arXiv:2603.08184v1 [math.FA] 9 Mar 2026

通过一类半范数研究贝雷津值域与贝雷津 半径不等式的凸性

P. HIRAN DAS、ATHUL AUGUSTINE、PINTU BHUNIA 和 P. SHANKAR

Abstract. 令 $B(\mathcal{H})$表示作用于再生核希尔伯特空间 $\mathcal{H}(\Omega)$ 上的所有有界线性算子构成的 C^*-代数。 在本文中，我们在 $B(\mathcal{H})$ 上引入了一族新的半范数，称为 σ_t-贝雷津范数，其定义为

$$\|A\|_{ber_{\sigma_t}} = \sup_{\lambda,\mu\in\Omega}\left\{\left(\left|\left\langle A\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\mu\right\rangle\right|^p \ \sigma_t\ \left|\left\langle A^*\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\mu\right\rangle\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\},$$

其中 $A\in B(\mathcal{H})$ $p\geq 1$， $t\in[0,1]$ 且 σ_t 表示对称均值 σ的插值路径。我们证明，这族半范数刻画了酉的可逆算子。我们建立了 σ_t-贝雷津范数的若干基本性质，并给出一系列新的不等式，从而为有界线性算子的贝雷津 半径提供更精细的上界，进而改进文献中的已有结果。

此外，我们研究了作用于 $\mathbb{C}^n$ 上的加权Hardy空间和 Fock空间中的算子的 Berezin 值域的凸性。我们刻画了加权Hardy空间中具有椭圆自同构的复合算子的 Berezin 值域的凸性，以及具有不同权的有限秩算子的 Berezin 值域的凸性。我们还刻画了 Fock空间上、符号为 $\phi(z)=Az$ 的复合算子的 Berezin 值域的凸性，其中 A 是 n 阶的标量矩阵。

1. Introduction

非空集合 Ω 上的再生核希尔伯特空间（RKHS） $\mathcal{H}=\mathcal{H}(\Omega)$ 是一个复值函数希尔伯特空间，并且对于每个 $\lambda\in\Omega$，由 $E_\lambda(f)=f(\lambda)$ 定义的点求值泛函 $E_\lambda\colon \mathcal{H}\to\mathbb{C}$ 是有界的。根据 Riesz表示定理，对于每个 $\lambda\in\Omega$，都存在唯一的元素 $k_\lambda\in\mathcal{H}$ ，使得$f(\lambda)=\langle f, k_\lambda\rangle$，对所有 $f\in\mathcal{H}$. 均成立。函数 k_λ称为 $\mathcal{H}$ 在λ处的再生核。在 λ 处的归一化再生核定义为 $\hat{}k_\lambda=\frac{k_\lambda}{\|k_\lambda\|}$. 。关于再生核希尔伯特空间的更多细节，请参阅 [26]。

对于有界线性算子 $A\in B(\mathcal{H})$， A 在 λ 处的贝雷津变换（或贝雷津符号）$\widetilde{\ }$ $\hat{}\hat{}$ 定义为 $A(\lambda):=\langle Ak_\lambda, k_\lambda\rangle$。算子的贝雷津值域（或贝雷津集）和贝雷津半径（或贝雷津数）分别定义为

$$Ber(A):=\{\widetilde{A}(\lambda):\lambda\in\Omega\}\quad\text{and}\quad ber(A):=\sup_{\lambda\in\Omega}\{|\widetilde{A}(\lambda)|\}.$$

再生核希尔伯特空间上算子的 Berezin 变换最早由 F. A. Berezin [7] 引入。根据定义可直接得出，Berezin 值域包含于 A的数值域中，因此 Berezin 半径满足$ber(A)\leq\|A\|$。根据 Toeplitz–Hausdorff定理 [20]，，有界算子的数值域总是凸的。然而，Berezin 值域一般不一定是凸的。关于再生核希尔伯特空间上算子的 Berezin 值域凸性，已有多项研究；例如，参见 [1, 2, 3, 18, 21, 29]。关于

2020 *Mathematics Subject Classification.* 47A12, 47A30, 26E60, 46L05.*Key words and phrases.* 半范数，贝雷津范数，贝雷津半径，贝雷津半径不等式，均值。

Berezin 半径不等式的详细研究，请参阅 [5, 6, 10, 11, 12, 14, 19,25, 33]。

对于有界线性算子 $A \in B(\mathcal{H})$，Berezin范数定义为

$$\|A\|_{ber} = \sup_{\lambda,\mu\in\Omega} |\langle A\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\mu\rangle|.$$

Berezin范数在 $B(\mathcal{H})$ 上定义了一种算子范数。此外，容易看出

$$ber(A) \leq \|A\|_{ber} \leq \|A\|.$$

最近，Bhunia 等人 [13] 证明，对于正算子 $A \in B(\mathcal{H})$

$$ber(A) = \|A\|_{ber}.$$

为了引入本文所讨论的半范数类，下面我们先回顾均值和插值路径的概念。

均值是一个非负函数 $\sigma : [0,\infty) \times [0,\infty) \to [0,\infty)$，满足以下条件（见 [8, 9]）：

(i) $\sigma(a, b) \geq 0$; (ii) 若 $a \leq b$, $a \leq \sigma(a, b) \leq b$; (iii) $\sigma(a, b)$ 关于 a 和 b 均单调递增; (iv) 对于 $\alpha > 0$, $\sigma(\alpha a, \alpha b) = \alpha\sigma(a, b)$（齐次性）; (v) $\sigma(a, b)$ 连续。

为方便起见，本文中我们将 $\sigma(a, b)$ 记为 $a\sigma b$。均值 σ 若满足 $a\sigma b = b\sigma a$，则称为对称均值。对于对称均值 σ，若参数化算子均值 σ_t 对每个 $t \in [0,1]$ 满足以下条件，则称其为 σ 的插值路径：

(i) $a\sigma_0 b = b$, $a\sigma_1 b = a$, $a\sigma_{\frac{1}{2}} b = a\sigma b \; \forall \; a, b \geq 0$; (ii) $(a\sigma_t b)\sigma(a\sigma_s b) = a\sigma_{\frac{t+s}{2}} b$, $\forall\, t, s \in [0,1]$; (iii) 对每个 $0 \leq t \leq 1$, σ_t 关于其各个分量递增。

算术均值、几何均值和调和均值都是对称均值的例子。对于两个非负数 a 和 b，算术均值定义为$a\nabla b = \frac{a+b}{2}$，其插值路径为 $a\nabla_t b = ta + (1-t)b, \quad 0 \leq t \leq 1$. 更多详细信息请参见 [27]。

在 [25], 中，Nayak和Bhunia在$B(\mathcal{H})$上引入了一种新的范数，称为 t-Berezin范数。

定义1.1。 [25] 令 $A \in B(\mathcal{H})$。则对于每个 $t \in [0,1]$，t-Berezin 范数定义为

$$\|A\|_{ber_t} = \sup_{\lambda,\mu\in\Omega} \left\{ t\left|\langle A\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\mu\rangle\right| + (1-t)\left|\langle A^*\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\mu\rangle\right| \right\}, \quad t \in [0,1].$$

可以验证，对于 $t \in [0,1]$, t-Berezin范数在 $B(\mathcal{H})$上定义了一个范数。现在我们将这一定义推广到对称均值的一般插值路径。

定义 1.2。 令 $A \in B(\mathcal{H})$，并且对于 $t \in [0,1]$，令 σ_t 为对称均值 σ的一条插值路径。则 A的 σ_t-Berezin范数，记为 $\|A\|_{ber_{\sigma_t}}$，定义为

$$\|A\|_{ber_{\sigma_t}} = \sup_{\lambda,\mu\in\Omega} \left\{ \left(\left|\left\langle A\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\mu \right\rangle\right|^p \; \sigma_t \; \left|\left\langle A^*\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\mu \right\rangle\right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\},$$

其中 $p \geq 1$。

显然，定义 1.1 可由定义 1.2 取 $\sigma = \nabla$（算术均值）和 $p = 1$即可得到。

本文研究了 σ_t-Berezin 范数的基本性质，并通过推导涉及 σ_t-Berezin 范数的新不等式，推广了关于 $B(\mathcal{H})$ 上有界线性算子的贝雷津半径的若干已知界。此外，我们运用该范数刻画酉可逆算子。我们还研究了作用于加权Hardy空间和复平面上的Fock空间的若干类算子的贝雷津值域的凸性。具体而言，我们研究了权函数为 $\beta_n^2 = (\frac{1}{\beta})^n$ 的加权Hardy空间，其中 $\beta \in (0,1]$，并刻画了符号为 $\phi(z) = \eta z$，的复合算子的凸性，其中 $\eta \in \mathbb{D}$. 。此外，我们讨论了相同权函数下加权Hardy空间上有限秩算子的凸性。进一步地，我们刻画了符号为 $\phi(z) = Az$，的 Fock空间上复合算子的贝雷津值域的凸性，其中 $A = \lambda I$，$\lambda \in \mathbb{D}$ 且 $\phi(z) = A_k z$ 满足：对于固定的 $k \in \{1, 2, ..., n\}$，$A_k = [a_{kj}]$ 是一个对角矩阵，其对角元为 $a_{kk} = a + ib$ 和 $a_{jj} = 1$ $\forall$ $k \neq j$，其中 $a^2 + b^2 \leq 1$。我们的结果推广并统一了关于贝雷津值域凸性的若干已有结果。

2. PRELIMINARIES

在证明本文的主要结果之前，我们先回顾一些将在全文中用到的辅助结果。

设 $A \in B(\mathcal{H})$，则 A 的极分解为 $A = \mathcal{U}|A|$，其中 $\mathcal{U}$ 是部分等距算子，且 $|A| = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$.

引理2.1。 [28] 设 A，$B \in B(\mathcal{H})$ 具有极分解

$$A = \mathcal{U}|A|, \qquad B = \mathcal{V}|B|$$

并设 f、g: $[0,\infty) \to [0,\infty)$ 为非负连续函数。则对所有 x、$y \in \mathcal{H}$，以下不等式成立:

$$|\langle g(|B|) f(|A^*|) \mathcal{U}x, y\rangle|^2 \leq \langle f^2(|A|)x, x\rangle \langle g^2(|B|)y, y\rangle, \tag{2.1}$$

$$|\langle g(|A|) f(|B^*|) \mathcal{V}x, y\rangle|^2 \leq \langle f^2(|B|)x, x\rangle \langle g^2(|A|)y, y\rangle. \tag{2.2}$$

特别地，若 f 和 g 是定义在 $[0,\infty)$ 上的非负连续函数，且满足$f(t)g(t) = t$，则

$$|\langle Ax, y\rangle|^2 \leq \langle f^2(|A|)x, x\rangle \langle g^2(|A^*|)y, y\rangle. \tag{2.3}$$

引理2.2。 [32] 设 a_i 为正数，其中 $i = 1$，2，...，n. 则对于 $p \geq 1$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^p \leq n^{p-1} \sum_{i=1}^{n} {a_i}^p. \tag{2.4}$$

引理2.3。 [23, 定理 5] 设 A，$B \in B(\mathcal{H})$ 满足 $|A|B = B^*|A|$，并设 f和 g是定义在 $[0,\infty)$ 上的两个非负连续函数，使得 $f(t)g(t) = t$对每个 $t \geq 0$都成立。则

$$|\langle ABx, y\rangle|^2 \leq r(B)\langle f^2(|A|)x, x\rangle\langle g^2(|A^*|)y, y\rangle, \tag{2.5}$$

对每个 x，$y \in \mathcal{H}$，其中 $r(B)$ 表示 B的谱半径。

引理 2.4。 [30] 若 $T \in B(\mathcal{H})$ 是正算子，则

$$\langle Tx, x\rangle^p \leq \langle T^p x, x\rangle, \ \forall\ p \geq 1, \ \forall\ x \in \mathcal{H}, \ \|x\| = 1. \tag{2.6}$$

当 (2.6) 中的不等式反向时 $0 \leq p \leq 1$。

引理 2.5。 [15] 设 x， y， $e \in \mathcal{H}$ 且 $\|e\| = 1$，则

$$|\langle x, e\rangle \langle e, y\rangle| \leq \frac{1}{2}\left(|\langle x, y\rangle| + \|x\|\|y\|\right). \tag{2.7}$$

以下定理给出了 Berezin 半径的一个著名上界。

定理 2.6。 [31, 推论 3.4] 设 A_i， B_i， $X_i \in B(\mathcal{H})$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ 且 $0 < \alpha < 1$。则对于 $p \geq 1$,

$$ber^p\left(\sum_{i=1}^{n} A_i^* X_i B_i\right) \leq \frac{n^{p-1}}{2} ber\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\left[A_i^*|X_i^*|^{2(1-\alpha)}A_i\right]^p + \left[B_i^*|X_i|^{2\alpha}B_i\right]^p\right)\right).$$

以下是定理2.6的一些特殊情形。

推论 2.7。 [31, 推论 3。5] 设 A， B， $X \in B(\mathcal{H})$。则有以下结果成立：

(i) $ber^p(A) \leq \frac{1}{2} ber(|A|^p + |A^*|^p)\ \forall\ p \geq 1$,
(ii) $ber(A^*XB) \leq \frac{1}{2} ber\left(|A|^2 + |B|^2\right)$,(iii)
$ber(A^*B) \leq \frac{1}{2} ber(A^*|X^*|A + B^*|X^*|B)$.

