基于单模材料的低频水下声隔离

Yu Wei [a]、Binghao Zhao [b]、Fen Du [a, 1]、Yi Chen [c, d] 和 Gengkai Hu [a]

[a] 海洋科学与技术领域，北京理工大学，珠海 519088，中国[b] 化学工程学院，大连理工大学，大连 116024，中国[c] 纳米技术研究所，卡尔斯鲁厄理工学院（KIT），卡尔斯鲁厄 76128，德国[d] 应用物理研究所，卡尔斯鲁厄理工学院（KIT），卡尔斯鲁厄 76128，德国

摘要：

极端材料是一类特殊的柯西材料，其弹性张量具有一个或多个零特征值。每个零特征值对应一个不需要应变能的软模态，而非零特征值对应需要消耗能量的硬模。根据零特征值的数量 N，这类材料可称为单模（$N = 1$）、双模（$N = 2$）等。极端材料实现了传统柯西介质无法实现的新功能，例如声子偏振器、瑞利波隔离器和水下声学隐身斗篷。这些功能通常需要单一的极端材料。两种极端材料之间的界面呈现出丰富的波动行为，但鲜少得到研究。本文提出互补极端材料的概念，即一种极端材料的软模态是另一种极端材料的硬模态。作为一个实例，我们研究了各向同性单模材料与各向同性双模材料之间的界面。我们表明，该界面能够实现纵波到横波的完美模式转换。本文提出了一种基于互补极端材料的低频水下声绝缘体。通过设计的超材料和有效介质建模验证了我们的发现。本研究展示了互补极端材料在调控弹性波偏振和水下声方面的潜力。

关键词：极端材料、软模态、波控制、单模材料、水传播声隔声、流体流动

[1] 通讯作者。电子邮箱：fendu@bit.edu.cn（Fen Du）

1. 引言

水下声隔离在水下声学工程中至关重要，其应用包括降低海上设备的噪声 [1-2], 屏蔽水下声辐射 [3],增强水下通信[4] 以及精准控制水下声学[5-6], 等。传统被动隔声材料通常依赖阻抗失配 [3, 7-10]。一般而言，隔声材料与背景介质之间的阻抗差异越大，隔声效果越好。由于常见固体的阻抗比空气高出几个数量级，即使是薄固体板也能有效阻隔空气声。然而，水的阻抗与常见固体（例如金属）相当，这意味着要有效阻隔水下声（尤其是低频声），需要采用厚而坚硬的固体板，或采用气泡等柔软夹杂物[11-12]。前一种方法体积庞大，而后一种方法在压力下缺乏结构完整性，因此，开发紧凑型低频水下声隔离器既极具挑战，也具有重要的实用价值。

弹性超材料的出现为经典连续介质力学注入了活力。极端材料能够呈现与普通材料截然不同的波动性质[13-14], ，近年来受到了广泛关注[15-23]。从数学上讲，极端材料是指其弹性张量可用一个具有 $N \geq 1$个零特征值[24]的 6×6 矩阵表示的弹性材料，其中矩阵采用Voigt记号或Kelvin记号。因此，极端材料是一类约束得到放宽的柯西介质，具有内在的软变形模态，原则上无需消耗能量。根据 N的值，按照一篇先前论文[24]中的命名方式，我们将其称为单模材料（$N = 1$，UM）、双模材料（$N = 2$，BM）、三模材料（$N = 3$，TM）、四模式材料（$N = 4$，QM）和五模材料（$N = 5$，PM）。这些材料可以通过在方形结构或梁之间连接极薄的部分来构造[25-29]。虽然特征值通常并非严格为零，但可以通过设计使其比其他特征值小几个数量级[26]。每个零特征值都对应材料的一种软变形模态，即从概念上说，这种变形不需要能量。传统柯西连续体对应于 $N = 0$，不具有软模态。极端材料中软模态的存在能够显著改变其体波特性[13-14]。许多研究表明，采用适当的单一类型极端弹性材料，即可实现复杂的声波/弹性波路径调控和偏振调制。例如，经过精心设计的五模式材料可实现水下声学隐身[22, 30-31], 、水声超表面[23, 28], 、液压消声器[32] 以及承载式水声隔声[8] 。四模式材料能够阻止固液界面处的模态转换[33], ，实现剪切波声子偏振器[29] 以及可调弹性波四分之一波片[34]。然而，这些奇特的波函数都依赖于单一类型的极端材料，而关于极端材料组合的波动性质，目前鲜有报道。例如，由各向同性五模式材料和各向同性UM构成的界面处弹性波的传播特性，可能对低

频水下声波控制具有重要价值。

当一种极端材料的软模态与另一种极端材料的硬模态重合时，我们将这两种极端材料称为互补极端材料。本文旨在探究二维互补极端材料界面处弹性波的传播特性。研究发现，水的互补极端材料可用于设计低频透流式水下声隔离器。不同于利用PM极端各向异性所产生的低阻抗来阻隔水下声的方法 [7-8, 32]，本文设计的水下声隔离器通过各向同性互补极端材料界面处的模态转换实现。随后，我们设计了各向同性互补极端材料，并利用超材料模型基于连续介质理论验证了研究结果。需要指出的是，先前文献中也将二维BM称为PM [13]，，因为二维BM在平面内具有与三维PM相同的静态和动态特性。

本文的结构安排如下：第2节详细介绍互补极端材料的波动特性和微结构设计，并解析给出桁架模型的有效弹性常数。第3节分析各向同性互补极端材料界面处的波动性质，并通过桁架模型及其对应的实体模型进行验证。作为一项应用，第4节提出并展示了一种基于各向同性UM块体阵列的低频透流式水下声隔离器。最后，结论部分总结了本文的主要发现。

2. 互补极端材料

本节首先介绍互补极端材料的概念，随后分析其界面处的弹性波传播特性。为简化讨论，重点关注二维（二维）各向同性情形。

2.1 波动特性

对于具有 N 个零特征值的弹性材料，其四阶弹性张量 C_{ijkl}可表示为Kelvin分解的形式：$C_{ijkl} = \sum_{r=1}^{3-N} K_r S_{ij}^{(r)} S_{kl}^{(r)}$ [24]，其中 K_r 为弹性张量的非零特征值，$\mathbf{S}^{(r)}$ 为二阶对称张量（特征张量、硬模态）。这意味着，该材料对由$\mathbf{S}^{(r)}$张成的子空间中的任意应力均具有刚性。为方便起见，在以下推导中，弹性张量也可写成紧凑形式

$$C_{ijkl} = \sum_{r=1}^{3-N} S_{ij}^{(r)} S_{kl}^{(r)}, \tag{1}$$

其中 K_r 被吸收于 $\mathbf{S}^{(r)}$ 中。然后，在没有体力的情况下，运动方程以及

柯西弹性材料的本构定律为

$$\sigma_{ij,j}=\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2},\sigma_{ij}=\frac{1}{2}C_{ijkl}\left(u_{k,j}+u_{j,k}\right), \tag{2}$$

其中， σ_{ij} 为对称应力张量， u_i 表示位移， t 为时间， ρ 表示质量密度。重复指标应按爱因斯坦求和约定处理。逗号表示空间导数。对于简谐弹性平面波，克里斯托费尔方程可表示为 [35]

$$\left(\Gamma_{ik}-\rho c^2\delta_{ik}\right)\hat{u}_k=0,\ \Gamma_{ik}=C_{ijkl}n_j n_l, \tag{3}$$

其中， $c=\omega/k$ 为相速度， ω 和 k 分别为角频率和波数。$\mathbf{\Gamma}$ 为声学张量， $\hat{\mathbf{u}}$ 为粒子偏振， $\mathbf{n}$ 为波传播方向的方向余弦，δ_{ik} 为克罗内克δ。为获得非平凡解，式（3）的行列式应为零

$$\left|\Gamma_{ik}-\rho c^2\delta_{ik}\right|=0. \tag{4}$$

结合式（1）和式（4），可计算一般二维极端弹性材料的色散关系。将计算得到的相速度 c 代回式（3），即可进一步得到相应的偏振 $\hat{\mathbf{u}}$ 。通常，对于各向异性的二维极端弹性材料，无法得到式（4）的闭式公式，因此需要采用数值算法求解。 由于本文旨在推导闭式公式，因此仅考虑正交各向异性极端弹性材料。

在二维情形中，存在两类极端材料，即单模材料（$N=1$，均匀介质，其具有唯一的软模态 $\mathbf{E}_0$）和双模材料（$N=2$，双材料，其具有唯一的硬模态$\mathbf{S}_1$ ） [24]。具体而言，当 $\mathbf{E}_0=\xi\mathbf{S}_1$ （$\xi\neq 0$）时，这两类极端材料被称为互补极端材料，从而使互补极端材料中的应力场始终彼此正交，即 $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{BM}}:\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{UM}}=0$ 。例如，水表现为各向同性BM，其特征是泊松比为 $+1$ ，且硬模态对应于静水应力 [13]。相比之下，二维各向同性UM的泊松比为 -1 ，且软模态对应于静水模态。因此，这两类极端材料是互补的，即水的硬模态与各向同性UM的软模态相重合。值得注意的是，水的互补极端材料未必唯一，因为它仅对均匀介质的软模态提出要求，而对其硬模态没有任何限制。此外，互补极端弹性材料的概念也可推广至三维情形。

对于正交各向异性均匀介质，其主坐标系中的弹性矩阵用沃伊特记号可表示为以下两种 3×3 矩阵

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} C_{11} & \alpha\sqrt{C_{11}C_{22}} & 0\\ \alpha\sqrt{C_{11}C_{22}} & C_{22} & 0\\ 0 & 0 & C_{33}\end{bmatrix},\ |\alpha|=1,\ C_{33}\neq 0. \tag{5}$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} C_{11} & \alpha\sqrt{C_{11}C_{22}} & 0 \\ \alpha\sqrt{C_{11}C_{22}} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ |\alpha|<1, \tag{6}$$

弹性张量的半正定性要求 $\{C_{11},\ C_{22},\ C_{33}\}>0$。

对于弹性矩阵如式（5）所示的UM，其软模态为 $\mathbf{E}_0=\left[-\alpha\sqrt{C_{22}},\ \sqrt{C_{11}},\ 0\right]^{\mathrm{T}}$，其中 $\alpha=+1$ 意味着它无法承受一个主方向受拉、另一个主方向受压的应力状态，而 $\alpha=-1$ 则表明它无法承受两个主方向同时受拉或受压的应力状态。在这种情况下，与式（5）所示的UM互补的BM的弹性矩阵如下：

