arXiv:2603.08169v1 [math.RT] 9 Mar 2026

温和遗传代数的 Ringel–Hall代数中的本原元

邓邦明 和 WEIHAO LI

摘要。我们研究与带自同构的箭图相关的、有限域上的代数 A 的 Ringel–Hall代数 $\mathcal{H}(A)$ 中的本原元。当 A 为温和遗传代数时，我们描述了 $\mathcal{H}(A)$ 中的本原元，将 Hennecart（IMRN 2021）[18] 关于温和箭图的结果加以推广和改进。此外，我们还获得了一个关于由正则 A-模生成的 $\mathcal{H}(A)$ 子代数中本原元的恒等式，并据此为 $\mathcal{H}(A)$ 中本原元的空间构造了一个显式基。

1. 引言

Steinitz [43] 和 Hall [17] 后来引入的经典Hall代数同对称函数环同构，在对称群和一般线性群表示的研究中发挥着重要作用；参见 [29]。它是一个由本原元生成的分次Hopf代数。

在 20 世纪 90 年代，Ringel [34] 推广了 Steinitz 和 Hall 的方法，并从有限型环上有限长度模的范畴构造出一个结合代数。事实证明，这些如今称为 Ringel–Hall代数的代数，与 Kac–Moody 李代数及其量子包络代数有着深刻联系。事实上，根据 Ringel [35] 和 Green [16], 关于有限域 $k = \mathbb{F}_q$上的有限维遗传代数 A 的结果，其 Ringel–Hall代数 $\mathcal{H}(A)$ 中由简单模生成的子代数，同构于将 v 特化为 $\sqrt{q}$ 后，与 A 相关联的（可对称化）Kac–Moody 李代数 $\mathfrak{g}$ 的量子包络代数 $U_v(\mathfrak{g})$ 的正部分。

Sevenhant 和 Van den Bergh [40] 进一步证明（另见 [11]），整个代数 $\mathcal{H}(A)$ 由其本原元生成，并且同构于 Borcherds [2]意义下某个广义 Kac–Moody 李代数的量子包络代数的正部分。受此启发， [40], Deng 和 Xiao [11] 证明，在 $\mathcal{H}(A)$ 中，固定维数向量对应的本原元空间的维数是关于 q 的有理系数多项式，并将其与 Kac猜想联系起来；Kac猜想关注的是箭图的绝对不可分解表示的数量。这些多项式的生成函数已在 [3], 中得到研究，其中本原元被称为尖点函数；此外，固定维数向量对应的绝对尖点函数的维数也已被引入并加以研究。

在 [1], 中，作者证明了每个有限生成且余有限生成的正合范畴的 Hall代数——包括每个有限生成 $\mathbb{F}_q$代数上的有限维模范畴——都由其本原元生成。因此，描述给定 Ringel–Hall代数中的本原元颇有意义。

2000 数学主题分类。16G20, 16G60,17B37.

对于正整数 r，令 C_r 表示具有 r 个顶点的循环箭图。我们用 $\mathbf{Rep}_{\mathbb{F}_q}C_r$（分别用 $\mathbf{Rep}^0_{\mathbb{F}_q}C_r$）表示 C_r 在 $\mathbb{F}_q$上的有限维（分别为幂零）表示范畴。路径代数 $\mathbb{F}_qC_r$的Ringel–Hall 代数 $\mathcal{H}(\mathbb{F}_qC_r)$ 含有由 C_r 在 $\mathbb{F}_q$ 上的幂零表示生成的子代数 $\mathcal{H}^0(\mathbb{F}_qC_r)$，该子代数已得到广泛研究；例如参见 [36, 26, 44, 41, 5, 7]。当 $r = 1$时，即 C_1为Jordan箭图时， $\mathcal{H}^0(\mathbb{F}_qC_1)$恰为经典Hall代数，其本原元可以显式构造；参见 [29, 第 III 章第 7]节。具体而言，令 S 为 C_1 在 $\mathbb{F}_q$上的唯一简单幂零表示；对于 $t \geqslant 1$，令 $S[t]$ 表示 C_1 的维数为 t的不可分解幂零表示。对于每个分拆$\lambda = (\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_m)$，令

$$I_\lambda = \bigoplus_{i=1}^{m} S[\lambda_i]. \tag{1.0.1}$$

那么这些元素

$$p_n^{(1)} = p_n = \sum_{\lambda\vdash n}\Big(\prod_{s=1}^{\ell(\lambda)-1}(1-q^s)\Big)[I_\lambda],\ \forall\, n \geqslant 1$$

是本原元，并构成 $\mathcal{H}^0(\mathbb{F}_qC_1)$ 中的一组极小生成元，其中 λ 是 n 的一个分拆， $\ell(\lambda)$ 是 λ 的长度，而 $[I_\lambda]$ 表示 I_λ 的同构类（isomorphism class）。

一般而言，基于 Schiffmann 的工作[41], ，Hubery [21] 构造了一族中心元 $\mathcal{H}^0(\mathbb{F}_qC_r)$，并导出了本原元 $p_n^{(r)}$，其表达式为

$$p_n^{(r)} = \sum_{i=1}^{r}[M_i] + \text{other terms},$$

其中 M_1、……、M_r 是 C_r 中维数为 nr 的两两不同构的不可分解幂零表示。文献 [28] 给出了用这些中心元的单项式表示 $p_n^{(r)}$ 的一个公式。

最近，Hennecart [18] 研究了温和箭图 Q 的路径代数 $A = \mathbb{F}_qQ$ 的Ringel–Hall代数$\mathcal{H}(A)$ 中的本原元，并证明：在 $\mathcal{H}(A)$ 中，维数向量为固定正虚根的本原元空间，是定义在具有相同维数向量的正则本原元空间上的某个非零线性函数的核。证明基于循环箭图情形下本原元的描述，以及从克罗内克箭图的有限维表示范畴到 Q 的有限维表示范畴的著名嵌入。

本文的主要目的是应用 Hennecart 的方法，对任意 tame hereditary $\mathbb{F}_q$-代数的 Ringel–Hall代数中的本原元给出更明确的描述。为此，我们研究与带自同构 σ 的箭图 Q 相关联的 $\mathbb{F}_q$-代数 $A = \mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$ 的 Ringel– Hall代数 $\mathcal{H}(A)$，该自同构在[6]中引入；定义见第 2 节。令 A-mod 表示有限维 A-模的范畴。根据定义， $\mathcal{H}(A)$ 是一个复向量空间，其基由模 $M \in A$-mod 的同构类 $[M]$ 构成，并且它是一个（扭曲）双代数，其乘法和余乘法 Δ 关于对称双线性型 $\{-, -\}$ 互为伴随，该型定义为

$$\{[M], [N]\} = \delta_{[M],[N]}\frac{1}{a_M},\ \forall\, M, N \in A\text{-mod}$$

其中 a_M 是自同构群 Aut(M) 的基数，也就是说，有

$$\{xy, z\} = \{x \otimes y, \Delta(z)\}, \forall\, x, y, z \in \mathcal{H}(A).$$

这一事实确实意味着， $\mathcal{H}(A)$ 由本原元生成。

现在令 Q 为一个无环温和箭图，即 $A = \mathfrak{A}(Q,\ \sigma;\ q)$ 是一个温和遗传代数，并令 I 表示单对象 A-模的同构类集合。对于每个 $M \in A$-模，记其维数向量为 **维数** M M。则 $\mathcal{H}(A)$ 是 $\mathbb{N}I$-分次的，且

$$\mathcal{H}(A) = \bigoplus_{\mathbf{d} \in \mathbb{N}I} \mathcal{H}(A)_{\mathbf{d}},$$

其中 $\mathcal{H}(A)_{\mathbf{d}}$ 由满足 **维数** $M = \mathbf{d}$的 $[M]$ 张成。令 δ 为与 $(Q,\ \sigma)$ 相关的根系中的最小正虚根，并且对每个 $n \geqslant 1$，置

$$\mathcal{H}(A)^{\mathrm{prim}}_{n\delta} = \{x \in \mathcal{H}(A)_{n\delta} \mid \Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x\}.$$

已知， A-模的全子范畴 $\mathscr{R}_A$ （由正则 A-模组成）对扩张封闭。这定义了 $\mathcal{H}(A)$ 的一个子代数 $\mathcal{H}(\mathscr{R}_A)$。此外， $\mathcal{H}(A)$ 的余乘法限制为 $\mathcal{H}(\mathscr{R}_A)$ 上的余乘法 $\Delta_{\mathscr{R}}$，使得$\mathcal{H}(\mathscr{R}_A)$ 成为一个双代数。进一步地，置

$$\mathcal{H}(\mathscr{R}_A)^{\mathrm{prim}}_{n\delta} = \{x \in \mathcal{H}(\mathscr{R}_A)_{n\delta} \mid \Delta_{\mathscr{R}}(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x\}.$$

对[18, 命题6.1和6.2] 稍作修改可得

$$\mathcal{H}(A)^{\mathrm{prim}}_{n\delta} \subset \mathcal{H}(\mathscr{R}_A)^{\mathrm{prim}}_{n\delta}.$$

如在 [18],集合中

$$\mathbf{1}^{\mathrm{reg}}_{n\delta} = \sum_{\substack{[M],\, M \in \mathscr{R}_A \\ \mathbf{dim}\, M = n\delta}} [M] \in \mathcal{H}(A)_{n\delta}$$

并定义一个线性函数

$$\mathbb{I}^{\mathrm{reg}}_{n\delta} = \{-, \mathbf{1}^{\mathrm{reg}}_{n\delta}\} : \mathcal{H}(\mathscr{R}_A)^{\mathrm{prim}}_{n\delta} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \{z, \mathbf{1}^{\mathrm{reg}}_{n\delta}\}.$$

我们的主要目的之一是证明以下定理，该定理将 [18,定理1.1] 推广到任意温和遗传 $\mathbb{F}_q$-代数。

定理1.1。 设 Q 是一个带自同构 σ的无环温和箭图。则对于每个$n \geqslant 1$,

$$\mathcal{H}(A)^{\mathrm{prim}}_{n\delta} = \mathrm{Ker}\, \mathbb{I}^{\mathrm{reg}}_{n\delta}.$$

该定理确实是以下公式的推论

$$\left\{p^{(r)}_n, \mathbf{1}^{(r)}_{n\delta}\right\} = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{\prod_{s=1}^{\ell(\lambda)-1}(1 - q^s)}{a_\lambda(q)} \quad (n \geqslant 1) \tag{1.1.1}$$

在 $\mathcal{H}^0(\mathbb{F}_q C_r)$，其中 $a_\lambda(q)$ 是 I_λ 的自同构群的基数，并且

$$\mathbf{1}^{(r)}_{n\delta} = \sum_{\substack{[M],\, M \in \mathrm{Rep}^0_{\mathbb{F}_q} C_r \\ \mathbf{dim}\, M = n\delta}} [M].$$

这个公式对于 $r = 1$ 显然成立。当 $r > 1$ 时，可以通过将 $\backsim\mathcal{H}^0(\mathbb{F}_q C_r)$ 视为某个类型为 A 的无环温和箭图 Q 的 $\mathcal{H}(\mathbb{F}_q Q)$ 的子代数而得出。

此外，通过对 Ringel–Hall代数应用傅里叶变换，我们得到恒等式

$$\sum_{\lambda\vdash n}\frac{\prod_{s=1}^{\ell(\lambda)-1}(1-q^s)}{a_\lambda(q)}=\frac{1}{q^n-1},\ \forall\, n\geqslant 1, \tag{1.1.2}$$

这确实使我们能够给出 $\mathcal{H}(A)^{\mathrm{prim}}_{n\delta}$ 的一个显式基。我们以 $A=\mathbb{F}_qQ$ 的情形为例来说明，其中 $A=\mathbb{F}_qQ$ 是一个无环温和箭图 Q （带有 $\sigma=\mathrm{id}$）。在这种情况下，$\mathscr{R}_A$ 由无穷多个管组成，这些管可以用射影直线 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q}$ 参数化。对于每个 $x\in\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q}$，令 $\deg(x)$ 表示其次数，并令 $\mathcal{T}_x$ 为 $\mathscr{R}_A$ 中相应的管。于是，每个 $\mathcal{T}_x$ 都定义了 $\mathcal{H}(\mathscr{R}_A)$ 的一个子代数 $\mathcal{H}(\mathcal{T}_x)$，该子代数同构于 $\mathcal{H}^0(\mathbb{F}_{q^d}C_r)$，其中 $d=\deg(x)$，而 r 是 $\mathcal{T}_x$ 的秩。对于每个 $m\geqslant 1$，上文定义的本原元 $p_m^{(r)}\in\mathcal{H}^0(\mathbb{F}_{q^d}C_r)$（在 $\mathbb{F}_{q^d}$ 上）导出一个本原元

$$p_m(x)\in\mathcal{H}(\mathscr{R}_A)^{\mathrm{prim}}_{md\delta},$$

它满足

$$\left\{p_m(x),\mathbf{1}^{\mathrm{reg}}_{md\delta}\right\}=\sum_{\lambda\vdash m}\frac{\prod_{s=1}^{\ell(\lambda)-1}(1-q^{ds})}{a_\lambda(q^d)}.$$

结合恒等式 (1.1.2)，这给出了以下结果，将 [18,Cor. 6.10] 推广到了完全一般的情形。

定理1.2。设 Q 是一个无环温和箭图，满足 $A=\mathbb{F}_qQ$；对于每个 $n\geqslant 1$，固定一个 $x\in\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q}$，使得 $n=m\deg(x)$ 对某个 $m\geqslant 1$ 成立。则集合

$$\left\{p_m(x)-p_t(y)\;\middle|\; y\in\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q},\ y\neq x,\quad and\quad t\deg(y)=n\right\}$$

是 $\mathcal{H}(A)^{prim}_{n\delta}$ 的一个基。

本文安排如下。第 2 节简要介绍与带有自同构 σ 的箭图 Q 相关的 Ringel–Hall代数 $\mathcal{H}_v(Q,\sigma)$ 及其本原元。第 3 节将 $\mathcal{H}_v(Q,\sigma)$ 中的本原元与其由 A-模的全子范畴定义的子代数中的本原元联系起来，重点讨论正则 A-模的全子范畴，以及由 A-模的正交例外对所产生的全子范畴。第 4 节回顾循环箭图的幂零表示的 Ringel–Hall代数中本原元的一种构造，其中包括经典Hall代数。第 5 节描述当 Q 是一个无环温和箭图时， $\mathcal{H}_v(Q,\sigma)$ 中的正则本原元。定理 1.1 的证明见第 6 节，而定理1.2则由定理1.1和（1.1.2）中的单位元推出；后者的证明涉及 Ringel–Hall代数的傅里叶变换，并见第 7 节。