3. The σ_t- Berezin norm of Operators

首先，我们讨论 σ_t-贝雷津范数的一些基本性质，这些性质可直接由定义1.2得出。

命题 3.1。设 $A \in B(\mathcal{H})$。则有以下结论：

(i) $\|A\|_{ber_{\sigma_t}} = \|A^*\|_{ber_{\sigma_t}}$。 (ii)
$\|A\|_{ber_{\sigma_t}} = 0$ 当且仅当 $A = 0$。(iii) 对所有
$\lambda \in \mathbb{C}$， $\|\lambda A\|_{ber_{\sigma_t}} = |\lambda|\|A\|_{ber_{\sigma_t}}$。$(iv)$
$\|A\|_{ber_{\sigma_t}} = \|A\|_{ber_{\sigma_{1-t}}}$。

由此命题可知， $\|A\|_{ber_{\sigma_t}}$ 在 $B(\mathcal{H})$ 上定义了一个半范数，因为它满足除三角不等式之外的所有范数公理。此外，显然它满足以下不等式

$$ber(A) \leq \|A\|_{ber_{\sigma_t}} \leq \|A\|_{ber}. \tag{3.1}$$

^ ^ 设 $A \in B(H)$，定义 $\widetilde{c}(A) := \inf_{\lambda,\ \mu\in\Omega} |\langle Ak_\lambda,\ k_\mu\rangle|$。在下述定理中，我们用 $\widetilde{c}(\cdot)$ 给出 σ_t-贝雷津范数的下界。

定理 3.2. 设 $A \in B(\mathcal{H})$。则对于 $p \geq 1$

$$\max\left\{\widetilde{c}^p(A)\ \sigma_t\ \|A\|_{ber}^p, \|A\|_{ber}^p\ \sigma_t\ \widetilde{c}^p(A)\right\} \leq \|A\|_{ber_{\sigma_t}}^p.$$

证明。我们有

$$\begin{aligned}\|A\|_{ber_{\sigma_t}}^p &= \sup_{\lambda,\mu\in\Omega}\left\{|\langle A\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\mu\rangle|^p\ \sigma_t\ |\langle A^*\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\mu\rangle|^p\right\}\\ &\geq \widetilde{c}^p(A)\ \sigma_t\ |\langle A^*\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\mu\rangle|^p.\end{aligned}$$

对所有 λ， $\mu \in \Omega$，取上确界，得到

$$\|A\|_{ber_{\sigma_t}}^p \geq \widetilde{c}^p(A)\ \sigma_t\ \|A\|_{ber}. \tag{3.2}$$

类似地，我们可以得到

$$\|A\|_{ber_{\sigma_t}}^p \geq \|A\|_{ber}\ \sigma_t\ \widetilde{c}^p(A). \tag{3.3}$$

结合 (3.2) 和 (3.3)，我们得到所需不等式。 □

下面的结果给出了 Berezin范数等号成立情形的完整刻画。

Th定理 3.3。 设 $A \in B(\mathcal{H})$。则以下两个陈述等价：

(i) $\|A\|_{ber_{\sigma_t}} = \|A\|_{ber}$。$(ii)$ 存在序列 $\{\lambda_n\}$ 和 $\{\mu_n\}$ 属于 Ω，使得

$$\lim_{n\to\infty} |\langle A\hat{k}_{\lambda_n}, \hat{k}_{\mu_n}\rangle| = \lim_{n\to\infty} |\langle A^*\hat{k}_{\lambda_n}, \hat{k}_{\mu_n}\rangle| = \|A\|_{ber}.$$

证明。 首先，我们证明 $(i) \Longrightarrow (ii)$。 假设 $\|A\|_{ber_{\sigma_t}} = \|A\|_{ber}$ 成立。由于 A是有界的，存在归一化核序列 $\{k_{\lambda_n}\}$和 $\{k_{\mu_n}\}$属于 $\mathcal{H}$，使得

$$\lim_{n\to\infty} (|\langle A\hat{k}_{\lambda_n}, \hat{k}_{\mu_n}\rangle|^p \sigma_t |\langle A^*\hat{k}_{\lambda_n}, \hat{k}_{\mu_n}\rangle|^p) = \|A\|^p_{ber_{\sigma_t}}.$$

因此，我们有

$$\|A\|^p_{ber} = \|A\|^p_{ber_{\sigma_t}} = \lim_{n\to\infty} (|\langle A\hat{k}_{\lambda_n}, \hat{k}_{\mu_n}\rangle|^p \sigma_t |\langle A^*\hat{k}_{\lambda_n}, \hat{k}_{\mu_n}\rangle|^p).$$

ˆ ˆ 对于 $t = 0$，我们有 $\|A\|_{ber} = \lim_{n\to\infty}(|\langle A^*k_{\lambda_n},\ k_{\mu_n}\rangle|$ 而对于 $t = 1$，我们有 $\|A\|_{ber} =$ˆ ˆ ˆ ˆ ˆ ˆ $\lim_{n\to\infty}(|\langle Ak_{\lambda_n},\ k_{\mu_n}\rangle|$. 因此，$\lim_{n\to\infty} |\langle Ak_{\lambda_n},\ k_{\mu_n}\rangle| = \lim_{n\to\infty} |\langle A^*k_{\lambda_n},\ k_{\mu_n}\rangle| = \|A\|_{ber}$。 现在为了证明 $(ii) \Longrightarrow (i)$，假设 (ii) 成立。我们有

$$\begin{aligned}
\|A\|^p_{ber_{\sigma_t}} &= \sup_{\lambda,\mu\in\Omega} \left\{ |\langle A\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\mu\rangle|^p \ \sigma_t\ |\langle A^*\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\mu\rangle|^p \right\} \\
&\geq \lim_{n\to\infty} |\langle A\hat{k}_{\lambda_n}, \hat{k}_{\mu_n}\rangle|^p \sigma_t \lim_{n\to\infty} |\langle A^*\hat{k}_{\lambda_n}, \hat{k}_{\mu_n}\rangle|^p \\
&= \|A\|^p_{ber}.
\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

以下结果给出了 σ_t-Berezin范数的一个上界。

定理3.4. 设 $A \in B(\mathcal{H})$。若 $\sigma_t \leq \nabla_t$，则对于 $p \geq 2$

(i) $\|A\|^p_{ber_{\sigma_t}} \leq ber(t|A^*|^p + (1-t)|A|^p)$。(ii) $ber^p(A) \leq$ 最小值$_{t\in[0,1]}\ ber(t|A|^p + (1-t)|A^*|^p)$。

证明。我们有

$$\begin{aligned}
\|A\|^p_{ber_{\sigma_t}} &= \sup_{\lambda,\mu\in\Omega} \left\{ |\langle A\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\mu\rangle|^p \ \sigma_t\ |\langle A^*\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\mu\rangle|^p \right\} \\
&\leq \sup_{\lambda\in\Omega} \left\{ \|A\hat{k}_\lambda\|^p \ \sigma_t\ \|A^*\hat{k}_\lambda\|^p \right\} \\
&= \sup_{\lambda\in\Omega} \left\{ \left\langle |A|^2\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda \right\rangle^{\frac{p}{2}} \ \sigma_t\ \left\langle |A^*|^2\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda \right\rangle^{\frac{p}{2}} \right\} \\
&\leq \sup_{\lambda\in\Omega} \left\{ \left\langle |A|^p\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda \right\rangle \ \sigma_t\ \left\langle |A^*|^p\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda \right\rangle \right\} \qquad (by(2.6)) \\
&\leq \sup_{\lambda\in\Omega} \left\{ t\left\langle |A|^p\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda \right\rangle + (1-t)\left\langle |A^*|^p\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda \right\rangle \right\} \\
&= \sup_{\lambda\in\Omega} \left\{ \left\langle (t|A|^p + (1-t)|A^*|^p)\,\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda \right\rangle \right\} \\
&= ber\left(t|A|^p + (1-t)|A^*|^p\right),
\end{aligned}$$

因此，t 第一个不等式由此得出。第二个不等式直接由（3.1）得出。 □

注记 3.5。对于 $t=\frac{1}{2}$，我们得到

$$ber^p(A)\leq\frac{1}{2}ber\left(|A|^p+|A^*|^p\right),$$

这正是推论2.7(i) 中所述的不等式。因此，我们有

$$ber^p(A)\leq\min_{t\in[0,1]}ber\left(t|A|^p+(1-t)|A^*|^p\right)\leq\frac{1}{2}ber\left(|A|^p+|A^*|^p\right). \tag{3.4}$$

为证明（3.4）中的第二个不等式是严格的，我们考虑有限维希尔伯特空间 $\mathbb{C}^3$ 以及算子

$$A=\begin{pmatrix}0&2&2\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

于是，对于 $p=4$，$\min_{t\in[0,1]}$ 贝雷津$(t|A|^4+(1-t)|A^*|^4)=\frac{481}{6}$ 且 $_{1\,2}$贝雷津$(|A|^4+|A^*|^4)=\frac{185}{2}$。因此，对于矩阵 A

$$\min_{t\in[0,1]}ber\left(t|A|^p+(1-t)|A^*|^p\right)<\frac{1}{2}ber\left(|A|^p+|A^*|^p\right).$$

因此，与推论2.7(i) 中的界相比，这是 Berezin 半径的一个更强上界。

定理 3.6。若 $A,B\in B(\mathcal{H})$，其中 $|A|B=B^*|A|$，并设 f 和 g 是定义在 $[0,\infty)$ 上的两个非负连续函数，使得 $f(t)g(t)=t$ 对每个 $t\geq0$均成立。若$\sigma_t\leq\nabla_t$，则对于 $p\geq1$

$$\|AB\|^p_{ber_{\sigma_t}}\leq r^{\frac{p}{2}}(B)ber^{\frac{1}{2}}\left(tf^2(|A|)^p+(1-t)|g^2(|A^*|)^p\right)ber^{\frac{1}{2}}\left(tg^2(|A^*|)^p+(1-t)f^2(|A|)^p\right).$$

证明。 考虑

$$\begin{aligned}
&|\langle AB\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\mu\rangle|^p\ \sigma_t\ |\langle(AB)^*\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\mu\rangle|^p\\
&\leq\left(r^{\frac{1}{2}}(B)\langle f^2(|A|)\hat{k}_\lambda,\ \hat{k}_\lambda\rangle^{\frac{1}{2}}\langle g^2(|A^*|)\hat{k}_\mu,\ \hat{k}_\mu\rangle^{\frac{1}{2}}\right)^p\\
&\qquad\sigma_t\left(r^{\frac{1}{2}}(B)\langle g^2(|A^*|)\hat{k}_\lambda,\ \hat{k}_\lambda\rangle^{\frac{1}{2}}\langle f^2(|A|)\hat{k}_\mu,\ \hat{k}_\mu\rangle^{\frac{1}{2}}\right)^p\ (by(2.5))\\
&=r^{\frac{p}{2}}(B)\left(\langle f^2(|A|)\hat{k}_\lambda,\ \hat{k}_\lambda\rangle^{\frac{p}{2}}\langle g^2(|A^*|)\hat{k}_\mu,\ \hat{k}_\mu\rangle^{\frac{p}{2}}\ \sigma_t\ \langle g^2(|A^*|)\hat{k}_\lambda,\ \hat{k}_\lambda\rangle^{\frac{p}{2}}\langle f^2(|A|)\hat{k}_\mu,\ \hat{k}_\mu\rangle^{\frac{p}{2}}\right)\\
&\leq r^{\frac{p}{2}}(B)\left(t\langle f^2(|A|)\hat{k}_\lambda,\ \hat{k}_\lambda\rangle^{\frac{p}{2}}\langle g^2(|A^*|)\hat{k}_\mu,\ \hat{k}_\mu\rangle^{\frac{p}{2}}+(1-t)\langle g^2(|A^*|)\hat{k}_\lambda,\ \hat{k}_\lambda\rangle^{\frac{p}{2}}\langle f^2(|A|)\hat{k}_\mu,\ \hat{k}_\mu\rangle^{\frac{p}{2}}\right)\\
&\leq r^{\frac{p}{2}}(B)\left\{t\langle f^2(|A|)\hat{k}_\lambda,\ \hat{k}_\lambda\rangle^p+(1-t)\langle g^2(|A^*|)\hat{k}_\lambda,\ \hat{k}_\lambda\rangle^p\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\qquad\times\left\{t\langle g^2(|A^*|)\hat{k}_\mu,\ \hat{k}_\mu\rangle^p+(1-t)\langle f^2(|A|)\hat{k}_\mu,\ \hat{k}_\mu\rangle^p\right\}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

（由柯西–施瓦茨不等式）

$$\begin{aligned}
&=r^{\frac{p}{2}}(B)\left\langle\left(tf^{2p}(|A|)+(1-t)\psi^{2p}(|A^*|)\right)\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\lambda\right\rangle^{\frac{1}{2}}\left\langle\left(tg^{2p}(|A^*|)+(1-t)f^{2p}(|A|)\right)\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\right\rangle^{\frac{1}{2}}\\
&\leq r^{\frac{p}{2}}(B)ber^{\frac{1}{2}}\left(tf^{2p}(|A|)+(1-t)|g^{2p}(|A^*|)\right)ber^{\frac{1}{2}}\left(tg^{2p}(|A^*|)+(1-t)f^{2p}(|A|)\right).
\end{aligned}$$

对所有 $\lambda,\mu\in\Omega$ 取上确界，即得所需不等式。 □

注释 3.7。 若令 $B=I$，$f(t)=g(t)=\sqrt{t}$ 且 $t=\frac{1}{2}$ 代入上文得到的一般不等式中，便可得到推论 2.7(i) 中所述的 Berezin 半径界。因此，推论 2.7(i) 是前述结果的特殊情形。

定理 3.8。 设 $A_i, B_i \in B(\mathcal{H})$、 $i = 1$、2、…、 n 满足 A_i，其极分解为

$$A_i = \mathcal{U}_i|A_i|,$$

并且令 f, g： $[0,\infty)$ $\to [0,\infty)$ 为非负连续函数。若 $\sigma_t \leq \nabla_t$，则对于 $p \geq 1$

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} g\left(|B_i|\right) f\left(|A_i^*|\right) \mathcal{U}_i\right\|_{ber_{\sigma_t}} \leq \frac{n^{p-1}}{2} \sum_{i=1}^{n} \Big(ber\left(tf^{2p}(|A_i|) + (1-t)g^{2p}(|B_i|)\right) + ber\left(tg^{2p}(|B_i|) + (1-t)f^{2p}(|A_i|)\right) \Big).$$

特别地，若 f 和 g 是定义在 $[0,\infty)$ 上的非负连续函数，且满足 f（t）g（t）$= t$，则

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} A_i\right\|_{ber_{\sigma_t}}^{p} \leq \frac{n^{p-1}}{2} \sum_{i=1}^{n} \Big(ber\left(tf^{2p}(|A_i|) + (1-t)g^{2p}(|A_i^*|)\right) + ber\left(tg^{2p}(|A_i^*|) + (1-t)f^{2p}(|A_i|)\right) \Big).$$

证明。我们有

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle \sum_{i=1}^{n} g\left(|B_i|\right) f\left(|A_i^*|\right) \mathcal{U}_i \hat{k}_\lambda, \hat{k}_\mu \right\rangle\right|^p &= \left|\sum_{i=1}^{n} \left\langle g\left(|B_i|\right) f\left(|A_i^*|\right) \mathcal{U}_i \hat{k}_\lambda, \hat{k}_\mu \right\rangle\right|^p \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle g\left(|B_i|\right) f\left(|A_i^*|\right) \mathcal{U}_i \hat{k}_\lambda, \hat{k}_\mu \right\rangle\right|\right)^p \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \left\langle f^2(|A_i|)\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda \right\rangle^{\frac{1}{2}} \left\langle g^2(|B_i|)\hat{k}_\mu, \hat{k}_\mu \right\rangle^{\frac{1}{2}}\right)^p \qquad (by(2.1)) \\
&\leq n^{p-1} \sum_{i=1}^{n} \left\langle f^{2p}(|A_i|)\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda \right\rangle^{\frac{1}{2}} \left\langle g^{2p}(|B_i|)\hat{k}_\mu, \hat{k}_\mu \right\rangle^{\frac{1}{2}} \qquad (by(2.4)) \\
&\leq \frac{n^{p-1}}{2} \sum_{i=1}^{n} \left\langle f^{2p}(|A_i|)\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda \right\rangle + \left\langle g^{2p}(|B_i|)\hat{k}_\mu, \hat{k}_\mu \right\rangle.
\end{aligned}$$

