arXiv:2603.08186v1 [math.FA] 9 Mar 2026

某些Ahlfors 正则条件下度量测度框架中粗糙算子的逐点估计

Diego Chamorro*、Anca-Nicoleta Marcoci†、Liviu-Gabriel Marcoci‡。

2026年3月10日

摘要

我们在配备Ahlfors正则测度的度量测度空间中，为一类粗糙算子建立了一个新的逐点估计。该逐点不等式可分为两步：第一步依赖于一个次表示公式，其中涉及修正的 Riesz 势以及所考虑函数的上梯度；第二步则借助极大函数与 Morrey 范数给出 Riesz 势的逐点控制。我们还研究了可由该逐点估计推出的一族函数不等式。

关键词：Riesz 算子；奇异积分算子；逐点估计。2020年数学主题分类 主要：42B20；次要：42B25

1 引言

本文的主要目的是研究在度量测度空间（X， d， μ）这一一般框架中所定义的粗糙算子的若干逐点估计。对此设定下算子有界性的分析已开展多年，通常框架 $\mathbb{R}^n$ （赋予其自然距离与测度）中可用的许多经典工具与技巧已被推广或改写，以适应这一更一般的结构。例如，参见 [13], [15], [26], [31], [35], [38] 及其中的参考文献。

自Coifman与Weiss [4], 的工作以来，已知齐型空间提供了一个一般框架，欧几里得空间上调和分析的若干结果可在其中加以推广。该理论的主要要素之一与满足倍增性质的博雷尔测度 μ有关，即存在一个正常数 C ，使得

$$\mu(B(x,2r)) \leq C\mu(B(x,r)), \tag{1.1}$$

对每个以 x 为中心、半径为 r的球 $B(x,r)$，文献 [31] 通过用条件替换倍增条件 (1.1)，提出了非齐型空间上 Calder´on-Zygmund 算子的一套理论：

$$\mu(B(x,r)) \leq Cr^n, \tag{1.2}$$

*埃夫里数学´与建模´实验室（LaMME）- UMR 8071。埃夫里瓦勒德埃松大学´，法国大道23号，91037 Evry Cedex，法国。电子邮箱： *diego.chamorro@univ-evry.fr*

†数学与计算机科学系。土木工程技术大学，罗马尼亚布加勒斯特市第二区拉库尔泰伊大道124号。电子邮件：*anca.marcoci@utcb.ro*

‡数学与计算机科学系。土木工程技术大学，罗马尼亚布加勒斯特市第二区拉库尔泰伊大道124号。电子邮件：*liviu.marcoci@utcb.ro*

其中 n 是一个固定的正数，常数 C 与可分度量空间中的 x 和 r 无关。

我们指出，倍增性质与 Poincar´e-Sobolev 不等式有着深刻的联系（见 [20], [21], [22], [27] 和 [28]），所有这些工具为分析一些超出以往研究通常框架的通用算子的性质提供了一个有趣的框架。

受这些推广的启发，本文将研究某类算子与某些修正的类 Riesz 势之间的若干逐点估计。更具体地说，我们将考虑以下框架：

- 空间的性质。设 (X, d, μ) 为一个度量测度空间，并记 $B(x,r)$ 为由 $B(x,r) = \{y \in X$ 给出的开球： $d(x,y) < r\}$。假设测度 μ 是度量空间 X 上的 Borel 测度，并且我们始终假设，对于所有 $x \in X$ 和所有 $0 < r < +\infty$，球面 $S(x,r) = \{y \in X :\ d(x,y) = r\}$ 的测度均为零。

- 测度的性质。除了测度 μ的一般性质外，我们在此考虑一种非负、无原子的测度 μ ，它满足上下Ahlfors条件：

$$\mathfrak{c}_1 r^\nu \le \mu(B(x,r)) \le \mathfrak{c}_2 r^\nu, \tag{1.3}$$

对所有 $x \in X$ 和 $0 < r < +\infty$，存在某个幂指标 $0 < \nu < +\infty$ 及一些正的常数 $0 < \mathfrak{c}_1 \le \mathfrak{c}_2 < +\infty$。这种类型的测度 μ 在 [1], [17], [10]中称为Ahlfors $\nu-$正则测度。

注1. 在这一上下Ahlfors型条件（1.3）下，我们可以得到测度 μ 是倍增的，因为对所有 $x \in X$ 及所有 $0 < r < +\infty$，都有如下估计：

$$\mu(B(x,2r)) \le \mathfrak{c}_2 (2r)^\nu = \mathfrak{c}_2 \tfrac{2^\nu}{\mathfrak{c}_1}\ \mathfrak{c}_1 r^\nu \le \mathfrak{c}_2 \tfrac{2^\nu}{\mathfrak{c}_1}\ \mu(B(x,r)).$$

反之则不成立。例如，一个具有倍增测度但不满足Ahlfors正则条件的空间是带权的 $\mathbb{R}^n$ ，其中 $d\mu = |x|^\alpha dx$，且 $\alpha > -n$ （详见 *[3,* 例3.5，第 *67]* 页）。

注意，在特殊情形下，当 $X = \mathbb{R}^n$ 和 d 是通常的欧几里得距离时，我们很容易看出，Lebesgue测度满足条件 (1.3)，其中 $\nu = n$，因为有 $|B(x,r)| = v_n r^n$ ，其中 v_n 是 n维单位球的体积。

现在，我们可以按通常方式定义 Lebesgue空间 $L^p(X)$；对于 $1 \le p \le +\infty$ ，它是满足以下条件的可测函数 $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ 的集合：

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty,$$

在 $p = +\infty$ 时作通常的相应修改。回顾一下，若 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ 满足 $1 \le p \le +\infty$，且若 f、g： $X \longrightarrow \mathbb{R}$ 是两个可测函数，满足 $f \in L^p(X)$ 和 $g \in L^{p'}(X)$，则有经典的 H¨older 不等式： $\int_X |f(x)g(x)|d\mu(x) \le \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$。我们还回顾一下，局部可积函数集合 $L^1_{loc}(X)$ 由以下条件给出

$$\|f\|_{L^1(A)} = \int_A |f(x)| d\mu(x) < +\infty, \quad \text{for all compact set } A.$$

我们将用 f_E 表示如下定义的积分平均

$$f_E = \frac{1}{\mu(E)} \int_E f(x) d\mu(x),$$

其中 $E \subset X$ 是一个具有正测度 $0 < \mu(E) < +\infty$的 μ-可测集。

• 上梯度。在此度量框架中，函数梯度的一种最自然的推广在 [20] 中被引入，作为研究拟共形映射的工具。设$f: \ X \longrightarrow \mathbb{R}$ 为一个 $L^1_{loc}(X)$函数， f 的上梯度是函数 $g: \ X \longrightarrow [0, +\infty]$, 使得我们有

$$|f(x) - f(y)| \leq \int_{\gamma_{x,y}} g ds, \tag{1.4}$$

对所有 x、 $y \in X$ 以及所有可求长曲线$\gamma_{x, \ y}$ （连接 x 与 y）成立。关于上梯度的更多细节与性质，参见 [21] 和 [22] 。

• Poincar´e-Sobolev不等式。称度量测度空间(X, d, μ)支撑一个带 $1 \leq \mathfrak{s} < q < +\infty$的（弱）$(\mathfrak{s}, q)$-Poincar´e不等式，如果存在某些常数$1 < C < +\infty$ 和 $1 \leq \sigma < +\infty$ ，使得我们有如下估计

$$\left(\frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(x) - f_B|^q d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} \leq Cr \left(\frac{1}{\mu(B(x,\sigma r))} \int_{B(x,\sigma r)} g(x)^{\mathfrak{s}} d\mu(x) \right)^{\frac{1}{\mathfrak{s}}}, \tag{1.5}$$

每当 $B(x, r)$ 是半径为 $0 < r < +\infty$ 的球时， $f \in L^1_{loc}(X)$ 和 $g: \ X \longrightarrow [0, +\infty]$ 就是 f 的上梯度，其含义见上文表达式 (1.4)。关于支持庞加莱 - ´e- 索博列夫不等式的空间的定义，见 Heinonen 和 Koskela 的文献 [20]。更多详情也可参见书籍 [22] 。

注 2. 加倍度量测度空间与庞加莱- ´e-索博列夫不等式 (1.5) 之间存在非常深刻且紧密的联系。关于这一主题的更多详情，请参见 *[2], [16], [27]* 和 *[28]*。

• 核。我们在此要研究的算子的性质取决于其核的性质。我们将考虑一个核 K: $X \times X \setminus \{x = y\} \longrightarrow \mathbb{R}$，它是一个可测函数，并且对于所有 x， $y \in X$ （其中 $x \neq y$），都有如下逐点估计

$$|K(x, y)| \leq \frac{C}{d(x, y)^{\nu}}, \tag{1.6}$$

其中 $\nu > 0$。我们还将假设，对于所有 $x \neq y$，极限

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\{\varepsilon < d(x,y)\}} K(x, y) d\mu(y),$$

对 μ-几乎处处的点 $x \in X$ 存在；最后，我们将假设满足以下伪径向零条件

$$\int_{\{a < d(x,y) < b\}} K(x, y) d\mu(y) = 0, \tag{1.7}$$

对所有 $0 < a < b < +\infty$ 以及所有 $x \in X$。特别需要注意的是，我们没有对核 $K(\cdot, \cdot)$施加任何正则性条件，而这里考虑的这类核并不

属于 [15], [31] 或 [38]中讨论的情形。事实上，这些文章假设核 K满足以下“正则性”条件:

$$|K(s,t)-K(s_0,t)|, |K(t,s)-K(t,s_0)| \leq C\frac{d(s,s_0)^\alpha}{d(t,s_0)^{\nu+\alpha}},$$

对于某些 $\alpha>0$，只要 $d(t,s_0) \geq 2d(s,s_0)$。相反，这里我们只对核作可积性条件假设。

• 算子 T_K和 T_K^*。现在，对于一个合适的函数 $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$，我们将通过以下表达式定义与满足前述条件 (1.6)-(1.7) 的核 K 相关联的算子 T_K:

$$T_K(f)(x)=\int_X K(x,y)f(y)d\mu(y). \tag{1.8}$$

与该算子相关联，我们考虑与 T_K相关联的极大奇异算子

$$T_K^*(f)(x)=\sup_{\epsilon>0}\left|\int_{\{\epsilon<d(x,y)\}} K(x,y)f(y)d\mu(y)\right|. \tag{1.9}$$