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} C_{22} & -\alpha\sqrt{C_{11}C_{22}} & 0 \\ -\alpha\sqrt{C_{11}C_{22}} & C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ |\alpha|=1. \tag{7}$$

BM中的应力始终与其硬模态 $\mathbf{S}_1=\left[-\alpha\sqrt{C_{22}},\ \sqrt{C_{11}},\ 0\right]^{\mathrm{T}}$ 成正比，即 $\mathbf{S}_1=\mathbf{E}_0$。根据式（7），BM的主方向与其特征张量的主方向重合。$\alpha=+1$ 和 $\alpha=-1$ 两种情况分别对应负BM和正BM（也称为负PM和正PM），其泊松比分别为负值和正值。此外，具有 $\alpha=+1$ 的BM只能承受一个主方向受拉、另一个主方向受压的应力。相反，当 $\alpha=-1$ 时，它只能承受沿其主方向同时受拉或同时受压的应力。具体而言，当 $\alpha=-1$ 和 $C_{11}=C_{22}$ 时，它成为各向同性BM，此时静水应力是其硬模态。

将式（5）中的均匀介质弹性矩阵代入式（4），得到色散关系

$$\begin{aligned}
\omega_1^2&=\frac{1}{2\rho}\left(k^2\left(C_{11}+C_{33}\right)+k_2^2\left(C_{22}-C_{11}\right)-\sqrt{k_2^2C_n+k^4\left(C_{11}-C_{33}\right)^2}\right)\\
\omega_2^2&=\frac{1}{2\rho}\left(k^2\left(C_{11}+C_{33}\right)+k_2^2\left(C_{22}-C_{11}\right)+\sqrt{k_2^2C_n+k^4\left(C_{11}-C_{33}\right)^2}\right)\\
C_n&=k_2^2\left(\left(C_{11}-C_{22}\right)^2-4C_{33}\left(C_{11}+C_{22}\right)\right)\\
&\quad+2k^2\left(C_{11}C_{22}+C_{22}C_{33}+3C_{11}C_{33}-C_{11}^2\right)\\
&\quad+8\alpha k_1^2C_{33}\sqrt{C_{11}C_{22}},
\end{aligned} \tag{8}$$

与式（8）对应的两种体波模态如下

$$\hat{\mathbf{u}}_1=\begin{bmatrix} C_{33}-C_{11}+(C_{11}+C_{22})n_2^2-2C_{33}n_2^2+\sqrt{n_2^2C_n+(C_{11}-C_{33})^2} \\ -2n_1n_2\left(C_{33}+\alpha\sqrt{C_{11}C_{22}}\right) \end{bmatrix},$$
$$\hat{\mathbf{u}}_2=\begin{bmatrix} C_{33}-C_{11}+(C_{11}+C_{22})n_2^2-2C_{33}n_2^2-\sqrt{n_2^2C_n+(C_{11}-C_{33})^2} \\ -2n_1n_2\left(C_{33}+\alpha\sqrt{C_{11}C_{22}}\right) \end{bmatrix}. \quad (9)$$

根据式（8）—（9），体波的偏振和等频曲线（EFC）的形状取决于弹性常数（C_{11}、 C_{22} 和 C_{33}）以及 α的符号。例如，当 $\alpha=+1$ 时，外侧等频曲线有四个开口，内侧等频曲线则是闭合的；而 $\alpha=-1$ 会形成两条闭合的等频曲线（详见附录）。具体而言，当 $\alpha=-1$ 且 $C_{11}=C_{22}=C_{12}=K$ （$K>0$）时，均匀介质（UM）为各向同性，其声学张量退化为 $\mathbf{\Gamma}=K\mathbf{I}$，其中 $\mathbf{I}$ 为单位张量。此时，各向同性UM的等频曲线为重合的圆（即它们具有相同的波速），其体波可具有任意偏振。这一特性将为弹性波偏振控制提供新的可能性。

此外，将式（7）的弹性矩阵（即与式（5）中的UM互补的BM）代入式（4），可得色散关系

$$\omega_1^2=0,\ \omega_2^2=\left(C_{22}k_1^2+C_{11}k_2^2\right)/\rho, \quad (10)$$

与式（10）对应的两种体波模态如下

$$\hat{\mathbf{u}}_1=\begin{bmatrix} n_2\sqrt{C_{11}} \\ \alpha n_1\sqrt{C_{22}} \end{bmatrix},\hat{\mathbf{u}}_2=\begin{bmatrix} -n_1\sqrt{C_{22}} \\ \alpha n_2\sqrt{C_{11}} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

在这种情况下，剩余的等频曲线为一个闭合椭圆，其形状与 α的符号无关，而偏振则与 α的符号密切相关。当满足 $\alpha=-1$ 和 $C_{11}=C_{22}=K$ （$K>0$）的约束时，BM为各向同性（例如水，与各向同性UM互补），其声学张量为 $\mathbf{\Gamma}=K\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathrm{T}}$，因此对应于其非零特征值的特征向量为 $\hat{\mathbf{u}}_2=\mathbf{n}$，也就是说，它只能支持纵波传播。

由于后续讨论主要聚焦于各向同性情形，因此附录中简要分析了上述UM的各向异性情形下的等频曲线和偏振特征，以及式（6）中的UM及其互补BM的相关特征。

2.2 微结构设计

可实现各向同性UM和各向同性BM的周期性铰接立方对称桁架分别如图1(a)和(d)所示，其对应的单胞如图1(b)和(e)所示。除非另有明确说明，杆件的面外厚度均设为单位值。下文将详细介绍其有效性质和体波特性。

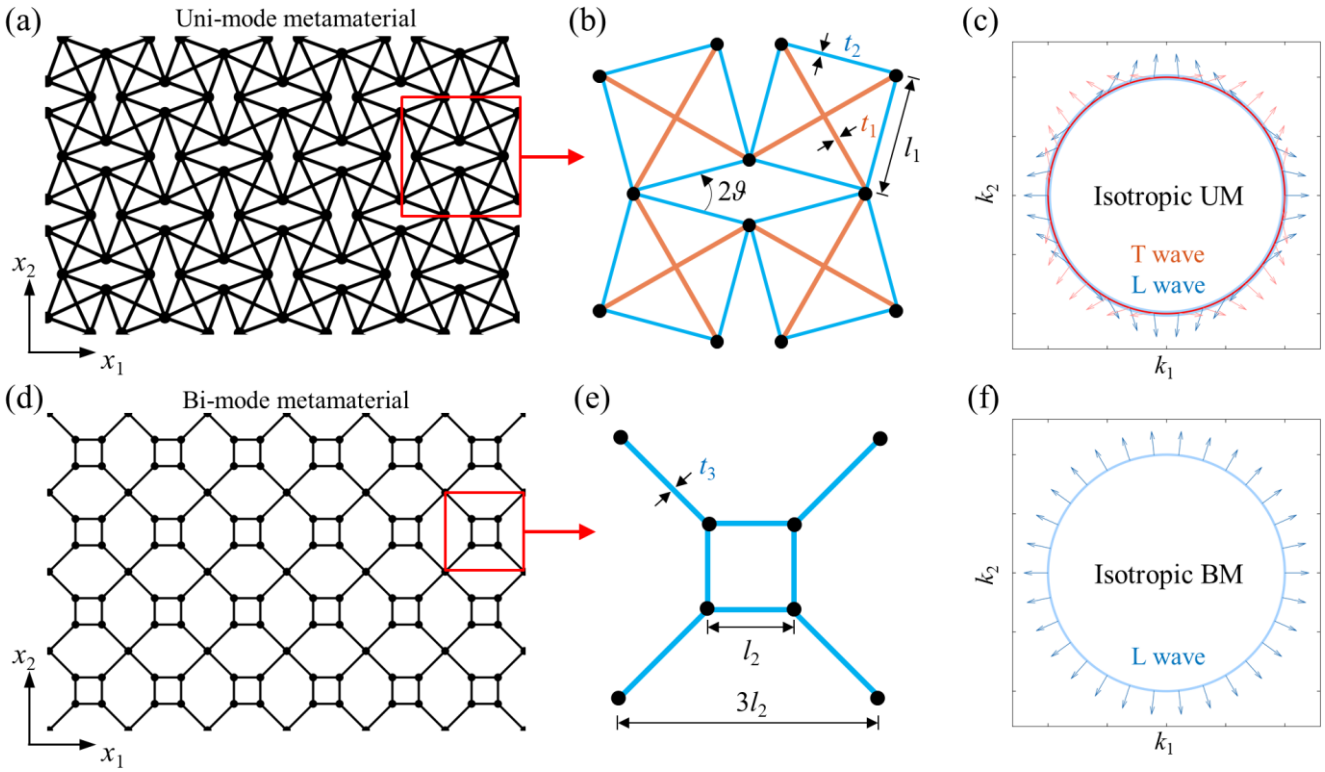


图1. 均匀介质（UM）和双材料（BM）桁架模型及其等频曲线（EFCs）示意图。(a) UM超材料。(b) UM的单胞，由四个扭转角为 $\vartheta \in (0,\ \pi/4)$的小方块组成，包含12个节点和24根杆件。红色杆件连接方块上对角相对的节点，蓝色杆件则连接其垂直边上的节点。方块中红色和蓝色杆件的面内厚度分别为 t_1 和 t_2。蓝色杆件的长度为 l_1。(c) 当 $t_1/t_2 = \sqrt{2}$时，(b)图中UM的等频曲线。箭头表示等频曲线的偏振，颜色与对应曲线一致。偏振通过对单胞内所有独立节点的位移取平均得到，证实该结构表现为理想的各向同性UM。(d)-(f)与(a)-(c)相同，但将UM替换为BM。单胞总共包含8个节点和8根杆件。所有杆件的面内厚度均为 t_3。内部方块的边长为 l_2。

首先，我们考虑图1(a)和(b)所示的微结构设计，即一种旋转方形晶格。任意相邻单胞均可通过将参考单胞沿直接晶格平移矢量$x_j\mathbf{a}_j$平移得到，其中 $j \in \{1, 2\}$， x_j 为任意一组整数值，$\mathbf{a}_j$ 为晶格矢量：

$$\mathbf{a}_1^{(\mathrm{UM})} = 2l_1\left(\cos\vartheta + \sin\vartheta\right)\left[1,\ 0\right]^{\mathrm{T}},\ \mathbf{a}_2^{(\mathrm{UM})} = 2l_1\left(\cos\vartheta + \sin\vartheta\right)\left[0,\ 1\right]^{\mathrm{T}}. \tag{12}$$