现在考虑

$$\begin{aligned}
&\left|\left\langle\sum_{i=1}^{n} g\left(|B_i|\right) f\left(|A_i^*|\right)\mathcal{U}_i\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\mu\right\rangle\right|^p \ \sigma_t\ \left|\left\langle\sum_{i=1}^{n}\left(g\left(|B_i|\right) f\left(|A_i^*|\right)\mathcal{U}_i\right)^*\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\mu\right\rangle\right|^p\\
&\quad\le \frac{n^{p-1}}{2}\Bigg(\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\left\langle f^{2p}(|A_i|)\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\lambda\right\rangle+\left\langle g^{2p}(|B_i|)\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\right\rangle\right)\right]\\
&\qquad\qquad \sigma_t\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\left\langle f^{2p}(|A_i|)\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\right\rangle+\left\langle g^{2p}(|B_i|)\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\lambda\right\rangle\right)\right]\Bigg)\\
&\quad\le \frac{n^{p-1}}{2}\Bigg(t\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\left\langle f^{2p}(|A_i|)\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\lambda\right\rangle+\left\langle g^{2p}(|B_i|)\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\right\rangle\right)\right]\\
&\qquad\qquad +(1-t)\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\left\langle f^{2p}(|A_i|)\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\right\rangle+\left\langle g^{2p}(|B_i|)\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\lambda\right\rangle\right)\right]\Bigg)\\
&\quad= \frac{n^{p-1}}{2}\sum_{i=1}^{n}\Bigg(\left\langle tf^{2p}(|A_i|)+(1-t)g^{2p}(|B_i|)\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\lambda\right\rangle\\
&\qquad\qquad +\left\langle tg^{2p}(|B_i|)+(1-t)f^{2p}(|A_i|)\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\right\rangle\Bigg)\\
&\quad\le \frac{n^{p-1}}{2}\sum_{i=1}^{n}\Big(ber\left(tf^{2p}(|A_i|)+(1-t)g^{2p}(|B_i|)\right)\\
&\qquad\qquad + ber\left(tg^{2p}(|B_i|)+(1-t)f^{2p}(|A_i|)\right)\Big).
\end{aligned}$$

对所有 $\lambda,\mu\in\Omega$, 取上确界，我们便得到所需结果。另一不等式可直接通过选取

$$f(t)g(t)=t \quad \text{and} \quad B_i=A_i^*.$$

□

注释 3.9. 令 $n=1,t=\frac{1}{2}$和 $f(t)=g(t)=\sqrt{t}$，代入上述定理，即可得到 Berezin 半径的上界，如推论 2.7(i) 所述。因此，推论 2.7(i) 是前述结果的一个特殊情形。

定理 3.10. 设 $A,B\in B(\mathcal{H})$ 满足 A，且具有极分解

$$A=\mathcal{U}|A|$$

并令 f、g：$[0,\infty)\to[0,\infty)$ 为非负连续函数。设 r、$s>1$ 为共轭指数，满足 $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1.$。若 $\sigma_t\le\nabla_t$，则对于 $\bar{p}\ge 2$

$$\begin{aligned}
\|g\left(|B|\right) f\left(|A^*|\right)\mathcal{U}\|_{ber_{\sigma_t}}^p \le\ & ber\left(t\frac{1}{r}f^{pr}\left(|A|\right)+(1-t)\frac{1}{s}g^{ps}\left(|B|\right)\right)\\
&+ ber\left(t\frac{1}{s}g^{ps}\left(|B|\right)+(1-t)\frac{1}{r}f^{pr}\left(|A|\right)\right).
\end{aligned}$$

特别地，若 f 和 g 是定义在 $[0,\infty)$ 上的非负连续函数，且满足$f(t)g(t) = t$，则

$$\begin{aligned}\|A\|_{ber_{\sigma_t}}^p \leq & ber\left(t\frac{1}{r}f^{pr}\left(|A|\right)+(1-t)\frac{1}{s}g^{ps}\left(|A^*|\right)\right)\\ & + ber\left(t\frac{1}{s}g^{ps}\left(|A^*|\right)+(1-t)\frac{1}{r}f^{pr}\left(|A|\right)\right).\end{aligned}$$

证明。我们有

$$\begin{aligned}\left|\left\langle g\left(|B|\right)f\left(|A^*|\right)\mathcal{U}\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\mu\right\rangle\right|^p &\leq \left\langle f^p\left(|A|\right)\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\lambda\right\rangle\left\langle g^p\left(|B|\right)\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\right\rangle\\ &\leq \left\langle f^{pr}\left(|A|\right)\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\lambda\right\rangle^{\frac{1}{r}}\left\langle g^{ps}\left(|B|\right)\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\right\rangle^{\frac{1}{s}}.\end{aligned}$$

应用杨氏不等式，共轭指数为 r，$s>1$ $\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1\right)$，得到

$$\left\langle f^{pr}\left(|A|\right)\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\lambda\right\rangle^{\frac{1}{r}}\left\langle g^{ps}\left(|B|\right)\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\right\rangle^{\frac{1}{s}} \leq \frac{1}{r}\left\langle f^{pr}\left(|A|\right)\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\lambda\right\rangle+\frac{1}{s}\left\langle g^{ps}\left(|B|\right)\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\right\rangle.$$

现在考虑

$$\begin{aligned}\left|\left\langle g\left(|B|\right)f\left(|A^*|\right)\mathcal{U}\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\mu\right\rangle\right|^p \ \sigma_t\ & \left|\left\langle \left(g\left(|B|\right)f\left(|A^*|\right)\mathcal{U}\right)^*\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\mu\right\rangle\right|^p\\ &\leq \left(\frac{1}{r}\left\langle f^{pr}\left(|A|\right)\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\lambda\right\rangle+\frac{1}{s}\left\langle g^{ps}\left(|B|\right)\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\right\rangle\right)\\ &\quad \sigma_t\left(\frac{1}{r}\left\langle f^{pr}\left(|A|\right)\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\right\rangle+\frac{1}{s}\left\langle g^{ps}\left(|B|\right)\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\lambda\right\rangle\right)\\ &\leq t\left(\frac{1}{r}\left\langle f^{pr}\left(|A|\right)\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\lambda\right\rangle+\frac{1}{s}\left\langle g^{ps}\left(|B|\right)\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\right\rangle\right)\\ &\quad +(1-t)\left(\frac{1}{r}\left\langle f^{pr}\left(|A|\right)\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\right\rangle+\frac{1}{s}\left\langle g^{ps}\left(|B|\right)\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\lambda\right\rangle\right)\\ &= \left\langle\left(t\frac{1}{r}f^{pr}\left(|A|\right)+(1-t)\frac{1}{s}g^{ps}\left(|B|\right)\right)\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\lambda\right\rangle\\ &\quad +\left\langle\left(t\frac{1}{s}g^{ps}\left(|B|\right)+(1-t)\frac{1}{r}f^{pr}\left(|A|\right)\right)\hat{k}_\mu,\hat{k}_\mu\right\rangle\\ &\leq ber\left(t\frac{1}{r}f^{pr}\left(|A|\right)+(1-t)\frac{1}{s}g^{ps}\left(|B|\right)\right)\\ &\quad + ber\left(t\frac{1}{s}g^{ps}\left(|B|\right)+(1-t)\frac{1}{r}f^{pr}\left(|A|\right)\right).\end{aligned}$$

对所有 λ，$\mu\in\Omega$，取上确界，我们便得到所需结果。
另一个不等式可以通过选取直接得到

$$f(t)g(t)=t \quad \text{and} \quad B=A^*.$$

□

注记 3.11. 令 $r=s=2, t=\frac{1}{2}$以及 $f(t)=g(t)=\sqrt{t}$对所有 $t\geq 0$,即可得到推论 2.7(i) 中所述的 Berezin 半径界。因此，推论 2.7 (i) 是前述结果的一个特殊情形。

定理 3.12. 设 $A_i, B_i\in B(\mathcal{H})$，$i=1,2,\ldots,n$，并假设每个 A_i 都有极分解

$$A_i=\mathcal{U}_i|A_i|.$$

设 $f, g\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ 为非负连续函数。若 $\sigma_t \leq \nabla_t$，则对于$p \geq 1$

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} g(|B_i|)\, f(|A_i^*|)\, \mathcal{U}_i\right\|_{ber_{\sigma_t}}^{2p} \leq \frac{n^{2p-1}}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} ber\big(f^{2p}(|A_i|)g^{2p}(|B_i|)\big) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\big(\|f^{4p}(|A_i|)\| + \|g^{4p}(|B_i|)\|\big)\right).$$

特别地，如果 f 和 g 是定义在 $[0,\infty)$ 上的非负连续函数，并且$f(t)g(t) = t$，那么

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} A_i\right\|_{ber_{\sigma_t}}^{2p} \leq \frac{n^{2p-1}}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} ber\big(f^{2p}(|A_i|)g^{2p}(|A_i^*|)\big) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\big(\|f^{4p}(|A_i|)\| + \|g^{4p}(|A_i^*|)\|\big)\right).$$

证明。对于 λ，$\mu \in \Omega$，我们有

$$\begin{aligned}
&\left|\left\langle \sum_{i=1}^{n} g(|B_i|) f(|A_i^*|)\mathcal{U}_i \hat{k}_\lambda, \hat{k}_\mu \right\rangle\right|^{2p} \\
&\quad\leq \left(\sum_{i=1}^{n}\left|\left\langle g(|B_i|) f(|A_i^*|)\mathcal{U}_i \hat{k}_\lambda, \hat{k}_\mu \right\rangle\right|\right)^{2p} \\
&\quad\leq \left(\sum_{i=1}^{n}\langle f^2(|A_i|)\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle^{1/2}\langle g^2(|B_i|)\hat{k}_\mu, \hat{k}_\mu\rangle^{1/2}\right)^{2p} \\
&\quad\leq n^{2p-1}\sum_{i=1}^{n}\langle f^{2p}(|A_i|)\hat{k}_\lambda, \hat{k}_\lambda\rangle\langle g^{2p}(|B_i|)\hat{k}_\mu, \hat{k}_\mu\rangle \\
&\quad\leq \frac{n^{2p-1}}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\left|\left\langle f^{2p}(|A_i|)\hat{k}_\lambda, g^{2p}(|B_i|)\hat{k}_\mu\right\rangle\right| + \|f^{2p}(|A_i|)\hat{k}_\lambda\|\|g^{2p}(|B_i|)\hat{k}_\mu\|\right) \quad (by (2.7)) \\
&\quad\leq \frac{n^{2p-1}}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\left|\left\langle f^{2p}(|A_i|)\hat{k}_\lambda, g^{2p}(|B_i|)\hat{k}_\mu\right\rangle\right| + \frac{1}{2}\big(\|f^{4p}(|A_i|)\| + \|g^{4p}(|B_i|)\|\big)\right).
\end{aligned}$$

现在考虑

$$\begin{aligned}
&\left|\left\langle\sum_{i=1}^{n} g(|B_i|)f(|A_i^*|)\mathcal{U}_i\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\mu\right\rangle\right|^{2p} \sigma_t \left|\left\langle\sum_{i=1}^{n}\big(g(|B_i|)f(|A_i^*|)\mathcal{U}_i\big)^*\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\mu\right\rangle\right|^{2p}\\
&\quad\le \frac{n^{2p-1}}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\left|\left\langle f^{2p}(|A_i|)\hat{k}_\lambda, g^{2p}(|B_i|)\hat{k}_\mu\right\rangle\right| + \frac{1}{2}\big(\|f^{4p}(|A_i|)\| + \|g^{4p}(|B_i|)\|\big)\right)\right.\\
&\qquad\left.\sigma_t\ \sum_{i=1}^{n}\left(\left|\left\langle f^{2p}(|A_i|)\hat{k}_\mu, g^{2p}(|B_i|)\hat{k}_\lambda\right\rangle\right| + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\big(\|f^{4p}(|A_i|)\| + \|g^{4p}(|B_i|)\|\big)\right)\right)\\
&\quad\le \frac{n^{2p-1}}{2}\left(t\left[\sum_{i=1}^{n}\left|\left\langle f^{2p}(|A_i|)\hat{k}_\lambda, g^{2p}(|B_i|)\hat{k}_\mu\right\rangle\right| + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\big(\|f^{4p}(|A_i|)\| + \|g^{4p}(|B_i|)\|\big)\right]\right.\\
&\qquad\left.+(1-t)\left[\sum_{i=1}^{n}\left|\left\langle f^{2p}(|A_i|)\hat{k}_\mu, g^{2p}(|B_i|)\hat{k}_\lambda\right\rangle\right| + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\big(\|f^{4p}(|A_i|)\| + \|g^{4p}(|B_i|)\|\big)\right]\right)\\
&\quad\le \frac{n^{2p-1}}{2}\left(t\left[\sum_{i=1}^{n}\left|\left\langle \hat{k}_\lambda, f^{2p}(|A_i|)g^{2p}(|B_i|)\hat{k}_\mu\right\rangle\right| + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\big(\|f^{4p}(|A_i|)\| + \|g^{4p}(|B_i|)\|\big)\right]\right.\\
&\qquad\left.+(1-t)\left[\sum_{i=1}^{n}\left|\left\langle \hat{k}_\mu, f^{2p}(|A_i|)g^{2p}(|B_i|)\hat{k}_\lambda\right\rangle\right| + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\big(\|f^{4p}(|A_i|)\| + \|g^{4p}(|B_i|)\|\big)\right]\right)\\
&\quad\le \frac{n^{2p-1}}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\|f^{2p}(|A_i|)g^{2p}(|B_i|)\|_{ber} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\big(\|f^{4p}(|A_i|)\| + \|g^{4p}(|B_i|)\|\big)\right)\\
&\quad= \frac{n^{2p-1}}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} ber\big(f^{2p}(|A_i|)g^{2p}(|B_i|)\big) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\big(\|f^{4p}(|A_i|)\| + \|g^{4p}(|B_i|)\|\big)\right).
\end{aligned}$$