这里将由满足条件 (1.6)-(1.7) 的核 K 定义于 (1.8) 的算子 T_K 称为粗糙 Calder´on-Zygmund 算子。

• Riesz型算子。若 $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ 是局部可积函数，则对于参数 $0<\mathfrak{s}<\nu$，我们定义如下 Riesz 型算子 $\mathcal{R}_{\mathfrak{s},\ \mu}$:

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{s},\mu}(f)(x)=\int_X \frac{d(x,y)^{\mathfrak{s}}}{\mu(B(x,d(x,y)))}f(y)d\mu(y). \tag{1.10}$$

容易看出，若 $d\mu$ 是通常的 Lebesgue测度，且若 $d(x,y) = |x-y|$ 是 $\mathbb{R}^n$上的自然距离，则可得到经典Riesz位势（相差一些维数常数）: 事实上，若以 v_n 表示 n维单位球的体积，则有

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\mathfrak{s},\mu}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n}\frac{|x-y|^{\mathfrak{s}}}{\mu(B(x,|x-y|))}f(y)d\mu(y)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|x-y|^{\mathfrak{s}}}{|B(x,|x-y|)|}f(y)dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(y)}{v_n|x-y|^{n-\mathfrak{s}}}dy = c(n)I_{\mathfrak{s}}(f)(x).\end{aligned}$$

有了这些概念，我们现在将研究一些涉及式 (1.9) 中定义的粗糙极大算子 T_K^* 和式 (1.10) 中给出的 Riesz型算子 $\mathcal{R}_{\mathfrak{s},\mu}$ 的逐点不等式。

定理1（粗糙算子估计）。设 (X,d,μ) 是一个度量测度空间，赋有 Ahlfors 正则测度 μ ，该测度满足条件 (1.3) 中的下界和上界，具有某个幂次常数 $0<\nu<+\infty$ 和常数 $0<\mathfrak{c}_1\leq\mathfrak{c}_2<+\infty$。此外，假设度量测度空间 (X,d,μ) 支持弱 Poincar´e-Sobolev 不等式 (1.5)。

对于局部可积函数 $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$，若 $g\colon X \longrightarrow [0,+\infty]$ 表示其依照表达式 (1.4) 定义的上梯度（假设它是局部可积函数），且满足条件

$$2^{1-\nu}\left(\frac{\mathfrak{c}_2}{\mathfrak{c}_1}\right)<1, \tag{1.11}$$

那么，对于由满足条件 (1.6)-(1.7) 的核 $K(\cdot,\cdot)$ 所关联、定义于 (1.9) 中的算子 T_K^*，有如下逐点估计

$$T_K^*(f)(x) \leq C\mathcal{R}_{1,\mu}(g)(x), \tag{1.12}$$

其中 $\mathcal{R}_{1,\ \mu}$ 是上文表达式（1.10）中定义的 Riesz 型算子。

这里有几点值得说明。首先，我们注意到，上述估计（1.12）是我们先前工作 [6] 在度量测度框架下向非卷积型 Calder´on-Zygmund 算子的推广，其中测度满足 Ahlfors 正则性；据我们所知，这一结果对于这类"粗糙"算子是新的。其次要指出的是，正如前文所述，我们不对核 $K(\cdot,\cdot)$ 施加任何 Lipschitz-H¨older 正则性，而是要求其满足伪径向零条件（1.7）。这一条件让人联想到文献 [6], [23], [24] 或 [25], 中所研究的卷积型算子情形，其中所考虑的算子具有如下形式

$$T_\Omega(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} f(x-y)dy,$$

在这种情况下，零条件（1.7）直接源于函数 $\Omega: \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ 满足 $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega\ d\sigma = 0$这一事实。

现在注意到，条件（1.11）本质上是技术性的，它对测度 μ 施加了一种特殊的行为要求；我们尚不清楚能否去掉这一条件。最后，我们指出，将估计（1.12）推广到仅具备上 Ahlfors 条件 $\mu(B(x,r)) \leq \mathfrak{c}_2 r^\nu$的度量测度情形，是一个有趣的开放问题。这一研究计划可能需要采用不同的方法，而这超出了本文的讨论范围。

估计（1.12）可以转化为一个更有用的逐点不等式，为此我们需要再引入两个对象。

- 极大函数。对于局部可积函数 $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$，我们用如下公式定义极大函数 $\mathscr{M}_\mu$

$$\mathscr{M}_\mu(f)(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y)|d\mu(y), \tag{1.13}$$

  其中上确界取遍所有包含点 x的开球 B 。
- Morrey空间。对于 $1 \leq p \leq q < +\infty$，Morrey空间 $\mathcal{M}^{p}{}_{,\mu}{}^{q}(X)$定义为所有可测函数 $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ 的集合，使得如下条件

$$\|f\|_{\mathcal{M}_\mu^{p,q}} = \sup_{x\in X,\, r>0} \left(\frac{1}{\mu(B(x,r))^{1-\frac{p}{q}}} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty, \tag{1.14}$$

  成立。特别地，注意若 $p = q$，则我们回到通常的勒贝格空间，即有 $L^q(X) = \mathcal{M}^{q}{}_{,\mu}{}^{q}(X)$。

我们的下一个结果明确说明如何用极大函数和Morrey空间的范数来控制Riesz型算子$\mathcal{R}_{\mathfrak{s},\mu}$。

定理2（Morrey型逐点不等式）。设(X,d,μ)为一个度量测度空间，赋有测度 μ，该测度满足幂指标为 $0 < \nu < +\infty$ 、常数为 $0 < \mathfrak{c}_1 \leq \mathfrak{c}_2 < +\infty$的上下Ahlfors条件(1.3)。

设 $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ 为一个可测函数，属于上文表达式(1.14)中定义的Morrey空间 $\mathcal{M}^{p,\ _{\mu}}{}^{q}(X)$，其中 $1 < p \leq q < +\infty$。

若 $0 < \mathfrak{s} < \nu$是满足 $\mathfrak{s} < \frac{\nu}{q}$的参数，则由表达式 (1.10) 定义的 Riesz型算子 $\mathcal{R}_{\mathfrak{s},\mu}(f)$ 可按如下方式进行逐点控制：

$$|\mathcal{R}_{\mathfrak{s},\mu}(f)(x)| \leq C\mathscr{M}_{\mu}(f)(x)^{1-\frac{q\mathfrak{s}}{\nu}}\|f\|^{\frac{q\mathfrak{s}}{\nu}}_{\mathcal{M}^{p,q}_{\mu}}, \tag{1.15}$$

其中 $C = C(\mathfrak{s}, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \nu, q)$。

我们首先指出，若 $X = \mathbb{R}^n$ （具有其自然结构），且 $d\mu = dx$ 是通常的 Lebesgue测度，那么我们便可轻易得到一些已有结果（例如参见 [6]）。接下来注意到，若 $p = q > 1$，我们便得到估计 $|\mathcal{R}_{\mathfrak{s},\mu}(f)(x)| \leq C\mathscr{M}_{\mu}(f)(x)^{1-\frac{q\mathfrak{s}}{\nu}}\|f\|^{\frac{q\mathfrak{s}}{\nu}}_{L^q(\mu)}$，这是经典 Hedberg不等式 [18] 在测度满足 Ahlfors条件 (1.3) 意义下正则时向度量测度空间的推广。类似的结果在稍有不同的框架下也见 [36, 定理2.3] 。还要提及的是，文献 [15], [35], 和 [36] 或 [37] 研究了若干非常相似算子的有界性。

前一个结果本身虽有趣，但它只是一个借口，目的是借助上梯度 g （属于 f ）的极大函数以及上梯度 g 的 Morrey 范数，对算子 T^*_K（作用于某个适当的函数 f）进行逐点控制。更准确地说，我们有：

定理3（一个新的逐点不等式）。设 (X, d, μ) 是一个度量测度空间，配备满足 Ahlfors条件 (1.3) 的测度 μ，其幂指标为 $0 < \nu < +\infty$，常数为 $0 < \mathfrak{c}_1 \leq \mathfrak{c}_2 < +\infty$ ，并且该空间支持弱 Poincar´e-Sobolev 不等式 (1.5)。假设 $2^{1-\nu}\left(\frac{\mathfrak{c}_2}{\mathfrak{c}_1}\right) < 1$，且设 $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ 是一个可测函数。若 $g\colon X \longrightarrow [0, +\infty]$是 f 的一个上梯度，且 g 属于由上文表达式 (1.14) 定义的 Morrey空间 $\mathcal{M}^{p,\ _{\mu}}{}^{q}(X)$，其中参数 $1 < p \leq q < +\infty$ 满足 $\frac{q}{\nu} < 1$，则有如下逐点估计

$$T^*_K(f)(x) \leq C\mathscr{M}_{\mu}(g)(x)^{1-\frac{q}{\nu}}\|g\|^{\frac{q}{\nu}}_{\mathcal{M}^{p,q}_{\mu}}. \tag{1.16}$$

证明。该结果是前两个定理的推论。事实上，由不等式 (1.12)，我们可以写出 $T^*_K(f)(x) \leq C\mathcal{R}_{1,\ _{\mu}}(g)\,(x)$；接着，由于根据估计 (1.15)，我们有

$$\mathcal{R}_{1,\mu}\,(g)\,(x) \leq C\mathscr{M}_{\mu}(g)(x)^{1-\frac{q}{\nu}}\|g\|^{\frac{q}{\nu}}_{\mathcal{M}^{p,q}_{\mu}},$$

我们很容易得到逐点估计

$$T^*_K(f)(x) \leq C\mathscr{M}_{\mu}(g)(x)^{1-\frac{q}{\nu}}\|g\|^{\frac{q}{\nu}}_{\mathcal{M}^{p,q}_{\mu}},$$

由此便完成了定理的证明。 ■

正如我们所见，逐点不等式 (1.16) 是定理 1 和定理 2 的直接推论。这种控制（据我们所知，在这一框架下完全是新的）将引出一些有趣的函数不等式，我们将在下文第4节中介绍这些不等式。

本文的安排如下。第2节给出定理 1 的证明，第3节证明定理2，最后，第4节将介绍先前逐点估计 (1.16) 的一些应用。本文中出现的常数，如 C，可能会因出现位置不同而有所变化。

2 定理1的证明

我们先回顾上文表达式 (1.9) 中给出的算子 T_K^* 的定义：于是有

$$T_K^*(f)(x) = \sup_{\epsilon>0} \left| \int_{\{\epsilon<d(x,y)\}} K(x,y) f(y) d\mu(y) \right|,$$

并且对于某个 $\epsilon > 0$，我们现在考虑算子

$$T_K^\epsilon(f)(x) = \int_{\{\epsilon<d(x,y)\}} K(x,y) f(y) d\mu(y).$$

我们回顾，我们有 $T_K^*(f)(x) = \sup |T_K^\epsilon(f)(x)|$，并且 $|T_K(f)(x)| \leq T_K^*(f)(\epsilon>0 \qquad x)$.