根据基于 Cauchy–Born 假设的均匀化方法[34, 36], ，当 $t_1/t_2 = \sqrt{2}$时，该晶格可均匀化为具有弹性矩阵的各向同性UM

$$\mathbf{C}^{\mathrm{UM}} = \frac{E_s t_2}{2l_1}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{13}$$

其中， E_s 是　　杆件的杨氏模量。由于我们考虑的频率范围远低于　　e

共振频率，因此我们通过质量平均得到有效质量密度 ρ^{UM}

$$\rho^{\mathrm{UM}}=\frac{8t_2\rho_1}{l_1\left(1+\sin 2\vartheta\right)}, \tag{14}$$

其中， ρ_1 表示UM晶格中杆件的质量密度。可以看出，当 $t_1/t_2=\sqrt{2}$时，这种旋转方形晶格的有效弹性矩阵与扭转角 ϑ无关，即$\mathbf{C}^{\mathrm{UM}}$ 不随 ϑ变化。然而，有效密度 ρ^{UM} 随 ϑ增加而单调减小。因此，这种各向同性UM的体波相速度随 ϑ增加而单调增大。这一特性使得利用微结构实现各向同性互补极端材料之间的完美界面变得更加容易。

此外，通过直接求解动力学矩阵[37], ，可以评估周期性铰接结构的波动特性；其特征值和特征向量分别对应固有频率和法向模态。为获得动力学矩阵，对单胞[33, 36]应用布洛赫定理。当 $t_1/t_2=\sqrt{2}$时，如图1(c)所示，所构造的离散UM晶格的等频曲线（EFCs）与理论预测的形状完全一致，即两个重叠的圆。在这种情况下，该结构是理想的各向同性UM，能够支持具有任意偏振的体波。为确保与实体模型结果一致（见第3.3节），给出了极限 $t_1/t_2\to\sqrt{2}$ 对应的偏振；这些偏振也满足式（），表明其从正交各向异性向各向同性演化。

(9),

接下来，考虑图 1(d) 和 (e) 所示的周期性桁架模型。对于图 3(e) 所示的单胞，可得

$$\mathbf{a}_1^{(\mathrm{BM})}=3l_2\left[1,\ 0\right]^{\mathrm{T}},\ \mathbf{a}_2^{(\mathrm{BM})}=3l_2\left[0,\ 1\right]^{\mathrm{T}}. \tag{15}$$

根据基于 Cauchy–Born 假设的均匀化方法，该晶格的宏观弹性矩阵可写为

$$\mathbf{C}^{\mathrm{BM}}=\frac{\left(2\sqrt{2}-1\right)E_s t_3}{7l_2}\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}, \tag{16}$$

即各向同性BM。此外，有效质量密度 ρ^{BM} 为

$$\rho^{\mathrm{BM}}=\frac{4\left(\sqrt{2}+1\right)t_3\rho_2}{9l_2}, \tag{17}$$

其中， ρ_2 表示BM晶格中杆件的质量密度。图 1(f) 所示构造的离散BM晶格的等频曲线和偏振与定理预测的结果完全相同，即它只能支持纵波传播。

于是，一个问题自然产生：弹性波如何在两个

半无限各向同性互补极值材料的界面处传播？我们注意到，当

$$\tan\vartheta = 0.5,\ l_1 = \frac{\sqrt{5}}{2} l_2, \tag{18}$$

UM单胞中最低的两个节点将与BM单胞中心正方形的两个顶点重合，从而使两个晶格完美连接（见图2(c)中的放大图）。下一节中，我们将重点研究各向同性二维UM与其互补BM所形成界面处弹性波的传播特性。

3. 反射与折射

本节将推导两个半无限各向同性互补极端材料之间完美界面处的反射与折射系数，并通过连续与离散模型加以验证。

3.1 传输特性

常规柯西弹性介质在二维情形下具有两种体波，即纵波（简称L波）和横波（简称S波）[35]。当振幅为 A_{IL} 的平面波（例如L波）以 θ_{IL} 角入射到两个半空间之间的固-固界面时，通常会产生振幅分别为 A_{RL} 和 A_{RS} 、角度分别为 θ_{RL} 和 θ_{RS} 的反射波，对应L波和S波。界面位于 $x_2 = 0$。此外，透射波的振幅为 A_{TL} 和 A_{TS} ，角度为 θ_{TL} 和 θ_{TS}。

根据上一节的分析，当平面波入射到两个半无限各向同性互补极端材料（下半空间为双材料，上半空间为均匀介质）之间的界面时，如图 2(a) 所示，反射波 A_{RS} 将消失。此外，由于各向同性UM支持具有任意偏振的体波，透射波的振幅可不失一般性地表示为 A_{T1} 和 A_{T2}。因此，当振幅为 A_{IL} 的L平面波从下半空间以角度 θ_{IL} 入射到界面时，入射波、反射波和折射波的位移为

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{\mathrm{IL}} &= A_{\mathrm{IL}}\left[\sin\theta_{\mathrm{IL}}, \cos\theta_{\mathrm{IL}}\right]^{\mathrm{T}} \exp\left(\mathrm{i}k_{\mathrm{IL}}\left(x_1\sin\theta_{\mathrm{IL}} + x_2\cos\theta_{\mathrm{IL}}\right) - \omega t\right),\\
\mathbf{u}_{\mathrm{RL}} &= A_{\mathrm{RL}}\left[\sin\theta_{\mathrm{RL}}, -\cos\theta_{\mathrm{RL}}\right]^{\mathrm{T}} \exp\left(\mathrm{i}k_{\mathrm{RL}}\left(x_1\sin\theta_{\mathrm{RL}} - x_2\cos\theta_{\mathrm{RL}}\right) - \omega t\right),\\
\mathbf{u}_{\mathrm{T1}} &= A_{\mathrm{T1}}\left[\cos\theta_{\mathrm{x1}}, \sin\theta_{\mathrm{x1}}\right]^{\mathrm{T}} \exp\left(\mathrm{i}k_{\mathrm{T1}}\left(x_1\sin\theta_{\mathrm{T1}} + x_2\cos\theta_{\mathrm{T1}}\right) - \omega t\right),\\
\mathbf{u}_{\mathrm{T2}} &= A_{\mathrm{T2}}\left[-\sin\theta_{\mathrm{x1}}, \cos\theta_{\mathrm{x1}}\right]^{\mathrm{T}} \exp\left(\mathrm{i}k_{\mathrm{T2}}\left(x_1\sin\theta_{\mathrm{T2}} + x_2\cos\theta_{\mathrm{T2}}\right) - \omega t\right).
\end{aligned} \tag{19}$$

上标 T 表示转置， $\theta_{\mathrm{x1}} \in [0,\ \pi/2]$ 表示任意指定偏振与 x_1 轴之间的夹角。由于 BM 的一个体波模式消失，界面处会出现粒子位移不连续。利用界面处质点横向位移的不连续性，可实现纵波与横波之间的完美模式转换

预计能够实现。

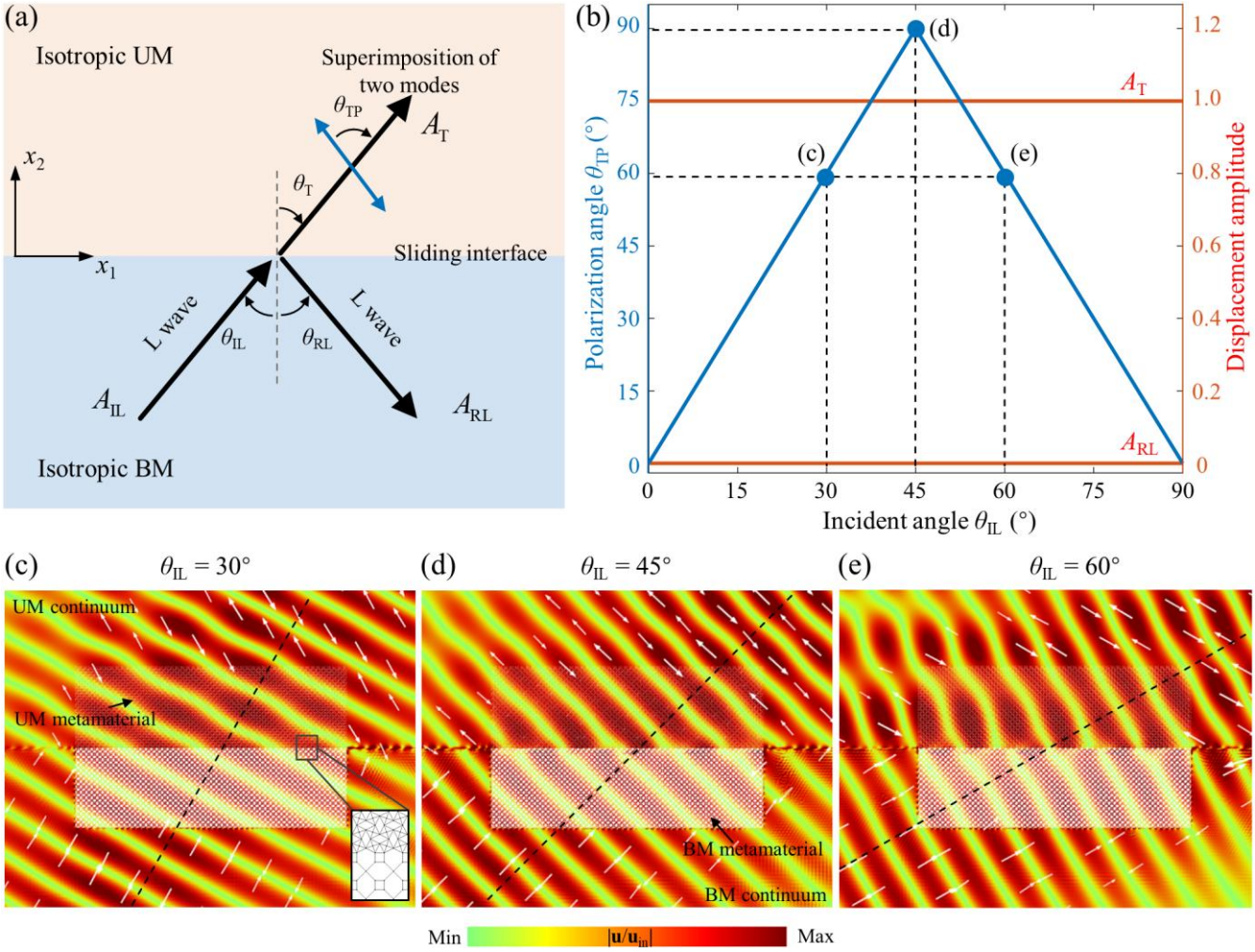


图 2. 各向同性BM与各向同性UM两个半空间界面处波传输的理论分析与数值验证。(a) L波斜入射至界面的示意图。(b) 偏振角 θ_{TP}、位移振幅 A_{RL} 和 A_T 随入射角 θ_{IL} 的变化。(c)-(e)分别展示了在 $\theta_{IL} = \pi/6$、$\pi/4$ 和 $\pi/3$ 时，图(a)所示情形下计算得到的位移振幅场。模型由各向同性互补极值晶格（相应微结构见图 1）及其对应体组成。每种晶格均由 $N_x \times N_y = 50 \times 15$ 个单胞构成，包含共计 24000 根杆件。放大图展示了界面处的细节。频率为 $f = 3.6$ kHz 的 L 波高斯波束从 BM 等效均匀对应体斜入射至 BM-UM 晶格，可观察到完美波透射。完美匹配层设置为不可见。黑色虚线和白色箭头分别表示波传播方向和位移矢量，表明在 UM 中，偏振方向始终相对于 x_2 轴与波传播方向对称。