对所有 $\lambda,\mu\in\Omega$ 取上确界，即得所需结果。
另一个不等式可通过选择

$$f(t)g(t)=t \quad \text{and} \quad B_i=A_i^*.$$

□

令 $n=1,t=\frac{1}{2}$ 以及 $f(t)=g(t)=\sqrt{t}$ 于定理 3.12中代入，可得 Berezin 半径的以下上界。

推论3.13. 设 $A\in B(\mathcal{H})$。则对于 $p\ge 1$

$$ber^{2p}(A)\le\frac{1}{2}\left(ber\left(|A|^p|A^*|^p\right)+\frac{1}{2}\left(\||A|\|^{2p}+\||A^*|\|^{2p}\right)\right).$$

以下结果适用于任意对称均值 σ 的插值路径。

定理3.14. 设 $A\in B(\mathcal{H})$。则对于 $p\ge 1$

$$\|A\|_{ber_{\sigma_t}}^{p}\le ber^{\frac{p}{2}}\left(|A|^2+|A^*|^2\right).$$

证明。我们有

$$\begin{aligned}
\|A\|_{ber_{\sigma_t}}^p &= \sup_{\lambda,\mu\in\Omega}\left\{|\langle A\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\mu\rangle|^p\ \sigma_t\ |\langle A^*\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\mu\rangle|^p\right\}\\
&\leq \sup_{\lambda,\mu\in\Omega}\left\{\left(|\langle\mathcal{R}(A)\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\mu\rangle|+|\langle\mathcal{I}(A)\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\mu\rangle|\right)^p\right.\\
&\qquad\left.\sigma_t\ \left(|\langle\mathcal{R}(A^*)\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\mu\rangle|+|\langle\mathcal{I}(A^*)\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\mu\rangle|\right)^p\right\}\\
&\leq \sup_{\lambda,\mu\in\Omega}\left\{\left(\|\mathcal{R}(A)\hat{k}_\lambda\|+\|\mathcal{I}(A)\hat{k}_\lambda\|\right)^p\ \sigma_t\ \left(\|\mathcal{R}(A^*)\hat{k}_\lambda\|+\|\mathcal{I}(A^*)\hat{k}_\lambda\|\right)^p\right\}\\
&= \sup_{\lambda,\mu\in\Omega}\left\{\left(\langle\mathcal{R}^2(A)\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\lambda\rangle^{\frac{1}{2}}+\langle\mathcal{I}^2(A)\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\lambda\rangle^{\frac{1}{2}}\right)^p\right.\\
&\qquad\left.\sigma_t\ \left(\langle\mathcal{R}^2(A^*)\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\lambda\rangle^{\frac{1}{2}}+\langle\mathcal{I}^2(A^*)\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\lambda\rangle^{\frac{1}{2}}\right)^p\right\}\\
&\leq \sup_{\lambda,\mu\in\Omega}\left\{\left(2\langle\mathcal{R}^2(A)+\mathcal{I}^2(A)\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\lambda\rangle\right)^{\frac{p}{2}}\ \sigma_t\ \left(2\langle\mathcal{R}^2(A^*)+\mathcal{I}^2(A^*)\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\lambda\rangle\right)^{\frac{p}{2}}\right\}\\
&= \sup_{\lambda,\mu\in\Omega}\left\{\left\langle\left(|A|^2+|A^*|^2\right)\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\lambda\right\rangle^{\frac{p}{2}}\ \sigma_t\ \left\langle\left(|A^*|^2+|A|^2\right)\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\lambda\right\rangle^{\frac{p}{2}}\right\}\\
&= \sup_{\lambda,\mu\in\Omega}\left\{\left\langle\left(|A|^2+|A^*|^2\right)\hat{k}_\lambda,\hat{k}_\lambda\right\rangle^{\frac{p}{2}}\right\}\\
&= ber^{\frac{p}{2}}\left(|A|^2+|A^*|^2\right),
\end{aligned}$$

如所期望的。 □

最近，Bhunia 等人 [11, 定理 5] 用贝雷津数刻画了酉算子。更确切地说，他们证明了可逆算子 $A\in B(\mathcal{H})$ 是酉算子，当且仅当 $ber(A^*A)\leq 1$ 且 $ber\left((A^*A)^{-1}\right)\leq 1$.

这自然引出了一个问题：能否也用新定义的 σ_t-Berezin 范数来刻画酉算子？以下结果表明，确实可以。

定理 3.15. 假设 $A\in B(\mathcal{H})$ 可逆。那么， A 是酉算子，当且仅当$\|A^*A\|_{ber_{\sigma_t}}\leq 1$且 $\|(A^*A)^{-1}\|_{ber_{\sigma_t}}\leq 1$.

证明。 必要性显然，因为它直接来自 σ_t-Berezin范数的定义。为证明充分性，我们计算 $\|(A-A^{-1^*})\hat{}\,k_\lambda\|^2$。利用不等式$ber(A^*A)\leq\|A^*A\|_{ber_{\sigma_t}}\leq 1$和$ber((A^*A)^{-1})\leq\|(A^*A)^{-1}\|_{ber_{\sigma_t}}\leq 1$, 可得对所有 $\lambda\in\Omega$均有 $\|(A-A^{-1^*})\hat{}\,k_\lambda\|=0$。由此得到

$A^*=A^{-1}$. □

算子矩阵的不等式：

本文研究作用于再生核希尔伯特空间直和上的 2×2 算子矩阵 $\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$ 的 σ_t-Berezin范数。我们根据对角项和非对角项，推导任意 2×2 算子矩阵的σ_t-Berezin范数的新界。此外，我们刻画了同时为酉算子的对角可逆算子矩阵。

我们先给出以下命题。

命题 3.16. 设 $A,B\in B(\mathcal{H})$。则

(i) *If* $\sigma_t \le \nabla_t$, *then* $\left\|\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\right\|_{ber_{\sigma_t}} \le \max\left\{\|A\|_{ber_{\nabla_t}}, \|B\|_{ber_{\nabla_t}}\right\}$.

(ii) $\left\|\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}\right\|_{ber_{\sigma_t}} = \left\|\begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix}\right\|_{ber_{\sigma_t}}$.

(iii) $\left\|\begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\|^p_{ber_{\nabla_t}} \le \max\{t, 1-t\}\,\|A\|^p_{ber}$.

证明。 **(1)** 设 $T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$. 对于任意 $(\lambda_1, \lambda_2), (\mu_1, \mu_2) \in \Omega\times\Omega$, 令 $\hat{k}_{(\lambda_1,\lambda_2)} = (k_{\lambda_1}, k_{\lambda_2})$, $\hat{k}_{(\mu_1,\mu_2)} = (k_{\mu_1}, k_{\mu_2})$ 为 $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$. 中的两个归一化再生核。则

$$
\begin{aligned}
&\left(|\langle T\hat{k}_{(\lambda_1,\lambda_2)}, \hat{k}_{(\mu_1,\mu_2)}\rangle|^p \ \sigma_t \ |\langle T^*\hat{k}_{(\lambda_1,\lambda_2)}, \hat{k}_{(\mu_1,\mu_2)}\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= (|\langle Ak_{\lambda_1}, k_{\mu_1}\rangle + \langle Bk_{\lambda_2}, k_{\mu_2}\rangle|^p \ \sigma_t \ |\langle A^*k_{\lambda_1}, k_{\mu_1}\rangle + \langle B^*k_{\lambda_2}, k_{\mu_2}\rangle|^p)^{\frac{1}{p}} \\
&\le (t|\langle Ak_{\lambda_1}, k_{\mu_1}\rangle + \langle Bk_{\lambda_2}, k_{\mu_2}\rangle|^p + (1-t)|\langle A^*k_{\lambda_1}, k_{\mu_1}\rangle + \langle B^*k_{\lambda_2}, k_{\mu_2}\rangle|^p)^{\frac{1}{p}} \\
&\le (t|\langle Ak_{\lambda_1}, k_{\mu_1}\rangle|^p + (1-t)|\langle A^*k_{\lambda_1}, k_{\mu_1}\rangle|^p)^{\frac{1}{p}} + (t|\langle Bk_{\lambda_2}, k_{\mu_2}\rangle|^p + (1-t)\langle B^*k_{\lambda_2}, k_{\mu_2}\rangle|^p)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \|A\|_{ber_{\nabla_t}}\|k_{\lambda_1}\|\|k_{\mu_1}\| + \|B\|_{ber_{\nabla_t}}\|k_{\lambda_2}\|\|k_{\mu_2}\| \\
&\le \max\{\|A\|_{ber_{\nabla_t}}, \|B\|_{ber_{\nabla_t}}\}(\|k_{\lambda_1}\|\|k_{\mu_1}\| + \|k_{\lambda_2}\|\|k_{\mu_2}\|) \\
&\le \max\{\|A\|_{ber_{\nabla_t}}, \|B\|_{ber_{\nabla_t}}\}.
\end{aligned}
$$

This gives i不等式lity (i) 。 (ii) 由以下事实可知: $\left\|P^*\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}P\right\|_{ber_{\sigma_t}} = \left\|\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}\right\|_{ber_{\sigma_t}}$, 其中 $P = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \in B(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})$ 。 (iii) 设 $T = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。对于任意 (λ_1, λ_2), (μ_1, μ_2) $\in\Omega\times\Omega$, 令 $\hat{k}_{(\lambda_1,\lambda_2)} = (k_{\lambda_1}, k_{\lambda_2})$, $\hat{k}_{(\mu_1,\mu_2)} = (k_{\mu_1}, k_{\mu_2})$ 为 $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$. 中的两个归一化再生核。于是有

$$
\begin{aligned}
&|\langle T\hat{k}_{(\lambda_1,\lambda_2)}, \hat{k}_{(\mu_1,\mu_2)}\rangle|^p\nabla_t|\langle T^*\hat{k}_{(\lambda_1,\lambda_2)}, \hat{k}_{(\mu_1,\mu_2)}\rangle|^p \\
&\quad = t|\langle Ak_{\lambda_2}, k_{\mu_1}\rangle|^p + (1-t)|\langle A^*k_{\lambda_1}, k_{\mu_2}\rangle|^p \\
&\quad \le \|A\|^p_{ber}(t\|k_{\lambda_2}\|\|k_{\mu_1}\| + (1-t)\|k_{\lambda_1}\|\|k_{\mu_2}\|) \\
&\quad \le \max\{t, 1-t\}\|A\|^p_{ber}(\|k_{\lambda_2}\|\|k_{\mu_1}\| + \|k_{\lambda_1}\|\|k_{\mu_2}\|) \\
&\quad \le \max\{t, 1-t\}\|A\|^p_{ber}.
\end{aligned}
$$

□

利用这个命题, 我们为 2×2 非对角算子矩阵建立一个上界。

推论 3.17。令 A, $B \in B(\mathcal{H})$ 满足 $\sigma_t \le \nabla_t$, 则

$$
\left\|\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}\right\|_{ber_{\sigma_t}} \le \max\{t, 1-t\}^{\frac{1}{p}}(\|A\|_{ber} + \|B\|_{ber}).
$$

证明。我们有

$$\left\|\begin{pmatrix}0 & A\\ B & 0\end{pmatrix}\right\|_{ber_{\sigma_t}} \leq \left\|\begin{pmatrix}0 & A\\ B & 0\end{pmatrix}\right\|_{ber_{\nabla_t}} \leq \left\|\begin{pmatrix}0 & A\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\|_{ber_{\nabla_t}} + \left\|\begin{pmatrix}0 & 0\\ B & 0\end{pmatrix}\right\|_{ber_{\nabla_t}}$$
$$\leq \max\{t, 1-t\}^{\frac{1}{p}}(\|A\|_{ber} + \|B\|_{ber}).$$

□

下一个定理还给出了 2×2 非对角算子矩阵的一个上界。

定理 3.18. 设 $A, B \in B(\mathcal{H})$。设 f 和 g 是定义在 $[0,\infty)$ 上的两个非负连续函数，使得对每个 $t \geq 0$，均有 $f(t)g(t) = t$。若 $\sigma_t \leq \nabla_t$，则对于 $p \geq 1$

$$\left\|\begin{pmatrix}0 & A\\ B & 0\end{pmatrix}\right\|^p_{ber_{\sigma_t}} \leq \frac{2^p}{4}\max\Big\{ber\big(tf^{2p}(|A|) + (1-t)f^{2p}(|A^*|)\big) + ber\big(tg^{2p}(|A^*|) + (1-t)g^{2p}(|A|)\big),$$
$$ber\big(tf^{2p}(|B|) + (1-t)f^{2p}(|B^*|)\big) + ber\big(tg^{2p}(|B^*|) + (1-t)g^{2p}(|B|)\big)\Big\}.$$

证明. 设 $T = \begin{pmatrix}0 & A\\ B & 0\end{pmatrix}$。对于任意的 $(\lambda_1,\lambda_2), (\mu_1,\mu_2) \in \Omega \times \Omega$, 令 $\hat{k}_{(\lambda_1,\lambda_2)} = (k_{\lambda_1}, k_{\lambda_2})$, $\hat{k}_{(\mu_1,\mu_2)} = (k_{\mu_1}, k_{\mu_2})$ 为 $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$. 中的两个归一化再生核。于是有

$$\begin{aligned}|\langle T\hat{k}_{(\lambda_1,\lambda_2)}, \hat{k}_{(\mu_1,\mu_2)}\rangle|^p &= |\langle Ak_{\lambda_2}, k_{\mu_1}\rangle + \langle Bk_{\lambda_1}, k_{\mu_2}\rangle|^p\\ &\leq (|\langle Ak_{\lambda_2}, k_{\mu_1}\rangle| + |\langle Bk_{\lambda_1}, k_{\mu_2}\rangle|)^p\\ &\leq \frac{2^p}{2}(|\langle Ak_{\lambda_2}, k_{\mu_1}\rangle|^p + |\langle Bk_{\lambda_1}, k_{\mu_2}\rangle|^p)\\ &\leq \frac{2^p}{2}\big(\langle f^{2p}(|A|)k_{\lambda_2}, k_{\lambda_2}\rangle^{\frac{1}{2}}\langle g^{2p}(|A^*|)k_{\mu_1}, k_{\mu_1}\rangle^{\frac{1}{2}}\\ &\quad + \langle f^{2p}(|B|)k_{\lambda_1}, k_{\lambda_1}\rangle^{\frac{1}{2}}\langle g^{2p}(|B^*|)k_{\mu_2}, k_{\mu_2}\rangle^{\frac{1}{2}}\big).\end{aligned}$$