现在，对于函数 $f \in L^1_{loc}(X)$以及某个使得 $2^{k_0-2} < \epsilon \leq 2^{k_0-1}$的 $k_0 \in \mathbb{Z}$，我们写

$$T_K^\epsilon(f)(x) = \int_{\{\epsilon<d(x,y)\leq 2^{k_0-1}\}} K(x,y) f(y) d\mu(y) + \sum_{k\geq k_0} \int_{\{2^{k-1}<d(x,y)\leq 2^k\}} K(x,y) f(y) d\mu(y).$$

如果我们假设伪径向零条件(1.7)，则可以在前面的表达式中引入一些稍后定义的常数，从而得到

$$T_K^\epsilon(f)(x) = \int_{\{\epsilon<d(x,y)\leq 2^{k_0-1}\}} K(x,y)(f(y)-c_{k_0}) d\mu(y) + \sum_{k\geq k_0} \int_{\{2^{k-1}<d(x,y)\leq 2^k\}} K(x,y)(f(y)-c_k) d\mu(y),$$

由此我们推出不等式

$$|T_K^\epsilon(f)(x)| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\{2^{k-1}<d(x,y)\leq 2^k\}} |K(x,y)(f(y)-c_k)| d\mu(y).$$

现在，由于根据假设 (1.6)，对于所有 $x \neq y$，我们有控制 $|K(x,y)| \leq \frac{C}{d\ x\ (,y)^\nu}$（回想一下，我们是在集合 $\{2^{k-1} < d(x,y) \leq 2^k\}$ 上积分），因此可以写成

$$\begin{aligned} |T_K^\epsilon(f)(x)| &\leq C \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\{2^{k-1}<d(x,y)\leq 2^k\}} \frac{1}{d(x,y)^\nu} |(f(y)-c_k)| d\mu(y) \\ &\leq C \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\{2^{k-1}<d(x,y)\leq 2^k\}} \frac{1}{(2^{k-1})^\nu} |(f(y)-c_k)| d\mu(y), \end{aligned}$$

我们将其改写如下

$$|T_K^\epsilon(f)(x)| \leq C 2^\nu \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\{d(x,y)\leq 2^k\}} \frac{1}{2^{k\nu}} |(f(y)-c_k)| d\mu(y).$$

现在，若我们设定两个参数 $1 < \rho$、$\rho' < +\infty$，其中 ρ' 满足 $\rho' = \frac{\rho}{\rho-1} < \nu$，那么由带有 $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = 1$ 的 H¨older 不等式，可得

$$|T_K^\epsilon(f)(x)| \leq C 2^\nu \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2^{k\nu}} \left(\mu(B(x,2^k))\right)^{\frac{1}{\rho}} \left(\int_{\{d(x,y)\leq 2^k\}} |f(y)-c_k|^{\rho'} d\mu(y) \right)^{\frac{1}{\rho'}}.$$

由于测度 μ 是上阿尔福斯正则的，我们有 $\mu(B(x,2^k)) \le \mathfrak{c}_2 2^{k\nu}$，从而得到

$$\begin{aligned} |T_K^\epsilon(f)(x)| &\le C2^\nu \mathfrak{c}_2^{\frac{1}{\rho}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2^{k\nu}} 2^{k\frac{\nu}{\rho}} \left(\int_{\{d(x,y)\le 2^k\}} |f(y)-c_k|^{\rho'} d\mu(y) \right)^{\frac{1}{\rho'}} \\ &\le C2^\nu \mathfrak{c}_2^{\frac{1}{\rho}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2^{k\nu(1-\frac{1}{\rho})}} \left(\int_{\{d(x,y)\le 2^k\}} |f(y)-c_k|^{\rho'} d\mu(y) \right)^{\frac{1}{\rho'}}, \end{aligned}$$

并且我们有（由于 $1-\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\rho'}$）：

$$\begin{aligned} |T_K^\epsilon(f)(x)| &\le C2^\nu \mathfrak{c}_2^{\frac{1}{\rho}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2^{k\frac{\nu}{\rho'}}} \left(\int_{\{d(x,y)\le 2^k\}} |f(y)-c_k|^{\rho'} d\mu(y) \right)^{\frac{1}{\rho'}} \\ &\le C2^\nu \mathfrak{c}_2^{\frac{1}{\rho}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2^{k\nu}} \int_{\{d(x,y)\le 2^k\}} |f(y)-c_k|^{\rho'} d\mu(y) \right)^{\frac{1}{\rho'}}, \end{aligned}$$

再次利用测度 μ 是上阿尔福斯正则这一事实，我们有 $\frac{1}{2^{k\nu}} \le \mathfrak{c}_2 \, {}_\mu B^{\,1}{}_x((,2^k))$，从而得到

$$|T_K^\epsilon(f)(x)| \le C2^\nu \mathfrak{c}_2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{\mu(B(x,2^k))} \int_{B(x,2^k)} |f(y)-c_k|^{\rho'} d\mu(y) \right)^{\frac{1}{\rho'}}.$$

我们固定常数 $c_k = f_{B_k} = {}_\mu B^{\,1}{}_x((,2^k)) \int_{B^{(x,2^k)}} f(y)d\mu(y)$，因此可以写成

$$T_K^\epsilon(f)(x) \le C \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{\mu(B(x,2^k))} \int_{B(x,2^k)} |f(y)-f_{B_k}|^{\rho'} d\mu(y) \right)^{\frac{1}{\rho'}}.$$

现在我们应用 (1.5) 中给出的 Poincar´e-Sobolev 不等式，以得到（取值为$1=\mathfrak{s}<\rho'<\nu$）：

$$\begin{aligned} |T_K^\epsilon(f)(x)| &\le C2^\nu \mathfrak{c}_2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{\mu(B(x,2^k))} \int_{B(x,2^k)} |f(y)-f_{B_k}|^{\rho'} d\mu(y) \right)^{\frac{1}{\rho'}} \\ &\le C2^\nu \mathfrak{c}_2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^k \frac{1}{\mu(B(x,\sigma 2^k))} \int_{B(x,\sigma 2^k)} g(y)d\mu(y), \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中 g 是 f 在 (1.4) 意义下的上梯度。现在我们研究前一个公式中的和:

$$\mathscr{S} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^k \frac{1}{\mu(B(x,\sigma 2^k))} \int_{B(x,\sigma 2^k)} g(y)d\mu(y),$$

（注意，因此我们有 $|T_K^\epsilon(f)(x)| \le C\mathscr{S}$），将其改写如下

$$\begin{aligned} \mathscr{S} &\le \underbrace{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{2^k}{\mu(B(x,\sigma 2^k))} \int_{\{\sigma 2^{k-1}<d(x,y)\le \sigma 2^k\}} g(y)d\mu(y)}_{(A)} \\ &\quad + \underbrace{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{2^k}{\mu(B(x,\sigma 2^k))} \int_{\{d(x,y)\le \sigma 2^{k-1}\}} g(y)d\mu(y)}_{(B)}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

我们将分别估计前面的各项。

- 对于上面的项（A），我们首先考虑以下量

$$\frac{2^k}{\mu(B(x,\sigma 2^k))}\int_{\{\sigma 2^{k-1}<d(x,y)\leq\sigma 2^k\}} g(y)d\mu(y),$$

但由于我们是在集合 $\sigma 2^{k-1}<d(x,y)\leq\sigma 2^k$上进行讨论，因此很容易推出控制$\sigma 2^k\leq Cd(x,y)$，并可写为

$$\begin{aligned}&\frac{2^k}{\mu(B(x,\sigma 2^k))}\int_{\{\sigma 2^{k-1}<d(x,y)\leq\sigma 2^k\}} g(y)d\mu(y)\\ \leq\ &\frac{C}{\sigma\mu(B(x,\sigma 2^k))}\int_{\{\sigma 2^{k-1}<d(x,y)\leq\sigma 2^k\}} d(x,y)g(y)d\mu(y).\end{aligned}$$

由于在集合 $\{\sigma 2^{k-1}<d(x,y)\leq\sigma 2^k\}$ 上有 $d(x,y)\leq\sigma 2^k$，因此我们得到$\mu\ B\ \frac{1}{x}\ (\ (,\ \frac{}{\sigma 2^k)\ )}\leq\mu\ B\ \frac{1}{x\ d}\ (\ (,\ \frac{}{(x,\ y)\ )\ )}$，并可写为

$$\begin{aligned}&\frac{C}{\mu(B(x,\sigma 2^k))}\int_{\{\sigma 2^{k-1}<d(x,y)\leq\sigma 2^k\}} d(x,y)g(y)d\mu(y)\\ \leq\ &C\int_{\{\sigma 2^{k-1}<d(x,y)\leq\sigma 2^k\}}\frac{d(x,y)}{\mu(B(x,d(x,y)))}g(y)d\mu(y).\end{aligned}$$