全文中， $\mathbb{F}_q$ 表示一个含有 q 个元素的有限域， A 通常表示一个$\mathbb{F}_q$-代数，并令 A-mod 表示有限维（左） A-模所构成的范畴。对于一个模 $M\in A$-mod，我们用 $[M]$ 表示 M的同构类，并且对于每个正整数 $s\geqslant 1$，记为

$$sM=\underbrace{M\oplus\cdots\oplus M}_{s}.$$

对于 A-模的一个类 $\mathcal{X}$，令$\mathrm{add}\,\mathcal{X}$ 表示 A-mod 中由 $\mathcal{X}$中 A-模的有限直和的直和项所构成的全子范畴。

2. Ringel–Hall代数及其本原元

在本节中，我们回顾有限域上代数 A 的（扭曲）Ringel–Hall代数的定义，并在 A 与带自同构的箭图相关联时，陈述其本原元的若干性质。

设 A 是有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的有限生成代数。对于 $L, M_1, \ldots, M_t \in A$-模，令 $F^L_{M_1,\ldots,M_t}$ 表示子模滤过的数量

$$L = L_0 \supseteq L_1 \supseteq \cdots \supseteq L_{t-1} \supseteq L_t = 0$$

使得 $L_{i-1}/L_i \cong M_i$ 对所有 $1 \leq i \leq t$ 都成立。由于 L 是有限集，$F^L_{M_1,\ldots,M_t}$ 是一个非负整数，称为与 $L, M_1, \ldots, M_t$ 对应的 霍尔数 。特别地，若 $t = 2$, $F^L_{M_1,M_2}$ 是满足 $X \cong M_2$ 且 $L/X \cong M_1$ 的 L 的子模 X 的数量。对于每个 $M \in A$-模，令 $a_M = |\mathrm{Aut}_A(M)|$ 表示 M 的自同构群的阶。

按照 Ringel [34], 的定义， A 的 Hall代数 $H(A)$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的代数，其基为 $\{[M] \mid M \in A\text{-mod}\}$，即 A-mod 中模的同构类集合，乘法定义如下：

$$[M] \diamond [N] = \sum_{[L]} F^L_{M,N}[L], \ \forall\, M, N \in A\text{-mod}, \tag{2.0.1}$$

其中，求和遍历所有 A-模 L 的同构类。由于 A 是有限生成的，这确实是有限和。于是， $H(A)$ 是一个结合代数，其单位元 $[0]$, 为零模的同构类。此外，根据 Green [16] 的一项结果， $H(A)$ 具有余代数结构，其余乘法定义如下：

$$\Delta([M]) = \sum_{[X],[Y]} \frac{a_X a_Y}{a_M} F^M_{X,Y}\,[X] \otimes [Y], \ \forall\, M \in A\text{-mod}.$$

通常，若元素 $x \in H(A)$ 满足

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x.$$

以下结果是 [1, 主定理 1.2], 的推论，它推广了 Sevenhant–Van den Bergh [39] 关于箭图路径代数的一个结果。

命题 2.1. 设 A 是有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的有限生成代数。那么，$H(A)$ 由其本原元生成。

本文主要研究与带有自同构的箭图相关联的有限生成 $\mathbb{F}_q$-代数，以及通过相应欧拉形式定义扭曲乘法的 Ringel–Hall代数。

设 $Q = (Q_0, Q_1)$ 为有限箭图，其顶点集为 Q_0，箭集为 Q_1。对于 Q_1 中的每个箭 ρ，分别用 $h\rho$ 和 $t\rho$ 表示 ρ 的箭头和箭尾。设 σ 为 Q 的自同构，即 σ 是 Q_0 上以及 Q_1 上的置换，并且对每个 $\rho \in Q_1$，满足 $\sigma(h\rho) = h\sigma(\rho)$ 和 $\sigma(t\rho) = t\sigma(\rho)$。

设 $\overline{\mathbb{F}}_q$ 为 $\mathbb{F}_q$ 的代数闭包， $\mathbb{F}_q Q$ 为 Q 在 $\mathbb{F}_q$ 上的路径代数。 Q 的自同构 σ 诱导一个弗罗贝尼乌斯态射

$$F_{Q,\sigma;q} : \overline{\mathbb{F}}_q Q \longrightarrow \overline{\mathbb{F}}_q Q, \ \sum_s x_s p_s \longmapsto \sum_s x_s^q \sigma(p_s),$$

其中 $\sum_s x_s p_s$ 是 Q中路径 p_s 的 $\mathbb{F}_q$-线性组合。不动点集

$$A = \mathfrak{A}(Q, \sigma; q) := \{a \in A \mid F_{Q,\sigma;q}(a) = a\} \tag{2.1.1}$$

因此是一个有限生成的 $\mathbb{F}_q$-代数。根据 [6, 定理 2.1]， A 实际上同构于与（Q， σ）相关的 $\mathbb{F}_q$-species 的张量代数。因此，它是一个遗传$\mathbb{F}_q$-代数。

根据定义，若 $\sigma = \mathrm{id}$，则 $A = \mathbb{F}_q Q$ 是 $\mathbb{F}_q$ 上的 Q 的路径代数。一般而言， A 是有限维的，当且仅当 Q 是无圈箭图，即不含有向圈的箭图。此外，每个有限维遗传 $\mathbb{F}_q$-代数都 Morita 等价于某个无环箭图 Q（其自同构为 σ）上的 $\mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$。

此外，对于这对（Q， σ），我们可以关联一个赋值箭图 $\Gamma = \Gamma(Q, \sigma) = (\Gamma_0, \Gamma_1)$，其顶点集 $I := \Gamma_0$ （箭集 Γ_1）分别是 σ 在 Q_0 （在 Q_1）中的轨道集合。赋值定义如下：对于每个 $i \in I = \Gamma_0$，令 ε_i 为轨道 i 中顶点的数量；对于每个箭 $\rho : t\rho \longrightarrow h\rho$，其中 Γ，令（d_ρ， d'_ρ）为由下式定义的正整数对

$$d_\rho = \varepsilon_\rho / \varepsilon_{h\rho} \text{ and } d'_\rho = \varepsilon_\rho / \varepsilon_{t\rho}, \tag{2.1.2}$$

其中， ε_ρ 表示轨道 ρ中的箭数。若 σ =是 Q的恒等自同态，则赋值箭图 $\Gamma(Q, \sigma)$与 Q重合。

设 $\mathbb{Z}I$ 为以 I 为基的自由阿贝尔群，其元素记作 $\sum_{i\in I} x_i i$ 或 $(x_i)_{i\in I}$。与 Γ 相关的欧拉形式定义为双线性形式 $\langle -, -\rangle : \mathbb{Z}I \times \mathbb{Z}I \to \mathbb{Z}$，定义如下：

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \sum_{i\in\Gamma_0} \varepsilon_i x_i y_i - \sum_{\rho\in\Gamma_1} \varepsilon_\rho x_{t\rho} y_{h\rho},$$

其中，$\mathbf{x} = \sum x_i i$， $\mathbf{y} = \sum y_i i \in \mathbb{Z}I$。其对称化

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle$$

称为对称欧拉形式。

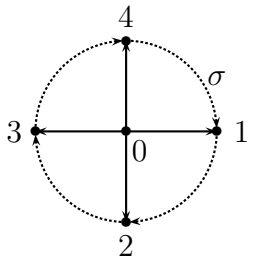
对每个顶点 $i \in I$，设 e_i为 $A = \mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$中对应的幂等元。于是，对每个 A-模 M， $e_i M$是 $D_i := \mathbb{F}_{q^{\varepsilon_i}}$上的向量空间；参见 [8, §3.3]。定义

$$\mathbf{dim}\, M = \sum_{i\in I} (\dim_{D_i} e_i M) i \in \mathbb{N}I,$$

称为 M的维数向量。于是，对于 M， $N \in A$-模，

$$\langle \mathbf{dim}\, M, \mathbf{dim}\, N\rangle = \dim_{\mathbb{F}_q} \mathrm{Hom}_A(M, N) - \dim_{\mathbb{F}_q} \mathrm{Ext}^1_A(M, N).$$

例 2.2。 令 Q 为以下箭图



带自同构 σ，该自同构固定顶点 0，并将 $1\mapsto 2,\ 2\mapsto 3,\ 3\mapsto 4,\ 4\mapsto 1$ 映射过去（因此也置换了 4 条箭）。于是

$$A=\mathfrak{A}(Q,\sigma;q)\cong\begin{pmatrix}\mathbb{F}_q & 0\\ \mathbb{F}_{q^4} & \mathbb{F}_{q^4}\end{pmatrix},$$

~它是$A_{1,1}$型温和遗传代数；参见 [12, 第 6]节。此外，相应的赋值箭图 $\Gamma=\Gamma(Q,\sigma)$ 具有如下形式

$$\bar{0}\bullet\xrightarrow{\ \rho\ }\bullet\bar{1}$$

其赋值为

$$\varepsilon_{\bar{0}}=1,\ \varepsilon_{\bar{1}}=4,\ \text{ and }\ \varepsilon_\rho=4.$$

对于带有自同构的箭图(Q,σ)，有相应的 Hall代数 $H(A)$，它属于 $A=\mathfrak{A}(Q,\sigma;q)$。根据上述命题，它由本原元生成。

现在令 $v=\sqrt{q}$。在 [37], 中，Ringel 在 $H(A)$上引入了如下扭曲乘法

$$[M]\cdot[N]=\sum_{[L]}v^{\langle\dim M,\dim N\rangle}F^L_{M,N}[L],\ \forall M,N\in A\text{-mod}.$$

于是，配备扭曲乘法的 $H(A)$又成为一个结合的 $\mathbb{F}_q$-代数，记作 $\mathcal{H}(A)=\mathcal{H}_v(Q,\sigma)$，称为 A的 Ringel–Hall代数。根据 [16]，已知 $\mathcal{H}_v(Q,\sigma)$确实是一个（扭曲）双代数，其余乘法定义为

$$\Delta([M])=\sum_{[X],[Y]}v^{\langle\dim X,\dim Y\rangle}\frac{a_Xa_Y}{a_M}F^M_{X,Y}\,[X]\otimes[Y],\ \forall M\in A\text{-mod}.$$

对每个 $i\in I$，存在一个（幂零）单对象 A-模 S_i，其 $\dim S_i=i$。由 $[S_i]$ 生成的 $\mathcal{H}_v(Q,\sigma)$ 的子代数称为 A 的合成代数，记为 $\mathcal{C}(A)=\mathcal{C}_v(Q,\sigma)$。

Clearly, $\mathcal{H}_v(Q,\sigma)$ 按维数向量是 $\mathbb{N}I$-分次的。更明确地说，

$$\mathcal{H}_v(Q,\sigma)=\bigoplus_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}I}\mathcal{H}_v(Q,\sigma)_{\mathbf{d}},$$

其中 $\mathcal{H}_v(Q,\sigma)_{\mathbf{d}}$ 由满足 $\dim M=\mathbf{d}$ 的 $[M]$ 张成。该分次在 $\mathcal{C}_v(Q,\sigma)$ 上诱导一个$\mathbb{N}I$-分次。

另一方面，对赋值箭图 $\Gamma=\Gamma(Q,\sigma)$，我们附上一个由如下方式定义的矩阵 $C_{Q,\sigma}=(c_{ij})_{i,j\in I}$

$$c_{ij}=\begin{cases}2-2\sum_\tau\varepsilon_\tau/\varepsilon_i, & \text{if } i=j,\\ -\sum_\rho\varepsilon_\rho/\varepsilon_i, & \text{if } i\neq j,\end{cases}$$

其中第一个求和取遍 i 处的所有环 τ，第二个求和取遍 Γ 中 i 与 j 之间的所有箭头 ρ。矩阵 $C_{Q,\sigma}$ 是 [2] 意义下的（可对称化）Borcherds– Cartan 矩阵。

此外，若 $\Gamma=\Gamma(Q,\ \sigma)$ 不含自环，即对所有 $i\in I,\ c_{ii}=2$ 成立，则 $C_{Q,\ \sigma}$ 是一个（可对称化的）广义 Cartan 矩阵。令 $\mathfrak{g}_{Q,\ \sigma}=\mathfrak{g}(C_{Q,\ \sigma})$ 为与之相关的 Kac–Moody

李代数；定义见 [24]。众所周知，$\mathfrak{g}_{Q,\ \sigma}$ 具有根空间分解

$$\mathfrak{g}_{Q,\sigma} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}_\alpha,$$

其中，$\Phi = \Phi(Q,\sigma)$ 是 $\mathfrak{g}_{Q,\sigma}$ 的根系。为简化记号，我们将单根 α_i 记作i，因此将 Φ 视为 $\mathbb{Z}I$ 的子集。由 [24] 可知，

$$\Phi(Q,\sigma) = \Phi^+(Q,\sigma) \cup \Phi^-(Q,\sigma)$$

其中 $\Phi^-(Q,\sigma)$ 为 $= -\Phi^+(Q,\sigma)$。$\Phi^+(Q,\sigma)$ 中的根称为正根，而 $\Phi^-(Q,\sigma)$ 中的根称为负根。进一步地，令 $\Phi_{\mathrm{re}}(Q,\sigma)$ 和 $\Phi_{\mathrm{im}}(Q,\sigma)$ 分别表示实根集和虚根集。令

$$\Phi^+_{\mathrm{re}}(Q,\sigma) = \Phi^+(Q,\sigma) \cap \Phi_{\mathrm{re}}(Q,\sigma) \ \text{ and } \ \Phi^+_{\mathrm{im}}(Q,\sigma) = \Phi^+(Q,\sigma) \cap \Phi_{\mathrm{im}}(Q,\sigma).$$

对于每个 $\mu = \sum_{i\in I} \mu_i i \in \mathbb{N}I$，令 $\mathrm{supp}\mu$ 表示 Γ 的完全子箭图，其由满足 $\mu_i \neq 0$ 的顶点 $i \in I$ 组成。则基本集 $\mathcal{F}_{Q,\sigma}$ 定义为集合

$$\{\mu \in \mathbb{N}I \mid \mathrm{supp}\mu \text{ is connected and } (\mu, i) \leqslant 0,\ \forall\, i \in I\}.$$

例如，若 (Q,σ) 表示例 2.2 中给出的带自同构的箭图，则

$$\Phi_{\mathrm{im}}(Q,\sigma) = \mathbb{Z}\delta \ \text{ with } \ \delta = (2,1) \ \text{ and } \ \mathcal{F}_{Q,\sigma} = \{m\delta \mid m \geqslant 1\},$$