类似地，我们得到

$$\begin{aligned}|\langle T^*\hat{k}_{(\lambda_1,\lambda_2)}, \hat{k}_{(\mu_1,\mu_2)}\rangle|^p \leq \frac{2^p}{2}\Big(&\langle f^{2p}(|A^*|)k_{\lambda_2}, k_{\lambda_2}\rangle^{\frac{1}{2}}\langle g^{2p}(|A|)k_{\mu_1}, k_{\mu_1}\rangle^{\frac{1}{2}}\\ &+ \langle f^{2p}(|B^*|)k_{\lambda_1}, k_{\lambda_1}\rangle^{\frac{1}{2}}\langle g^{2p}(|B|)k_{\mu_2}, k_{\mu_2}\rangle^{\frac{1}{2}}\Big).\end{aligned}$$

因此

$$
\begin{aligned}
&|\langle T\hat{k}_{(\lambda_1,\lambda_2)},\hat{k}_{(\mu_1,\mu_2)}\rangle|^p \ \sigma_t \ |\langle T^*\hat{k}_{(\lambda_1,\lambda_2)},\hat{k}_{(\mu_1,\mu_2)}\rangle|^p\\
&\quad\le t\left|\left\langle T\hat{k}_{(\lambda_1,\lambda_2)},\hat{k}_{(\mu_1,\mu_2)}\right\rangle\right|^p+(1-t)\left|\left\langle T^*\hat{k}_{(\lambda_1,\lambda_2)},\hat{k}_{(\mu_1,\mu_2)}\right\rangle\right|^p\\
&\quad\le \frac{2^p}{2}\Bigg(t\Big(\left\langle f^{2p}(|A|)k_{\lambda_2},k_{\lambda_2}\right\rangle^{\frac12}\left\langle g^{2p}(|A^*|)k_{\mu_1},k_{\mu_1}\right\rangle^{\frac12}\\
&\qquad+\left\langle f^{2p}(|B|)k_{\lambda_1},k_{\lambda_1}\right\rangle^{\frac12}\left\langle g^{2p}(|B^*|)k_{\mu_2},k_{\mu_2}\right\rangle^{\frac12}\Big)\\
&\qquad+(1-t)\Big(\left\langle f^{2p}(|A^*|)k_{\lambda_2},k_{\lambda_2}\right\rangle^{\frac12}\left\langle g^{2p}(|A|)k_{\mu_1},k_{\mu_1}\right\rangle^{\frac12}\\
&\qquad+\left\langle f^{2p}(|B^*|)k_{\lambda_1},k_{\lambda_1}\right\rangle^{\frac12}\left\langle g^{2p}(|B|)k_{\mu_2},k_{\mu_2}\right\rangle^{\frac12}\Big)\Bigg)\\
&\quad= \frac{2^p}{2}\Bigg(t\Big(\left\langle f^{2p}(|A|)k_{\lambda_2},k_{\lambda_2}\right\rangle^{\frac12}\left\langle g^{2p}(|A^*|)k_{\mu_1},k_{\mu_1}\right\rangle^{\frac12}\Big)\\
&\qquad+(1-t)\left(\left\langle f^{2p}(|A^*|)k_{\lambda_2},k_{\lambda_2}\right\rangle^{\frac12}\left\langle g^{2p}(|A|)k_{\mu_1},k_{\mu_1}\right\rangle^{\frac12}\right)\\
&\qquad+t\Big(\left\langle f^{2p}(|B|)k_{\lambda_1},k_{\lambda_1}\right\rangle^{\frac12}\left\langle g^{2p}(|B^*|)k_{\mu_2},k_{\mu_2}\right\rangle^{\frac12}\Big)\\
&\qquad+(1-t)\Big(\left\langle f^{2p}(|B^*|)k_{\lambda_1},k_{\lambda_1}\right\rangle^{\frac12}\left\langle g^{2p}(|B|)k_{\mu_2},k_{\mu_2}\right\rangle^{\frac12}\Big)\Bigg)\\
&\quad\le \frac{2^p}{2}\Bigg(\left\langle\left(tf^{2p}(|A|)+(1-t)f^{2p}(|A^*|)\right)k_{\lambda_2},k_{\lambda_2}\right\rangle^{\frac12}\\
&\qquad\left\langle(tg^{2p}(|A^*|)+(1-t)g^{2p}(|A|))k_{\mu_1},k_{\mu_1}\right\rangle^{\frac12}\\
&\qquad+\left\langle(tf^{2p}(|B|)+(1-t)f^{2p}(|B^*|))k_{\lambda_1},k_{\lambda_1}\right\rangle^{\frac12}\\
&\qquad\left\langle(tg^{2p}(|B^*|)+(1-t)g^{2p}(|B|))k_{\mu_2},k_{\mu_2}\right\rangle^{\frac12}\Bigg)\\
&\quad\le \frac{2^p}{2}\Bigg(\Big(ber^{\frac12}\big(tf^{2p}(|A|)+(1-t)f^{2p}(|A^*|)\big)\\
&\qquad\qquad ber^{\frac12}\big(tg^{2p}(|A^*|)+(1-t)g^{2p}(|A|)\big)\Big)\|k_{\lambda_2}\|\|k_{\mu_1}\|\\
&\qquad+\Big(ber^{\frac12}\big(tf^{2p}(|B|)+(1-t)f^{2p}(|B^*|)\big)\\
&\qquad\qquad ber^{\frac12}\big(tg^{2p}(|B^*|)+(1-t)g^{2p}(|B|)\big)\Big)\|k_{\lambda_1}\|\|k_{\mu_2}\|\Bigg)\\
&\quad\le \frac{2^p}{2}\max\Bigg\{ber^{\frac12}\big(tf^{2p}(|A|)+(1-t)f^{2p}(|A^*|)\big)\,ber^{\frac12}\big(tg^{2p}(|A^*|)+(1-t)g^{2p}(|A|)\big),\\
&\qquad\qquad ber^{\frac12}\big(tf^{2p}(|B|)+(1-t)f^{2p}(|B^*|)\big)\,ber^{\frac12}\big(tg^{2p}(|B^*|)+(1-t)g^{2p}(|B|)\big)\Bigg\}\\
&\qquad\qquad\times\left(\|k_{\lambda_2}\|\|k_{\mu_1}\|+\|k_{\lambda_1}\|\|k_{\mu_2}\|\right)\\
&\quad\le \frac{2^p}{4}\max\Bigg\{ber\big(tf^{2p}(|A|)+(1-t)f^{2p}(|A^*|)\big)+ber\big(tg^{2p}(|A^*|)+(1-t)g^{2p}(|A|)\big),\\
&\qquad\qquad ber\big(tf^{2p}(|B|)+(1-t)f^{2p}(|B^*|)\big)+ber\big(tg^{2p}(|B^*|)+(1-t)g^{2p}(|B|)\big)\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

取上确界，得到所需不等式。 □

推论 3.19。 设 $A, B \in B(\mathcal{H})$。若 $\sigma_t \leq \nabla_t$，则对于 $p \geq 1$

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix} \right\|_{ber_{\sigma_t}}^p \leq \frac{2^p}{4} \max \left\{ ber\left(|A|^p + |A^*|^p\right), ber\left(|B|^p + |B^*|^p\right) \right\}.$$

现在我们为任意 2×2 算子矩阵得到一个上界。

定理 3.20。 设 $A, B, C, D \in B(\mathcal{H})$。 那么

$$\left\| \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \right\|_{ber_{\sigma_t}} \leq \left\| \begin{pmatrix} \|A\|_{ber_{\nabla_t}} & \left(t\|B\|_{ber}^p + (1-t)\|C\|_{ber}^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ \left(t\|C\|_{ber}^p + (1-t)\|B\|_{ber}^p\right)^{\frac{1}{p}} & \|D\|_{ber_{\nabla_t}} \end{pmatrix} \right\|.$$

证明。 设 $T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$。对于任意 $(\lambda_1, \lambda_2), (\mu_1, \mu_2) \in \Omega \times \Omega$, 设 $\hat{k}_{(\lambda_1,\lambda_2)} = (k_{\lambda_1}, k_{\lambda_2})$, $\hat{k}_{(\mu_1,\mu_2)} = (k_{\mu_1}, k_{\mu_2})$ 是 $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. 中的两个归一化再生核。于是我们有

$$\begin{aligned}
&\left(\left| \left\langle T\hat{k}_{(\lambda_1,\lambda_2)}, \hat{k}_{(\mu_1,\mu_2)} \right\rangle \right|^p \ \sigma_t \ \left| \left\langle T^*\hat{k}_{(\lambda_1,\lambda_2)}, \hat{k}_{(\mu_1,\mu_2)} \right\rangle \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \Bigg(|\langle Ak_{\lambda_1}, k_{\mu_1}\rangle + \langle Bk_{\lambda_2}, k_{\mu_1}\rangle + \langle Ck_{\lambda_1}, k_{\mu_2}\rangle + \langle Dk_{\lambda_2}, k_{\mu_2}\rangle|^p \\
&\quad \sigma_t \ |\langle A^*k_{\lambda_1}, k_{\mu_1}\rangle + \langle C^*k_{\lambda_2}, k_{\mu_1}\rangle + \langle B^*k_{\lambda_1}, k_{\mu_2}\rangle + \langle D^*k_{\lambda_2}, k_{\mu_2}\rangle|^p \Bigg)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \Bigg(t\big(|\langle Ak_{\lambda_1}, k_{\mu_1}\rangle + \langle Bk_{\lambda_2}, k_{\mu_1}\rangle + \langle Ck_{\lambda_1}, k_{\mu_2}\rangle + \langle Dk_{\lambda_2}, k_{\mu_2}\rangle|^p \big) \\
&\quad + (1-t)\big(|\langle A^*k_{\lambda_1}, k_{\mu_1}\rangle + \langle C^*k_{\lambda_2}, k_{\mu_1}\rangle + \langle B^*k_{\lambda_1}, k_{\mu_2}\rangle + \langle D^*k_{\lambda_2}, k_{\mu_2}\rangle|^p \big) \Bigg)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(t\,|\langle Ak_{\lambda_1}, k_{\mu_1}\rangle|^p + (1-t)\,|\langle A^*k_{\lambda_1}, k_{\mu_1}\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(t\,|\langle Bk_{\lambda_2}, k_{\mu_1}\rangle|^p + (1-t)\,|\langle C^*k_{\lambda_2}, k_{\mu_1}\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + \left(t\,|\langle Ck_{\lambda_1}, k_{\mu_2}\rangle|^p + (1-t)\,|\langle B^*k_{\lambda_1}, k_{\mu_2}\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(t\,|\langle Dk_{\lambda_2}, k_{\mu_2}\rangle|^p + (1-t)\,|\langle D^*k_{\lambda_2}, k_{\mu_2}\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|A\|_{ber_{\nabla_t}} \|k_{\lambda_1}\| \|k_{\mu_1}\| + \|D\|_{ber_{\nabla_t}} \|k_{\lambda_2}\| \|k_{\mu_2}\| \\
&\quad + \left(t\|B\|_{ber}^p + (1-t)\|C\|_{ber}^p\right)^{\frac{1}{p}} \|k_{\lambda_2}\| \|k_{\mu_1}\| + \left(t\|C\|_{ber}^p + (1-t)\|B\|_{ber}^p\right)^{\frac{1}{p}} \|k_{\lambda_1}\| \|k_{\mu_2}\| \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} \|A\|_{ber_{\nabla_t}} & \left(t\|B\|_{ber}^p + (1-t)\|C\|_{ber}^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ \left(t\|C\|_{ber}^p + (1-t)\|B\|_{ber}^p\right)^{\frac{1}{p}} & \|D\|_{ber_{\nabla_t}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \|k_{\lambda_1}\| \\ \|k_{\lambda_2}\| \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \|k_{\mu_1}\| \\ \|k_{\mu_2}\| \end{pmatrix} \right\rangle \\
&\leq \left\| \begin{pmatrix} \|A\|_{ber_{\nabla_t}} & \left(t\|B\|_{ber}^p + (1-t)\|C\|_{ber}^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ \left(t\|C\|_{ber}^p + (1-t)\|B\|_{ber}^p\right)^{\frac{1}{p}} & \|D\|_{ber_{\nabla_t}} \end{pmatrix} \right\|.
\end{aligned}$$

因此，对所有 $\lambda, \mu \in \Omega$, 取上确界，即得所需结果。 □

下一个结果给出了酉的 2×2对角可逆算子矩阵的一个刻画。

定理 3.21. 假设 $T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in B(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ 可逆。则 T为酉当且仅当 $\max\{ber(A^*A)$、$ber(B^*B)\} \leq 1$ 且 $\max\left\{ber\left((A^*A)^{-1}\right)\right.$、$\left.ber\left((B^*B)^{-1}\right)\right\} \leq 1$。

证明。假设 T 为酉。则 A 与 B 为酉，从而有 ber(A^*A)=1、ber$\left((A^*A)^{-1}\right)=1$以及 ber$(B^*B)$ $=1$、 ber$\left((B^*B)^{-1}\right)=1.$。反之，假设 max $\{$ber(A^*A)、 ber$(B^*B)\}\leq 1$ 且 max $\{$ber$($($A^*A)^{-1}$)、ber$\left((B^*B)^{-1}\right)\}\leq 1.$。我们计算 $\left\|(T-T^{-1^*})\hat{}k_{(\lambda_1,\lambda_2)}\right\|^2$·。利用不等式 ber$(T^*T)\leq$ max $\{$ber(A^*A)、ber$(B^*B)\}\leq 1$与 ber$\left((T^*T)^{-1}\right)\leq$max $\{$ber$\left((A^*A)^{-1}\right)$、ber$\left((B^*B)^{-1}\right)\}\leq 1$, 我们得到 $\left\|(T-T^{-1^*})\hat{}k_{(\lambda_1,\lambda_2)}\right\|=0$，对所有 $(\lambda_1,\lambda_2)\in\Omega\times\Omega$ 成立。由此得到 $T^{-1}=T^*$。□

4. CONVEXITY OF THE BEREZIN RANGE

本节研究加权Hardy空间和Fock空间上复合算子与有限秩算子的Berezin值域的凸性。

我们计算了加权Hardy空间上对应不同权重序列的复合算子与有限秩算子的Berezin值域，并探讨了其Berezin值域为凸集的条件。此外，我们考察了Fock空间上符号为 $\phi(z)=Az$，的复合算子的Berezin值域的凸性，其中 A 是一个 n 阶标量矩阵，且 $z=(z_1,\ z_2,\ \ldots\ldots,\ z_n)$。

4.1. 加权Hardy空间上。设$(\beta_n)_{n\geq 0}$ 是一个序列，使得对所有 n， $\beta_0=1$、 $\beta_n>0$成立，且liminf$_{n\to\infty}\beta_n^{1/n}\geq 1$. 那么加权Hardy空间 $H^2(\beta)$定义为

$$H^2(\beta)=\left\{f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n\ :\ \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\beta_n^2<\infty\right\}.$$

$H^2(\beta)$上的内积定义为

$$\langle f,g\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\overline{b_n}\,\beta_n^2,$$