利用这一估计，我们得到

$$\begin{aligned}(A)\ &=\ \sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{2^k}{\mu(B(x,\sigma 2^k))}\int_{\{\sigma 2^{k-1}<d(x,y)\leq\sigma 2^k\}} g(y)d\mu(y)\\ &\leq\ \frac{C}{\sigma}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{\{\sigma 2^{k-1}<d(x,y)\leq\sigma 2^k\}}\frac{d(x,y)}{\mu(B(x,d(x,y)))}g(y)d\mu(y)\\ &\leq\ \frac{C}{\sigma}\int_X\frac{d(x,y)}{\mu(B(x,d(x,y)))}g(y)d\mu(y).\end{aligned}$$

现在，回顾上文（1.10）中给出的算子 $\mathcal{R}_{1,\ \mu}$ 的定义，最终得到估计

$$(A)\leq\frac{C}{\sigma}\mathcal{R}_{1,\mu}\left(g\right)(x).$$

- 对于（2.2）中的项（B），我们考虑以下量:

$$(B)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{2^k}{\mu(B(x,\sigma 2^k))}\int_{\{d(x,y)\leq\sigma 2^{k-1}\}} g(y)d\mu(y).$$

由于测度的上下Ahlfors正则性 μ 由条件（1.3）给出，我们有

$$\mu(B(x,\sigma 2^{k-1}))\leq\mathfrak{c}_2 2^{-\nu}(\sigma 2^k)^\nu\leq\frac{\mathfrak{c}_2}{\mathfrak{c}_1}2^{-\nu}\ \mathfrak{c}_1(\sigma 2^k)^\nu\leq\frac{\mathfrak{c}_2}{\mathfrak{c}_1}2^{-\nu}\mu(B(x,\sigma 2^k)),$$

因此我们可以写出

$$\frac{1}{\mu(B(x,\sigma 2^k))}\leq 2^{-\nu}\frac{\mathfrak{c}_2}{\mathfrak{c}_1}\frac{1}{\mu(B(x,\sigma 2^{k-1}))},$$

并且我们有

$$\begin{aligned}(B) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{2^k}{\mu(B(x,\sigma 2^k))} \int_{\{d(x,y)\le \sigma 2^{k-1}\}} g(y)d\mu(y) \\ &\le \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^k\ 2^{-\nu}\frac{\mathfrak{c}_2}{\mathfrak{c}_1}\ \frac{1}{\mu(B(x,\sigma 2^{k-1})} \int_{\{d(x,y)\le \sigma 2^{k-1}\}} g(y)d\mu(y).\end{aligned}$$

现在我们得到估计

$$(B) \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{1-\nu}\left(\frac{\mathfrak{c}_2}{\mathfrak{c}_1}\right)\ 2^{(k-1)}\frac{1}{\mu(B(x,\sigma 2^{k-1}))} \int_{\{d(x,y)\le \sigma 2^{k-1}\}} g(y)d\mu(y),$$

将其改写为

$$(B) \le 2^{1-\nu}\left(\frac{\mathfrak{c}_2}{\mathfrak{c}_1}\right)\sum_{k\in\mathbb{Z}}\ 2^{(k-1)}\frac{1}{\mu(B(x,\sigma 2^{k-1}))} \int_{\{d(x,y)\le \sigma 2^{k-1}\}} g(y)d\mu(y),$$

因此我们有

$$(B) \le 2^{1-\nu}\left(\frac{\mathfrak{c}_2}{\mathfrak{c}_1}\right)\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^k\frac{1}{\mu(B(x,\sigma 2^k))} \int_{B(x,\sigma 2^k)} g(y)d\mu(y).$$

利用对项 (A) 和 (B) 的这些估计，回到 (2.2)，我们可以写成 e

$$\begin{aligned}\mathscr{S} &\le \frac{C}{\sigma}\mathcal{R}_{1,\mu}\left(g(x)\right) + 2^{1-\nu}\left(\frac{\mathfrak{c}_2}{\mathfrak{c}_1}\right)\sum_{k\in\mathbb{Z}}\ 2^k\frac{1}{\mu(B(x,\sigma 2^k))} \int_{B(x,\sigma 2^k)} g(y)d\mu(y) \\ &\le \frac{C}{\sigma}\mathcal{R}_{1,\mu}\left(g(x)\right) + 2^{1-\nu}\left(\frac{\mathfrak{c}_2}{\mathfrak{c}_1}\right)\mathscr{S},\end{aligned}$$

但由于根据假设 (1.11) 我们有约束 $2^{1-\nu}\left(\frac{\mathfrak{c}_2}{\mathfrak{c}_1}\right) < 1$，于是得到

$$\mathscr{S}\left(1 - 2^{1-\nu}\left(\frac{\mathfrak{c}_2}{\mathfrak{c}_1}\right)\right) \le \frac{C}{\sigma}\mathcal{R}_{1,\mu}\left(g\right)(x),$$

将其改写为

$$\mathscr{S} \le C'\mathcal{R}_{1,\mu}\left(g\right)(x).$$

因此，回到 (2.1)，我们得到

$$|T_K^{\epsilon}(f)(x)| \le C\mathcal{R}_{1,\mu}\left(g\right)(x),$$

由此估计（它对 $\epsilon > 0$ 一致），我们便可推出所需的控制

$$|T_K^{*}(f)(x)| \le C\mathcal{R}_{1,\mu}\left(g\right)(x),$$

至此，定理 1 的证明结束。 ■

3 定理2的证明

我们的出发点是上文公式 (1.10) 中给出的算子 $\mathcal{R}_{\mathfrak{s},\ \mu}$，事实上，我们有：

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{s},\mu}(f)(x)=\int_X \frac{d(x,y)^{\mathfrak{s}}}{\mu(B(x,d(x,y)))}f(y)d\mu(y).$$

考虑正参数 $\mathcal{K}>0$，稍后将对其取定，我们可以写出

$$\begin{aligned}|\mathcal{R}_{\mathfrak{s},\mu}(f)(x)| &\leq \int_{\{d(x,y)<\mathcal{K}\}}\frac{d(x,y)^{\mathfrak{s}}}{\mu(B(x,d(x,y)))}|f(y)|d\mu(y)+\int_{\{d(x,y)\geq\mathcal{K}\}}\frac{d(x,y)^{\mathfrak{s}}}{\mu(B(x,d(x,y)))}|f(y)|d\mu(y)\\ &= \mathcal{R}_1+\mathcal{R}_2. \end{aligned}\tag{3.1}$$

上面的量 $\mathcal{R}_1$ 按如下方式处理:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_1 &= \int_{\{d(x,y)<\mathcal{K}\}}\frac{d(x,y)^{\mathfrak{s}}}{\mu(B(x,d(x,y)))}|f(y)|d\mu(y)\\ &= \sum_{j=0}^{+\infty}\int_{\{\mathcal{K}2^{-(j+1)}<d(x,y)<\mathcal{K}2^{-j}\}}\left(\frac{d(x,y)^{\mathfrak{s}}}{\mu(B(x,d(x,y)))}\right)|f(y)|d\mu(y).\end{aligned}$$

注意，在集合 $\{\mathcal{K}2^{-(j+1)}<d(x,y)<\mathcal{K}2^{-j}\}$ 上，我们有如下控制

$$d(x,y)^{\mathfrak{s}}\leq\mathcal{K}^{\mathfrak{s}}2^{-\mathfrak{s}j},$$

并且由于集合包含关系 $B(x,\mathcal{K}2^{-(j+1)})\subset B(x,d(x,y))$ 在 $\mathcal{K}2^{-(j+1)}<d(x,y)$ 时成立，因此我们可以写出

$$\mu(B(x,\mathcal{K}2^{-(j+1)}))\leq\mu(B(x,d(x,y))),$$

利用下侧 Ahlfors 条件 (1.3)，我们得到

$$\mathfrak{c}_1(\mathcal{K}2^{-(j+1)})^{\nu}\leq\mu(B(x,\mathcal{K}2^{-(j+1)}))\leq\mu(B(x,d(x,y))),$$

由此我们推导出不等式

$$\frac{d(x,y)^{\mathfrak{s}}}{\mu(B(x,d(x,y)))}\leq\frac{\mathcal{K}^{\mathfrak{s}}2^{-\mathfrak{s}j}}{\mu(B(x,\mathcal{K}2^{-(j+1)}))}\leq\frac{\mathcal{K}^{\mathfrak{s}}2^{-\mathfrak{s}j}}{\mathfrak{c}_1(\mathcal{K}2^{-(j+1)})^{\nu}}=\frac{2^{\nu}}{\mathfrak{c}_1}\mathcal{K}^{\mathfrak{s}}2^{-\mathfrak{s}j}\frac{1}{(\mathcal{K}2^{-j})^{\nu}}.$$

现在注意到，由上Ahlfors条件 (1.3)，我们有估计 $^{1}{}_{(\mathcal{K}2^{-j})^{\nu}}\leq{}_{\mu\ B\ x}{}^{\mathfrak{c}_2}{}_{((,\mathcal{K}2^{-j}))}$，因此得到不等式

$$\frac{d(x,y)^{\mathfrak{s}}}{\mu(B(x,d(x,y)))}\leq\frac{2^{\nu}}{\mathfrak{c}_1}\mathcal{K}^{\mathfrak{s}}2^{-\mathfrak{s}j}\frac{\mathfrak{c}_2}{\mu(B(x,\mathcal{K}2^{-j}))}.$$

有了这一控制，我们便可以写出

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_1 &\leq \sum_{j=0}^{+\infty}\int_{\{\mathcal{K}2^{-(j+1)}<d(x,y)<\mathcal{K}2^{-j}\}}\left(\frac{2^{\nu}}{\mathfrak{c}_1}\mathcal{K}^{\mathfrak{s}}2^{-\mathfrak{s}j}\frac{\mathfrak{c}_2}{\mu(B(x,\mathcal{K}2^{-j}))}\right)|f(y)|d\mu(y)\\ &\leq \frac{2^{\nu}\mathfrak{c}_2}{\mathfrak{c}_1}\sum_{j=0}^{+\infty}\mathcal{K}^{\mathfrak{s}}2^{-\mathfrak{s}j}\frac{1}{\mu(B(x,\mathcal{K}2^{-j}))}\int_{B(x,\mathcal{K}2^{-j})}|f(y)|d\mu(y)\\ &\leq \frac{2^{\nu}\mathfrak{c}_2}{\mathfrak{c}_1}\sum_{j=0}^{+\infty}\mathcal{K}^{\mathfrak{s}}2^{-\mathfrak{s}j}\mathscr{M}_{\mu}(f)(x)=\frac{2^{\nu}\mathfrak{c}_2}{\mathfrak{c}_1}\mathcal{K}^{\mathfrak{s}}\mathscr{M}_{\mu}(f)(x)\sum_{j=0}^{+\infty}2^{-\mathfrak{s}j},\end{aligned}$$