互补极端材料之间完美界面的边界条件为透射能量连续（也可视为沿双材料的特征力矢量 $\mathbf{t} = \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{n}$ 方向的粒子位移 [14]连续）以及界面处的应力 [27], 连续，可表示为

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{\mathrm{I}}\cdot\left(\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{n}^{\perp}\right)&=\mathbf{u}^{\mathrm{II}}\cdot\left(\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{n}^{\perp}\right),\\ \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{I}}\cdot\mathbf{n}^{\perp}&=\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{II}}\cdot\mathbf{n}^{\perp},\end{aligned}\tag{20}$$

其中， $\mathbf{n}^{\perp}=[0,\ 1]^{\mathrm{T}}$ 为界面的法线。上标 I 和 II 分别对应下半空间中的背景介质和上半空间中的透射介质。

此外，斯涅尔定律指出

$$k_{\mathrm{IL}}\sin\theta_{\mathrm{IL}}=k_{\mathrm{RL}}\sin\theta_{\mathrm{RL}}=k_{\mathrm{T1}}\sin\theta_{\mathrm{T1}}=k_{\mathrm{T2}}\sin\theta_{\mathrm{T2}}.\tag{21}$$

设各向同性UM和各向同性BM具有相同大小的弹性常数和密度，即 $C_{11}^{\mathrm{UM}}=C_{11}^{\mathrm{BM}}=K$ 和 $\rho^{\mathrm{UM}}=\rho^{\mathrm{BM}}=\rho$，从而UM和BM具有相同的波速 $c_{\mathrm{L}}=c_{\mathrm{T1}}=c_{\mathrm{T2}}=\sqrt{K/\rho}$。然后，根据式（21），可得 $\theta_{\mathrm{IL}}=\theta_{\mathrm{RL}}=\theta_{\mathrm{T1}}=\theta_{\mathrm{T2}}=\theta$ 和 $k_{\mathrm{IL}}=k_{\mathrm{RL}}=k_{\mathrm{T1}}=k_{\mathrm{T1}}=k$。随后，结合式（2）和式（19）至（21），可得三个齐次方程

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta_{\mathrm{x}} & \cos\theta_{\mathrm{x}}\\ 0 & \cos\left(\theta-\theta_{\mathrm{x}}\right) & \sin\left(\theta-\theta_{\mathrm{x}}\right)\\ 1 & \sin\left(\theta-\theta_{\mathrm{x}}\right) & -\cos\left(\theta-\theta_{\mathrm{x}}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{\mathrm{RL}}\\ A_{\mathrm{T1}}\\ A_{\mathrm{T2}}\end{bmatrix}=A_{\mathrm{IL}}\begin{bmatrix}\cos\theta\\ 0\\ -1\end{bmatrix}.\tag{22}$$

不失一般性，设 $A_{\mathrm{IL}}=1$。则通过求解式（22），可计算振幅的未知量 A_{RL}、 A_{T1} 和 A_{T2}

$$A_{\mathrm{RL}}=0,\ A_{\mathrm{T1}}=-\sin\left(\theta-\theta_{\mathrm{x1}}\right),\ A_{\mathrm{T2}}=\cos\left(\theta-\theta_{\mathrm{x2}}\right).\tag{23}$$

因此，反射L波消失，透射波的位移场可叠加为紧凑形式:

$$\mathbf{u}_{\mathrm{T}}=\left[-\sin\theta,\cos\theta\right]^{\mathrm{T}}\exp\left(\mathrm{i}k\left(x_1\sin\theta+x_2\cos\theta\right)-\omega t\right),\tag{24}$$

这表明，透射波总位移场的偏振与体波偏振的选择无关。偏振角为 $\theta_{\mathrm{TP}}=\min\{\langle\mathbf{u}_{\mathrm{T}},\mathbf{n}\rangle,\langle\mathbf{u}_{\mathrm{T}},-\mathbf{n}\rangle\}$，其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示两个向量之间的夹角。 A_{RL}、 A_{T} 和 θ_{TP} 随入射角 θ_{IL} 的变化如图 2(b) 所示。值得注意的是， A_{RL} 和 A_{T} 与 θ_{IL}无关，且始终分别等于 0 和 1。此外， θ_{TP} 与 θ_{IL} 呈线性依赖关系；当 $\theta_{\mathrm{IL}}=\pi/4$ 时， θ_{TP} 达到其最大值 $\pi/2$。也就是说，当 L 波以 $\theta_{\mathrm{IL}}=\pi/4$ 的角度入射到该界面时，将发生完美模式转换。另一方面，由式（24）可知， $\mathbf{u}_{\mathrm{T}}$ 始终关于 x_2轴对称，并以 $\mathbf{n}$ 为对称中心。

该波函数也可以被视为一种弹性波二极管。换言之，在与模态转换相对应的入射角下，L 波只能从各向同性BM一侧穿过界面传播至各向同性UM，而L波从各向同性UM一侧穿过界面传播至各向同性BM 则是不允许的。反之，S波只能沿模态转换路径从各向同性UM穿过界面传播至各向同性BM，但反向

传播是不允许的。我们指出，这一过程并不违反互易原理。

3.2 使用桁架模型进行数值验证

我们使用商业有限元分析（FEA）软件 COMSOL Multiphysics 5.6，通过数值模拟对上述发现进行了验证，并考察了均匀介质模型和晶格模型。此处采用的仿真模型如图 2(c) 所示。在模拟中，计算区域外围设置了完美匹配层（PMLs），以避免有限边界引起的反射。由于均匀互补极值材料属于线性柯西弹性，完美匹配层仍然适用。

当各向同性 UM 和 BM 晶格的几何参数满足式（18）所示的关系时，它们将具有相同的晶格常数： $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1^{(\mathrm{UM})} = \mathbf{a}_1^{(\mathrm{BM})}$ 和 $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_2^{(\mathrm{UM})} = \mathbf{a}_2^{(\mathrm{BM})}$ 。此外，根据式（13）—（14）和式（16）—（17），当

$$t_2 = \frac{\sqrt{5}\left(2\sqrt{2}-1\right)}{7} t_3,\ \rho_1 = \frac{5+3\sqrt{2}}{20}\rho_2, \tag{25}$$

互补极值晶格的有效弹性矩阵和有效质量密度满足第 3.1 节所示的关系，即 $C_{11}^{\mathrm{UM}} = C_{11}^{\mathrm{BM}}$ 和 $\rho^{\mathrm{UM}} = \rho^{\mathrm{BM}}$。除非另有明确说明，模拟中使用的材料常数和几何参数如下： $l_2 = 10$ 毫米、 $E_s =$ 8.6140 GPa、 $t_3 = 0.01$ 米和 $\rho_2 = 931.98$ 千克/米³ 。对于 UM 晶格，其材料常数和几何参数由式（18）和（25）确定。因此，两个晶格的有效弹性常数和有效质量密度分别为 $\mathrm{C}_{11}^{\mathrm{UM}} = \mathrm{C}_{11}^{\mathrm{BM}} = 2.25$ GPa 和 $\rho^{\mathrm{UM}} = \rho^{\mathrm{BM}} =$1000 千克/米³, ，两个晶格的晶格常数均为 $|\mathbf{a}_1| = |\mathbf{a}_2| = a = 30$ 毫米。图 2 中的微结构部分由各向同性 UM/BM 晶格构成。微结构部分的总尺寸为 1500 毫米 × 900 毫米。

为了检验我们设计的各向同性互补极值弹性晶格及其波函数，我们考察了高斯振幅调制 L 波束的波传输情况。该波束的频率为 $f = 3.6$ kHz，以 $\pi/6$、 $\pi/4$ 和 $\pi/3$ 的角度入射到复合界面上。图 2(c)–(e) 分别绘出了位移场振幅（以入射波归一化）的模拟结果，这些结果是使用 COMSOL Multiphysics 的固体力学与桁架模块在频域中获得的。如图 2(c)–(e) 所示，各向同性 UM/BM 晶格与其对应晶格之间实现了完美传输，这实际上证实了我们针对互补极端材料所采用的设计方法。模拟结果与理论预测吻合良好，不仅验证了互补极值微结构的有效性质，也验证了其界面的模态转换功能。

3.3 采用实体模型进行数值验证

考虑制造因素时，上述晶格中各个梁之间理想化的接头

应替换为实性连接。同时还应相应地调整梁的局部几何结构，大幅降低其弯曲刚度，这种设计称为柔顺机构 [38]。下文将通过柔顺机构制造的互补极端材料称为实体模型。互补极值晶格的实体模型可通过由双三角形单元构成的定制二维晶格实现，此时三角形尖端会合并成直径较小（理想情况下为零）的圆，以连接各个三角形 d 。基于图 1(b) 和 (e) 所示的桁架模型，分别设计了图 3(a) 和 (d) 所示的实体模型。为获得几何形状明确的物体，我们采用圆与若干三角形尖端的并集。此外，为确保两种晶格具有相同的等效质量密度，我们在 BM晶格中心正方形的直角边上添加了配重，如图 (d) 所示。