其相应的 Kac–Moody 李代数 $\mathfrak{g}_{Q,\ \sigma}$ 是 $A_2^{(2)}$ 型仿射李代数，记号见 [24,§4.8]。

现在回顾 [40] 中给出的 $\mathcal{H}_v(Q,\ \sigma)$ 本原元的一个刻画。对于每个 $\mathbf{d} \in \mathbb{N}I$，令

$$\mathcal{H}_v(Q,\sigma)^{\mathrm{prim}}_{\mathbf{d}} = \{x \in \mathcal{H}_v(Q,\sigma)_{\mathbf{d}} \mid \Delta(x) = x\otimes 1 + 1\otimes x\}.$$

按照 Green [16]，，存在一个对称双线性型（称为 Green 形式）

$$\{-,-\} : \mathcal{H}_v(Q,\sigma) \times \mathcal{H}_v(Q,\sigma) \longrightarrow \mathbb{C}$$

定义如下：

$$\{[M],[N]\} = \delta_{[M],[N]} \frac{1}{a_M},\ \forall\, M,N \in A\text{-mod},$$

它满足

$$\{xy,z\} = \{x\otimes y, \Delta(z)\},\ \forall\, x,y,z \in \mathcal{H}_v(Q,\sigma).$$

换言之，$\mathcal{H}_v(Q,\ \sigma)$ 中的乘法和余乘法关于 Green 形式 $\{-,\ -\}$ 互为伴随。

根据[39, 引理 3.1]，，对于每个 $x \in \mathcal{H}_v(Q,\sigma)_{\mathbf{d}}$,

$$x \text{ is primitive} \Longleftrightarrow \{x, \Xi(Q,\sigma)_{\mathbf{d}}\} = 0,$$

其中

$$\Xi(Q,\sigma)_{\mathbf{d}} := \sum_{\mathbf{d}',\mathbf{d}''} \mathcal{H}_v(Q,\sigma)_{\mathbf{d}'} \mathcal{H}_v(Q,\sigma)_{\mathbf{d}''} \subseteq \mathcal{H}_v(Q,\sigma)_{\mathbf{d}}$$

其中求和遍及满足 $\mathbf{d}'$,$\mathbf{d}'' \in \mathbb{N}I$ 的所有项，使得 $\mathbf{d}' + \mathbf{d}'' = \mathbf{d}$ 且 $\mathbf{d}' \neq \mathbf{d} \neq \mathbf{d}''$。此外，$\mathcal{H}_v(Q,\sigma)^{\mathrm{prim}}{}_{\mathbf{d}} \neq 0$ 蕴含

$$\mathbf{d} \in \{i \mid i \in I\} \cup \mathcal{F}_{Q,\sigma}.$$

定义一个 $\mathbb{C}$-线性映射

$$\mathbb{I}:\mathcal{H}_v(Q,\sigma)\longrightarrow\mathbb{C},\ [M]\longmapsto\frac{1}{a_M}. \tag{2.2.1}$$

对于每个$\mathbf{d}\in\mathbb{N}I$, $\mathbb{I}$限制为一个映射 $\mathbb{I}_{\mathbf{d}}$: $\mathcal{H}_v(Q,\sigma)_{\mathbf{d}}\longrightarrow\mathbb{C},\ [M]\longmapsto\frac{1}{a_M}$。此外，令

$$\mathbf{1}_{\mathbf{d}}=\sum_{[M],\,\mathbf{dim}\,M=\mathbf{d}}[M]\in\mathcal{H}_v(Q,\sigma)_{\mathbf{d}}.$$

根据定义，对于每个 $x\in\mathcal{H}_v(Q,\sigma)_{\mathbf{d}}$，我们有

$$\mathbb{I}_{\mathbf{d}}(x)=\{x,\mathbf{1}_{\mathbf{d}}\}.$$

命题2.3。设 Q 是无环的，并取 $\alpha=(a_i)\in\mathcal{F}_{Q,\sigma}$。则

$$\mathcal{H}_v(Q,\sigma)_\alpha^{\mathrm{prim}}\subseteq\mathrm{Ker}\,\mathbb{I}_\alpha.$$

证明。由于 Q 是无环的， $\Gamma=\Gamma(Q,\sigma)$也无环。因此，我们可以按 $i_1,i_2,\ldots,i_n$($n=|I|$)的顺序排列 Γ 的所有顶点，使得当 $s\geqslant t$时，不存在箭头 $i_s\longrightarrow i_t$。于是

$$\mathbf{1}_{\mathbf{d}}=v^{-\sum_{s<t}a_{i_s}a_{i_t}\langle\mathbf{dim}\,S_{i_s},\mathbf{dim}\,S_{i_t}\rangle}[a_{i_1}S_{i_1}]\,[a_{i_2}S_{i_2}]\cdots[a_{i_n}S_{i_n}]\in\mathcal{C}_v(Q,\sigma)_\alpha.$$

因此，如果 $x\in\mathcal{H}_v(Q,\sigma)_\alpha^{\mathrm{prim}}$，那么

$$\mathbb{I}_\alpha(x)=\{x,\mathbf{1}_\alpha\}=0.$$

□

现在假设 Q 是无环的，也就是说， $A=\mathfrak{A}(Q,\sigma;\,q)$是有限维的。在这种情况下，众所周知，不可分解的 A-模可分为三类：后射影、正则和前内射；参见 [33, 14]。如果一个 A-模 M 的所有不可分解直和项都是后射影（分别为正则或前内射）的，则称 M 为后射影（分别为正则或前内射）模。

对于每个非零元素 $x=\sum_{[M]}\mu_M[M]\in\mathcal{H}_v(Q,\sigma)$，若 $\mu_M\neq0$，则称 x 支撑在 M 上。下面的命题推广了[18, 命题 6.2]，该命题针对仿射箭图的Ringel–Hall代数。

命题 2.4。假设 Q 是无环的，并设 x 是 $\mathcal{H}_v(Q,\sigma)_\alpha$中的一个本原元，其中$\alpha\in\mathcal{F}_{Q,\sigma}$。那么， x 支撑在满足**维数** $M=\alpha$的正则 A-模 M 上。

证明。设

$$x=\sum_{[M],\,\mathbf{dim}\,M=\alpha}\mu_M[M].$$

取 $M\in A$-模，使其 **维数** $M=\alpha$，并令

$$M=P\oplus R\oplus I,$$

其中 P， R 和 I 分别是 M 的后射影、正则和前内射直和项。于是

$$[M]=v^{-(\langle\mathbf{dim}\,P,\mathbf{dim}\,R\rangle+\langle\mathbf{dim}\,P,\mathbf{dim}\,I\rangle+\langle\mathbf{dim}\,R,\mathbf{dim}\,I\rangle)}[P][R][I].$$

假设 M 不是正则的，即 $P\neq0$ 或 $I\neq0$。如果 P， R， I 中有两个非零，则 $[M]\in\Xi(Q,\ \sigma)_\alpha$。因此，

$$0=\{x,[M]\}=\frac{\mu_M}{a_M},$$

这意味着 $\mu_M = 0$。

剩下的情况是 $M = P$ 或 $M = I$。假设 $M = P$。由于**维数**$M = \alpha \in \mathcal{F}_{Q,\ \sigma}$, $M = P$必定是可分解的。因此，M 有如下分解

$$M = P = t_1 P_1 \oplus \cdots \oplus t_s P_s,$$

其中 s，t_1，……，$t_s \geqslant 1$ 满足 $t_1 + \cdots + t_s > 1$，而 P_1，……，P_s 是满足下列条件的不可分解后射影对象

$$\mathrm{Hom}(P_j, P_i) = 0 \quad \text{whenever} \quad j > i.$$

Then

$$[M] = c[P_1]^{t_1} \cdots [P_s]^{t_s} \in \Xi(Q, \sigma)_\alpha, \quad \text{for some } 0 \neq c \in \mathbb{C}.$$

因此，由 $\{x,\ [M]\} = 0$ 可得 $\mu_M = 0$。 $M = I$ 的情况可以类似处理。□

3. $\mathcal{H}_v(Q,\ \sigma)$ 的子代数中的本原元

本节考察 $\mathcal{H}(\mathscr{C})$，即 $A = \mathfrak{A}(Q,\ \sigma;\ q)$ 的 Ringel–Hall代数 $\mathcal{H}_v(Q,\ \sigma)$ 的子代数。该子代数由 A-模的一个对扩张封闭的全子范畴 $\mathscr{C}$ 导出。我们将 $\mathcal{H}_v(Q,\ \sigma)$ 的本原元与 $\mathcal{H}(\mathscr{C})$ 中的本原元联系起来。我们主要关注正则 A-模的子范畴，以及由 A-模中的一个正交例外对滤出的子范畴。这两个子范畴在描述温和遗传代数的Ringel–Hall代数中的本原元时发挥着重要作用。

与上一节一样，设 Q 是一个带自同构 σ 的箭图，且 $A = \mathfrak{A}(Q,\ \sigma;\ q)$。设 $\mathscr{C}$ 是 A-mod 的一个对扩张封闭的全子范畴。那么 $\mathscr{C}$ 本身是一个正合范畴。令 $\mathcal{H}(\mathscr{C})$ 为 $\mathcal{H}_v(Q,\ \sigma)$ 中由满足 $M \in \mathscr{C}$ 的那些 $[M]$ 张成的子空间。由于 $\mathscr{C}$ 对扩张封闭，$\mathcal{H}(\mathscr{C})$ 成为 $\mathcal{H}_v(Q,\ \sigma)$ 的子代数。然而，一般而言，$\mathcal{H}(\mathscr{C})$ 不是 $\mathcal{H}_v(Q,\ \sigma)$ 的子余代数，但 $\mathcal{H}_v(Q,\ \sigma)$ 的余代数结构限制到 $\mathcal{H}(\mathscr{C})$ 上即为其余代数结构。事实上，对每个 $M \in \mathscr{C}$，令

$$\Delta_{\mathscr{C}}([M]) = \sum_{\substack{[X],[Y] \\ X,Y \in \mathscr{C}}} v^{\langle \mathbf{dim}\, X, \mathbf{dim}\, Y \rangle} \frac{a_X a_Y}{a_M} F^M_{X,Y}\, [X] \otimes [Y].$$

容易验证，$\Delta_{\mathscr{C}}$ 是 $\mathcal{H}(\mathscr{C})$ 上的一个余乘法，使得 $\mathcal{H}(\mathscr{C})$ 成为一个余代数。此外，$\mathcal{H}(\mathscr{C})$ 继承了 $\mathcal{H}_v(Q,\ \sigma)$ 的一个 $\mathbb{N}I$- 分次，即，

$$\mathcal{H}(\mathscr{C}) = \bigoplus_{\mathbf{d} \in \mathbb{N}I} \mathcal{H}(\mathscr{C})_{\mathbf{d}}.$$

对每个 $x = \sum_{[M]} x_M [M] \in \mathcal{H}_v(Q,\ \sigma)$，记

$$x_{\mathscr{C}} = \sum_{[M], M \in \mathscr{C}} x_M [M] \in \mathcal{H}(\mathscr{C}).$$

命题 3.1. 设 $p \in \mathcal{H}_v(Q, \sigma)_{\mathbf{d}}$ 是一个本原元。那么 $p_{\mathscr{C}}$ 是 $\mathcal{H}(\mathscr{C})_{\mathbf{d}}$ 中的本原元。

证明。记

$$p = \sum_{[M],\, \mathbf{dim}\, M=\mathbf{d}} \mu_M[M].$$

Then

$$p_{\mathscr{C}} = \sum_{\substack{[M],\, M\in\mathscr{C} \\ \mathbf{dim}\, M=\mathbf{d}}} \mu_M[M] \in \mathcal{H}(\mathscr{C})_{\mathbf{d}}.$$

根据定义，

$$\begin{aligned}\Delta(p) &= \sum_{[M]} \mu_M \Delta([M]) = \sum_{[M]} \mu_M \sum_{[X],[Y]} v^{\langle \mathbf{dim}\, X, \mathbf{dim}\, Y\rangle} \frac{a_X a_Y}{a_M} F^M_{X,Y}[X]\otimes[Y], \\ &= p\otimes 1 + 1\otimes p + \sum_{\substack{[X],[Y] \\ X\neq 0\neq Y}} v^{\langle \mathbf{dim}\, X, \mathbf{dim}\, Y\rangle} a_X a_Y \big(\sum_{[M]} \frac{\mu_M}{a_M} F^M_{X,Y}\big)[X]\otimes[Y].\end{aligned}$$

由于 p 是本原元，因此对于所有非零表示 X, Y，我们有

$$\sum_{[M]} \frac{\mu_M}{a_M} F^M_{X,Y} = 0.$$

此外，若 $X, Y \in \mathscr{C}$，则当$F^M_{X,Y} \neq 0$时，$M \in \mathscr{C}$，因为 $\mathscr{C}$在扩张下封闭。于是

$$\sum_{[M], M\in\mathscr{C}} \frac{\mu_M}{a_M} F^M_{X,Y} = \sum_{[M]} \frac{\mu_M}{a_M} F^M_{X,Y} = 0$$

因此，

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathscr{C}}(p_{\mathscr{C}}) &= \sum_{[M],\, M\in\mathscr{C}} \mu_M \Delta_{\mathscr{C}}([M]) = \sum_{[M],\, M\in\mathscr{C}} \mu_M \sum_{\substack{[X],[Y] \\ X,Y\in\mathscr{C}}} v^{\langle \mathbf{dim}\, X, \mathbf{dim}\, Y\rangle} \frac{a_X a_Y}{a_M} F^M_{X,Y}[X]\otimes[Y] \\ &= p_{\mathscr{C}}\otimes 1 + 1\otimes p_{\mathscr{C}} + \sum_{\substack{[X],[Y] \\ 0\neq X,Y\in\mathscr{C}}} v^{\langle \mathbf{dim}\, X, \mathbf{dim}\, Y\rangle} a_X a_Y \big(\sum_{[M],\, M\in\mathscr{C}} \frac{\mu_M}{a_M} F^M_{X,Y}\big)[X]\otimes[Y] \\ &= p_{\mathscr{C}}\otimes 1 + 1\otimes p_{\mathscr{C}},\end{aligned}$$