其中，在最后一个估计中，我们使用了上文表达式 (1.13) 中给出的极大函数定义 $\mathscr{M}_\mu$ 。现在我们得到这一控制，由此可以轻松推导出 (3.1) 中第一个积分的以下估计：

$$\mathcal{R}_1 \leq C\mathcal{K}^{\mathfrak{s}}\mathscr{M}_\mu(f)(x), \tag{3.2}$$

其中 $C = C(\mathfrak{s}, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \nu)$。

现在，对于 (3.1) 中的量 $\mathcal{R}_2$ ，我们写作

$$\mathcal{R}_2 = \int_{\{d(x,y)\geq\mathcal{K}\}} \frac{d(x,y)^{\mathfrak{s}}}{\mu(B(x,d(x,y)))}|f(y)|d\mu(y) = \sum_{j=0}^{+\infty}\int_{\{\mathcal{K}2^j\leq d(x,y)\leq\mathcal{K}2^{j+1}\}} \frac{d(x,y)^{\mathfrak{s}}}{\mu(B(x,d(x,y)))}|f(y)|d\mu(y).$$

由于在集合 $\{\mathcal{K}2^j \leq d(x,y) \leq \mathcal{K}2^{j+1}\}$ 上，我们有控制 $d(x,y)^{\mathfrak{s}} \leq \mathcal{K}^{\mathfrak{s}}2^{(j+1)\mathfrak{s}}$，并且集合包含关系 $B(x,\mathcal{K}2^j) \subset B(x,d(x,y))$ 成立，因此得到 $\mu(B(x,\mathcal{K}2^j)) \leq \mu(B(x,d(x,y)))$，并且有

$$\frac{d(x,y)^{\mathfrak{s}}}{\mu(B(x,d(x,y)))} \leq \frac{\mathcal{K}^{\mathfrak{s}}2^{(j+1)\mathfrak{s}}}{\mu(B(x,\mathcal{K}2^j))},$$

因此我们可以写作

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_2 &\leq \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\mathcal{K}^{\mathfrak{s}}2^{(j+1)\mathfrak{s}}}{\mu(B(x,\mathcal{K}2^j))}\int_{\{\mathcal{K}2^j\leq d(x,y)\leq\mathcal{K}2^{j+1}\}}|f(y)|d\mu(y)\\ &\leq \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\mathcal{K}^{\mathfrak{s}}2^{(j+1)\mathfrak{s}}}{\mu(B(x,\mathcal{K}2^j))}\int_{\{d(x,y)\leq\mathcal{K}2^{j+1}\}}|f(y)|d\mu(y),\end{aligned}$$

这可以改写为如下形式

$$\mathcal{R}_2 \leq C\mathcal{K}^{\mathfrak{s}}\sum_{j=0}^{+\infty}2^{(j+1)\mathfrak{s}}\frac{1}{\mu(B(x,\mathcal{K}2^j))}\int_{B(x,\mathcal{K}2^{j+1})}|f(y)|d\mu(y).$$

现在，根据 H¨older 不等式，取 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ 和 $1<p<+\infty$，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_2 &\leq C\mathcal{K}^{\mathfrak{s}}\sum_{j=0}^{+\infty}2^{(j+1)\sigma}\frac{1}{\mu(B(x,\mathcal{K}2^j))}\left(\int_{B(x,\mathcal{K}2^{j+1})}|f(y)|^p d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{B(x,\mathcal{K}2^{j+1})}d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p'}}\\ &\leq C\mathcal{K}^{\mathfrak{s}}\sum_{j=0}^{+\infty}2^{(j+1)\mathfrak{s}}\frac{1}{\mu(B(x,\mathcal{K}2^j))}\left(\int_{B(x,\mathcal{K}2^{j+1})}|f(y)|^p d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}}\mu(B(x,\mathcal{K}2^{j+1}))^{\frac{1}{p'}}.\end{aligned}$$

现在，我们将前一个表达式改写如下（其中 $1<p\leq q<+\infty$）：

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_2 &\leq C\mathcal{K}^{\mathfrak{s}}\sum_{j=0}^{+\infty}2^{(j+1)\mathfrak{s}}\frac{\mu(B(x,\mathcal{K}2^{j+1}))^{\frac{1}{p'}}}{\mu(B(x,\mathcal{K}2^j))}\\ &\quad\times\mu(B(x,\mathcal{K}2^{j+1}))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{\mu(B(x,\mathcal{K}2^{j+1}))^{1-\frac{p}{q}}}\int_{B(x,\mathcal{K}2^{j+1})}|f(y)|^p d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq C\mathcal{K}^{\mathfrak{s}}\sum_{j=0}^{+\infty}2^{(j+1)\mathfrak{s}}\frac{\mu(B(x,\mathcal{K}2^{j+1}))^{1-\frac{1}{q}}}{\mu(B(x,\mathcal{K}2^j))}\left(\frac{1}{\mu(B(x,\mathcal{K}2^{j+1}))^{1-\frac{p}{q}}}\int_{B(x,\mathcal{K}2^{j+1})}|f(y)|^p d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}},\end{aligned}$$

因此，根据式 (1.14) 中给出的 Morrey空间 $\mathcal{M}^{p,\ q}_{\mu}(X)$ 的定义，我们得到

$$\mathcal{R}_2 \leq C\mathcal{K}^{\mathfrak{s}}\|f\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{\mu}}\sum_{j=0}^{+\infty}2^{(j+1)\mathfrak{s}}\frac{\mu(B(x,\mathcal{K}2^{j+1}))^{1-\frac{1}{q}}}{\mu(B(x,\mathcal{K}2^{j}))}.$$

再次利用上下Ahlfors条件 (1.3)，我们注意到

$$\frac{\mu(B(x,\mathcal{K}2^{j+1}))^{1-\frac{1}{q}}}{\mu(B(x,\mathcal{K}2^{j}))} \leq \frac{\mathfrak{c}_2(\mathcal{K}2^{j+1})^{\nu(1-\frac{1}{q})}}{\mathfrak{c}_1(\mathcal{K}2^{j})^{\nu}} = \frac{\mathfrak{c}_2}{\mathfrak{c}_1}\mathcal{K}^{-\frac{\nu}{q}}2^{\nu(1-\frac{1}{q})}2^{-j\frac{\nu}{q}},$$

因此我们可以写成

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_2 &\leq C\mathcal{K}^{\mathfrak{s}}\|f\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{\mu}}\sum_{j=0}^{+\infty}2^{(j+1)\mathfrak{s}}\frac{\mu(B(x,\mathcal{K}2^{j+1}))^{1-\frac{1}{q}}}{\mu(B(x,\mathcal{K}2^{j}))}\\ &\leq C\mathcal{K}^{\mathfrak{s}}\|f\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{\mu}}\frac{\mathfrak{c}_2}{\mathfrak{c}_1}\mathcal{K}^{-\frac{\nu}{q}}2^{\nu(1-\frac{1}{q})}\sum_{j=0}^{+\infty}2^{-j\frac{\nu}{q}+(j+1)\mathfrak{s}} = C\mathcal{K}^{\mathfrak{s}-\frac{\nu}{q}}\|f\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{\mu}}\frac{\mathfrak{c}_2}{\mathfrak{c}_1}2^{\nu(1-\frac{1}{q})+\mathfrak{s}}\sum_{j=0}^{+\infty}2^{-j(\frac{\nu}{q}-\mathfrak{s})},\end{aligned}$$

由于前面的级数收敛（回忆一下，我们有 $\mathfrak{s}<\frac{\nu}{q}$），最终得到

$$\mathcal{R}_2 \leq C'\mathcal{K}^{\mathfrak{s}-\frac{\nu}{q}}\|f\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{\mu}}, \tag{3.3}$$

与 $C'=C(\mathfrak{s},\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2,\nu,q)$ 有关。

有了估计 (3.2) 和 (3.3)，我们可以回到表达式 (3.1)，从而得到

$$|\mathcal{R}_{\mathfrak{s},\mu}(f)(x)| \leq \mathcal{R}_1+\mathcal{R}_2 \leq C\mathcal{K}^{\mathfrak{s}}\mathscr{M}_{\mu}(f)(x)+C'\mathcal{K}^{\mathfrak{s}-\frac{\nu}{q}}\|f\|_{\mathcal{M}^{p,q}_{\mu}}.$$

接下来，令 $\mathcal{K}=\left(\frac{\mathscr{M}_{\mu}(f)(x}{\mu^{\ q}}\right)^{-\frac{q}{\nu})\|f\|_{\mathcal{M}^{p,}}}$，则有

$$|\mathcal{R}_{\mathfrak{s},\mu}(f)(x)| \leq C\mathscr{M}_{\mu}(f)(x)^{1-\frac{q\mathfrak{s}}{\nu}}\|f\|^{\frac{q\mathfrak{s}}{\nu}}_{\mathcal{M}^{p,q}_{\mu}},$$

这就是所需的不等式，也由此结束定理2的证明。 ■

4 函数不等式

一旦我们有了逐点估计 (1.16)，推导出一系列函数不等式就相对容易了。首先，对于某个实参数 $\mathfrak{r}$，我们考虑一个函数空间 $(E^{\mathfrak{r}},\|\cdot\|_{E^{\mathfrak{r}}})$，它由以下条件定义：

$$E^{\mathfrak{r}}(X)=\{f:X\longrightarrow\mathbb{R}, f \text{ is measurable and } \|f\|_{E^{\mathfrak{r}}}<+\infty\},$$