其中 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 且 $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$。

众所周知， $H^2(\beta)$是一个由 $\mathbb{D}$上的解析函数构成的再生核希尔伯特空间，其再生核为

$$k_w(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\overline{w}^n}{\beta_n^2}z^n.$$

通过选取不同的权重序列，我们可以得到不同的函数空间。例如，经典 Hardy 空间、经典 Bergman 空间和经典 Dirichlet 空间分别是权重为 $\beta_n=1$， $\beta_n=(n+1)^{-\frac{1}{2}}$和 $\beta_n=(n+1)^{\frac{1}{2}}$的加权 Hardy 空间。更多详情请参见 [17, 第 2]章。

设 $\phi:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 为全纯函数。在$H^2(\beta)$上作用的复合算子 C_ϕ 定义为 $C_\phi f:=f\circ\phi$ 有界。 C_ϕ 在 w 上的贝雷津变换为

$$\widetilde{C_\phi}(w)=\frac{1}{\|k_w\|^2}\langle C_\phi k_w,k_w\rangle=\frac{1}{\|k_w\|^2}k_w(\phi(w))=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\overline{w}^n\phi(w)^n}{\beta_n^2}}{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|w|^{2n}}{\beta_n^2}}.$$

若对固定的 $k \geq 1$考虑 $\beta_n = \left(\binom{n+k-1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}$，则

$$k_w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n} \overline{w}^n z^n = \frac{1}{(1-\overline{w}z)^k}.$$

当 $k = 1$ 时，这是经典 Hardy 空间；当 $k > 1$ 时，这是加权 Bergman 空间。与此核相关空间上的算子的 Berezin 值域的凸性在文献中已有研究。特别地，该空间上有限秩算子的 Berezin 值域的凸性见 [24], ，而复合算子的 Berezin 值域的凸性则在 [29] 中进行了研究。

若我们考虑 $\beta_n^2 = (\frac{1}{\beta})^n$ 对 $\beta \in (0, 1]$, ，则

$$k_w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \overline{w}^n z^n = \frac{1}{1-\beta\overline{w}z}.$$

从这里开始，我们的所有讨论都在权为 $\beta_n^2 = (\frac{1}{\beta})^n$ 的加权 Hardy 空间中进行。

与此核相关的复合算子的 Berezin 变换为

$$\widetilde{C_\phi}(w) = \frac{1-|w|^2\beta}{1-\overline{w}\phi(w)\beta}.$$

设 $\phi(w) = \eta w$ 是 $\mathbb{D}$ 上的全纯自映射，其中 $\eta \in \mathbb{D}$ 且 $w \in \overline{\mathbb{D}}$。则

$$\widetilde{C_\phi}(w) = \frac{1-|w|^2\beta}{1-|w|^2\eta\beta}.$$

这些算子的 Berezin 值域并不总是凸的（见图 1）。这里我们刻画$Ber(C_\phi)$ 的凸性。

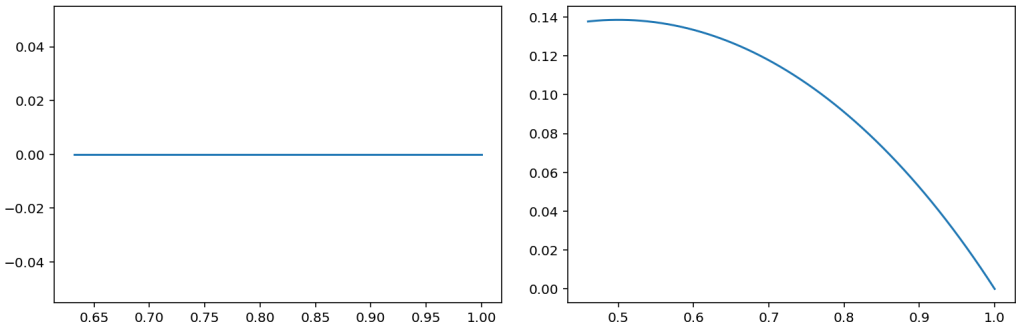


FIGURE 1. $Ber(C_\phi)$ 在 $H^2(\beta)$ 上，当参数为 $\eta = -0.75$ 、 $\beta = 0.25$（左，看似凸）以及 $\eta = 0.6i$ 、 $\beta = 0.5$ （右，看似不凸）时

定理 4.1. 设 $C_\phi \in B(H^2(\beta))$ 满足 $\phi(w) = \eta w$ ，其中 $\eta \in \mathbb{D}$ 且 $w \in \mathbb{D}$。则 $Ber(C_\phi)$ 为凸当且仅当 $\eta \in [-1, 1]$。

证明。 假设 $\eta = 1$，则 $\phi(w) = w$。令 $w = re^{i\theta}$ 代入 $0 \leq r < 1$，得到

$$\widetilde{C_\phi}(w) = \frac{1-r^2\beta}{1-r^2\beta} = 1.$$

因此 $Ber(C_\phi)=\{1\}$，它是凸的。类似地，对于 $\phi(w)=\eta w$，其中 $-1\le\eta<1$，我们得到

$$Ber(C_\phi)=\left\{\frac{1-r^2\beta}{1-r^2\eta\beta}:r\in[0,1)\right\}=\left(\frac{1-\beta}{1-\eta\beta},1\right],$$

它也是凸的。

反之，假设$Ber(C_\phi)$是凸的。我们必须证明 $\eta\in[-1,1]$。我们有

$$\widetilde{C_\phi}(re^{i\theta})=\frac{1-|r|^2\beta}{1-|r|^2\eta\beta}\qquad r\in[0,1),$$

这与 θ无关。因此Ber(C_ϕ)是 $\mathbb{C}$中的一条路径。凸性意味着它要么是一个点，要么是一条线段。容易看出，Ber(C_ϕ)是一个点当且仅当 $\eta=1$。现在，将Ber(C_ϕ)视为一条线段。注意 $\widetilde{C_\phi}(0)=1$ 以及$\lim_{r\to1^-}\widetilde{C_\phi}(re^{i\theta})=\frac{1-\beta}{1-\beta\eta}$。由于 $\beta\neq0$ 这两者是Ber(C_ϕ)中的不同点。Ber(C_ϕ)的凸性意味着点1、$\frac{1-\beta}{1-\beta\eta}$ 以及 $\rho\in[0,1)$的任意点 $\frac{1-\beta\rho^2}{1-\beta\rho^2\eta}$ 共线。在 $\mathbb{R}^2$ 平面中，这些点可分别视为$(1,0)$ $\left(\frac{(1-\beta)(1-\beta a)}{(1-\beta a)^2+(\beta b)^2},\frac{(1-\beta)\beta b}{(1-\beta a)^2+(\beta b)^2}\right)$ 和 $\left(\frac{(1-\beta\rho^2)(1-\beta\rho^2a)}{(1-\beta\rho^2a)^2+(\beta\rho^2b)^2},\frac{(1-\beta\rho^2)\beta\rho^2b}{(1-\beta\rho^2a)^2+(\beta\rho^2)^2}\right)$，其中 $\eta=a+ib$。由共线性，我们有

$$1\left(\frac{(1-\beta)\beta b}{(1-\beta a)^2+(\beta b)^2}-\frac{(1-\beta\rho^2)\beta\rho^2b}{(1-\beta\rho^2a)^2+(\beta\rho^2b)^2}\right)+\frac{(1-\beta)(1-\beta a)}{(1-\beta a)^2+(\beta b)^2}\left(\frac{(1-\beta\rho^2)\beta\rho^2b}{(1-\beta\rho^2a)^2+(\beta\rho^2b)^2}\right)$$

$$+\frac{(1-\beta\rho^2)(1-\beta\rho^2a)}{(1-\beta\rho^2a)^2+(\beta\rho^2b)^2}\left(-\frac{(1-\beta)\beta b}{(1-\beta a)^2+(\beta b)^2}\right)=0,$$

这意味着

$$\frac{\big((1-\beta)\beta b\big)\big((1-\beta\rho^2a)^2+(\beta\rho^2b)^2\big)-\big((1-\beta\rho^2)\beta\rho^2b\big)\big((1-\beta a)^2+(\beta b)^2\big)}{\big((1-\beta a)^2+(\beta b)^2\big)\big((1-\beta\rho^2a)^2+(\beta\rho^2b)^2\big)}$$

$$+\frac{(1-\beta)(1-\beta a)(1-\beta\rho^2)(\beta\rho^2b)}{\big((1-\beta a)^2+(\beta b)^2\big)\big((1-\beta\rho^2a)^2+(\beta\rho^2b)^2\big)}+\frac{(1-\beta\rho^2)(1-\beta\rho^2a)(\beta-1)(\beta b)}{\big((1-\beta a)^2+(\beta b)^2\big)\big((1-\beta\rho^2a)^2+(\beta\rho^2b)^2\big)}=0.$$

化简后，我们得到

$$\frac{2\big(\beta^3\rho^2ab-\beta^3\rho^4ab-\beta^3\rho^2b+\beta^3\rho^4b\big)}{\big((1-\beta a)^2+(\beta b)^2\big)\big((1-\beta\rho^2a)^2+(\beta\rho^2b)^2\big)}=0,$$

意味着

$$b\big(a(\beta^3\rho^2-\beta^3\rho^4)-(\beta^3\rho^2-\beta^3\rho^4)\big)=0.$$

这意味着要么 $b=0$，要么 $a=1$。在这两种情况下，η 的虚部均为 0。因此 $\eta\in[-1,1]$。证明至此完成。□

对于满足 $\eta\in\mathbb{T}$ 的椭圆自同构 $\phi(w)=\eta w$，有如下结果：

推论 4.2。设 $C_\phi\in B(H^2(\beta))$ 满足 $\phi(w)=\eta w$，其中 $\eta\in\mathbb{T}$ 且 $w\in\mathbb{D}$。那么，*Ber*(C_ϕ) 是凸的，当且仅当 $\eta=1$ 或 $\eta=-1$。

注 4.3。在定理 $\beta=1$ 中令 4.1，我们得到 [2, 定理 4。1], 该定理表明，若 $\eta\in\mathbb{D}$ 且 $\phi(w)=\eta\overline{w}$，则 C_ϕ 在 $H^2(\mathbb{D})$ 上的 Berezin 值域当且仅当 $-1\le\eta\le1$时为凸集。

布拉施克因子： 考虑单位圆盘上的自同构，称为布拉施克因子：

$$\phi_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z},$$

其中 $\alpha \in \mathbb{D}$。我们有

$$\widetilde{C}_{\phi_\alpha}(w) = \frac{1-|w|^2\beta}{1-\overline{w}\phi_\alpha(w)\beta} = \frac{(1-|w|^2\beta)(1-\overline{\alpha}w)}{1-\overline{\alpha}w-|w|^2\beta+\alpha\overline{w}\beta}.$$

命题 4.4. 对于 $H^2(\beta)$上的复合算子 C_{ϕ_α} ，*Berezin* 值域 $Ber(C_{\phi_\alpha})$ 在复共轭下封闭，因此关于实轴对称。

证明. 设 $w = re^{i\varphi}$ 和 $\alpha = \rho e^{i\theta}$。我们证明

$$\widetilde{C}_{\phi_\alpha}(re^{i\varphi}) = \overline{\widetilde{C}_{\phi_\alpha}(re^{i(2\theta-\varphi)})},$$

即,

$$\frac{1-r^2\beta}{1-re^{-i\varphi}\phi_\alpha(re^{i\varphi})\beta} = \overline{\frac{1-r^2\beta}{1-re^{-i(2\theta-\varphi)}\phi_\alpha(re^{i(2\theta-\varphi)})\beta}}.$$

这仅在以下情况下发生

$$e^{-i\varphi}\phi_\alpha(re^{i\varphi}) = \overline{e^{-i(2\theta-\varphi)}\phi_\alpha(re^{i(2\theta-\varphi)})}.$$

Now,

$$\begin{aligned} e^{2i\theta}\overline{\phi_\alpha(re^{i(2\theta-\varphi)})} &= e^{2i\theta}\overline{\left(\frac{re^{i(2\theta-\varphi)}-\beta}{1-\bar{\beta}re^{i(2\theta-\varphi)}}\right)} \\ &= e^{2i\theta}\left(\frac{re^{i(\varphi-2\theta)}-\rho e^{-i\theta}}{1-\rho e^{i\theta}re^{i(\varphi-2\theta)}}\right) \\ &= \frac{re^{i\varphi}-\rho e^{i\theta}}{1-\rho e^{-i\theta}re^{i\varphi}} \\ &= \phi_\alpha(re^{i\varphi}). \end{aligned}$$

证明至此完成。 □

~**推论 4.5.** 如果 C_{ϕ_α} 的 *Berezin* 值域是凸的，那么对每个 $z \in \mathbb{D}$， $\Re\{C_{\phi_\alpha}(z)\} \in Ber(C_{\phi_\alpha})$ 。

证明。 假设 $Ber(C_{\phi_\alpha})$ 是凸的。那么根据上述命题，我们有 $Ber(C_{\phi_\alpha})$ 在复共轭下封闭。因此，我们有

$$\frac{1}{2}C_{\phi_\alpha}(z) + \frac{1}{2}\overline{C_{\phi_\alpha}(z)} = \Re\{C_{\phi_\alpha}(z)\} \in \mathrm{Ber}(C_{\phi_\alpha}).$$

□

该算子的 Berezin 值域不一定总是凸的（见图 2） .

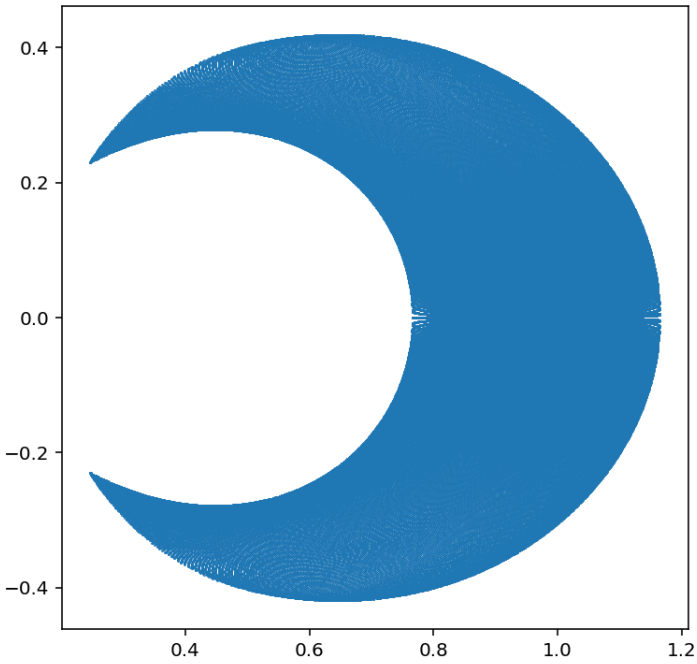


FIGURE 2. 在 $H^2(\beta)$上，针对 $\alpha = 0.5$ 和$\beta = 0.7$，Berezin 值域$Ber(C_{\phi_\alpha})$（显然不是凸集）。

注 4.6。当 $\alpha = 0$,

$$\widetilde{C}_{\phi_\alpha}(w) = \frac{(1-|w|^2\beta)}{1-|w|^2\beta} = 1 \qquad \forall\, w \in \mathbb{D},$$

这意味着$Ber(C_{\phi_\alpha}) = \{1\}$，</style>是的一个凸子集。然而，关于哪些使 *Berezin* 值域$Ber(C_{\phi_\alpha})$为凸集，目前尚无完整的刻画。

问题 4.7. 对于哪些 α，Berezin 值域$Ber(C_{\phi_\alpha})$是凸的?