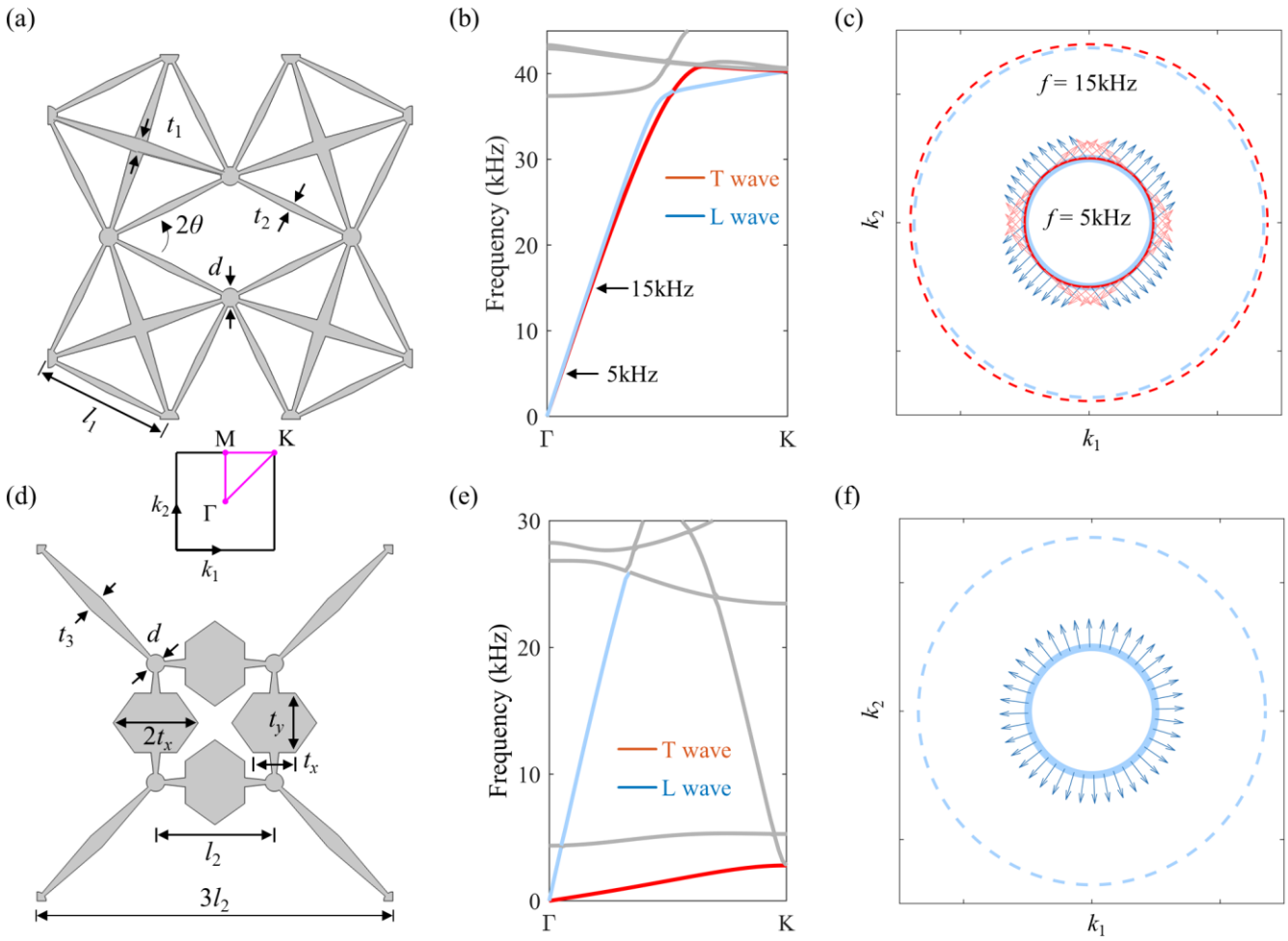


图3. 互补极端材料的实体模型及其波动性质。（a）各向同性UM。（b）和（c）分别为面板（a）中实体模型沿 ΓK 方向的能带结构，以及频率为 $f = 5$ kHz（实线）和15 kHz（虚线）时的等频曲线。蓝色能带对应L波，红色能带对应T波。箭头表示具有相应颜色的模态的偏振，该偏振由体积平均确定。倒易空间中的第一布里渊区（BZ）也进行了示意，其中其边界描绘为正方形。路径以粉色突出显示。计算均针对无限样品进行。（d）—（f）与（a）—（c）相同，但将UM替换为双材料。在（b）中，中心正方形的直角边上添加了配重，以增加其有效质量密度。

决定 UM/BM晶格定性行为的无量纲参数是以下六个比值： d/a、 t_1/a、 t_2/a、 t_3/a、 t_x/a 和 t_y/a。若考虑极限 $d/a \to 0$ [26, 29]，即可得到理想的有效 UM/BM。微结构的组成材料选用铝，其材料常数为： $E_s = 69$ GPa、 $\rho_s = 2700$ kg/m^3 和 $v_s = 0.33$。下文中 BM晶格采用的目标几何参数为 $l_2 = 5$ mm、 $t_3/l_2 = 0.1192$、$t_x/l_2 = 0.358$、 $t_y/l_2 = 0.5$ 和 $l_2/d = 6.5$。UM晶格的几何参数由方程（18）和（25）以及 $t_1/l_1 = 0.1019$ 和 $t_2/l_1 = 0.06$ 确定。因此，两个晶格具有相同的晶格常数 $a = 15$ mm，故 $d/a \approx 0.05$。虽然更小的 d/a 比值更为理想，但目前的数值已足以说明其波函数。

为获得互补极值弹性晶格的静态有效弹性常数，我们将这些弹性常数与实体模型各构型在低频极限下通过能带结构数值计算得到的不同方向相速度进行拟合（详见参考文献 [29-30] ）。由于未考虑共振效应，有效质量密度只需通过体积平均$\rho^{\text{eff}} = \rho V_{\text{solid}}/a^2$计算，其中 V_{solid} 为单胞中组成材料所占的体积。于是，图 3(a) 中均匀介质（UM）的有效弹性矩阵和有效质量密度为

$$\mathbf{C}^{\text{UM}} = \begin{bmatrix} 1.6162 & -1.5261 & 0 \\ -1.5261 & 1.6167 & 0 \\ 0 & 0 & 1.6153 \end{bmatrix} \text{GPa},\ \rho^{\text{UM}} = 502.37\ \text{kg/m}^3. \tag{26}$$

而 ，图 3(b) 中双材料（BM）的有效弹性矩阵和有效质量密度为 e

$$\mathbf{C}^{\text{BM}} = \begin{bmatrix} 1.5732 & 1.5693 & 0 \\ 1.5693 & 1.5732 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0179 \end{bmatrix} \text{GPa},\ \rho^{\text{BM}} = 500.44\ \text{kg/m}^3. \tag{27}$$

因此，式 (26) 和 (27) 均近似为各向同性，且其有效弹性常数和有效质量密度近似满足 $C_{11}^{\text{UM}} = C_{11}^{\text{BM}}$ 与 $\rho^{\text{UM}} = \rho^{\text{BM}}$ 的关系。图 3(b) 和 (e) 分别展示了图 3(a) 和 (b) 所示实体模型沿 ΓK 方向计算得到的能带结构。沿 ΓK 方向，当$f \le 35$ kHz 时，均匀介质的 L 波和 S 波简并，即两种体波的速度相同。此外，当 6 kHz $\le f \le$ 23 kHz 时，双材料仅支持 L 波。因此，当 6 kHz $\le f \le$ 23 kHz 时，两种极端材料的波动特性符合预期。图 3(c) 和 (f) 分别展示了两个实体模型在 5 kHz 和 15 kHz 频率下的等频曲线和偏振。再次，实体模型与桁架模型的结果表现出良好的一致性。

如图 4 所示，我们设计了一个有限元分析模型，用于研究固体极端材料的模态转换。该模型的几何形状可视为将图 2 中的微结构逆时针旋转 $\pi/4$ 后，再进行适当截断所得。实体模型的总尺寸为 297.75 mm × 546.99 mm。图 4(a) 展示了界面处的细节。一个调制高斯

脉冲信号 $\cos(2\pi f_c t) \times \exp(-(\pi f_c t/8)^2)$，其中心频率为 $f_c = 15$ kHz，用于激发向上传播的 L波；激励源为底部线源（在图 4(d) 中以灰色标出），其余边界均设为自由边界。高斯脉冲的持续时间为 0.2 ms，傅里叶变换后的半振幅带宽约为 12 kHz（即相对带宽为 0.8），如图 4(b) 和 (c) 所示。面板 (d) 和 (e) 分别展示了在 $t = 0.3$ 和 0.45 ms 时计算得到的位移振幅场。该计算使用 COMSOL Multiphysics 的固体力学模块在时域中进行，并以入射场归一化。可以发现，底部线源激发的向上传播纯 L波能够完美通过界面，并转换为向上传播的纯 S波，这与先前分析的结果一致。