其中 $\|\cdot\|_{E^{\mathfrak{r}}}$ 是依赖于参数 $\mathfrak{r}$ 的“范数”。为简单起见，我们可以假设 $1<\mathfrak{r}<+\infty$ ——这类空间的典型例子是赋予通常范数 $\|\cdot\|_{L^{\mathfrak{r}}}$ 的 Lebesgue空间 $L^{\mathfrak{r}}(X)$。如果量 $\|\cdot\|_{E^{\mathfrak{r}}}$ 满足以下条件：

- 若存在两个可测函数 $f,g:X\longrightarrow\mathbb{R}$ 满足（几乎处处成立的）逐点不等式 $|f(x)|\leq|g(x)|$，且 $f,g\in E^{\mathfrak{r}}(X)$，则

$$\|f\|_{E^{\mathfrak{r}}}\leq\|g\|_{E^{\mathfrak{r}}}. \tag{4.1}$$

- 对于某个正实数幂 ρ，若满足 $\rho\mathfrak{r}>1$，则有恒等式

$$\||f|^{\rho}\|_{E^{\mathfrak{r}}}=\|f\|_{E^{\rho\mathfrak{r}}}^{\rho}, \tag{4.2}$$

每当 $f\in E^{\rho\mathfrak{r}}(X)$时。特别要注意的是，对于通常的勒贝格空间，我们有$\||f|^{\rho}\|_{L^{\mathfrak{r}}}=\|f\|_{L^{\rho\mathfrak{r}}}^{\rho}$，并且对于(1.14)中给出的Morrey空间，我们也有恒等式$\||f|^{\rho}\|_{\mathcal{M}^{p,\ \mu}{}^{q}}=\|f\|_{\mathcal{M}^{\rho p,\ \mu}{}^{\rho q}}^{\rho}$。

- 对于一般的极大算子 $\mathscr{M}_{\mu}$，我们在空间 $E^{\mathfrak{r}}(X)$中具有有界性。

$$\|\mathscr{M}_{\mu}(f)\|_{E^{\mathfrak{r}}}\leq C\|f\|_{E^{\mathfrak{r}}}. \tag{4.3}$$

现在，如果我们考虑一般的逐点估计

$$T_K^*(f)(x)\leq C\mathscr{M}_{\mu}(g)(x)^{1-\frac{q}{\nu}}\|g\|_{\mathcal{M}_{\mu}^{p,q}}^{\frac{q}{\nu}},$$

（其中 指标 ν、p、q在定理3的上下文中给出）我们可以使用property (4.1)来得到obtain：

$$\|T_K^*(f)\|_{E^{\mathfrak{r}}}\leq C\left\|\mathscr{M}_{\mu}(g)^{1-\frac{q}{\nu}}\right\|_{E^{\mathfrak{r}}}\|g\|_{\mathcal{M}_{\mu}^{p,q}}^{\frac{q}{\nu}},$$

然后，根据空间 $E^{\mathfrak{r}}(X)$ 的性质 (4.2)，我们有

$$\|T_K^*(f)\|_{E^{\mathfrak{r}}}\leq C\left\|\mathscr{M}_{\mu}(g)\right\|_{E^{(1-\frac{q}{\nu})\mathfrak{r}}}^{1-\frac{q}{\nu}}\|g\|_{\mathcal{M}_{\mu}^{p,q}}^{\frac{q}{\nu}}.$$

接下来，若极大算子 $\mathscr{M}_{\mu}$ 在空间 $E^{(1-\frac{q}{\nu})\mathfrak{r}}(X)$ 上有界，则根据性质 (4.3)，我们有

$$\|T_K^*(f)\|_{E^{\mathfrak{r}}}\leq C\|g\|_{E^{(1-\frac{q}{\nu})\mathfrak{r}}}^{1-\frac{q}{\nu}}\|g\|_{\mathcal{M}_{\mu}^{p,q}}^{\frac{q}{\nu}}, \tag{4.4}$$

这就是我们想要建立的函数不等式（当然，前提是上梯度 g 满足 $g\in E^{(1-\frac{q}{\nu})\mathfrak{r}}(X)$ 和 $g\in\mathcal{M}^{p,\ \mu}{}^{q}(X)$）。需要强调的是，我们在上面的不等式中并未规定指标 $\mathfrak{r}$、ν 或 p、q 之间的关系，因此，前述函数不等式应理解为一种“理论性的”且相当一般的估计：这些指标之间的关系应结合定理3的条件来理解，同时也必须与空间 $E^{\mathfrak{r}}(X)$ 所给出的泛函框架的性质相关。

现在需要指出的是，在处理函数空间上的范数时，要求条件 (4.1) 是很自然的；然而，性质 (4.2) 则远没有那么自然，而且在某些情况下，(4.3) 中给出的极大函数 $\mathscr{M}_{\mu}$ 的有界性并不成立（例如，考虑空间 $L^1(\mathbb{R}^n)$，其中我们没有 $\mathscr{M}_{\mu}:L^1\to L^1$）。

接下来，我们将研究一些可由表达式 (1.16) 中给出的逐点估计推导出的函数不等式。

- Lebesgue空间 $L^{\mathfrak{r}}(X)$。注意，对于 $1<\mathfrak{r}<+\infty$，其范数

$$\|f\|_{L^{\mathfrak{r}}}=\left(\int_X|f(x)|^{\mathfrak{r}}d\mu(x)\right)^{\frac{1}{\mathfrak{r}}},$$

显然满足性质 (4.1)，而对于性质 (4.2)，如前所述，我们只需有 $\||f|^{\rho}\|_{L^{\mathfrak{r}}}=\left(\int_X|f(x)|^{\rho\mathfrak{r}}d\mu(x)\right)^{\frac{1}{\mathfrak{r}}}=\|f\|_{L^{\rho\mathfrak{r}}}^{\rho}$。此外，根据 [4], [30],，该

与测度 μ 相关联并由上文表达式 (1.13) 定义的极大函数 $\mathscr{M}_\mu$ 满足控制

$$\|\mathscr{M}_\mu(f)\|_{L^{\mathfrak{r}}} \leq C\|f\|_{L^{\mathfrak{r}}},$$

只要 $1 < \mathfrak{r} < +\infty$。在定理3的假设下（即 $f:\ X \longrightarrow \mathbb{R}$ 是可测函数，$g:\ X \longrightarrow [0,+\infty[$ 是 f 的上梯度，且 g 满足$g \in \mathcal{M}^{p,\ _\mu q}(X)$，其中 $1 < p \leq q < +\infty$ 和$1 < \frac{\nu}{q}$，$1 < p \leq q < +\infty$），若 $1 < \mathfrak{r} < +\infty$ 是使得$(1 - \frac{q}{\nu})\mathfrak{r} > 1$的指标，则在(4.4)中令 $E^{\mathfrak{r}}(X) = L^{\mathfrak{r}}(X)$，我们得到

$$\|T_K^*(f)\|_{L^{\mathfrak{r}}} \leq C\|g\|_{L^{(1-\frac{q}{\nu})\mathfrak{r}}}^{1-\frac{q}{\nu}}\|g\|_{\mathcal{M}_\mu^{p,q}}^{\frac{q}{\nu}}. \tag{4.5}$$

To t就我们所知，先前的估计(4.5)在此设定中似乎是新的 g.

特别地，注意到若我们取$\mathfrak{r} = \frac{q\nu}{\nu - q}$与 $p = q$，由于我们有空间等同$\mathcal{M}^{q,\ _\mu q}(X) = L^q(X)$，我们很容易由先前的估计推出如下不等式

$$\|T_K^*(f)\|_{L^{\mathfrak{r}}} \leq C\|g\|_{L^q}^{1-\frac{q}{\nu}}\|g\|_{\mathcal{M}_\mu^{q,q}}^{\frac{q}{\nu}} = C\|g\|_{L^q}^{1-\frac{q}{\nu}}\|g\|_{L^q}^{\frac{q}{\nu}},$$

i.e.

$$\|T_K^*(f)\|_{L^{\mathfrak{r}}} \leq C\|g\|_{L^q},$$

由此得到一个新的 Sobolev型不等式。

- 洛伦兹空间 $L^{\mathfrak{r},\ \mathfrak{m}}(X)$。洛伦兹空间是勒贝格空间的一种有用推广。对于可测函数 $f:\ X \longrightarrow \mathbb{R}$，当 $\alpha \geq 0$ 且对某些指标 $1 \leq \mathfrak{r} < +\infty$ 和$1 \leq \mathfrak{m} < +\infty$时，我们可以通过以下条件刻画洛伦兹空间 $L^{\mathfrak{r},\ \mathfrak{m}}(X)$

$$\|f\|_{L^{\mathfrak{r},\mathfrak{m}}} = \mathfrak{r}^{\frac{1}{\mathfrak{m}}}\left(\int_0^{+\infty}\left(\alpha\,\mu\left(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}\right)^{\frac{1}{\mathfrak{r}}}\right)^{\mathfrak{m}}\frac{d\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\mathfrak{m}}} < +\infty,$$

当 $\mathfrak{m} = +\infty$ 时，我们简单地记作$\|f\|_{L^{\mathfrak{r},\ \infty}} = \sup\limits_{\alpha>0}\left\{\alpha\mu(\{x \in X:\ |f(x)| > \alpha\})^{\frac{1}{\mathfrak{r}}}\right\}$。对于这些空间，很容易看出它们也具有性质 (4.1) 和性质 (4.2)：对于某个指标 $\rho > 0$ 且当 $1 \leq \mathfrak{r} < +\infty, 1 \leq \mathfrak{m} \leq +\infty$ 时，我们有

$$\||f|^\rho\|_{L^{\mathfrak{r},\mathfrak{m}}} = \|f\|_{L^{\rho\mathfrak{r},\rho\mathfrak{m}}}^\rho,$$