现在我们讨论有限秩算子的 Berezin 值域的凸性。首先，我们证明形如 $A(f) = \langle f, z^n\rangle z^n$的秩一算子（其中 $n \in \mathbb{N}$）的 Berezin 值域的凸性。

定理 4.8. 设 $A(f) = \langle f, z^n\rangle z^n$ 是作用在 $H^2(\beta)$上的秩一算子。那么，A 的 *Berezin* 值域为 $Ber(A) = \left[0, \left(\frac{n}{\beta(n+1)}\right)^n\left(\frac{1}{n+1}\right)\right]$，它在 $\mathbb{C}$中是凸的。

P屋顶。对于 $\lambda \in \mathbb{D}$, $A(k_\lambda) = \langle k_\lambda, z^n\rangle z^n = \overline{\lambda}^n z^n$。在 λ 处的 Berezin 变换为

$$\widetilde{A}(\lambda) = (1-\beta|\lambda|^2)\langle \overline{\lambda}^n z^n, k_\lambda\rangle = (1-\beta|\lambda|^2)|\lambda|^{2n} = |\lambda|^{2n} - \beta|\lambda|^{2n+2},$$

其中 $|\lambda| \in [0,1)$。注意，$A(\lambda) = A(|\lambda|)$ 是实函数。现在，我们对 $A(\lambda)$ 关于 $|\lambda|$ 求导，并令其等于零，以求出极值点。

$$0 = 2n|\lambda|^{2n-1} - \beta(2n+2)|\lambda|^{2n+1} = 2|\lambda|^{2n-1}(n - \beta(n+1)|\lambda|^2).$$

这当且仅当 $|\lambda| = 0$ 或$|\lambda|^2 = \frac{n}{\beta(n+1)}$时成立。现在如果 $|\lambda| = 0$，则 $\widetilde{A}(\lambda) = 0$。如果 $|\lambda|^2 = \frac{n}{\beta(n+1)}$，则

$$\widetilde{A}(\lambda) = \left(\frac{n}{\beta(n+1)}\right)^n - \beta\left(\frac{n}{\beta(n+1)}\right)^{n+1} = \left(\frac{n}{\beta(n+1)}\right)^n\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

因此，A 的 Berezin 值域为$Ber(A) = \left[0, \left(\beta^{n}{}_{(n+1)}\right)^{n}\left(\frac{1}{n+1}\right)\right]$，它是 $\mathbb{C}$的一个凸子集。□

注 4.9. 令 $\beta = 1$ 在定理 4.8中取值，可得 [4, 命题 2。1], 该命题指出，若 $A(f) = \langle f, z^n\rangle z^n$ 是作用在 $H^2(\mathbb{D})$上的秩一算子。则 A的 Berezin 值域为 $Ber(A) = \left[0, \binom{1}{n+1}\binom{n}{n+1}^n\right]$，它是 $\mathbb{C}$中的凸集。

现在，我们通过任意选取一个$g_i \in H^2(\beta)$，来证明上述定理的一般情形。

定理 4.10. 设 A 是有限秩算子 $A(f) = \sum_{i=1}^{n}\langle f, g_i\rangle g_i$，其中 $f, g_i \in H^2(\beta)$。则 A 的 *Berezin* 值域 $Ber(A)$ 是 $\mathbb{C}$的一个凸子集。

证明。 对于 $\lambda \in \mathbb{D}$， A 对再生核 k_λ 的作用为

$$A(k_\lambda) = \sum_{i=1}^{n}\langle k_\lambda, g_i\rangle g_i(z) = \sum_{i=1}^{n}\overline{g_i(\lambda)}\, g_i(z).$$

因此，在 λ处的 Berezin 变换为

$$\widetilde{A}(\lambda) = (1-\beta|\lambda|^2)\langle A(k_\lambda), k_\lambda\rangle = (1-\beta|\lambda|^2)\sum_{i=1}^{n}|g_i(\lambda)|^2, \quad \lambda \in \mathbb{D}.$$

由于每个 $g_i \in H^2(\beta)$ 都是全纯的，因此 $\widetilde{A}(\lambda)$ 是连通集 $\mathbb{D}$上的实值连续函数。因此，其像 $Ber(A)$ 在 $\mathbb{R}$中是连通的。在 $\mathbb{R}$中，唯一的连通子集是区间或单点集。因此，$Ber(A)$ 必定是区间或单点集。因此，$Ber(A)$ 是 $\mathbb{C}$的凸子集。□

接下来，我们考察形式为 $A(f) = \langle f, z^n\rangle z^m$，的算子的 Berezin 值域的凸性，其中 $m > n$。

定理 4.11。 设 $A(f) = \langle f, z^n\rangle z^m$，其中 $m > n$ 是 $H^2(\beta)$上的秩一算子。则 $Ber(A)$ 是一个以原点为中心、半径为 $\binom{2}{m+n+2}\left(\beta^{m+n}{}_{(m+n+2)}\right)^{\frac{m+n}{2}}$ 的圆盘，因此在 $\mathbb{C}$中是凸的。

证明。 对于 $\lambda \in \mathbb{D}$, $A(k_\lambda) = \langle k_\lambda, z^n\rangle z^m = \overline{\lambda}^n z^m$。在 λ 处的 Berezin 变换为

$$\widetilde{A}(\lambda) = (1-\beta|\lambda|^2)\langle\overline{\lambda}^n z^m, k_\lambda\rangle = (1-\beta|\lambda|^2)|\lambda|^{2n}\lambda^{m-n}.$$

令 $\lambda = re^{i\theta}$。则有

$$\widetilde{A}(\lambda) = (1-\beta r^2)r^{2n}r^{m-n}e^{i(m-n)\theta} = (r^{m+n} - \beta r^{m+n+2})e^{i(m-n)\theta}.$$

因此，A 的 Berezin 值域为

$$Ber(A) = \left\{(r^{m+n} - \beta r^{m+n+2})e^{i(m-n)\theta} : re^{i\theta} \in \mathbb{D}\right\}.$$

对于每个 $r \in [0,1)$，这个集合都是一个圆形集合。对于 $\eta \in Ber(A)$，我们有 $\eta = (r^{m+n} - \beta r^{m+n+2})e^{i\theta(m-n)}$，其中某个 $re^{i\theta} \in \mathbb{D}$.。那么，对于任意 $t \in [0, 2\pi)$， $\eta e^{it} = (r^{m+n} - \beta r^{m+n+2})e^{i\theta(m-n)}e^{it} = (r^{m+n} - \beta r^{m+n+2})e^{i(\theta(m-n)+t)} \in Ber(A)$，因为 ηe^{it} 是 $re^{i(\theta(m-n)+t)} \in \mathbb{D}$ 的像。由于 $0 \in Ber(A)$，容易看出 $Ber(A)$ 是一个以原点为圆心、半径为 $\sup_{r\in[0,1)}\left(r^{m+n} - \beta r^{m+n+2}\right)$ 的圆盘。为求 $(r^{m+n} - \beta r^{m+n+2})$ 的极值，我们对其求导并令导数等于 0。得到

$$0 = (m+n)r^{m+n-1} - \beta(m+n+2)r^{m+n+1} = r^{m+n-1}\left((m+n) - \beta(m+n+2)r^2\right).$$

因此，极值点为 $r=0$ 和 $r=\sqrt[\frac{m+n}{2}]{\beta\ {}^{m+n}_{m+n+2}()}$。代入这些值，得到圆盘的半径为 $\left(\begin{smallmatrix}2\\m+n+2\end{smallmatrix}\right)\left(\beta\ {}^{m+n}_{(m+n+2)}\right)^{\frac{m+n}{2}}$。因此

$$Ber(A)=\mathbb{D}_{\left(\frac{2}{m+n+2}\right)\left(\frac{m+n}{\beta(m+n+2)}\right)^{\frac{m+n}{2}}},$$

其在 $\mathbb{C}$中是凸的。 □

注记4.12. 令 $\beta=1$ 代入定理4.11，我们得到 [4, 定理2.10], 其指出，若 $A(f)=\langle f,\ z^n\rangle z^m$，$m>n$ 是秩一算子，作用于 $H^2(\mathbb{D})$。则 Berezin 值域 A，$Ber(A)$是以原点为中心、半径为 $\left(\begin{smallmatrix}2\\m+n+2\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}m+n\\m+n+2\end{smallmatrix}()\right)^{\frac{m+n}{2}}$因此在 $\mathbb{C}$.中是凸的

4.2. 关于Fock空间。对任意 $\alpha>0$，考虑高斯概率测度

$$dv_\alpha(z)=\frac{\alpha}{\pi^n}e^{-\alpha|z|^2}\,dv(z)$$

在 $\mathbb{C}^n$ 上，其中 dv 是 $\mathbb{C}^n$ 上的 Lebesgue 体积测度。Fock 空间 $\mathcal{F}^2_\alpha(\mathbb{C}^n)$ [16]由 $\mathbb{C}^n$ 上所有满足以下条件的全纯函数 f 组成:

$$\|f\|^2_\alpha\equiv\int_{\mathbb{C}^n}|f(z)|^2\,dv_\alpha(z)<\infty.$$

$\mathcal{F}^2_\alpha(\mathbb{C}^n)$ 是一个再生核希尔伯特空间，其内积如下:

$$\langle f,g\rangle_\alpha=\int_{\mathbb{C}^n}f(z)\overline{g(z)}\,dv_\alpha(z).$$

$w\in\mathbb{C}^n$ 处的再生核为:

$$k_w(z)=k(z,w)=e^{\alpha\langle z,w\rangle},$$

其中 $\langle z,\ w\rangle=\sum_{i=1}^n z_i\overline{w_i}$ 和

$$\|k_w\|^2_\alpha=e^{\alpha\|w\|^2}.$$

在 [16]，中，Carswell、MacCluer 和 Schuster 刻画了 Fock 空间 $\mathcal{F}^2_\alpha(\mathbb{C}^n)$ 上的有界复合算子。

定理 4.13。 [16] 设 $\phi:\ \mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ 是一个全纯映射。

(a) 若 C_ϕ 在 $\mathcal{F}^2_\alpha(\mathbb{C}^n)$上有界，则 $\phi(z)=Az+B$，其中 A 是一个 $n\times n$ 矩阵，B 是一个 $n\times 1$ 向量。此外，$\|A\|\le 1$，并且若对某个$\zeta\in\mathbb{C}^n$有 $|A\zeta|=|\zeta|$，则 $\langle A\zeta, B\rangle=0$.(b) 若 C_ϕ 在 $\mathcal{F}^2_\alpha(\mathbb{C}^n)$上是紧的，则 $\phi(z)=Az+B$，其中 $\|A\|<1$.

逆命题同样成立。

若考虑 $\phi(z)=Az$，其中 A 是 n 阶矩阵，且 $z=(z_1,z_2,...,z_n)$，则复合算子的 Berezin变换由下式给出

$$\widetilde{C}_\phi(w)=\langle C_\phi\hat{k}_w,\hat{k}_w\rangle=\frac{1}{\|k_w\|^2}\langle C_\phi k_w,k_w\rangle=\frac{1}{e^{\alpha|w|^2}}k_w(\phi(w)),$$

其中 $w=(w_1,w_2,...,w_n)$。当 $A=\lambda I$为 n阶标量矩阵时，我们得到

$$\widetilde{C}_\phi(w)=e^{\sum_{i=1}^n(\lambda-1)\,\alpha\,|w_i|^2}.$$

这些算子的 Berezin 值域并非总是凸的，如图3所示。在此，我们尝试找出使 α 的 Berezin 值域为凸的取值。

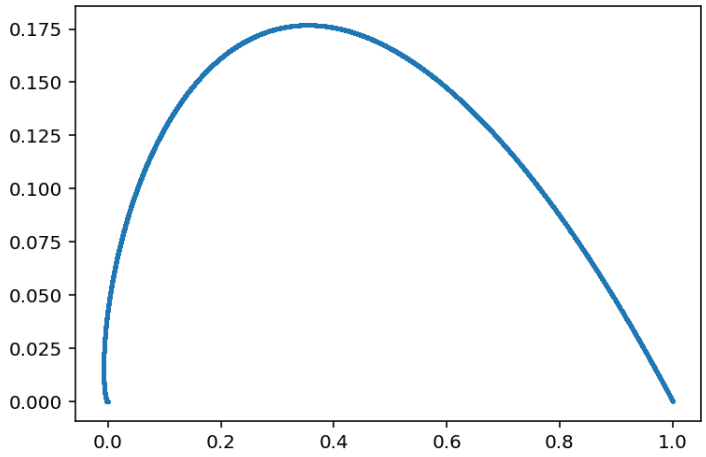


FIGURE 3. 在 $\mathcal{F}^2_\alpha(\mathbb{C}^n)$ 上，$\alpha = 1$ 和 $\lambda = 0.5i$ 的 Berezin 值域 $Ber(C_\phi)$（显然不是凸集）。

下述定理刻画了该算子的 Berezin 值域的凸性。

定理 4.14. 设 $z \in \mathbb{C}^n$、$\lambda \in \mathbb{D}$ 和 $\phi(z) = Az$，其中 $A = \lambda I$。那么，作用于 $\mathcal{F}^2_\alpha(\mathbb{C}^n)$ 上的 C_ϕ 的 *Berezin* 值域是凸的，当且仅当 $\lambda \in [-1, 1]$.

