+1)/2$ 的 i，伪观测值满足 $\hat{U}_i + \hat{V}_i = 2R_i/(n+1) > 1$，否则满足 $(1 - \hat{U}_i - \hat{V}_i)^+ = 0$，因此对于每个固定的 n，都得到一个确定性估计量。由于按 $n/(n+1)$ 重新缩放，仍存在可忽略的边界偏差，并且该偏差随 $n \to \infty$ 而趋于零。

综合而言， Φ_n 与 φ_n 对依赖结构给出了互补描述，这与在第 3 节中建立的基尼分解$\gamma_C = \frac{2}{3}(\varphi_C + \Phi_C)$相一致。模拟证实，当存在负依赖时， Φ_n 在二者中更具信息量，而 φ_n 更适合检测正依赖结构。

6 结论

我们引入了Ψ脚规系数 Φ_C，将其作为到反单调连接函数Ψ的 L^1-距离，从而将其确立为Spearman脚规 φ_C的自然配套。分解 $\gamma_C = \frac{2}{3}(\varphi_C + \Phi_C)$ 对基尼的 γ 给出了清晰解释，即它是两个方向性足序的均衡组合：其一衡量与完全正依赖的接近程度，另一衡量与完全⌒负依赖的接近程度。估计量 Φ_n 基于秩、计算简便、强相合且渐近正态，并具有有界影响函数，从而确保了Hampel意义下的稳健性。蒙特卡洛实验证实了其良好的有限样本表现，并表明在强负依赖下，其精度相对于斯皮尔曼足距估计量有所提高。未来工作可探索向更高维的推广、其他一致性度量的类似分解、基于 Φ_n的反单调⌒性正式检验的构建，以及对估计量半参数效率性质的研究。

参考文献

1. Deheuvels, P.（1979）。经验依赖函数及其性质。非参数独立性检验。比利时皇家科学院《科学院公报》**65**，274–292。2. Diaconis, P., Graham, R. L.（1977）。将Spearman脚规作为无序度量。《皇家统计学会会刊 B 辑》**39**，262–268。3. Durante, F., Sempi, C.（2016）。Copula 理论原理。CRC 出版社，博卡拉顿。4. Fermanian, J.-D., Radulovi´c, D., Wegkamp, M.（2004）。经验 copula 过程的弱收敛。《伯努利》**10**，847–860。5. Genest, C., Ne˘slehov´a, J., Ben Ghorbal, N.（2010）。Spearman脚规与 Gini伽马系数：综述及补充。《非参数统计》**22**（8），937–954。6. Liebscher, E.（2014）。基于 copula 的依赖度量。《依赖模型》**2**，49–64。7. Nelsen, R.B.（1998）。一致性与 Gini 的关联度量。《非参数统计》**9**，227–238。8. Nelsen, R.B.（2006）。《Copula 导论》，第 2 版。施普林格，纽约。9. Scarsini, M.（1984）。关于一致性度量。《随机学》**8**，201–218。10. Segers, J.（2012）。非限制性光滑性假设下经验 copula 过程的渐近理论。《伯努利》**18**（3），764–782。11. Sharipov, O.S.（2025）。格利文科-坎泰利定理。载于：Lovric, M.（编）《统计科学国际百科全书》。施普林格，柏林，第 1073–1076 页。12. Sheppard, W.F.（1900）。关于表示正态相关的二重积分的计算。《剑桥哲学学会会刊》**19**，23–69。13. Sklar, A.（1959）。多维分布函数及其边缘分布。《巴黎大学统计研究所出版物》**8**，229–231。14. Spearman, C.（1906）。用于测量相关的脚规，《英国心理学杂志》**1**（2），89–108。15. Tsukahara, H.（2005）。copula 模型中的半参数估计。《加拿大统计学杂志》**33**，357–375，16. van der Vaart, A.W.（1998）。《渐近统计学》。剑桥大学出版社，剑桥。

16 Enrique deAmo等人

17. van der Vaart, A.W., Wellner, J.A.（1996）。格利文科-坎泰利定理。载于：《弱收敛与经验过程》（A.W. van der Vaart, J.A. Wellner 编）。施普林格，纽约，第 185–191 页。