证明见 [5, 命题 1.2。11] 在此背景下，极大函数 $\mathscr{M}_\mu$ 的有界性已在 [4], [30],中研究，另见 [29]。

现在，在定理3的框架下，若 $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ 是一个可测函数，且$g:\ X \longrightarrow [0,\infty)$是 f的上梯度，那么将 Lorentz范数 $L^{\mathfrak{r},\ \mathfrak{m}}$ 应用于逐点不等式 (1.16)，即可轻松推出以下函数控制

$$\begin{aligned}\|T_K^*(f)\|_{L^{\mathfrak{r},\mathfrak{m}}} &\leq C\|\mathscr{M}_\mu(g)\|_{L^{(1-\frac{q}{\nu})\mathfrak{r},(1-\frac{q}{\nu})\mathfrak{m}}}^{1-\frac{q}{\nu}}\|g\|_{\mathcal{M}_\mu^{p,q}}^{\frac{q}{\nu}}\\ &\leq C\|g\|_{L^{(1-\frac{q}{\nu})\mathfrak{r},(1-\frac{q}{\nu})\mathfrak{m}}}^{1-\frac{q}{\nu}}\|g\|_{\mathcal{M}_\mu^{p,q}}^{\frac{q}{\nu}},\end{aligned}$$

其中我们有 $\frac{q}{\nu} < 1, 1 < (1-\frac{q}{\nu})\mathfrak{r} < +\infty$ 和 $1 < (1-\frac{q}{\nu})\mathfrak{m} < +\infty$。测度空间中极大函数 $\mathscr{M}_\mu$ 的有界性已在 [4], [30], 中研究，另见 [29]。

前述不等式的一个特例是：若 $1 < \mathfrak{r} < +\infty$ 满足 $(1-\frac{q}{\nu})\mathfrak{r} = 1$，则对逐点控制（1.16）的两边取 $L^{\mathfrak{r},\infty}$ 范数，可得：

$$\|T_K^*(f)\|_{L^{\mathfrak{r},\infty}} \le C\|\mathscr{M}_\mu(g)\|_{L^{(1-\frac{q}{\nu})\mathfrak{r},\infty}}^{1-\frac{q}{\nu}} \|g\|_{\mathcal{M}_\mu^{p,q}}^{\frac{q}{\nu}} = C\|\mathscr{M}_\mu(g)\|_{L^{1,\infty}}^{1-\frac{q}{\nu}} \|g\|_{\mathcal{M}_\mu^{p,q}}^{\frac{q}{\nu}},$$

由于极大函数 $\mathscr{M}_\mu$ 从 $L^1(X)$ 到 $L^{1,\infty}(X)$ 是有界的，我们得到如下估计

$$\|T_K^*(f)\|_{L^{\mathfrak{r},\infty}} \le C\|\mathscr{M}_\mu(g)\|_{L^{1,\infty}}^{1-\frac{q}{\nu}} \|g\|_{\mathcal{M}_\mu^{p,q}}^{\frac{q}{\nu}} \le C\|g\|_{L^1}^{1-\frac{q}{\nu}} \|g\|_{\mathcal{M}_\mu^{p,q}}^{\frac{q}{\nu}}.$$

注意，在勒贝格空间和洛伦兹空间的尺度下，$(1-\frac{q}{\nu})\mathfrak{r} = 1$ 的情形似乎是参数 $1 < \mathfrak{r} < +\infty$ 的下端点。

• Morrey空间 $\mathcal{M}^{p,q}_\mu$。这些空间是在满足上述条件（1.14）的情况下引入的。与之前一样，性质（4.1）是直接的，并且对于 $\rho > 0$，我们可以写出（只要 $\rho p > 1$）

$$\begin{aligned}
\||f|^\rho\|_{\mathcal{M}_\mu^{p,q}} &= \sup_{x\in X,\, r>0} \left(\frac{1}{\mu(B(x,r))^{1-\frac{p}{q}}} \int_{B(x,r)} (|f(y)|^\rho)^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{x\in X,\, r>0} \left(\frac{1}{\mu(B(x,r))^{1-\frac{(\rho p)}{(\rho q)}}} \int_{B(x,r)} |f(y)|^{\rho p} d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{\mathcal{M}_\mu^{\rho p,\rho q}}^\rho,
\end{aligned}$$

这就是性质（4.2）。在 Morrey空间的框架下，极大函数 $\mathscr{M}_\mu$ 的有界性已在 [36] 和 [37] 中进行了研究（另请参见其中的参考文献）。

在定理3的框架下，如果 $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ 是一个可测函数，并且如果 $g : X \longrightarrow [0,+\infty]$ 是 f 的一个上梯度，则我们可以得到以下不等式

$$\begin{aligned}
\|T_K^*(f)\|_{\mathcal{M}_\mu^{p_1,q_1}} &\le C\|\mathscr{M}_\mu(g)\|_{\mathcal{M}_\mu^{(1-\frac{q}{\nu})p_1,(1-\frac{q}{\nu})q_1}}^{1-\frac{q}{\nu}} \|g\|_{\mathcal{M}_\mu^{p,q}}^{\frac{q}{\nu}} \\
&\le C\|g\|_{\mathcal{M}_\mu^{(1-\frac{q}{\nu})p_1,(1-\frac{q}{\nu})q_1}}^{1-\frac{q}{\nu}} \|g\|_{\mathcal{M}_\mu^{p,q}}^{\frac{q}{\nu}},
\end{aligned}$$

其中我们有 $\frac{q}{\nu} < 1$, $1 < p \le q < +\infty$ 和 $1 < p_1 \le q_1 < +\infty$, $1 < (1-\frac{q}{\nu})p_1 < +\infty$ 和$1 < (1-\frac{q}{\nu})q_1 < +\infty$。

这一估计在此背景下似乎是新的。请注意，前一个不等式的一个特例是当 $(1-\frac{q}{\nu})p_1 = p$ 和 $(1-\frac{q}{\nu})q_1 = q$ 时给出的：于是我们可以由 (4.6) 推得控制

$$\begin{aligned}
\|T_K^*(f)\|_{\mathcal{M}_\mu^{p_1,q_1}} &\le C\|g\|_{\mathcal{M}_\mu^{(1-\frac{q}{\nu})p_1,(1-\frac{q}{\nu})q_1}}^{1-\frac{q}{\nu}} \|g\|_{\mathcal{M}_\mu^{p,q}}^{\frac{q}{\nu}} = C\|g\|_{\mathcal{M}_\mu^{p,q}}^{1-\frac{q}{\nu}} \|g\|_{\mathcal{M}_\mu^{p,q}}^{\frac{q}{\nu}} \\
&\le C\|g\|_{\mathcal{M}_\mu^{p,q}}.
\end{aligned}$$

• Orlicz空间。回顾一下，若 $\phi :\ [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty]$ 是一个左连续递增函数，满足 $\phi(0) = 0$，且在 $]0$上既不恒等于零也不恒等于无穷大，$+\infty[$,则可以考虑相应的杨函数 $\Phi(t) = \int_0^t \phi(\tau)d\tau$，进而得到 Orlicz

空间 $L^{\Phi}(X)$，它与函数 Φ 相关，定义为满足以下条件的 μ 可测函数$f:\ X \longrightarrow \mathbb{R}$ 其 Luxemburg 范数

$$\|f\|_{L^{\Phi}} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_X \Phi(|f(x)|/\lambda) d\mu(x) \leq 1\right\},$$

是有限的。我们很容易看出，如果 $\Phi(t) = t^p$ for $1 \leq p < +\infty$，则有 $L^{\Phi}(X) = L^p(X)$，从而恢复经典的Lebesgue空间。现在注意，杨函数 Φ 是凸的、递增的、左连续的， $\Phi(0) = 0$ 且 $\Phi(t) \to \infty$ as $t \to +\infty$。由于泛函$\|\cdot\|_{L^{\Phi}}$是一个范数，我们有 $\|\lambda f\|_{L^{\Phi}} = |\lambda|\ \|f\|_{L^{\Phi}}$；如果 f、g是两个满足 $|f| \leq |g|$ a.e. 的可测函数，则有保序性质（4.1）

$$\|f\|_{L^{\Phi}(X)} \leq \|g\|_{L^{\Phi}(X)}.$$

然而，性质（4.2）需要更加谨慎地处理。为此，我们将使用 [34]第3节中定义的如下重标度性质：对于任意实数 $\rho > 0$，我们根据条件定义空间 $L^{\Phi}_{\rho}(X)$

$$L^{\Phi}_{\rho}(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} : \|f\|_{L^{\Phi}_{\rho}} < +\infty\},$$

其中

$$\|f\|_{L^{\Phi}_{\rho}} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_X \Phi_{\rho}(|f(x)|/\lambda) d\mu(x) \leq 1\right\},$$

其中 $\Phi_{\rho}(t) = \Phi(t^{\rho})$。根据泛函 $\|\cdot\|_{L^{\Phi}_{\rho}}$的这一定义，我们有：

$$\||f|^{\rho}\|_{L^{\Phi}} = \|f\|^{\rho}_{L^{\Phi}_{\rho}},$$

关于这一事实的证明，参见 [34] 的引理 3.2。

最后一个要素——极大算子的有界性——也需要采用不同的处理方式。通常会对杨函数 Φ 施加一些限制。函数 Φ 满足 Δ_2-条件，是指存在常数 $C_{\Phi} > 0$ 使得

$$\Phi(2\tau) \leq C_{\Phi}\Phi(\tau),$$

对每个 $\tau \geq 0$都成立。 Δ_2-条件意味着 Φ 严格递增且连续。现在，若杨函数 Φ 满足 ∇_2-条件，也记作 $\Phi \in \nabla_2$，则

$$\Phi(\tau) \leq \frac{1}{2C}\Phi(C\tau), \qquad \tau \geq 0,$$

对某个 $C > 1$成立。在这两个限制条件下，若 Φ 满足 Δ_2-条件且 $\Phi \in \nabla_2$，则有如下有界性性质

$$\|\mathscr{M}_{\mu}(f)\|_{L^{\Phi}} \leq C\|f\|_{L^{\Phi}}.$$

关于这一事实的证明，请参见 [7] 或 [19] 。关于 $\mathbb{R}^n$上 Orlicz空间中这类算子的更多性质，也请参见 [8] 或 [11] 。

具备所有这些要素后，我们由逐点不等式 (1.16) 得到：

$$\|T^*_K(f)\|_{L^{\Phi}} \leq C\left\|\mathscr{M}_{\mu}(g)^{1-\frac{q}{\nu}}\right\|_{L^{\Phi}} \|g\|^{\frac{q}{\nu}}_{\mathcal{M}^{p,q}_{\mu}}.$$