也就是说，$p_{\mathscr{C}}$ 是 $\mathcal{H}(\mathscr{C})$中的本原元。 □

对于每个 $\mathbf{d}\in\mathbb{N}I$，令

$$\mathcal{H}(\mathscr{C})^{\mathrm{prim}}_{\mathbf{d}} = \{x \in \mathcal{H}(\mathscr{C})_{\mathbf{d}} \mid \Delta_{\mathscr{C}}(x) = x\otimes 1 + 1\otimes x\}.$$

在本节余下部分，我们假设 Q 是无环的。于是，由正则模组成的 A-模的全子范畴$\mathscr{R}_A$ 关于扩张是封闭的；参见 [33]。这给出了 $\mathcal{H}_v(Q,\ \sigma)$ 的一个子代数 $\mathcal{H}(\mathscr{R}_A)$，它同时也是一个余代数，其余乘法为$\Delta_{\mathscr{R}}$；对于仿射箭图情形，参见 [18, 命题 6.3] 。此外，$\mathcal{H}(\mathscr{R}_A)$ 也按维数向量进行 $\mathbb{N}I$-分次

$$\mathcal{H}(\mathscr{R}_A) = \bigoplus_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}I} \mathcal{H}(\mathscr{R}_A)_{\mathbf{d}}.$$

根据命题 2.4，$\mathcal{H}_v(Q,\sigma)$ 中的每个本原元都支撑在正则 A-模上。因此，对每个 $\mathbf{d}\in\mathbb{N}I$，我们有包含

$$\mathcal{H}_v(Q,\sigma)^{\mathrm{prim}}_{\mathbf{d}} \subseteq \mathcal{H}(\mathscr{R}_A)^{\mathrm{prim}}_{\mathbf{d}}.$$

$\mathcal{H}(\mathscr{R}_A)$ 中的本原元将称为正则本原元，在 [18] 中它们被称为尖点正则函数。

此外，我们有元素

$$\mathbf{1}_{\mathbf{d}}^{\mathrm{reg}} = \sum_{\substack{[M],\, M\in\mathscr{R}_A \\ \dim M=\mathbf{d}}} [M] \in \mathcal{H}(\mathscr{R}_A)_{\mathbf{d}}.$$

以及该映射

$$\mathbb{I}_{\mathbf{d}}^{\mathrm{reg}} : \mathcal{H}(\mathscr{R}_A)_{\mathbf{d}} \longrightarrow \mathbb{C},\ [M] \longmapsto \frac{1}{a_M}$$

By [46，定理1(ii)]， $\mathbf{1}^{\mathrm{reg}}{}_{\mathbf{d}} \in \mathcal{C}_v(Q,\ \sigma)_{\mathbf{d}}$。因此，如果 $p \in \mathcal{H}_v(Q,\ \sigma)_{\mathbf{d}}$ 是本原的，该 n

$$\mathbb{I}_{\mathbf{d}}^{\mathrm{reg}}(p) = \{p, \mathbf{1}_{\mathbf{d}}^{\mathrm{reg}}\} = 0.$$

作为结论，我们得到如下结果。

命题3.2. 对每个$\alpha \in \mathcal{F}_{Q,\ \sigma}$,

$$\mathcal{H}_v(Q,\sigma)_{\alpha}^{\mathrm{prim}} \subseteq \mathcal{H}(\mathscr{R}_A)_{\alpha}^{\mathrm{prim}} \cap \operatorname{Ker} \mathbb{I}_{\alpha}^{\mathrm{reg}}.$$

现在我们考虑由正交例外对产生的 A-mod 的全子范畴。一个不可分解的 A-模 E 称为例外的，如果 $\operatorname{Ext}^1_A(E,E) = 0$。一对例外的 A-模 (E_1, E_2) 称为正交例外对，如果

$$\operatorname{Hom}_A(E_1,E_2) = 0 = \operatorname{Hom}_A(E_2,E_1) \quad \text{and} \quad \operatorname{Ext}^1_A(E_2,E_1) = 0.$$

给定一个正交例外对 (E_1, E_2)，令 $\mathscr{E} := \mathscr{E}(E_1, E_2)$ 表示由使得存在一个正合序列的 A-模 M 所组成的 A-mod 的全子范畴

$$0 \longrightarrow sE_2 \longrightarrow M \longrightarrow tE_1 \longrightarrow 0$$

对某个 $s, t \geqslant 0$。

命题3.3. 设 (E_1, E_2) 为一个正交例外对，且 $\mathscr{E} = \mathscr{E}(E_1, E_2)$。则对每个 $\mathbf{d} \in \mathbb{N}I$,

$$\mathbf{1}_{\mathbf{d}}^{\mathscr{E}} \in C_v(Q,\sigma)_{\mathbf{d}}.$$

证明. 由 $\mathscr{E}$ 的定义， $\mathbf{1}_{\mathbf{d}}^{\mathscr{E}} \neq 0$ 仅当

$$\mathbf{d} = t\,\mathbf{dim}\ E_1 + s\,\mathbf{dim}\, E_2 \ \text{ for some } s,t \geqslant 0.$$

因此，我们可以假设 $\mathbf{d} = t\,\mathbf{dim}\ E_1 + s\,\mathbf{dim}\ E_2$，并记 $\mathbf{e} = (t,s)$。

众所周知，由于 [15, 42] ，存在一个等价 $\mathcal{F}:\ \mathscr{E} \to B$-模范畴，将$E_i \mapsto S_i$, $i = 1,\ 2$，其中 B 是一个具有两个单对象 S_1 和 S_2 的有限维遗传 $\mathbb{F}_q$-代数。于是，F 诱导出 Ringel–Hall代数之间的同构 $\mathcal{H}_v(B) \to \mathcal{H}(\mathscr{E})$。根据 [46, 定理 1(ii)]， $\mathbf{1}_{\mathbf{e}}$ 属于 B的合成代数 $\mathscr{C}_v(B)$，即由 $[S_1]$ 和 $[S_2]$生成的 $\mathcal{H}_v(B)$ 的子代数。这意味着 $\mathbf{1}_{\mathbf{d}}^{\mathscr{E}}$ 属于由 $[E_1]$ 和 $[E_2]$生成的 $\mathcal{H}(\mathscr{E})$ 的子代数。根据 Ringel 的一个结果（见 [46,定理 2]），$[E_1],\ [E_2] \in \mathcal{C}_v(Q,\ \sigma)$。因此，

$$\mathbf{1}_{\mathbf{d}}^{\mathscr{E}} \in \mathcal{C}_v(Q,\sigma)_{\mathbf{d}}.$$

□

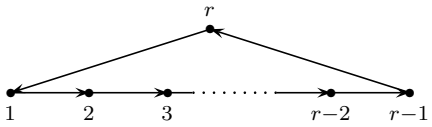
推论 3.4。 设 (E_1, E_2) 是 A-模 中的一个正交例外对，并且 $\mathscr{E} = \mathscr{E}(E_1, E_2)$，再设 $\alpha \in \mathcal{F}_{Q,\ \sigma}$。如果 $p \in \mathcal{H}_v(Q, \sigma)_\alpha$ 是本原的，那么

$$\{p, \mathbf{1}_\alpha^{\mathscr{E}}\} = \{p_{\mathscr{E}}, \mathbf{1}_\alpha^{\mathscr{E}}\} = 0.$$

4. 循环箭图情形下的本原元

本节我们考虑具有 r 个顶点的循环箭图 C_r 的Ringel–Hall代数，并回顾 [41, 21, 18] 中关于由 C_r的幂零表示张成的子代数中的本原元，以及经典Hall代数中的本原元的描述。

对于 $r \geqslant 1$，令 C_r 表示循环箭图



其顶点集为 $I = \mathbb{Z}/r\mathbb{Z} = \{1, 2, \ldots\ldots, r\}$，箭集为 $\{i \to i+1 \mid i \in I\}$。按照惯例， C_1 是仅有一个顶点和一个自环的Jordan箭图。对于每个$r > 1$,

$$\Phi^+_{\mathrm{im}}(C_r) = \mathbb{N}\delta \quad \text{with} \quad \delta = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}I.$$

我们用Rep C_r = Rep $_{\mathbb{F}_q}C_r$ 表示 C_r 在 $\mathbb{F}_q$上的有限维表示范畴，它们可视为路径代数 $\mathbb{F}_qC_r$上的有限维左模。

令 Rep ^0C_r 表示 Rep C_r 的全子范畴，其对象为 C_r的幂零表示。对每个顶点 $i \in I$, 都有一个一维幂零表示 S_i。 S_i 构成 Rep ^0C_r中简单对象的完备集。此外，对每个整数 $l \geqslant 1$，在 Rep ^0C_r 中都存在一个长度为 l、顶为 S_i的不可分解表示$S_i[l]$，且在同构意义下唯一。众所周知， $S_i[l]$、 $i \in I$， $l \geqslant 1$给出了 Rep ^0C_r中所有不可分解表示的同构类，而且 Rep ^0C_r 的 Auslander–Reiten 箭图是一个秩为 r的管。

与 C_r 相应的有其 Ringel–Hall代数 $\mathcal{H}_v(C_r)$，以及由满足 $V \in$ Rep ^0C_r的 $[V]$ 张成的子代数 $\mathcal{H}_v^0(C_r)$。两者都是双代数。根据 [41, 21]， $\mathcal{H}_v^0(C_r)$由其本原元生成。

在情形 $r = 1$ 中， $\mathcal{H}_v^0(C_1)$ 是在[43, 17, 29, 45], 中研究的经典Hall代数，它按维数进行$\mathbb{N}$分次。对于满足 $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_m \geqslant 1$ 的每个分拆 $\lambda = (\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_m)$，令 $\ell(\lambda) = m$，称为 λ 的长度。进一步，令

$$I_\lambda = \bigoplus_{i=1}^{m} S_1[\lambda_i] \in \mathrm{Rep}\,^0C_1.$$

然后，将 λ 写成“指数形式” $\lambda = (1^{t_1}, 2^{t_2}, \ldots\ldots)$，我们得到

$$a_\lambda(q) := |\mathrm{Aut}(I_\lambda)| = q^{|\lambda| + 2n(\lambda)} \prod_{i \geqslant 1} \prod_{j=1}^{t_i} (1 - q^{-j}), \tag{4.0.1}$$

其中 $|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m$且 $n(\lambda) = \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} (i-1)\lambda_i$；参见[29, 第二章（1.6）]。

此外，对于每个 $n \geqslant 1$，$\dim \mathcal{H}_v^0(C_1)_n^{\mathrm{prim}} = 1$，且

$$p_n = \sum_{\lambda \vdash n} \left(\prod_{s=1}^{\ell(\lambda)-1} (1-q^s) \right) [I_\lambda] \in \mathcal{H}_v^0(C_1)_n^{\mathrm{prim}}; \tag{4.0.2}$$

参见 [29, 第 III 章, 7] 节，或 [21, §5]。换言之， $\mathcal{H}_v^0(C_1)$ 由本原元 p_n生成。

现在假设 $r > 1$。按照 Schiffmann [41] 和 Hubery [21]的结果， $\mathcal{H}_v^0(C_r)$ 有如下分解：

$$\mathcal{H}_v^0(C_r) = \mathcal{C}_v(C_r) \otimes \mathbb{C}[c_1, c_2, \ldots],$$

其中 $\mathcal{C}_v(C_r)$ 是 C_r 的合成代数（即由 $[S_i]$生成的 $\mathcal{H}_v^0(C_r)$ 的子代数），而 $\mathbb{C}[c_1, c_2, \ldots]$ 是一个无限多项式环，其

$$c_n = (-1)^n v^{-2rn} \sum_{\substack{[M]:\mathbf{dim}\, M = n\delta \\ \mathrm{soc} M \text{ square free}}} (-1)^{\dim \mathrm{End}(M)} a_M [M]$$

在 $\mathcal{H}_v^0(C_r)$ 中心。此外， [21, 命题 9] 证明，对每个 $n \geqslant 1$,

$$\Delta(c_n) = \sum_{s=0}^{n} c_s \otimes c_{n-s},$$

其中 $c_0 = 1$。进一步，归纳定义

$$x_n = n c_n - \sum_{s=1}^{n-1} x_s c_{n-s}.$$

于是，根据 [21, 推论 10]， x_n 是 $\mathcal{H}_v^0(C_r)$中的本原元。结合 [18,定理 5.4]，可得

$$\mathcal{H}_v^0(C_r)_{n\delta}^{\mathrm{prim}} = \mathbb{C} x_n, \ \forall\, n \geqslant 1.$$

T然后，根据 [22,引理 12] （另见 [7, 引理 2.2.1] 和 [18, 引理 5.5]），我们有 e

$$x_n = v^{n-2rn}(v^n - v^{-n}) \sum_{i=1}^{r} [S_i[rn]] + y_n,$$

其中， y_n 是 $[M]$ 的线性组合，其中 M可分解且**维数** $M = n\delta$。最后，令

$$p_n^{(r)} = \frac{v^{2rn-n}}{v^n - v^{-n}} x_n = \sum_{i=1}^{r} [S_i[rn]] + \frac{v^{2rn-n}}{v^n - v^{-n}} y_n, \ \forall\, n \geqslant 1, \tag{4.0.3}$$

它们被称为 [18, 6.3.1]中的归一化本原元。若 $r = 1$， 则 $p_n^{(1)}$与(4.0.2)中给出的 p_n 重合。然而，正如 [18, 注 5.6], 所指出的，对于一般情形， $p_n^{(r)}$尚无已知的闭公式。

F对于每个 $1 \leqslant t < r$，都有一个嵌入$\Upsilon_{r,\,t}$： $\mathbf{Rep}^0 C_t \to \mathbf{Rep}^0 C_r$， 其将

$$S_i \longmapsto \begin{cases} S_i, & \text{if } 1 \leqslant i < t, \\ S_t[r-t+1], & \text{if } i = t; \end{cases}$$

参见例如 [21, §4]。由此便得到一个代数嵌入

$$\zeta_{r,t} : \mathcal{H}_v^0(C_t) \longrightarrow \mathcal{H}_v^0(C_r).$$

因此，若我们将由 $\Upsilon_{r,\ t}(V)$ 且满足 $V \in \mathbf{Rep}^{\,0}C_t$ 的对象构成的 $\mathbf{Rep}^{\,0}C_r$ 全子范畴记为 $\mathcal{A}_t$，那么 $\mathcal{A}_t$ 等价于 $\mathbf{Rep}^{\,0}C_t$，而 $\mathcal{H}_v^0(C_r)$ 的子代数 $\mathcal{H}(\mathcal{A}_t)$ 同构于 $\mathcal{H}_v^0(C_t)$。根据命题 3.1，我们得到如下结果。