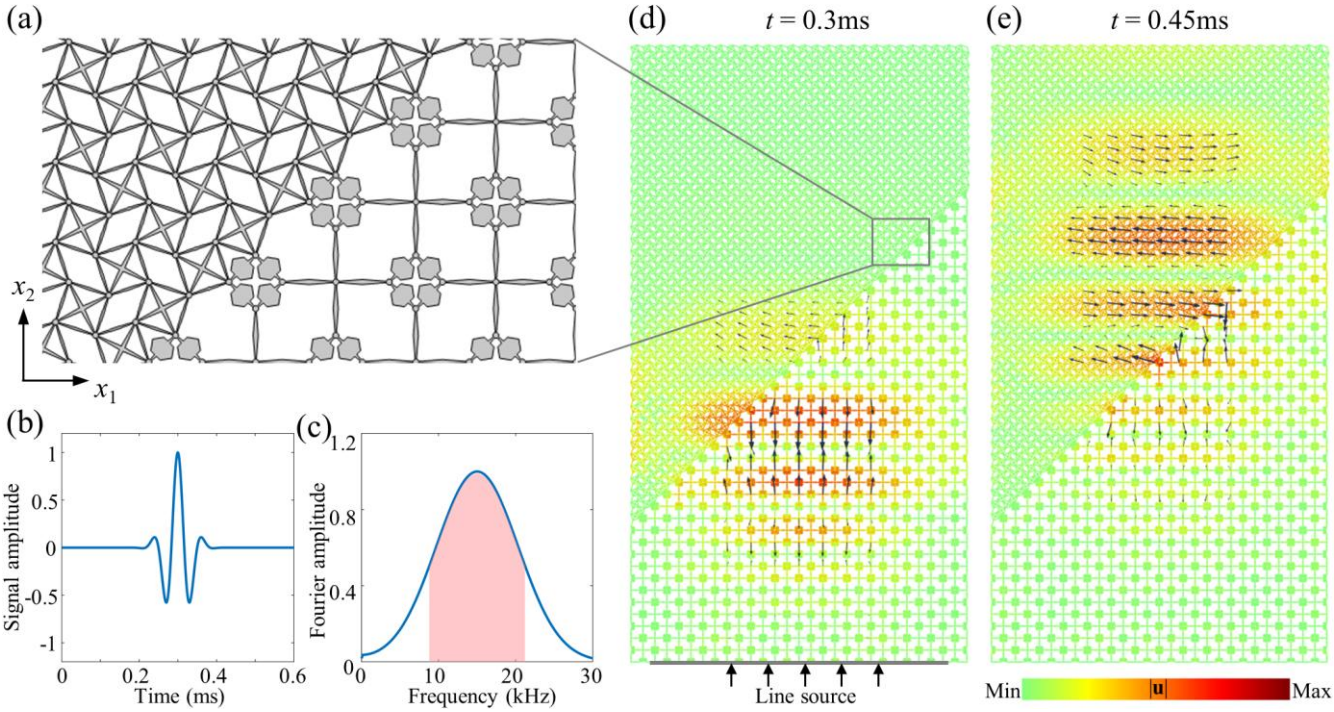


图 4. 互补极端材料实体模型及其波动特性的验证。(a) 仿真模型由各向同性 UM/BM 固体组成。(b) 用于激发向上传播纵波的高斯脉冲时域图，脉冲持续时间约为 0.2 ms。(c) 高斯脉冲经傅里叶变换后的振幅。中心频率为 15 kHz，半振幅带宽为 12 kHz。(d) 和 (e) 分别为 $t = 0.3$ ms 和 0.45 ms 时的仿真位移振幅。底部线源激发向上传播 L 波的调制高斯脉冲信号。其余边界均设为自由边界，这可能导致波包边界处的位移矢量与预期值存在偏差。黑色箭头表示位移矢量。

4. 透流式水下声隔离器

在二维情形下，声学流体（例如水）可视为各向同性BM，只能承受静水应力[13], ，这表明第3节所展示的波函数天然适用于水下声控制。例如，图2所示的BM晶格在长波极限下具有与水相同的

材料常数。由于仅利用静态力学性质而未引入共振机制，因此其本质上具有宽带特性，在低频波控制方面具有很高的价值。

随后，当考虑一个由各向同性UM制成、具有等腰直角三角形几何形状的块体时，便会产生一个有趣的问题：将该块体置于水中时，水下声波将表现出怎样的传播特性？根据先前的分析，当该块体被水包围时，在水中沿 $+x_1$ 方向传播的L波在穿过 $\pi/4$倾斜面后将转换为S波，如图5(a)所示。然后，转换后的S波将正入射到块体直角边与水之间的界面上，并由于S波与L波在固液界面上正入射时发生解耦而应被完全反射[39]，，即水下声被阻断。根据互易原理[40]，，只有沿 $-x_1$ 方向传播的S波才能依次穿过等腰直角三角形的直角边和斜边 块体，并最终转换为L波进行传播。由于水仅支持L波的传播，沿 $-x_1$ 方向行进的水下声将被阻断。按照这一思路，可以设计由各向同性UM制成的块体阵列，以禁止水下声的传播。

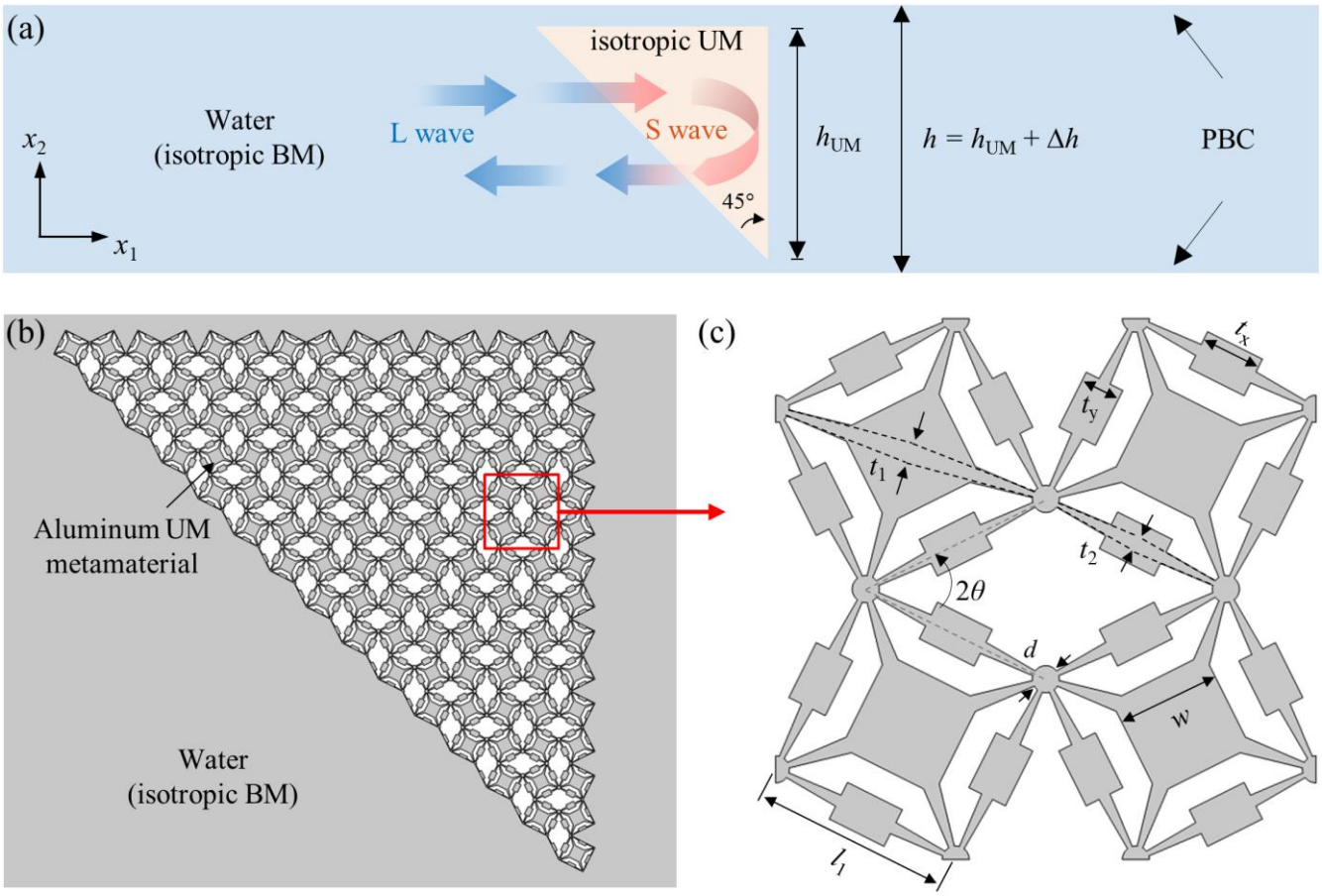


图5。（a）透流式水下声隔离器的原理。浅蓝色背景表示水。对模型的顶部和底部边界施加周期性边界条件（PBCs），以形成UM块阵列。蓝色和红色箭头分别表示L波和S波。（b）各向同性UM块体的实体模型，其

等腰直角三角形几何形状。直角边的长度为7.5a，三角形块体共包含240个小方块。其边界经过修改，以便与水平滑连接。(c) 均匀介质的单胞。为使该均匀介质具有与水相同的有效质量密度，分别在其对角线和边上添加了方形和矩形配重。

为减少计算量，针对后续波传播仿真，采用图 5(b) 所示的等腰直角三角形 UM 块体实体模型。需要注意的是，为使 UM 块阵列能够阻隔水下声，块体之间必须留有一定间隙。因此，该水下声隔离器本质上具有透水性，其理论水流速率可通过其开孔率直接评估[41-42]:

$$\delta_{\mathrm{V}}=\frac{\Delta h}{h}\times 100\ \%, \tag{28}$$

其中，h 为背景区域的高度。

图 5(c) 所示的放大图展示了其单胞的详细构型，该单胞由修改图 3(a) 中的结构得到。UM 的组成材料选用铝。后续所用几何参数为 $\tan\ \theta=0.5$，$l_1=12$ mm，$d=1.61$ mm，$t_1/l_1=0.1498$，$t_2/l_1=0.08$，$t_{\mathrm{x}}/t_2=3.75$，$t_{\mathrm{y}}/t_2=2.5$ 和 $w/t_1=3.25$。因此，晶格常数 $a=32.199$ mm ($d/a\approx 0.05$)。随后，图 5(c) 中 UM 的有效弹性矩阵和有效质量密度为

$$\mathbf{C}^{\mathrm{UM}}=\begin{bmatrix} 2.1688 & -2.0901 & 0 \\ -2.0901 & 2.1692 & 0 \\ 0 & 0 & 2.1121 \end{bmatrix}\ \mathrm{GPa},\ \rho^{\mathrm{UM}}=1058.91\ \mathrm{kg/m^3}. \tag{29}$$

因此，有效弹性常数和有效质量密度的量值与水的相应量值近似相同。将式（29）代回式（3），可得沿 ΓK 方向的体波速度:

$$c_{\mathrm{L}}^{[110]}\approx 1431.14\ \mathrm{m/s},\ c_{\mathrm{T}}^{[110]}\approx 1412.31\ \mathrm{m/s}, \tag{30}$$

这表明，UM实现了L波与水的阻抗匹配，$\rho^{\mathrm{UM}}c_{\mathrm{L}}^{[110]}/\rho^{\mathrm{W}}c_{\mathrm{W}}\approx 1.01$，其中 ρ^{W} 和 c_{W} 分别表示水的质量密度和声速。

使用 COMSOL Multiphysics 中的声学-固体耦合模块，在频域进行仿真。施加形式为 $p_{\mathrm{IN}}=\exp(-\mathrm{i}k_1x)$的声压场（$k_1=2\pi f/c_{\mathrm{W}}$ 为沿 x_1 轴的波数分量），在UM块体上产生入射振幅为1 Pa的水下声。左右两侧添加完美匹配层，以消除反射的影响。随后可通过以下公式计算隔声器的传声损失 L_{st}

$$L_{\mathrm{st}}=-20\log_{10}\left|p_{\mathrm{T}}/p_{\mathrm{IN}}\right|, \tag{31}$$