证明。假设 $\lambda = 1$。那么 $\phi(z) = Iz$，这意味着

$$\widetilde{C}_\phi(z) = e^0 = 1.$$

因此，$Ber(C_\phi) = \{1\}$，这是 $\mathbb{C}$ 中的一个凸集。现在假设 $\lambda \in [-1, 1)$。令$z_i = r_i e^{i\theta_i}$，其中 $i = 1, 2, ..., n$。那么对于 $0 \le r_i < \infty$

$$Ber(C_\phi) = \left\{ e^{\sum_{i=1}^n (\lambda - 1)\,\alpha\, r_i^2} : r_i \in [0, \infty) \right\} = (0, 1],$$

它在 $\mathbb{C}$ 中也为凸。

反过来，假设$Ber(C_\phi)$是凸的。我们需要证明 $\lambda \in [-1, 1]$. 令$\lambda - 1 = a + ib$。那么

$$\widetilde{C}_\phi(r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2}, ..., r_n e^{i\theta_n}) = e^{\sum_{i=1}^n (a+ib)\alpha r_i^2} = e^{\sum_{i=1}^n a\alpha r_i^2} e^{\sum_{i=1}^n ib\alpha r_i^2}, \qquad r \in [0, \infty).$$

如果 $a = 0$，那么 $\lambda = 1 + ib$，并且由于 $\lambda \in \overline{\mathbb{D}}$，我们有 $b = 0$。

为了证明 $\lambda \in [-1, 1]$，只需证明：若 λ 的虚部非零，则$Ber(C_\phi)$不是凸的。对于非零的 a 和 b，我们有

$$\widetilde{C}_\phi(r_1 e^{i\theta_1}, r_2 e^{i\theta_2}, ..., r_n e^{i\theta_n}) = e^{\sum_{i=1}^n a\alpha r_i^2} e^{\sum_{i=1}^n ib\alpha r_i^2},$$

它是一个与 θ无关的函数。因此，$Ber(C_\phi)$只是 $\mathbb{C}$中的一条路径。根据我们的假设，$Ber(C_\phi)$是凸集，因此它要么是一个点，要么是一条线段。容易看出，$\widetilde{C}_\phi(0, 0, ..., 0) = 1$、$\widetilde{C}_\phi(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}, 0, ..., 0) = e^a e^{ib}$和 $\widetilde{C}_\phi(\rho e^{i\theta}, 0, ..., 0) = e^{\alpha a \rho^2} e^{i\alpha b \rho^2}$ 其中 $\rho \in [0, \infty)$。由于 a 和 b 是非零实数，1和 $e^a e^{ib}$是复平面上两个不同的点。因此，$Ber(C_\phi)$是一条线段。于是，$Ber(C_\phi)$中的所有点都共线。因此，$Ber(C_\phi)$中的点1、$e^a e^{ib}$ 和 $e^{\alpha a \rho^2} e^{i\alpha b \rho^2}$ 共线。在 $\mathbb{R}^2$ 平面中，这三个点可以视为(1，0)，

分别为$(e^a\cos(b)\ e^a\sin(b))$和$(e^{a\alpha\rho^2}\cos(b\alpha\rho^2)\ e^{a\alpha\rho^2}\sin(b\alpha\rho^2))$。于是，根据共线性，我们有

$$1\Big(e^a\sin b - e^{\alpha a\rho^2}\sin(\alpha b\rho^2)\Big) + e^a\cos b\Big(e^{\alpha a\rho^2}\sin(\alpha b\rho^2) - 0\Big) + e^{\alpha a\rho^2}\cos(\alpha b\rho^2)\Big(0 - e^a\sin b\Big) = 0.$$

重新排列并化简上式，得到

$$e^a\sin b = e^{\alpha a\rho^2}\big(\sin(\alpha b\rho^2) + e^a\sin(\alpha b\rho^2 - b)\big) \qquad \forall\ \rho\in[0,\infty).$$

特别地，将 $\rho=\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha b}}$ 代入上式，得到

$$e^a\sin b = e^{\frac{a\pi}{b}}[\sin 2\pi + e^a\sin(2\pi+b)] = e^{\frac{a\pi}{b}}[e^a\sin b].$$

两边消去 $e^a\sin b$，得到

$$e^{\frac{a\pi}{b}} = 1 = e^0.$$

这意味着 $a\pi=0$，从而 $a=0$，这与我们的假设 $a\neq 0$ 矛盾。因此，$Ber(C_\phi)$ 不是凸集。因此，如果 λ 的虚部不为零，那么 $Ber(C_\phi)$ 不是凸集。□

下一个例子表明，符号为$\phi(z)=Az$的复合算子的 Berezin 值域未必总是凸集，其中 A 是非常值对角矩阵。

例 4.15. 考虑 Fock空间 $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^2)$。设 $\phi(z)=Az$，其中$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&i\end{pmatrix}$。则复合算子的 Berezin 变换由下式给出

$$\widetilde{C}_\phi(z_1,z_2) = e^{(i-1)|z_2|^2}.$$

Thus

$$Ber(C_\phi) = \{e^{(i-1)|z_2|^2} : z_2\in\mathbb{C}\} = \{e^{-t}e^{it} : t\geq 0\}.$$

When $t=0, t=\pi$ 点 $1,-e^{-\pi}\in Ber(C_\phi)$. 我们将证明中点

$$m=\frac{1-e^{-\pi}}{2}\notin Ber(C_\phi).$$

设 $m\in Ber(C_\phi)$。则存在某个 $t\geq 0$ 使得 $m=e^{-t}e^{it}$。由于$m>0$, 我们有 $t=2k\pi$，对某个 $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. 。则 $m=e^{-2k\pi}$，对某个 k。即$m\in\{1,e^{-2\pi},e^{-4\pi},...\}$，但 $\frac{1-e^{-\pi}}{2}\notin\{1,e^{-2\pi},e^{-4\pi},...\}$. ——

定理 4.16. 对于固定的 $k\in\{1,2,...,n\}$，考虑 $n\times n$ 对角矩阵 $A_k=[a_{kj}]$，其元素为 $a_{kk}=a+ib$ 和 $a_{jj}=1\ \forall\ k\neq j$，其中 $a^2+b^2\leq 1$。则符号为 $\phi(z)=A_kz$ 的复合算子的 ***Berezin*** 值域是凸的，当且仅当 $b=0$。

证明。 设 $b=0$。则 Berezin 值域为

$$Ber(C_\phi) = \{e^{\alpha(a-1)|z_i|^2} : z_i\in\mathbb{C}\} = (0,1],$$

这是 $\mathbb{C}$. 的一个凸子集

反过来，假设$Ber(C_\phi)$是凸的。我们必须证明 b=0。假设$b\neq 0$。只需证明$Ber(C_\phi)$不是凸集。我们有

$$\widetilde{C}_\phi(z_1,z_2,...,z_n) = e^{\alpha(a-1)|z_i|^2}e^{ib|z_i|^2} = e^{\alpha(a-1)t}e^{i\alpha bt},\quad t\geq 0.$$

当 $t = 0$和$t = \frac{2\pi}{b\alpha}$，时，我们得到 1，$e^{(a-1)\frac{2\pi}{b}} \in Ber(C_\phi)$。因此，中点 $m = \frac{1+e^{(a-1)\frac{2\pi}{b}}}{2} \in Ber(C_\phi)$。于是，对于某个 $t \geq 0.$，有 $m = e^{\alpha(a-1)t}e^{i\alpha bt}$。由于 $m > 0$，对于某个 $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，有 $\alpha bt = 2k\pi$。这意味着 $m = e^{(a-1)\frac{2k\pi}{b}}$，即 $m \in \{1, e^{(a-1)\frac{2\pi}{b}}, e^{(a-1)\frac{4\pi}{b}}, ...\}$。但是 $\frac{1+e^{(a-1)\frac{2\pi}{b}}}{2} \notin \{1, e^{(a-1)\frac{2\pi}{b}}, e^{(a-1)\frac{4\pi}{b}}, ...\}$。因此，$Ber(C_\phi)$不是凸集。□

利益冲突声明
不存在利益冲突。

数据可用性
本文所述研究未使用任何数据。

致谢。第一作者获得大学拨款委员会（UGC，印度）的初级研究员奖学金资助。第二作者获得科学与工业研究委员会（CSIR，印度）高级研究员奖学金（09/0239(13298)/2022-EMR-I）资助。

References

1. A. Augustine、P. H. Das、P. Bhunia和P. Shankar，关于一类半范数下Berezin值域的凸性与Berezin半径不等式，《数学科学通报》206 (2026)，论文号103762，25页。2. A. Augustine、M. Garayev和P. Shankar，复合算子、其Berezin值域的凸性及相关问题，《Complex Anal. Oper. Theory》17 (2023)，第8期，论文号126，22页。3. A. Augustine、M. Garayev和P. Shankar，关于复合算子Berezin值域的凸性及相关问题，(2024)，arXiv:2401.03176 [math.FA]。4. A. Augustine、M. Garayev和P. Shankar，关于某些算子的Berezin值域与Berezin半径，(2024)，arXiv:2411.10771v1 [math.FA]。5. M. Bakherad、C. Conde和F. Kittaneh，介于Berezin半径与Berezin范数之间的一类新半范数，《应用数学学报》192 (2024)，论文号3，18。6. M. Bakherad、M. Hajmohamadi、R. Lashkaripour和S. Sahoo，算子上Berezin数不等式的若干推广，《落基山数学杂志》51 (2021)，第6期，1941–1951。7. F. A. Berezin，算子的协变符号与逆变符号，Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 36 (1972)，1134-1167。8. R. Bhatia，正矩阵的黎曼均值，矩阵信息几何，施普林格，海德堡，2013，第35-51页。9. R. Bhatia和J. Holbrook，非交换几何均值，《数学启迪者》28 (2006)，第1期，32-39。10. P. Bhunia，谱半径、数值半径与Berezin半径不等式的加强，Rev. R. Acad. Cienc. Exactas F´ıs. Nat. Ser. A Mat. RACSAM 120 (2026)，第1期，论文号4。11. P. Bhunia、M. T. Garayev、K. Paul和R. Tapdigoglu，Berezin符号的若干新应用，《Complex Anal. Oper. Theory》17 (2023)，第6期，论文号96，15页。12. P. Bhunia、M. G¨urdal、K. Paul、A. Sen和R. Tapdigoglu，关于再生核希尔伯特空间算子空间上的一种新范数与Berezin半径不等式，《数值泛函分析与优化》44 (2023)，第9期，970–986。13. P. Bhunia、K. Paul和A. Sen，涉及Berezin范数与Berezin数的不等式，《Complex Anal. Oper. Theory》17 (2023)，第1期，论文号7，15页。14. P. Bhunia、A. Sen、S. Barik和K. Paul，算子矩阵的Berezin数与Berezin范数不等式，《线性与多重线性代数》72 (2024)，第16期，2749–2768。15. M. L. Buzano，Cauchy-Schwarz不等式的推广，Rend. Sem. Mat. Univ. e Politec. Torino 31 (1971/73)，405–409 (1974)。16. B. J. Carswell、B. D. MacCluer和A. Schuster，Fock空间上的复合算子，《塞格德数学科学学报》69 (2003)，第3-4期，871–887。17. C. C. Cowen和B. D. MacCluer，解析函数空间上的复合算子，《高等数学研究》，CRC出版社，佛罗里达州博卡拉顿，1995。18. C. C. Cowen和C. Felder，Berezin值域的凸性，《线性代数及其应用》647 (2022)，47–63。

19. M. Garayev、M. Bakherad和R. Tapdigoglu，加权Berezin数与Davis-Wielandt Berezin数，《Oper. Matrices》17 (2023)，第2期，469-484。20. K. Gustafson，线性算子的Toeplitz-Hausdorff定理，《Proc. Amer. Math. Soc.》25 (1970)，203–204。21. M. T. Karaev，算子理论诸问题中的再生核与Berezin符号方法，《Complex Anal. Oper. Theory》7 (2013)，第4期，983–1018。22. T. Kato，关于线性算子若干不等式的注记，《Math. Ann.》125 (1952)，208-212。23. F. Kittaneh，关于希尔伯特空间算子若干不等式的注记，《Publ. Res. Inst. Math. Sci.》24 (1988)，第2期，283-293。24. S. K. Maiti、S. Sahoo和G. Chakraborty，$\mathcal{H}_\gamma(\mathbb{D})$上算子Berezin值域的凸性，(2025)，arXiv:2505.24495v1 [math.FA]。25. R. K. Nayak和P. Bhunia，再生核希尔伯特空间算子空间上的一种新范数与Berezin数不等式，《Complex Anal. Oper. Theory》19 (2025)，第5期，论文号83，15页。26. V. I. Paulsen和M. Raghupathi，再生核希尔伯特空间理论导论，《Cambridge Studies in Advanced Mathematics》，第152卷，剑桥大学出版社，剑桥，2016。27. J. Pe˘cari´c、T. Furuta、J. Mi´ci´c Hot和Y. Seo，算子不等式中的Mond-Pe˘cari´c方法，第1卷，ELEMENT，萨格勒布，2005，希尔伯特空间上有界自伴算子的不等式。28. Y. Ren、M. A. Ighachane和P. Bhunia，广义混合Schwarz不等式及其在数值半径中的应用，《J. Pseudo-Differ. Oper. Appl.》16 (2025)，第4期，论文号90，20页。29. A. Sen、S. Barik和K. Paul，关于加权Bergman空间上Toeplitz算子与加权复合算子的Berezin值域。《Complex Anal. Oper. Theory》19，223 (2025)。30. B. Simon，迹理想及其应用，《London Mathematical Society Lecture Note Series》，第35卷，剑桥大学出版社，剑桥-纽约，1979。31. A. Taghavi、T. A. Roushan和V. Darvish，希尔伯特空间算子Berezin数的若干上界，《Filomat》33 (2019)，第14期，4353–4360。32. M. P. Vasi´c和D. J. Ke˘cki´c，关于复数的若干不等式，《Math. Balkanica》1 (1971)，282–286。33. A. Zamani、S. Sahoo、R. Tapdigoglu和M. Garaev，2×2 算子矩阵的 $\mathbb{A}$-Berezin数不等式，《Bull. Malays. Math. Sci. Soc.》47 (2024)，第4期，论文号114，20页。P. Hiran Das, Department of Mathematics Cochin University of Science And Technology Ernakulam Kerala - 682022 India.

, , ,*Email address*: hirandas939@gmail.com, hirandas073@cusat.ac.in

Athul Augustine Department of Mathematics Cochin University of Science And Technology Ernakulam Kerala - 682022 India.

, , , ,*Email address*: athulaugus@gmail.com, athulaugus@cusat.ac.inPintu Bhunia, Department of Mathematics, SRM University AP, Amaravati 522240, Andhra Pradesh , India.*Email address*: pintubhunia5206@gmail.comP. Shankar, Department of Mathematics Cochin University of Science And Technology Ernakulam Kerala - 682022 India.

, , ,*Email address*: shankarsupy@gmail.com, shankarsupy@cusat.ac.in