命题 4.1。对于每个 $1 \leqslant t < r$ 和 $n \geqslant 1$，$(p_n^{(r)})_{\mathcal{A}_t}$ 是 $\mathcal{H}(\mathcal{A}_t)$ 中的一个本原元。换言之，

$$p_n^{(r)} = \zeta_{r,t}(p_n^{(t)}) + other\ terms.$$

这里，“其他项”指由 $[V]$ 和 $V \notin \mathcal{A}_t$ 组合而成的项。

我们指出，将 $\mathbf{Rep}^{\,0}C_t$ 嵌入 $\mathbf{Rep}^{\,0}C_r$ 有多种方式。例如，对于每个由正整数组成的序列 $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_t)$，满足 $r = r_1 + \cdots + r_t$，并给定一个顶点 $1 \leqslant j \leqslant r$，存在一个嵌入 $\Upsilon_{\mathbf{r}} \colon \mathbf{Rep}^{\,0}C_t \to \mathbf{Rep}^{\,0}C_r$，其作用为

$$S_i \longmapsto S_{j+r_1+\cdots+r_{i-1}}[r_i],\ \forall\, 1 \leqslant i \leqslant t.$$

那么，关于嵌入 $\Upsilon_{\mathbf{r}}$，上述命题的类似结果也成立。因此，这提供了一种归纳方法来理解 $\mathcal{H}(\mathcal{A}_r)$ 中的本原元 $p_n^{(r)}$。特别地，取 $t = 1$ 和 $j = 1$。这给出一个嵌入

$$\Upsilon_{r,1} : \mathrm{Rep}^{\,0}C_1 \longrightarrow \mathrm{Rep}^{\,0}C_r,\ S_1 \longmapsto S_1[r].$$

对每个分拆 $\lambda = (\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_m) \vdash n$，令

$$I_\lambda^{(r)} = \bigoplus_{i=1}^{m} S_1[\lambda_i r] \in \mathrm{Rep}^{\,0}C_r.$$

Then

$$p_n^{(r)} = \sum_{\lambda \vdash n} \left(\prod_{s=1}^{\ell(\lambda)-1} (1 - q^s) \right) [I_\lambda^{(r)}] + \text{other terms.} \tag{4.1.1}$$

根据以上讨论，我们得到 $\mathcal{H}_v(C_r)$ 中本原元的如下描述。令 $\mathbb{F}_q[T]$ 表示在 $\mathbb{F}_q$ 上以 T 为不定元的多项式环，并令

$$\mathbb{A}_q^1 := \mathbb{A}_{\mathbb{F}_q}^1 = \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q[T]).$$

众所周知，$\mathbf{Rep}_{\ \mathbb{F}_q}C_r$ 有如下分解

$$\mathrm{Rep}_{\,\mathbb{F}_q}C_r = \mathrm{Rep}^{\,0}_{\,\mathbb{F}_q}C_r \times \prod_{x \in \mathbb{A}_q^1 \setminus \{0\}} \mathcal{T}_x,$$

其中，对于每个 $x \in \mathbb{A}_q^1 \setminus \{0\}$，$\mathcal{T}_x$ 都等价于具有 $d = \mathbf{deg}(x)$ 的 $\mathbf{Rep}^{\,0}_{\,\mathbb{F}_{q^d}}C_1$。特别地，对于满足 $\mathbf{deg}(x) = d$ 的此类 x，$\mathcal{T}_x$ 含有一个唯一的（在同构意义下）简单对象（称为拟简单对象）E_x，其维数向量为 $d\delta$（且 $\mathbf{End}(E_x) \cong \mathbb{F}_{q^d}$），并且对所有 $n \geqslant 1$，都存在准长度为 n 的不可分解表示 $E_x[n]$。对于每个分拆 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$，令

$$I_\lambda(x) = \bigoplus_{i=1}^{m} E_x[\lambda_i] \in \mathrm{add}\,\mathcal{T}_x.$$

于是，通过修改式 (4.0.2) 中给出的本原元 p_n ，我们得到一个本原元

$$p_n(x)=\sum_{\lambda\vdash n}\Big(\prod_{s=1}^{\ell(\lambda)-1}(1-q^{ds})\Big)[I_\lambda(x)]$$

维数向量为 $dn\delta$ 的 $\mathcal{H}_v(C_r)$ 中。因此，我们得到以下结果；参见[18, 命题 5.7]。

命题 4.2。对于每个 $n\geqslant 1$，集合

$$\{p_n^{(r)}\}\cup\{p_m(x)\mid 0\neq x\in\mathbb{A}_q^1 \ \ with \ \ m\deg(x)=n\}$$

构成 $\mathcal{H}_v(C_r)^{\mathrm{prim}}_{n\delta}$ 的一组基。

5. 温和遗传代数中的正则本原元

本节中，我们研究与带自同构 σ 的无环温和箭图 Q 相关联的域 $\mathbb{F}_q$ 上的代数 $A=\mathfrak{A}(Q,\sigma;\,q)$，并比较 $\mathcal{H}_v(Q,\sigma)$ 中本原元空间的维数与具有固定维数向量的正则本原元空间的维数。

在本节中，$Q=(Q_0,\ Q_1)$ 始终表示一个带自同构 σ 的无环温和箭图。于是，$A=\mathfrak{A}(Q,\ \sigma;\,q)$ 是一个温和遗传 $\mathbb{F}_q$-代数，并且

$$\mathcal{F}_{Q,\sigma}=\{n\delta\mid n\geqslant 1\},$$

其中，δ 表示 $\mathfrak{g}_{Q,\ \sigma}$ 的最小正虚根。

与第 3 节一样，令 $\mathscr{R}_A$ 为 A-模中由正则A-模块组成的全子范畴。根据 [12, 32]（另见 [33, 14]）中的经典结果，$\mathscr{R}_A$ 的 Auslander–Reiten 箭图由无穷多个管组成。此外，如果 $\sigma=\mathrm{id}$，那么 $\mathscr{R}_A$ 中的所有管均由 $\mathbb{F}_q$ 上的射影直线 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q}$ 编号，即由 $\mathbb{F}_q[T_0,T_1]$ 中关于两个变量 T_0 和 T_1 的不可约齐次多项式集合编号。因此，对于任意带自同构 σ 的 $A=\mathfrak{A}(Q,\ \sigma;\,q)$，我们使用 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q,\ \sigma}$ 对 $\mathscr{R}_A$ 中所有管的集合进行编号。对于每个 $x\in\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q,\ \sigma}$，令 $\mathcal{T}_x$ 表示 $\mathscr{R}_A$ 中相应的管，并令 r_x 表示其秩。那么，$\mathscr{R}_A$ 中几乎所有的管都是齐次管，即满足 $r_x=1$ 的那些 $\mathcal{T}_x$ ，并且至多有 3 个非齐次管。此外，每个齐次管 $\mathcal{T}_x$ 都有唯一的简单对象 E_x （即 $\mathcal{T}_x$ 中的拟单模块）。

注 5.1. 事实上，A-mod 中的每个管也都可以通过由 σ 诱导的 Frobenius 扭曲函子 $\mathbb{F}_q\overline{Q}$-mod $\to\mathbb{F}_qQ$-mod，将 $\mathbb{F}_qQ$-mod 中的管折叠得到；参见 [8, §2.2] 和 [10]。更确切地说，将 $\mathbb{F}_qQ$-mod 中的齐次管折叠，总会得到 A-mod 中的齐次管；而将 $\mathbb{F}_qQ$-mod 中的非齐次管折叠，则会得到 A-mod 中的非齐次管或齐次管。此外，若 A-mod 中的齐次管 $\mathcal{T}_x$ 是由 $\mathbb{F}_qQ$-mod 中周期为 p 的齐次管 F 折叠得到的，则其拟单模块 E_x 满足

$$\mathbf{dim}\,E_x=p\delta \ \ \text{and} \ \ \mathrm{End}(E_x)\cong\mathbb{F}_{q^p}.$$

如果齐次管 $\mathcal{T}_x$ in A-mod 是通过折叠 $\mathbb{F}_qQ$-mod 中的非齐次管得到的，那么存在两个正整数 d_x 和 e_x ，使得 $d_x\mid e_x$

$$\mathbf{dim}\,E_x=d_x\delta \ \ \text{and} \ \ \mathrm{End}(E_x)\cong\mathbb{F}_{q^{e_x}}.$$

我们指出，如果 $\sigma = \mathrm{id}$，那么 $\mathbb{F}_q Q$-mod 中的每个非齐次管都会在 A-mod 中对应一个秩相同的非齐次管；此外，对于所有齐次管 $\mathcal{T}_x$，都有 $d_x = e_x$。

例 5.2. (1) 设 (Q,σ) 是例 2.2 中由 $A = \mathfrak{A}(Q,\sigma;\, q)$ 给出的带自同构的箭图。那么，在 $\mathbb{F}_q Q$-模中有三个秩为 2 的管，其中一个折叠为 A-模中的一个齐次管，记作 $\mathcal{T}_{x_0}$；另外两个折叠为一个齐次管，记作 $\mathcal{T}_{x_1}$。此外，它们的拟单模 E_{x_0}和 E_{x_1} 满足

$$\mathbf{dim}\, E_{x_0} = \delta,\ \mathrm{End}(E_{x_0}) \cong \mathbb{F}_{q^2},\ \mathbf{dim}\, E_{x_1} = 2\delta,\ \text{ and }\ \mathrm{End}(E_{x_1}) \cong \mathbb{F}_{q^4}.$$

(2) 设 Q 为带自同构 σ 且有 $n = 2\ell$ 个顶点（$\ell \geqslant 2$）的箭图：

Q :



那么，$\Gamma(Q,\sigma)$ 的底层图属于 B_ℓ 型。已知 $\mathbb{F}_q Q$-模中有两个秩为 ℓ 的非齐次管，它们折叠为 A-模中唯一一个秩为 ℓ 的非齐次管 $\mathcal{T}_{x_0}$，且其中非同构拟单模的维数向量之和等于 2δ。

$\mathcal{T}_x$ 中每个管 A-模都给出一个正合子范畴 $\mathsf{add}\,\mathcal{T}_x$，它定义了 $\mathscr{R}_A$ 的一个子代数 $\mathcal{H}(\mathcal{T}_x) := \mathcal{H}(\mathsf{add}\,\mathcal{T}_x)$。由于属于不同管的模之间没有非零态射，也没有非平凡扩张，所有子代数$\mathcal{H}(\mathcal{T}_x)$在 $\mathcal{H}(\mathscr{R}_A)$中都对余乘法 $\Delta_{\mathscr{R}}$ 封闭，因此，每个 $\mathcal{H}(\mathcal{T}_x)$都是 $\mathcal{H}(\mathscr{R}_A)$的子双代数。因此，

$$\mathcal{H}(\mathscr{R}_A)^{\mathrm{prim}}_{n\delta} = \bigoplus_{x\in\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q,\sigma}} \mathcal{H}(\mathcal{T}_x)^{\mathrm{prim}}_{n\delta},\ \forall\, n \geqslant 1.$$

对于每个$x \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q,\ \sigma}$ 满足 $r_x > 1$（即，$\mathcal{T}_x$ 是一个非齐次管），其中 $\mathcal{T}_x$ 内 r_x 个两两不同构的拟单模的维数向量之和等于某个正整数 $d_x \geqslant 1$ 对应的 $d_x\delta$（注意，若 $\sigma =$ 为 id，则 $d_x = 1$），并且存在一个等价

$$\mathrm{Rep}^0_{\mathbb{F}_{q^{d_x}}} C_{r_x} \cong \mathrm{add}\,\mathcal{T}_x,$$

它诱导出一个双代数同构

$$\mathcal{H}^0_{v^{d_x}}(C_{r_x}) \cong \mathcal{H}(\mathcal{T}_x).$$

那么，对于每个 $m \geqslant 1$，由式（4.0.3）定义的 $\mathcal{H}^0_{v^{d_x}}(C_{r_x})$中的本原元 $p_m^{(r_x)}$会导出 $\mathcal{H}(\mathcal{T}_x)$中的一个（归一化）本原元 $p_m(x)_{md_x\delta}$（将 q 替换为 q^{d_x}），其形式为

$$p_m(x) = \sum_{i=1}^{r_x} [M_i] + \text{other terms},$$

其中 $M_1,\ldots,M_{r_x}$是 $\mathcal{T}_x$中所有维数向量为 $md_x\delta$的两两互不同构的不可分解模。

现在设 $\mathcal{T}_x$ 是 A-mod 中的一个齐次管，其中

$$\mathbf{dim}\, E_x = d_x\delta \ \text{ and }\ \mathrm{End}(E_x) \cong \mathbb{F}_{q^{e_x}},$$

其中 d_x，$e_x \geqslant 1$ 满足 $d_x \mid e_x$。注意，除非 $\mathcal{T}_x$ 是通过折叠 $\mathbb{F}_q Q$-mod 中的非齐次管得到的，否则 $d_x = e_x$；参见上文的注释。在这种情况下，我们有一个等价

$$\mathrm{Rep}^0_{\mathbb{F}_{q^{e_x}}} C_1 \cong \operatorname{add} \mathcal{T}_x,$$

以及一个双代数同构

$$\mathcal{H}^0_{v^{e_x}}(C_1) \cong \mathcal{H}(\mathcal{T}_x).$$

因此，对于每个 $m \geqslant 1$，由 (4.0.2) 定义的 $\mathcal{H}^0_{v^{e_x}}(C_1)$ 中的本原元 p_m 给出一个本原元

$$p_m(x) = \sum_{\lambda \vdash m} \prod_{s=1}^{\ell(\lambda)-1} (1 - q^{s e_x})[I_\lambda(x)] \in \mathcal{H}(\mathcal{T}_x)^{\mathrm{prim}}_{m d_x \delta},$$

其中，对于一个分拆 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_t) \vdash m$，满足 $t = \ell(\lambda)$，$I_\lambda(x) = \oplus_{i=1}^t E_x[\lambda_i]$，其中 $E_x[\lambda_i]$ 是 $\mathcal{T}_x$ 中准长度为 λ_i（或者等价地，维数向量为 $\lambda_i d_x \delta$）的不可分解模。

为方便记号，对于每个 $x \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q,\,\sigma}$，我们称 x 的次数为 d_x，记作 $\deg(x) = d_x$。如果 $\mathcal{T}_x$ 不是齐次的，则令 $e_x = d_x$。

作为命题 4.2 的类比，我们得到以下结果；另见 [18,第 6 节。3]。

命题 5.3. 对于每个 $n \geqslant 1$，集合

$$\{p_m(x) \mid x \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q,\sigma} \ \ with \ \ m \deg(x) = n\}$$