其中，p_{T} 表示透射波的振幅。

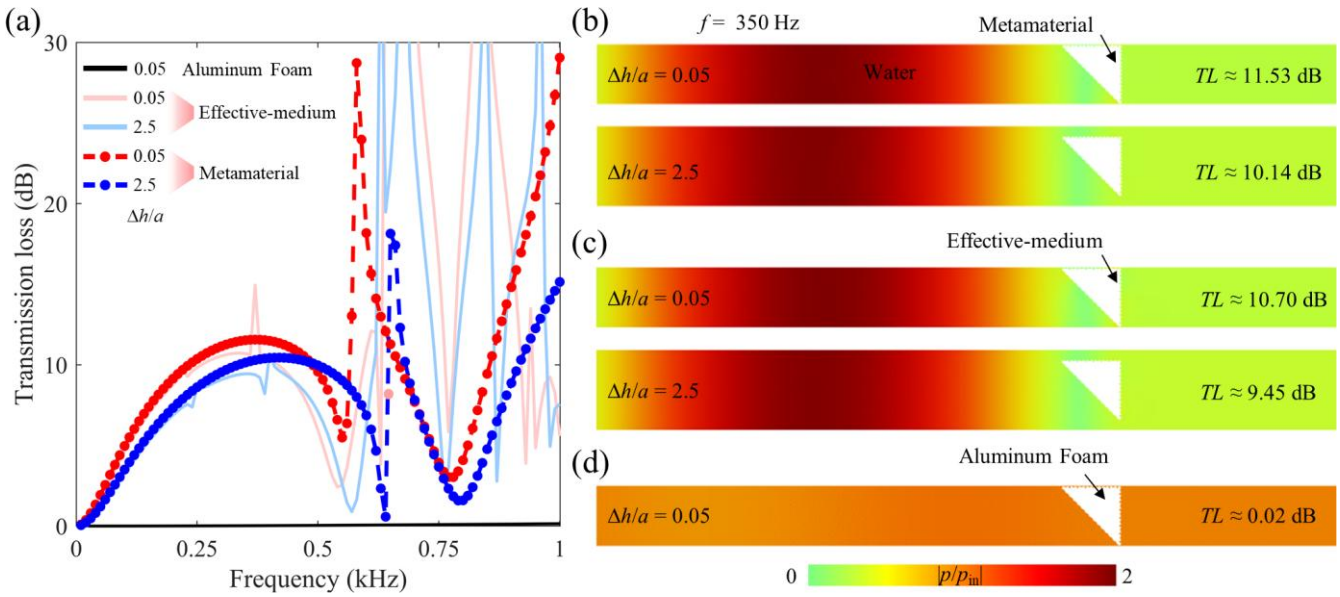


图 6. 用于说明基于UM的水下声隔离器功能的模拟结果。(a) 当 $\delta_{\mathrm{V}} = 0.67\%$ 和 25%（或等效地， $\Delta \mathrm{h}/a = 0.05$ 和 2.5）时，声传输损失 L_{st} 随入射波频率的变化。(b)-(d) 分别为中间三角形区域由基于铝的UM、有效介质和铝泡沫占据时，在 $\Delta \mathrm{h}/a = 0.05$ 和 2.5、 $f = 350$ Hz 下压力场的模拟振幅。

图6(a)显示了不同 δ_{V}下计算得到的传声损失 L_{st} 与入射波频率之间的关系，其中 $\delta_{\mathrm{V}} = 0.67\%$和25%（或等价地， $\Delta \mathrm{h}/a = 0.05$和2.5）分别对应相应情况。当 $\delta_{\mathrm{V}} \leq 25\%$和 $f \leq 1$ kHz时， L_{st} 的变化并不显著，离散模型与连续介质模型所得结果吻合良好。当 $\Delta \mathrm{h}/a = 0.05$和 $f = 350$ Hz时，离散模型表现出优异的隔声性能（$L_{\mathrm{st}} \approx 11.53$ dB），压力场的模拟振幅如图6(b)所示。入射波的归一化波长为 $\bar{\lambda} = c_{\mathrm{W}}/(\mathrm{h}_{\mathrm{UM}} f) \approx 17.75$。此外，在图(b)中，当 $\Delta \mathrm{h}/a = 2.5$时，尽管水流速率仍然较高，入射波仍被UM阵列大幅反射，从而形成较弱的透射波和显著的传声损失 $L_{\mathrm{st}} \approx 10.14$ dB。作为对比，将UM所占区域完全替换为其对应材料和铝泡沫（$E_{\mathrm{sf}} = (\rho_{\mathrm{sf}}/\rho_{\mathrm{s}})^2 E_{\mathrm{s}}$、 $\rho_{\mathrm{sf}} = \rho^{\mathrm{UM}}$和 $\nu_{\mathrm{sf}} = 0.3$ [43]），相应结果分别如图6(c)和(d)所示。同样，离散模型与连续介质模型的结果具有良好一致性。此外，在图6(d)中，透射波的振幅明显增强，而仅有很小一部分入射波被反射，表明其阻隔水下声的能力非常有限（$L_{\mathrm{st}} = 0.02$ dB）。

5. 结论

我们提出了互补极端材料的概念，并研究了其界面处的波动特性。在二维情形下，各向同性UM中的两个体模态简并，且支持任意偏振，这与传统柯西材料显著不同。当各向同性BM中的L波以 $\pi/4$的角度入射到与某种各向同性UM

（与各向同性BM互补）的界面时，它将完全转换为S波，即实现完美模式转换，这也可视为一种弹性波二极管。由于该机制仅利用静态力学性质而不引入共振机制，因此本质上具有宽带特性，对亚波长弹性波调控具有重要价值。我们还设计了相应的桁架模型和实体模型，并解析给出了桁架模型的等效材料常数。通过均匀化模型和离散模型，验证了宽带模式转换功能。

作为一项应用，我们通过数值模拟展示了一种透流水声隔声器，该隔声器由等腰直角三角形形状的各向同性UM块体阵列组成。模拟结果表明，我们提出的机制能够有效阻隔低频水下声，同时允许较高比例的水流通过。例如，当 $\delta_{\mathrm{V}}=25\%$且 $f=350$ Hz时，铝基单模块体阵列可实现 $L_{\mathrm{st}}\approx 10.14$ dB的隔声量。本研究为探索互补极端材料奇异的波动性质铺平了道路，并为控制低频弹性波和水下声波开辟了新途径。

6. 致谢

我们感谢国家自然科学基金委员会（项目编号：12532006）和珠海市基础与应用基础研究基金（项目编号：2320004002694）的资助。

附录

首先，考虑满足式（5）的UM的各向异性情形，其色散关系和偏振分别表示为式（8）和式（9）。当 $\alpha=+1$时，第一模式的等频曲线沿以下方向有四个开口：

$$n_1^2=\frac{\sqrt{C_{22}}}{\sqrt{C_{11}}+\sqrt{C_{22}}},\ n_2^2=\frac{\sqrt{C_{11}}}{\sqrt{C_{11}}+\sqrt{C_{22}}}, \tag{32}$$

其通过对式（8）进行若干数学运算得到。第二模式的等频曲线是闭合的，形状近似圆角正方形。然而， $\alpha=-1$ 从而得到两条闭合的等频曲线。例如，令$C_{11}=1$、 $C_{22}=2$、 $C_{33}=3$ 和 $\rho=1$, 均匀介质在 $\alpha=+1$ 和 $\alpha=-1$ 下的等频曲线与偏振分别如图A1（a）和（b）所示，与上述分析吻合良好。与此类均匀介质互补的双材料的色散关系和体波偏振分别由式（10）和式（11）给出，表明 α 的符号仅影响偏振，而对等频曲线的形状没有影响。

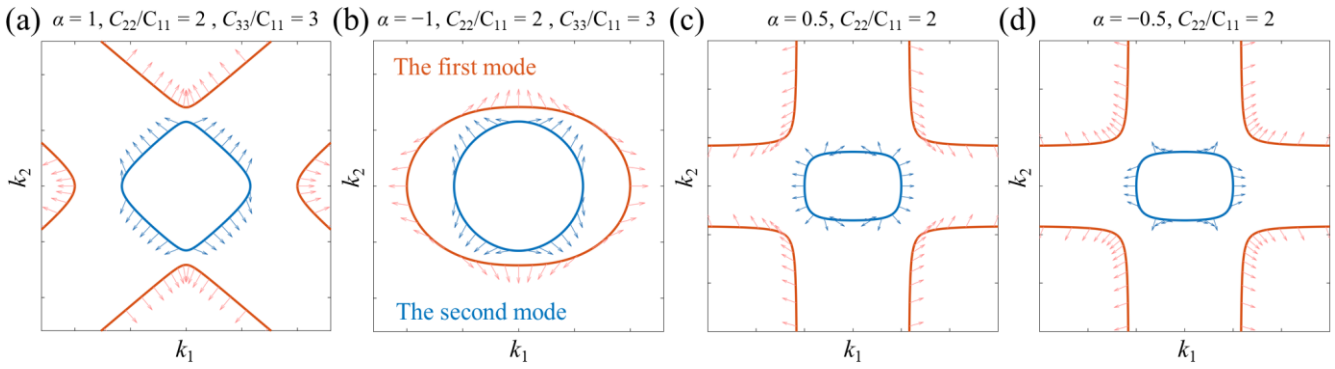


图 A1. 等频曲线与偏振。(a)-(b) 和 (c)-(d) 分别为弹性矩阵具有式 (5) 和式 (6) 形式的均匀介质。红色和蓝色实线分别表示第一模式和第二模式。箭头表示偏振。

然后，对于由式（6）的弹性矩阵表征的均匀介质，剪切应力构成其软模态。 $\alpha > 0$ 和 $\alpha < 0$ 分别表示具有正泊松比和负泊松比的均匀介质。在这种情况下，任何弹性矩阵形式为 $\mathbf{C} = \mathrm{diag}(0, 0, C_{33})$的双材料都与此类均匀介质互补，即其并非唯一。将式（6）的均匀介质弹性矩阵代入式（4），可得色散关系

$$\begin{aligned}\omega_1^2 &= \frac{1}{2\rho}\left(C_{11}k_1^2 + C_{22}k_2^2 - \sqrt{4\alpha^2 C_{11}C_{22}k_1^2k_2^2 + \left(C_{11}k_1^2 - C_{22}k_2^2\right)^2}\right),\\ \omega_2^2 &= \frac{1}{2\rho}\left(C_{11}k_1^2 + C_{22}k_2^2 + \sqrt{4\alpha^2 C_{11}C_{22}k_1^2k_2^2 + \left(C_{11}k_1^2 - C_{22}k_2^2\right)^2}\right),\end{aligned} \tag{33}$$