构成 $\mathcal{H}_v(\mathscr{R}_A)^{\mathrm{prim}}_{n\delta}$ 的一组基。特别地，我们有

$$\dim \mathcal{H}(\mathscr{R}_A)^{\mathrm{prim}}_{n\delta} = \sharp\{x \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q,\sigma} \mid \deg(x) | n\}.$$

对于每个 $n \geqslant 1$，令 $I_{Q,\sigma}(n\delta, q)$ 表示维数向量为 $n\delta$ 的不可分解A-模的同构类数，并令 $\mathrm{mult}\, n\delta$ 表示 $n\delta$ 在 $\mathfrak{g}_{Q,\sigma}$ 中的重数，即 $\mathrm{mult}\ n\delta = \dim (\mathfrak{g}_{Q,\sigma})_{n\delta}$。

以下结果针对 $\sigma = \mathrm{id}$ 的情形见 [20, 47]，其余情形见 [30, 10]。

引理 5.4. 对于每个 $n \geqslant 1$,

$$\dim \mathcal{H}_v(Q,\sigma)^{\mathrm{prim}}_{n\delta} = I_{Q,\sigma}(n\delta, q) - \mathrm{mult}\, n\delta = \sum_{s|n} \varphi_s(q),$$

其中 $\varphi_s(q)$ 表示域 $\mathbb{F}_q$ 上次数为 s 的首一不可约多项式的个数。

此外，一方面，我们有

$$I_{Q,\sigma}(n\delta, q) = \sum_{x \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q,\,\sigma},\, \deg(x)|n} r_x.$$

另一方面，逐一检查可知

$$\mathrm{mult}\, n\delta = 1 + \sum_{x \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q,\,\sigma},\, \deg(x)|n} (r_x - 1).$$

由上述等式可得

$$\begin{aligned}\dim \mathcal{H}_v(Q,\sigma)^{\mathrm{prim}}_{n\delta} &= I_{Q,\sigma}(n\delta,q) - \operatorname{mult} n\delta \\ &= I_{Q,\sigma}(n\delta,q) - \big(1 + \sum_{x\in\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q,\,\sigma},\,\deg(x)|n} (r_x - 1)\big) \\ &= \sharp\{x \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q,\sigma} \mid \deg(x)|n\} - 1 \\ &= \dim \mathcal{H}(\mathscr{R}_A)^{\mathrm{prim}}_{n\delta} - 1,\end{aligned}$$

也就是说，我们得到如下结果；关于箭图情形见 [18, 6.4] 。

命题5.5. 对每个 $n \geqslant 1$,

$$\dim \mathcal{H}(\mathscr{R}_A)^{\mathrm{prim}}_{n\delta} = \dim \mathcal{H}_v(Q,\sigma)^{\mathrm{prim}}_{n\delta} + 1.$$

6. 定理1.1的证明

本节主要致力于定理1.1的证明。我们保留前面各节中的全部记号，后文将直接使用而不再解释。

下述结果可由 [18, 定理6.9]推出。不过，我们在此给出一个直接证明。

引理 6.1。 设 C_r 为具有 r 个顶点的循环箭图，并且对每个 $n \geqslant 1$，令

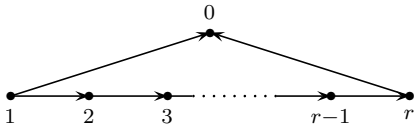
$$\mathbf{1}^{(r)}_{n\delta} = \sum_{\substack{[M],\, M\in \mathrm{Rep}^0_{\mathbb{F}_q} C_r \\ \mathbf{dim}\, M = n\delta}} [M] \in \mathcal{H}^0(C_r).$$

Then

$$\big\{p^{(r)}_n, \mathbf{1}^{(r)}_{n\delta}\big\} = \sum_{\lambda\vdash n} \frac{\prod_{s=1}^{\ell(\lambda)-1}(1-q^s)}{a_\lambda(q)}.$$

证明。 若 $r = 1$，则这直接由 $p^{(1)}_n$和 $\mathbf{1}^{(1)}_{n\delta}$ 的定义得出。

现在假设 $r > 1$ ，并考虑以下箭图 C_{r+1}



其顶点集为 $I := \{0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ r\}$。那么 $A = \mathbb{F}_q C_{r+1}$是一个有限维温和遗传代数。为避免混淆，对每个 $i \in I$，令 S_i 表示相应的单对象 A-模，并令 δ 为对应的最小正虚根。

一方面，由所有正则 A-模组成的全子范畴 $\mathscr{R}_A$ 拥有无穷多个管 $\mathcal{T}_x$、$x \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q}$，其中一个是秩为 r 的管，记为 $\mathcal{T}_\infty$，其余的管均为齐次管。根据命题5.3，对于每个 $n \geqslant 1$，我们得到一个基

$$\{p_m(x) \mid x \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q} \ \text{ with } \ m\deg(x) = n\}$$

$\mathcal{H}_v(\mathscr{R}_A)^{\mathrm{prim}}_{n\widehat{\delta}}$，其中 $p_m(x)$ 是 $\mathcal{H}(\mathcal{T}_x)$ 中的归一化本原元。此外，根据命题3.2，线性函数

$$\mathbb{I}^{\mathrm{reg}}_{n\widehat{\delta}} : \mathcal{H}(\mathscr{R}_A)^{\mathrm{prim}}_{n\delta} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \{z, \mathbf{1}^{\mathrm{reg}}_{n\widehat{\delta}}\}$$

满足该条件。

$$\mathcal{H}(A)^{\mathrm{prim}}_{n\delta} \subseteq \mathrm{Ker}\, \mathbb{I}^{\mathrm{reg}}_{n\widehat{\delta}}.$$

由于对每个 $n \geqslant 1$，都存在满足 $\mathsf{deg}(x) = n$ 的 $x \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q}$，使得 $\mathcal{T}_x$ 是一个齐次管，因此

$$\mathbb{I}^{\mathrm{reg}}_{n\widehat{\delta}}(p_1(x)) = \{p_1(x), \mathbf{1}^{\mathrm{reg}}_{n\widehat{\delta}}\} = \frac{1}{q^n - 1} \neq 0.$$

因此，$\mathbb{I}^{\mathrm{reg}}_{n\widehat{\delta}} \neq 0$。结合命题5.5可知

$$\mathcal{H}(A)^{\mathrm{prim}}_{n\delta} = \mathrm{Ker}\, \mathbb{I}^{\mathrm{reg}}_{n\widehat{\delta}},$$

也就是说，定理1.1对箭图 C_{r+1}成立。

另一方面，令 E_1 为 C_{r+1} 的不可分解表示，满足**维数** $E_1 = \delta -$ **维数** S_0，并设 $E_2 = S_0$。那么，$(E_1,\ E_2)$是 A-模中的一个正交例外对，使得全子范畴 $\mathscr{E} = \mathscr{E}(E_1,\ E_2)$包含所有齐次管 $\mathcal{T}_x$，且 $\mathscr{E} \cap \mathcal{T}_\infty$ 成为一个齐次管，其拟单模块$\sim E_\infty$ 是 C_{r+1} 的不可分解表示，满足**维数** $E_\infty = \delta$ 且 $\mathsf{soc}E_\infty = \sim S_0 \oplus S_r$。如第 3 节所述，$\mathscr{E}$产生一个线性函数

$$\mathbb{I}^{\mathscr{E}}_{n\widehat{\delta}} : \mathcal{H}(\mathscr{R}_A)^{\mathrm{prim}}_{n\delta} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \{z, \mathbf{1}^{\mathscr{E}}_{n\widehat{\delta}}\},$$

由与 $\mathbb{I}^{\mathrm{reg}}_{n\widehat{\delta}} \neq 0$ 的证明中类似的论证可知它非零。将此与推论 3.4 结合即表明

$$\mathcal{H}(A)^{\mathrm{prim}}_{n\delta} = \mathrm{Ker}\, \mathbb{I}^{\mathscr{E}}_{n\widehat{\delta}}.$$

由于对每个满足 $\mathsf{deg}(x) = 1$ 的齐次管 $\mathcal{T}_x$，我们有

$$\mathbb{I}^{\mathrm{reg}}_{n\widehat{\delta}}(p_n(x)) = \mathbb{I}^{\mathscr{E}}_{n\widehat{\delta}}(p_n(x)),$$

我们得出作为线性函数有 $\mathbb{I}^{\mathrm{reg}}_{n\widehat{\delta}} = \mathbb{I}^{\mathscr{E}}_{n\widehat{\delta}}$。这与 (4.1.1) 一起特别蕴含

$$\{p_n(\infty), \mathbf{1}^{\mathrm{reg}}_{n\widehat{\delta}}\} = \{p_n(\infty), \mathbf{1}^{\mathscr{E}}_{n\widehat{\delta}}\} = \{p_n(\infty)_{\mathscr{E}}, \mathbf{1}^{\mathscr{E}}_{n\widehat{\delta}}\} = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{\prod_{s=1}^{\ell(\lambda)-1}(1 - q^s)}{a_\lambda(q)}.$$

显然，通过取法，存在从 $\mathsf{Rep}^{\,0}_{\mathbb{F}_q} C_r$ 到 A-mod 的嵌入

$$S_i \longmapsto \widehat{S}_i,\ \forall\, 2 \leqslant i \leqslant r,\ S_1 \longmapsto \widehat{S}_{1,0},$$

，其中 $S_{1,0}$ 是维数为 2、以 S_1 为顶、以 S_0 为底的不可分解 A-模。此外，经由该嵌入，$\mathsf{Rep}^{\,0}_{\mathbb{F}_q} C_r$ 被等同于 A-mod 的全子范畴 $\mathsf{add}\ \mathcal{T}_\infty$。因此，我们有一个代数同构

$$\mathcal{H}^0(C_r) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}(\mathcal{T}_\infty)$$

其取

$$p_n^{(r)} \longmapsto p_n(\infty),\ \ \mathbf{1}^{(r)}_{n\delta} \longmapsto \mathbf{1}^{\mathrm{add}\mathcal{T}_\infty}_{n\widehat{\delta}}.$$

因此,

$$\{p_n^{(r)}, \mathbf{1}_{n\delta}^{(r)}\} = \{p_n(\infty), \mathbf{1}_{n\widehat{\delta}}^{\mathrm{add}\mathcal{T}_\infty}\} = \{p_n(\infty), \mathbf{1}_{n\widehat{\delta}}^{\mathrm{reg}}\} = \sum_{\lambda\vdash n} \frac{\prod_{s=1}^{\ell(\lambda)-1}(1-q^s)}{a_\lambda(q)}.$$

这就完成了引理的证明。 □

定理1.1的证明。设 Q 是任意一个驯顺无圈箭图， σ 是 Q的一个自同构。那么， $A = \mathfrak{A}(Q, \sigma; q)$是 $\mathbb{F}_q$上的温和遗传代数，并且对于每个固定的正整数 n，由命题 5.3 可知，我们有一组基

$$\{p_m(x) \mid x \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q,\sigma} \text{ with } m\deg(x) = n\}$$

$\mathcal{H}_v(\mathscr{R}_A)^{\mathrm{prim}}_{n\delta}$的基。由于对于每个$x \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q,\,\sigma}$，都有 $\mathcal{H}(\mathcal{T}_x) \cong \mathcal{H}^0_{v^{e_x}}(C_{r_x})$，其中 r_x是$\mathcal{T}_x$的秩，因此由引理 6.1可知，若 $m\deg(x) = n$，则

$$\{p_m(x), \mathbf{1}_{n\delta}^{\mathrm{reg}}\} = \sum_{\lambda\vdash m} \frac{\prod_{s=1}^{\ell(\lambda)-1}(1-q^{se_x})}{a_\lambda(q^{e_x})}.$$

根据命题 3.2 和命题 5.5，只需证明线性函数

$$\mathbb{I}^{\mathrm{reg}}_{n\delta} : \mathcal{H}(\mathscr{R}_A)^{\mathrm{prim}}_{n\delta} \longrightarrow \mathbb{C}$$

不为零。由于总存在一个管 $\mathcal{T}_x$ 满足 $\deg(x) = n$，所以有满足以下条件的 $p_1(x) \in\mathcal{H}(\mathscr{R}_A)^{\mathrm{prim}}_{n\delta}$

$$\{p_1(x), \mathbf{1}_{n\delta}^{\mathrm{reg}}\} = \frac{1}{q^{e_x}-1} \neq 0.$$

因此， $\mathbb{I}^{\mathrm{reg}}_{n\delta}$ 非零。证明至此完成。

为证明定理1.2，我们需要下面这个引理。其证明涉及 Ringel–Hall代数的傅里叶变换，将在下一节给出。

引理6.2。 对于每个素数幂 q 和正整数 n,

$$\sum_{\lambda\vdash n} \frac{\prod_{s=1}^{\ell(\lambda)-1}(1-q^s)}{a_\lambda(q)} = \frac{1}{q^n-1}.$$

由该引理和定理1.1可得以下结果，它强化了 [18, 推论6.10] ，并涵盖了引言中给出的定理1.2。

定理 6.3。 令 $n \geqslant 1$，并固定$x \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q,\,\sigma}$，使得 $n = m\deg(x)$，其中 $m \geqslant 1$。那么集合

$$\left\{ p_m(x) - \frac{q^{te_y}-1}{q^{me_x}-1} p_t(y) \;\middle|\; y \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q,\,\sigma},\ y \neq x, \quad and \quad t\deg(y) = n \right\}$$

是 $\mathcal{H}_v(Q,\sigma)^{\mathrm{prim}}_{n\delta}$ 的一组基。此外，若 $\sigma = \mathrm{id}$，则集合

$$\left\{ p_m(x) - p_t(y) \;\middle|\; y \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q},\ y \neq x, \quad and \quad t\deg(y) = n \right\}$$

是 $\mathcal{H}_v(Q)^{\mathrm{prim}}_{n\delta}$ 的一组基。

7. 引理6.2的证明

本节旨在证明引理6.2。策略是对克罗内克箭图和具有两个顶点的循环箭图的Ringel–Hall代数应用傅里叶变换。

设 $Q=(Q_0=I,\ Q_1)$ 是一个有限箭图。为了定义 Ringel–Hall代数的傅里叶变换，我们根据卢斯蒂格 [25] 的方法，用定义在 Q 的表示空间上的复值函数给出 Ringel–Hall代数$\mathcal{H}_v(Q)$ 的另一种定义。更确切地说，对于每个 $\mathbf{d}=(d_i)_i\in\mathbb{N}I$，令 $V=\oplus_{i\in I}V_i$ 为一个 I-分次向量空间，其维数向量为$\mathbf{d}$，定义在 $\mathbb{F}_q$ 上

$$E_V=E_{Q,V}:=\prod_{\rho\in Q_1}\mathrm{Hom}_k(V_{\mathrm{t}\rho},V_{\mathrm{h}\rho}).$$