与式 (33) 对应的两个体波模态如下

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}}_1 &= \begin{bmatrix} C_{11}n_1^2 - C_{22}n_2^2 - \sqrt{4\alpha^2 C_{11}C_{22}n_1^2n_2^2 + \left(C_{11}n_1^2 - C_{22}n_2^2\right)^2} \\ 2\alpha\sqrt{C_{11}C_{22}}n_1n_2 \end{bmatrix},\\ \hat{\mathbf{u}}_2 &= \begin{bmatrix} C_{11}n_1^2 - C_{22}n_2^2 + \sqrt{4\alpha^2 C_{11}C_{22}n_1^2n_2^2 + \left(C_{11}n_1^2 - C_{22}n_2^2\right)^2} \\ 2\alpha\sqrt{C_{11}C_{22}}n_1n_2 \end{bmatrix},\end{aligned} \tag{34}$$

这表明改变 C_{11} 和 C_{22} 可以使偏振和等频曲线呈现丰富多样的变化。不过， α 的符号只影响偏振，不会改变等频曲线的形状，另见图 A1(c) 和 (d)。例如，令 $C_{22} = 2C_{11} = 2$ 和 $\rho = 1$，均匀介质取 $\alpha = 0.5$ 和 -0.5 时的等频曲线与偏振分别如图 A1(c) 和 (d) 所示。第一模式的等频曲线沿 x_1 轴和 x_2 轴各有两个开口，而第二模式的等频曲线则是闭合的，形状类似圆角矩形。

此外，将弹性矩阵 $\mathbf{C} = \mathrm{diag}(0, 0, C_{33})$（即式（6）中的双材料补全为均匀介质）代入式（4），可得到色散关系

$$\omega_1^2 = 0,\ \omega_2^2 = k^2 C_{33}/\rho, \tag{35}$$

与式（35）对应的两种体波模态如下

$$\hat{\mathbf{u}}_1 = \begin{bmatrix} -n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{u}}_2 = \begin{bmatrix} n_2 \\ n_1 \end{bmatrix}. \tag{36}$$

因此，双材料仅具有一种非零体波，其对应的等频曲线为一个闭合圆。此外，偏振 $\hat{\mathbf{u}}_2$ 和波传播 $\mathbf{n}$ 始终关于（x_1， x_2）平面的对角线对称。

参考文献

[1] X. Lurton，《水下声学导论：原理与应用》，Springer Science & Business Media，2002年。[2] R.P. Hodges，《水下声学：声呐分析、设计与性能》，John Wiley & Sons，2011年。[3] L.E. Kinsler, A.R. Frey, A.B. Coppens, J.V. Sanders，《声学基础》，John wiley & sons，2000年。[4] M. Stojanovic, J. Preisig，水下声通信信道：传播模型与统计表征，IEEE Commun. Mag.，47(1) (2009) 84-89。[5] J. Mei, G.C. Ma, M. Yang, Z.Y. Yang, W.J. Wen, P. Shen，暗声学超材料作为低频声音的超吸收体，Nat. Commun.，3(1) (2012) 756。[6] C.N. Layman, C.J. Naify, T.P. Martin, D.C. Calvo, G.J. Orris，用于声学五模态应用的高度各向异性元件，Phys. Rev. Lett.，111(2) (2013) 024302。[7] Y. Chen, B.H. Zhao, X.N. Liu, G.K. Hu，用于低频水声隔离的高度各向异性六方晶格材料，Extreme Mech. Lett.，40 (2020) 100916。[8] B.H. Zhao, D.W. Wang, P.Z. Zhou, X.N. Liu, G.K. Hu，用于隔离低频水下声的承载材料设计，Phys. Rev. Applied，17 (3) (2022) 034065。[9] S.C Qu, N. Gao, A. Tinel, B. Morvan, V. Romero-García, J.P. Groby, P. Sheng，具有阻抗匹配复合材料的水下超材料吸声器，Sci. Adv.，8 (20) (2022) eabm4206。[10] N. Aberkane-Gauthier, V. Romero-García, D. Lecoq, M. Molerón, C. Lagarrigue, C. Pézerat，带周期性夹杂物的软质固体亚波长板：对声传输损失的影响，J. Sound Vib.，571 (2024) 118005。[11] Z.R. Cai, S.D. Zhao, Z.D. Huang, Z. Li, M. Su, Z.Y. Zhang, Z.P. Zhao, X.T. Hu, Y.S. Wang, Y.L. Song，用于局域共振声学超材料的气泡结构，Adv. Funct. Mater.，29 (51) (2019) 1906984。[12] L. Tong, Z. Xiong, Y.X. Shen, Y.G. Peng, X.Y. Huang, L. Ye, M. Tang, F.Y. Cai, H.R. Zheng, J.B. Xu, G.J. Cheng, X.F. Zhu，声学超表皮隔离器，Adv. Mater.，32(37) (2020) 2002251。[13] A.N. Norris，声学超流体，J. Acoust. Soc. Am. 125 (2009) 839-849。[14] Y. Wei, G.K. Hu，极值弹性材料的波动特性，Extreme Mech. Lett.，55 (2022) 101789。[15] T. Bückmann, M. Thiel, M. Kadic, R. Schittny, M. Wegener，由五模式超材料制成的弹性力学不可感知隐身斗篷，Nat. Commun. 5 (2014) 4130。[16] R. Schittny, T. Bückmann, M. Kadic, M. Wegener，宏观三维五模式超材料的弹性测量

五模式超材料。应用物理快报，103 (2013) 231905。[17] M. Kadic, T. Bückmann, R. Schittny, M. Wegener，三维五模式超材料的各向异性形式，New J. Phys.，15 (2013) 023029。[18] C. Cai, Z.H. Wang, Q.W. Li, Z. Xu, X.G. Tian，具有非对称双锥单元的五模式超材料，J. Phys. D Appl. Phys.，17 (2015) 175103。[19] Y. Chen, X.N. Liu, P. Xiang, G.K. Hu，用于水下声波控制的五模式材料，Adv. Mech, 46 (2016) 382。[20] Z. Sun, H. Jia, Y. Chen, Z. Wang, J. Yang，基于五模式超流体设计水下声学弯曲器，J. Acoust. Soc. Am.，3 (2018) 1029。[21] Z. Sun, X. Sun, H. Jia, Y. Bi, J. Yang，基于晶格五模式超流体的准各向同性水下声学地毯隐身罩，应用物理快报，114 (2019) 94101。[22] Y. Chen, X.N. Liu, G.K. Hu，非完美性和内部约束对采用非理想五模式材料的声学隐身罩的影响，J. Sound Vib.，458 (2019) 62。[23] Y. Chen, G.K. Hu，用于将水下柱面波转换为平面波的宽带高透射率超表面，Phys. Rev. Appl.，12 (2019) 044046。[24] G.W. Milton, A.V. Cherkaev，哪些弹性张量可以实现？J. Eng. Mater. Technol.，117 (1995) 483。[25] M. Kadic, T. Bückmann, R. Schittny, P. Gumbsch, M. Wegener，体积模量和质量密度可独立调节的五模式超材料，Phys. Rev. Appl.，2 (2014) 54007。[26] M. Kadic, T. Bückmann, N. Stenger, M. Thiel, M. Wegener，五模式力学超材料的实用性，应用物理快报，100 (2012) 191901。[27] M.Y. Zheng, X.N. Liu, Y. Chen, H. Miao, R. Zhu, G.K. Hu，仅承载剪切波的非共振各向异性单偏振固体的理论与实现，Phys. Rev. Appl.，12 (2019) 014027。[28] H.W. Dong, S. Zhao, X. Miao, C. Shen, X. Zhang, Z. Zhao, C. Zhang, Y. Wang, L. Cheng，通过拓扑优化定制宽带五模式超材料，J. Mech. Phys. Solids，152 (2021) 104407。[29] M.F. Groß, J.L.G. Schneider, Y. Wei, Y. Chen, S. Kalt, M. Kadic, X.N. Liu, G.K. Hu, M. Wegener，作为声子偏振器的四模式超材料，Adv. Mater.，35 (2023) 2211801。[30] Y. Chen, X.N. Liu, G.K. Hu，晶格五模式声学隐身罩，Sci. Rep-UK，5 (2015) 15745。[31] Y. Chen, M.Y. Zheng, X.N. Liu, Y. Bi, Z. Sun, P. Xiang, J. Yang, G.K. Hu，水下声学宽带固体隐身罩，Phys. Rev. B，95 (2017) 180104。[32] D.W. Wang, B.H. Zhao, Y. Wei, J. Yang, G.K. Hu，液压消声器的材料设计，Phys. Rev. Applied，22 (3) (2024) 034010。[33] Y. Wei, X.N. Liu, G.K. Hu，四模式材料：其设计方法与波动特性，Mater. Des.，210 (2021) 110031。[34] Y. Wei, M. Cai, G.K. Hu，弹性双折射超材料与四分之一波片，Int. J. Mech. Sci.，281 (2024) 109684。[35] J. Achenbach，《弹性固体中的波传播》，Elsevier，2012年。[36] R.G. Hutchinson, N.A. Fleck，周期桁架的结构性能，J. Mech. Phys. Solids，54 (2006)

756.[37] T.C. Lubensky, C.L. Kane, X.M. Mao, A. Souslov, K. Sun, 临界配位晶格中的声子与弹性, 物理学进展报告, 78 (2015年) 073901.[38] L.L. Howell, 柔顺机构, 威立, 2001年.[39] J.L. Rose, 固体介质中的超声导波, 剑桥大学出版社, 2014年.[40] J.D. Achenbach, 弹性动力学中的互易性, 剑桥大学出版社, 2003年.[41] H.L. Zhang, Y.F. Zhu, B. Liang, J. Yang, J. Yang, J.C. Cheng, 全向通风声屏障, 应用物理快报, 111 (20) (2017年) 203502.[42] X. Xiang, X.X. Wu, X. Li, P. Wu, H. He, Q.J. Mu, S.X. Wang, Y.Z. Huang, W.J. Wen, 用于自由气流环境中消声应用的超开放通风超材料吸声体, Extreme Mech. Lett., 39 (2020年) 100786.[43] Y. Sun, B. Amirrasouli, S.B. Razavi, Q.M. Li, T. Lowe, P. J. Withers, 泡沫材料压缩过程中弹性模量的变化, 材料学报, 110 (2016年) 161-174.