于是，E_V中的点 $x=(x_\rho)_\rho$ 给出了一个 Q 上的表示 $V(x)=(V(x)_i,\ V(x)_\rho)$，其中对于 $i\in I$ 有 $V(x)_i=V_i$，对于 $\rho\in Q_1$有 $V(x)_\rho=x_\rho$。群$G_V:=\prod_{i\in I}\mathrm{GL}(V_i)$通过共轭作用于 E_V

$$(g_i)_i\cdot(x_\rho)_\rho=(g_{\mathrm{h}\rho}x_\rho g_{\mathrm{t}\rho}^{-1})_\rho,$$

并且，G_V-轨道 $\mathfrak{O}_x=G_V\cdot x$ 在 E_V中与 Q 的维数向量为$\mathbf{d}$的表示的同构类 $[V(x)]$一一对应。

此外，令 $\mathcal{F}(Q)_V$表示所有 G_V-不变函数 $E_V\to\mathbb{C}$的集合。那么，$\mathcal{F}(Q)_V$ 是一个复向量空间，其一组基由 E_V中 G_V-轨道的所有特征函数$\chi_{\mathfrak{O}_x}$构成。由于在同构意义下，向量空间 $\mathcal{F}(Q)_V$仅取决于$\mathbf{d}$，我们简记为 $\mathcal{F}(Q)_{\mathbf{d}}=\mathcal{F}(Q)_V$。最后，令

$$\mathcal{F}(Q)=\bigoplus_{\mathbf{d}\in\mathbb{N}I}\mathcal{F}(Q)_{\mathbf{d}}.$$

取 $\mathbf{d}$、$\mathbf{d}'$、$\mathbf{d}''\in\mathbb{N}Q_0$，其中 $\mathbf{d}=\mathbf{d}'+\mathbf{d}''$，并令 V、V'、V''为维数向量分别为 $\mathbf{d}$、$\mathbf{d}'$、$\mathbf{d}''$的 I-分次 $\mathbb{F}_q$-向量空间，满足对 $i\in I$有 $V_i=V_i'\oplus V_i''$。那么，对于$f\in\mathcal{F}(Q)_{\mathbf{d}'}=\mathcal{F}(Q)_{V'}$和 $g\in\mathcal{F}(Q)_{\mathbf{d}''}=\mathcal{F}(Q)_{V''}$，将它们的卷积积$f*g\in\mathcal{F}(Q)_{\mathbf{d}}=\mathcal{F}(Q)_V$定义为

$$f*g(x)=v^{\langle\mathbf{d}',\mathbf{d}''\rangle}\sum_{U\subset V(x)}f(V(x)/U)g(U),\ \forall\, x\in E_V,$$

其中求和遍历 U $V(x)$ 的所有子表示。根据 [25]，$\mathcal{F}(Q)$ 是一个结合代数，并且存在一个代数同构

$$\mathcal{F}(Q)\longrightarrow\mathcal{H}_v(Q),\ \chi_{\mathfrak{O}_x}\longmapsto[V(x)].$$

在下文中，我们将直接把 $\mathcal{F}(Q)$ 与 $\mathcal{H}_v(Q)$ 视为同一对象。因此，$\mathcal{H}_v(Q)$ 中的每个元素也被视为相应表示空间上的函数，即对于每个 $M\in\mathbf{Rep}_{\mathbb{F}_q}Q$，$[M]$ 被视为特征函数 $\chi_{[M]}=\chi_{\mathfrak{O}_M}$；一般而言，每个 $x=\sum_{[M]}\lambda_M[M]\in\mathcal{H}_v(Q)$ 都与函数 $\sum_{[M]}\lambda_M\chi_{[M]}$ 相对应。

现在我们可以定义傅里叶变换了。设 E 是 Q_1 的一个子集，并用 Q' 表示由 Q 通过反转 E 中的所有箭头所得到的箭图。给定 $\mathbf{d}\in\mathbb{N}I$，令 $V=\oplus_{i\in I}V_i$ 为一个维数向量为 $\mathbf{d}$ 的 I-分次 $\mathbb{F}_q$-向量空间，并设

$$X_V=\prod_{\rho\in Q_1\setminus E}\mathrm{Hom}_k(V_{\mathrm{t}\rho},V_{\mathrm{h}\rho}),\ Y_V=\prod_{\rho\in E}\mathrm{Hom}_k(V_{\mathrm{t}\rho},V_{\mathrm{h}\rho}),\ Y_V'=\prod_{\rho\in E}\mathrm{Hom}_k(V_{\mathrm{h}\rho},V_{\mathrm{t}\rho}).$$

Then

$$E_{Q,V} = X_V \times Y_V \text{ and } E_{Q',V} = X_V \times Y_V',$$

并且存在一个由下式定义的非退化双线性形式

$$\langle -,- \rangle : Y_V \times Y_V' \longrightarrow \mathbb{F}_q,\ ((C_\rho),(D_\rho)) \longmapsto \sum_{\rho \in E} \mathrm{tr}(C_\rho D_\rho).$$

固定一个非平凡加性特征 $\psi: \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}^\times$。对于每个 $f \in \mathcal{F}(Q)_{\mathbf{d}} = \mathcal{F}(Q)_V$，也就是说，对于一个 G_V-不变函数 $f: E_{Q,V} = X_V \times Y_V \to \mathbb{C}$, 定义

$$\widehat{f} : E_{Q',V} = X_V \times Y_V' \longrightarrow \mathbb{C}$$

通过令其在 $\mathcal{F}(Q')_{\mathbf{d}}$ 中为

$$\widehat{f}(x,y') = q^{-\dim Y_V/2} \sum_{y \in Y_V} f(x,y)\psi(\langle y,y' \rangle),\ \forall\, (x,y') \in X_V \times Y_V'.$$

这给出了一个 $\mathbb{C}$-线性映射

$$\Phi_{\mathbf{d}} : \mathcal{F}(Q)_V \longrightarrow \mathcal{F}(Q')_V,\ f \longmapsto \widehat{f}.$$

最后，我们令

$$\Phi_{Q',Q} = (\Phi_{\mathbf{d}})_{\mathbf{d}} : \mathcal{F}(Q) = \bigoplus_{\mathbf{d} \in \mathbb{N}I} \mathcal{F}(Q)_{\mathbf{d}} \longrightarrow \bigoplus_{\mathbf{d} \in \mathbb{N}I} \mathcal{F}(Q')_{\mathbf{d}} = \mathcal{F}(Q'),$$

称为傅里叶变换。

通过分别将 $\mathcal{F}(Q)$ 和 $\mathcal{F}(Q')$ 与 $\mathcal{H}_v(Q)$ 和 $\mathcal{H}_v(Q')$ 认同，我们将$\Phi_{Q',Q}$ 视为一个映射 $\mathcal{H}_v(Q) \to \mathcal{H}_v(Q')$。下述引理见 [25, §13]；证明参见 [39,引理 5.1 和命题 7.1] 。

引理 7.1。沿用上述所有记号。则 $\Phi_{Q',Q}$: $\mathcal{H}_v(Q) \to \mathcal{H}_v(Q')$ 是一个 $\mathbb{C}$-代数同构。

注 7.2。对于与带有自同构的箭图相关的 $\mathbb{F}_q$-代数的 Ringel–Hall代数，也可以定义傅里叶变换；参见 [27]。

我们来看一个傅里叶变换的简单例子

$$\Phi_{Q',Q} : \mathcal{H}_v(Q) \longrightarrow \mathcal{H}_v(Q'),$$

其中箭图 Q 和 Q' 由下式给出

$$Q: \quad 1 \bullet \xrightarrow{\alpha} \bullet 2, \qquad\qquad Q': \quad 1 \bullet \xleftarrow{\alpha'} \bullet 2.$$

令 S_i 和 P_i 分别表示与顶点 i对应的 Q 的单对象表示和投射表示；令 S_i' 和 P_i' 分别表示与顶点 i对应的 Q' 的单对象表示和投射表示。则 $\Phi_{Q',Q}([S_i]) = [S_i']$ 当 $i = 1,\ 2$ 时，并且

$$\begin{aligned}\Phi_{Q',Q}([P_1]) &= \Phi_{Q',Q}(v[S_1][S_2] - [S_2][S_1]) = v[S_1'][S_2'] - [S_2'][S_1'] \\ &= -v^{-1}[P_2'] + (v - v^{-1})[S_1' \oplus S_2']).\end{aligned}$$

因此，对每个 $n \geqslant 1$,

$$\Phi_{Q',Q}([P_1]^n) = \big(\Phi_{Q',Q}([P_1])\big)^n = (-1)^n v^{-n}[P_2']^n + \text{other terms}.$$

由于

$$[nP_1]=\frac{v^{-n(n-1)}}{[n]!}[P_1]^n \quad\text{and}\quad [nP_2']=\frac{v^{-n(n-1)}}{[n]!}[P_2']^n,$$

其中 $[n]!=[1][2]\cdots[n]$ 对于 $[s]=(v^s-v^{-s})/(v-v^{-1})$，当 $1\leqslant s\leqslant n$ 时，我们有

$$\big(\Phi_{Q',Q}([nP_1])\big)([nP_2'])=(-1)^n v^{-n}.$$

另一方面，对于每个矩阵 $X\in\mathbb{F}_q^{n\times n}$，令 $V(X)$ 为 Q 的表示，定义如下:

$$V(X)_1=V(X)_2=\mathbb{F}_q^n \quad\text{and}\quad V(X)_\alpha=X.$$

那么， $V(X)\cong nP_1$ 当且仅当 X 可逆。由于

$$nP_2'\cong\ \mathbb{F}_q^n \xleftarrow{I_n} \mathbb{F}_q^n,$$

其中 I_n 是 n 阶单位矩阵，由 $\Phi_{Q',Q}$ 的定义可知

$$\begin{aligned}\big(\Phi_{Q',Q}([nP_1])\big)([nP_2'])&=q^{-n^2/2}\sum_{X\in{\mathbb{F}_q}^{n\times n}}\chi_{[nP_1]}([V(X)])\psi(\mathrm{tr}(XI_n))\\&=q^{-n^2/2}\sum_{X\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)}\psi(\mathrm{tr}\,X),\end{aligned}$$

其中 ψ 是 $\mathbb{F}_q$ 的非平凡加法特征，它出现在 $\Phi_{Q',Q}$ 的定义中。因此，我们得到等式

$$\sum_{X\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)}\psi(\mathrm{tr}\,X)=(-1)^n q^{n(n-1)/2}, \tag{7.2.1}$$

这在后面会有用。

引理6.2的证明。 考虑傅里叶变换

$$\Phi:=\Phi_{C_2,K_2}:\mathcal{H}_v(K_2)\longrightarrow\mathcal{H}_v(C_2)$$

相关联于克罗内克箭图 K_2 以及具有两个顶点的循环箭图 C_2 s:

$$K_2:\quad 1\bullet\underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}}\bullet 2 \qquad\qquad C_2:\quad 1\bullet\underset{\beta'}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}}\bullet 2$$

其定义是通过将 K_2中的箭 β 反向得到的。注意

$$\mathcal{F}_{K_2}=\mathcal{F}_{C_2}=\{m\delta\mid m\geqslant 1\}\ \text{ with }\delta=(1,1).$$

根据定义，对于分别给定的 K_2 和 C_2的表示 M 与 N ，其图示如下:

$$M:\quad \mathbb{F}_q^m\underset{X_2}{\overset{X_1}{\rightrightarrows}}\mathbb{F}_q^n, \qquad\qquad N:\quad \mathbb{F}_q^m\underset{Y_2}{\overset{Y_1}{\rightleftarrows}}\mathbb{F}_q^n,$$

我们有

$$\big(\Phi([M])\big)([N])=q^{-mn/2}\sum_{Z\in\mathbb{F}_q^{n\times m}}\chi_{[M]}\big([L(Z)]\big)\psi(\mathrm{tr}(ZY_2)), \tag{7.2.2}$$

其中 $L(Z)$ 由下式给出

$$L(Z):\ \mathbb{F}_q^m \underset{Z}{\overset{Y_1}{\rightrightarrows}} \mathbb{F}_q^n.$$

对每个 $m \geqslant 1$，考虑 K_2 的如下不可分解表示：

$$I_m(0):\mathbb{F}_q^m \underset{J_m}{\overset{I_m}{\rightrightarrows}} \mathbb{F}_q^m, \qquad I_m(\infty):\mathbb{F}_q^m \underset{I_m}{\overset{J_m}{\rightrightarrows}} \mathbb{F}_q^m,$$

其中 J_m 是大小为 m 的幂零 Jordan 块。事实上，所有不可分解表示 $I_m(0)$（分别为 $I_m(\infty)$, $m \geqslant 1$）构成 Auslander–Reiten 箭图中 $\mathsf{Rep}_{\mathbb{F}_q}K_2$ 的一个齐次管 $\mathcal{T}_0$（分别为 $\mathcal{T}_\infty$）内不可分解表示的完备集。对于每个分拆 $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_t)\vdash n$，令

$$I_\lambda(0)=\bigoplus_{i=1}^t I_{\lambda_i}(0) \ \text{ and } \ I_\lambda(\infty)=\bigoplus_{i=1}^t I_{\lambda_i}(\infty).$$

换言之，$I_\lambda(0)$ 和 $I_\lambda(\infty)$ 具有如下形式

$$I_\lambda(0):\ \mathbb{F}_q^n \underset{J_\lambda}{\overset{I_n}{\rightrightarrows}} \mathbb{F}_q^n, \qquad I_\lambda(\infty):\ \mathbb{F}_q^n \underset{I_n}{\overset{J_\lambda}{\rightrightarrows}} \mathbb{F}_q^n,$$

其中 J_λ 表示分块对角矩阵 $\mathsf{diag}(J_{\lambda_1},\dots,J_{\lambda_t})$。于是，与管 $\mathcal{T}_0$ 和 $\mathcal{T}_\infty$ 相对应，我们在 $\mathcal{H}_v(K_2)$ 中得到两个正则本原元

$$p_n(0)=\sum_{\lambda\vdash n}\Big(\prod_{s=1}^{\ell(\lambda)-1}(1-q^s)\Big)[I_\lambda(0)] \ \text{ and } \ p_n(\infty)=\sum_{\lambda\vdash n}\Big(\prod_{s=1}^{\ell(\lambda)-1}(1-q^s)\Big)[I_\lambda(\infty)]$$

它们的差

$$p_n(0)-p_n(\infty)=:p_n^{K_2}$$

is a 根据定理 6.3，这是 $\mathcal{H}_v(K_2)^{\mathrm{prim}}_{n\delta}$ 中的本原元；另见 [18, 定理 6.10]。

根据 [9, 定理 3.5]，$\Phi(p_n^{K_2})$ 是 $\mathcal{H}_v(C_2)^{\mathrm{prim}}_{n\delta}$ 中的一个本原元。根据命题 4.2，它是基集中的元素的 $\mathbb{C}$-线性组合

$$\{p_n^{(2)}\}\cup\{p_m(x)\mid 0\neq x\in\mathbb{A}_q^1 \ \text{ and } \ m\deg(x)=n\}$$

$\mathcal{H}_v(C_2)^{\mathrm{prim}}_{n\delta}$ 的。

如第 4 节所述，对于每个 $i\in\{1,2\}$ 和 $m\geqslant 1$，令 $S_i[m]$ 为 C_2 的维数为 m 且顶为 S_i的不可分解幂零表示。我们将计算

$$\Phi(p_n^{K_2})([nS_1[2]]) \ \text{ and } \ \Phi(p_n^{K_2})([nS_2[2]]).$$

显然，C_2 有一个自同构 τ，它交换顶点 1 和 2，以及箭头 α 和 β'。于是 τ 诱导出一个双代数同构

$$\tau:\mathcal{H}_v^0(C_2)\longrightarrow\mathcal{H}_v^0(C_2)$$

特别取 $[S_1[m]]\mapsto[S_2[m]]$ 与 $[S_2[m]]\mapsto[S_1[m]]$。则 $\tau(p_n^{(2)})$ 仍是 $\mathcal{H}_v^0(C_2)$ 中维数向量为 $n\delta$ 的本原元，因而它是 $p_n^{(2)}$ 的倍数。由 (4.0.3)，$p_n^{(2)}$具有形式

$$p_n^{(2)}=[S_1[2n]]+[S_2[2n]]+\text{other terms}.$$

这迫使 $\tau(p_n^{(2)}) = p_n^{(2)}$。因为 $\tau([nS_1[2]]) = [nS_2[2]]$，我们还有

$$p_n^{(2)}([nS_1[2]]) = p_n^{(2)}([nS_2[2]]).$$

由于对于每个 $0 \neq x \in \mathbb{A}_q^1$（$m\deg(x) = n$），$p_m(x)$ 在 $[nS_1[2]]$ 和 $[nS_2[2]]$ 上均不支撑，因此

$$\Phi(p_n^{K_2})([nS_1[2]]) = \Phi(p_n^{K_2})([nS_2[2]]).$$

为简化记号，记

$$M_1 := nS_1[2] \quad \text{and} \quad M_2 := nS_2[2],$$

显然具有如下形式

$$M_1\colon \quad \mathbb{F}_q^n \underset{0}{\overset{I_n}{\rightleftarrows}} \mathbb{F}_q^n, \qquad M_2\colon \quad \mathbb{F}_q^n \underset{I_n}{\overset{0}{\rightleftarrows}} \mathbb{F}_q^n.$$

另一方面，我们有

$$\Phi(p_n^{K_2})([M_1]) = \sum_{\lambda\vdash n} \Big(\prod_{s=1}^{\ell(\lambda)-1} (1-q^s) \Big) \Big(\Phi([I_\lambda(0)])([M_1]) - \Phi([I_\lambda(\infty)])([M_1]) \Big).$$

将公式 (7.2.2) 应用于分拆 $\lambda \vdash n$，$\Phi([I_\lambda(\infty)])([M_1]) = 0$，可得，并且

$$\begin{aligned}\Phi([I_\lambda(0)])([M_1]) &= q^{-n^2/2} \sum_{X\in\mathbb{F}_q^{n\times n}: X\sim J_\lambda} \psi(0) = q^{-n^2/2} |\{X \in \mathbb{F}_q^{n\times n} \mid X \sim J_\lambda\}| \\ &= q^{-n^2/2} \frac{|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)|}{a_\lambda(q)} = q^{-n^2/2} \prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i) \frac{1}{a_\lambda(q)},\end{aligned}$$

其中，$X \sim J_\lambda$ 表示 X 和 J_λ 在 $\mathbb{F}_q^{n\times n}$中共轭。因此，

$$\begin{aligned}\Phi(p_n^{K_2})([M_1]) &= \sum_{\lambda\vdash n} \Big(\prod_{s=1}^{\ell(\lambda)-1} (1-q^s) \Big) \Phi([I_\lambda(0)])([M_1]) \\ &= q^{-n^2/2} \sum_{\lambda\vdash n} \Big(\prod_{s=1}^{\ell(\lambda)-1} (1-q^s) \Big) \Big(\prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i) \frac{1}{a_\lambda(q)} \Big) \\ &= q^{-n^2/2} \prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i) \Big(\sum_{\lambda\vdash n} \frac{\prod_{s=1}^{\ell(\lambda)-1}(1-q^s)}{a_\lambda(q)} \Big).\end{aligned}$$

另一方面，我们有

$$\Phi(p_n^{K_2})([M_2]) = \sum_{\lambda\vdash n} \Big(\prod_{s=1}^{\ell(\lambda)-1} (1-q^s) \Big) \Big(\Phi([I_\lambda(0)])([X_2]) - \Phi([I_\lambda(\infty)])([M_2]) \Big).$$

再次应用（7.2.2）中的公式，我们得到

$$\begin{aligned}&\Phi([I_\lambda(0)])([M_2]) = 0 \quad \text{for all } \lambda \vdash n, \text{ and} \\ &\Phi([I_\lambda(\infty)])([M_2]) \neq 0 \quad \text{only if } \lambda = (1^n).\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\Phi(p_n^{K_2})([M_2]) &= -\prod_{i=1}^{n-1}(1-q^i)\Phi([I_{(1^n)}(\infty)])([M_2])\\ &= -q^{-n^2/2}\prod_{i=1}^{n-1}(1-q^i)\sum_{X\in \mathrm{GL}_n(k)}\psi(\mathrm{tr}X)\\ &= -q^{-n^2/2}\prod_{i=1}^{n-1}(1-q^i)(-1)^n q^{n(n-1)/2} \qquad \text{by (7.2.1)}\\ &= q^{-n^2/2}\prod_{i=1}^{n-1}(q^n-q^i).\end{aligned}$$

我们得出

$$q^{-n^2/2}\prod_{i=0}^{n-1}(q^n-q^i)\Big(\sum_{\lambda\vdash n}\frac{\prod_{s=1}^{\ell(\lambda)-1}(1-q^s)}{a_\lambda(q)}\Big)=q^{-n^2/2}\prod_{i=1}^{n-1}(q^n-q^i),$$

也就是说,

$$\sum_{\lambda\vdash n}\frac{\prod_{s=1}^{\ell(\lambda)-1}(1-q^s)}{a_\lambda(q)}=\frac{1}{q^n-1}.$$

证明至此完成。

注7.3。 将上面的恒等式与以下两个恒等式进行比较，或许会很有趣

$$\sum_{\lambda\vdash n}\frac{\big(\prod_{s=1}^{\ell(\lambda)-1}(1-q^s)\big)^2}{a_\lambda(q)}=\frac{n}{q^n-1}$$

and

$$\sum_{\lambda\vdash n}\frac{1}{a_\lambda(q)}=\frac{q^{n(n-1)/2}}{(q-1)(q^2-1)\cdots(q^n-1)},$$

它们分别见于 [29,第三章] 和 [19, 例 I], 。

致谢： 作者感谢华九昭提供的有益讨论。本研究得到国家自然科学基金委员会（项目编号：12031007）的资助。

参考文献

[1] A. Berenstein and J. Greenstein, 本原生成的*Hall*代数, 《太平洋数学杂志》 **281**(2016), 287–331.[2] R. Borcherds, 广义*Kac–Moody*代数, 《代数杂志》 **115** (1988), 501–512.[3] T. Bozec and O. Schiffmann, 计数箭图的绝对尖点表示, 《数学杂志》 **292** (2019), 133–149.[4] W. Crawley-Boevey, 箭图表示的例外序列, 加拿大数学会会议论文集 **14** (1993), 117–124.[5] B. Deng and J. Du, 量子仿射的单项式基 $\mathfrak{sl}_n$, 《数学进展》 **191** (2005), 276–304.

[6] B. Deng and J. Du, 弗罗贝尼乌斯态射与代数表示, 美国数学会会刊 358 (2006), 3591–3622.[7] B. Deng, J. Du and Q. Fu, 仿射量子Schur–Weyl理论的双Hall代数方法, 伦敦数学会讲义系列 401, Cambridge, 2012.[8] B. Deng, J. Du, B. Parshall and J. Wang, 有限维代数与量子群, 数学调查与专著第150卷, 美国数学会, Providence 2008.[9] B. Deng and C. Ma, Ringel–Hall代数上的傅里叶变换, Algebr. Represent. Theory 26 (2023), 1913–1930.[10] B. Deng and K. Obul and Y. Pang, 有限域上带自同构的箭图表示（中文）, Sci. Sin. Math. 47, (2017), 1–20.[11] B. Deng and J. Xiao, 关于赋值箭图表示的Kac定理的一种新方法, 《数学杂志》 245 (2003), 183–199.[12] V. Dlab and C. M. Ringel, 图与代数的不可分解表示, 美国数学会回忆录, 第173号, 美国数学会, Providence, 1976.[13] P. W. Donovan and M. R. Freislich, 有限图表示论与相关代数, Carleton数学讲义, 第5号, 1973.[14] P. Gabriel and A. V. Roiter, 有限维代数表示论, 附B. Keller撰写的一章, 数学科学百科全书, 第73号, 代数, 第VIII卷, 施普林格出版社, Berlin, 1992.[15] W. Geigle and H. Lenzing, 垂直范畴及其在表示与层中的应用, J. Algebra 144 (1991), 273–343.[16] J. A. Green, Hall代数、遗传代数与量子群, Invent. Math. 120 (1995), 361–377.[17] P. Hall, 分拆代数, 载于: 第四届加拿大数学大会论文集, Banff 1957, University of Toronto Press, Toronto, 1959, 第147–159页.[18] L. Hennecart, 箭图Hall代数中的各向同性尖点函数, Int. Math. Res. Not. IMRN 2021, 第15期, 11514–11564.[19] J. Hua, 有限域上箭图表示的计数, J. Algebra 226 (2000), 1011–1033.[20] J. Hua and J. Xiao, 关于温和遗传代数的Ringel–Hall代数, Algebr. Represent. Theory 5 (2002), 527–550.[21] A. Hubery, 循环箭图Ringel–Hall代数的对称函数与中心, 《数学杂志》 251 (2005), 705–719.[22] A. Hubery, Hopf代数 $\mathcal{U}_v(\mathfrak{gl}_n)$ 的三种刻画, 预印本, 2009.[23] A. Hubery, 循环箭图的Ringel–Hall代数, S˜ao Paulo J. Math. Sci. 4 (2010), 第3期, 351–398.[24] V. Kac, 无限维李代数, 第3版, Cambridge University Press, 1990.[25] G. Lusztig, 源自量子包络代数的典范基, J. Amer. Math. Soc. 3 (1990), 447–498.[26] G. Lusztig, 量子仿射 $\mathfrak{gl}_n$ 中的非周期性, Asian J. Math. 3(1999), 147–177.[27] C. Ma, 赋值箭图的傅里叶变换与Ringel–Hall代数, Proc. Amer. Math. Soc. 149 (2021), 第5期, 1875–1887.[28] R. Ma, 循环箭图Hall代数中的本原元, arXiv:2403.18065.[29] I. G. Macdonald, 对称函数与Hall多项式, 第2版, Clarendon Press, Oxford, 1995.[30] A. Obul, 仿射赋值箭图Ringel–Hall代数的极小生成系, J. Algebra 297 (2006), 311–332.[31] L. A. Nazarova, 无限型箭图的表示, Math. USSR Izvestija Ser. Mat. 7(1973), 752–791.[32] C. M. Ringel, K-物种与双模的表示, J. Algebra 41 (1976), 269–302.[33] C. M. Ringel, 驯代数与整二次型, 数学讲义, 第1099号, 施普林格出版社, Berlin, 1984.[34] C. M. Ringel, Hall代数, 载于：代数专题, 第1部分, S. Balcerzyk等编, Banach Center Publications, 第26号, 1988, 第433–447页.[35] C. M. Ringel, Hall代数与量子群, Invent. Math. 101 (1990), 583–592.

[36] C. M. Ringel，循环箭图的合成代数，关于以下类型˜量子群的显式描述 A_n，伦敦数学会会刊 **66**(1993)，507–537。[37] C. M. Ringel，*Hall*代数再探，载于代数及其表示的量子变形，A. Joseph & S. Shnider（编），以色列数学会议论文集，第7卷，巴伊兰大学，巴伊兰，1993，第171–176页。[38] C. M. Ringel，遗传阿廷代数的例外序列集合上的辫群作用，载于：当代数学 **171**，美国数学会，普罗维登斯，1994，第339–352页。[39] B. Sevenhant 和 M. Van den Bergh，关于箭图的*Hall*代数的双代数，《代数杂志》**221** (1999)，135–160。[40] B. Sevenhant 和 M. Van den Bergh，*Kac*猜想与*Hall*代数结构之间的关系，纯粹与应用代数杂志**160** (2001)，319–332。[41] O. Schiffmann，循环箭图的*Hall*代数与*Fock*空间的典范基，国际数学研究通知**8** (2000)，413–440。[42] A. Schofield，箭图的半不变量，伦敦数学会杂志**43** (1991)，383–395。[43] E. Steinitz，论阿贝尔群理论，德国数学家协会年报**9**(1901)，80–85。[44] M. Varagnolo 和 E. Vasserot，量子舒尔代数的分解矩阵，杜克数学杂志**100**(1999)，267–297。[45] A. V. Zelevinsky，有限经典群的表示，数学讲义，第869卷，施普林格出版社，柏林—纽约，1981。[46] P. Zhang，克罗内克代数的合成代数的三角分解，《代数杂志》**184** (1996)，159–174。[47] P. Zhang、Y. Zhang 和 J. Guo 仿射箭图的*Ringel–Hall*代数的极小生成元，《代数杂志》**239** (2001)，675–204。

数学科学系，清华大学，北京 100084，中国。电子邮箱： bmdeng@tsinghua.edu.cn电子邮箱：li-wh20@mails.tsinghua.edu.cn