利用上文介绍的空间 L^{Φ}_{ρ}，其中 $\rho = 1 - \frac{q}{\nu}$，我们可以写出

$$\|T^*_K(f)\|_{L^{\Phi}} \leq C\|\mathscr{M}_{\mu}(g)\|^{1-\frac{q}{\nu}}_{L^{\Phi}_{(1-\frac{q}{\nu})}} \|g\|^{\frac{q}{\nu}}_{\mathcal{M}^{p,q}_{\mu}}.$$

现在，如果函数 $\Phi_{(1-\frac{q}{\nu})}$ 满足 ∇_2-条件，且有 $\Phi_{(1-\frac{q}{\nu})} \in \Delta_2$，那么我们得到

$$\|T^*_K(f)\|_{L^{\Phi}} \leq C\|g\|^{1-\frac{q}{\nu}}_{L^{\Phi}_{(1-\frac{q}{\nu})}} \|g\|^{\frac{q}{\nu}}_{\mathcal{M}^{p,q}_{\mu}}.$$

- 变指数勒贝格空间。为了引入变指数勒贝格空间，我们首先需要考虑一个可测函数 p：$X \longrightarrow [1, +\infty]$，然后定义$p^- =$ 本质下确界$_{x\in X}$ $\{p(x)\}$ 和 $p^+ =$ 本质上确界$_{x\in X}$ $\{p(x)\}$，并且，为了简化并避免

技术细节，我们在此始终假设有 $1 < p^- \leq p^+ < +\infty$。接下来，对于$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ 一个 μ-可测函数，我们通过以下表达式定义与变指数 $p(\cdot)$相关联的模函数 $\varrho_{p(\cdot)}$

$$\varrho_{p(\cdot)}(f) = \int_X |f(x)|^{p(x)} d\mu(x),$$

并且我们将考虑以下 Luxemburg 范数

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}} = \inf\{\lambda > 0 : \varrho_{p(\cdot)}(f/\lambda) \leq 1\}.$$

因此，我们将空间 $L^{p(\cdot)}(X)$ 定义为满足以下量 $\|f\|_{L^{p(\cdot)}}$ 有限的 μ-可测函数 f 的集合。空间 $L^{p(\cdot)}(X)$ 是赋范空间，并且具有一些良好的结构性质（更多详细信息请参见书籍 [9], [12] ）。特别地，Luxemburg 范数具有保序性：如果 $f, g \in L^{p(\cdot)}(X)$ 满足 $|f| \leq |g|$ 几乎处处成立，那么我们有

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}} \leq \|g\|_{L^{p(\cdot)}},$$

见 [9, 命题 2.7]。变指数勒贝格空间的 Luxemburg 范数的另一个特殊性质如下：对于所有满足 $\frac{1}{p^-} \leq \rho < +\infty$ 的实参数 $\rho > 0$，我们有恒等式

$$\||f|^{\rho}\|_{L^{p(\cdot)}} = \|f\|^{\rho}_{L^{\rho p(\cdot)}}.$$

关于这一事实的证明，见 [9, 命题 2.18] 。如需更详细地研究这些空间，请参阅书籍 [9] 和 [12]。

因此，在这一框架下我们具有性质 (4.1) 和 (4.2)；然而，为了获得极大算子 $\mathscr{M}_{\mu}$的有界性，还需要对函数 $p(\cdot)$ 作出一些额外假设。为此，我们需要回顾一些定义，以便写出使极大算子 $\mathscr{M}_{\mu}$具有有界性的条件。事实上，设 $r(\cdot) : X \longrightarrow [0, +\infty[$ 是一个可测函数。

– 若存在常数 C_0 使得，我们称 $r(\cdot)$ 局部对数-H ¨older 连续，并记作 $r(\cdot) \in LH_0$

$$|r(x) - r(y)| \leq \frac{C_0}{-\log(d(x, y))},$$

对所有满足 $d(x, y) < \frac{1}{2}$ 的 x、$y \in X$。

– 我们称 $r(\cdot)$ 关于基点$x_0 \in X$ 在无穷远处是局部对数 H ¨older 连续的，并记 $r(\cdot) \in LH_\infty$，如果存在两个常数 C_∞、r_∞，使得

$$|r(x) - r_\infty| \le \frac{C_\infty}{\log(e + d(x, x_0))},$$

对所有 $x \in X$。

– 对于 $r(\cdot) \in LH_0 \cap LH_\infty$，我们称 $r(\cdot)$ 为全局对数-H ¨lder 连续，并定义 $LH = LH_0 \cap LH_\infty$。

根据这些概念，我们得到以下条件：若 $p(\cdot) : X \longrightarrow [1, +\infty]$ 满足$1/p(\cdot) \in LH$，则极大函数 $\mathscr{M}_\mu$ 在变指数勒贝格空间中有界：

$$\|\mathscr{M}_\mu(f)\|_{L^{p(\cdot)}} \le C\|f\|_{L^{p(\cdot)}}.$$

关于这一估计的证明，请参见 [1] 中的推论1.8，以及 [10, 中齐型空间情形下的定理1.1] 。

现在，利用上述所有结果，在定理3的框架下，将 $L^{r(\cdot)}$ 范数应用于不等式(1.16)，我们得到

$$\|T_K^*(f)\|_{L^{r(\cdot)}} \le C \left\| \mathscr{M}_\mu(g)^{1-\frac{q}{\nu}} \right\|_{L^{r(\cdot)}} \|g\|^{\frac{q}{\nu}}_{\mathcal{M}^{p,q}_\mu} = C \|\mathscr{M}_\mu(g)\|^{1-\frac{q}{\nu}}_{L^{(1-\frac{q}{\nu})r(\cdot)}} \|g\|^{\frac{q}{\nu}}_{\mathcal{M}^{p,q}_\mu},$$

因此，若 $1 < (1 - \frac{q}{\nu})r^- \le (1 - \frac{q}{\nu})r(\cdot) \le (1 - \frac{q}{\nu})r^+ < +\infty$，且若$\frac{1}{(1-\frac{q}{\nu})r(\cdot)} \in LH$，那么根据极大函数在变指数勒贝格空间中的有界性，我们可以写出

$$\|T_K^*(f)\|_{L^{r(\cdot)}} \le C \|g\|^{1-\frac{q}{\nu}}_{L^{(1-\frac{q}{\nu})r(\cdot)}} \|g\|^{\frac{q}{\nu}}_{\mathcal{M}^{p,q}_\mu}.$$

注3. 注意，由于定理1的陈述中需要条件(1.11)，显然 $\nu > 1$，因此我们可以应用 *[10]* 中的一个结果，即推论1.5：若(X, d, μ)是维数为 $1 < \nu$的Ahlfors正则空间，设 $p(\cdot) : X \longrightarrow [1, +\infty]$ 满足 $p(\cdot) \in LH$ 且 $1 < p_- \le p_+ < \nu$。定义 $q(\cdot)$为$\frac{1}{p(\cdot)} - \frac{1}{q(\cdot)} = \frac{1}{\nu}$。那么存在$C = C(p(\cdot)\ \nu, X)$，使得

$$\|\mathcal{R}_{1,\mu}(g)\|_{L^{q(\cdot)}} \le C\|g\|_{L^{p(\cdot)}}.$$

利用这个估计以及我们的逐点估计(1.12)，可得

$$\|T_K^*(f)\|_{L^{q(\cdot)}} \le \|\mathcal{R}_{1,\mu}(g)\|_{L^{q(\cdot)}} \le C\|g\|_{L^{p(\cdot)}},$$

这是一个有用的函数不等式，其中仅涉及变指数勒贝格空间。

- 奥利奇-穆谢拉克空间

我们先回顾这些空间的定义。设 $\varphi(x, t) : X \times [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ 是一个满足以下条件的函数：

(φ1) 对任意 $t \ge 0$，函数 $\varphi(\cdot, t)$ 在 X 上可测；对任意 $x \in X$，$\phi(x, \cdot)$ 在 $[0, +\infty[$ 上连续；

(φ2) 存在常数 $C_1 \geq 1$，使得对任意 $x \in X$，$\frac{1}{C_1} \leq \varphi(x,1) \leq C_1$；

(φ3) 存在常数 $C_2 \geq 1$ 使得 $\varphi(x,t_1) \leq C_2 \varphi(x,t_2)$ 对所有 $x \in X$ 和$0 < t_1 < t_2$成立。

现在定义 $\bar{\varphi}(x,t) =$ 上确界 $\varphi_{0<s\leq t}(x,s)$，并记 $\Phi(x,t) = \int_0^t \bar{\varphi}(x,s)\frac{}{s}dr$ 对所有 $x \in X$ 和 $t \geq 0$成立。对于满足条件（φ1）、（φ2）和（φ3）的给定函数 $\varphi(x,t)$，Musielak-Orlicz空间 $L^{\varphi}(X)$ 是一个巴拿赫空间，其范数如下（参见 [34] 及其中的参考文献）：

$$\|f\|_{L^{\varphi}} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_X \Phi\left(y, \frac{|f(y)|}{\lambda}\right) d\mu(y) \leq 1\right\}.$$

由于泛函 $\|\cdot\|_{L^{\varphi}}$ 是一个范数，因此与Orlicz空间的情形一样，我们有 $\|\lambda f\|_{L^{\varphi}} = |\lambda|\ \|f\|_{L^{\varphi}}$对任意 $\lambda \in \mathbb{R}$成立；如果 f、g是两个满足 $|f| \leq |g|$几乎处处成立的可测函数，则有保序性质（4.1）

$$\|f\|_{L^{\varphi}} \leq \|g\|_{L^{\varphi}}.$$

对于性质 (4.2)，与 Orlicz空间的情形一样，我们使用 [34] 第3节中定义的如下重标度性质：对于任意实数 $\rho > 0$，我们通过以下条件定义空间 $L^{\varphi}_{\rho}(X)$

$$L^{\varphi}_{\rho}(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} : \|f\|_{L^{\varphi}_{\rho}} < +\infty\},$$

其中

$$\|f\|_{L^{\varphi}_{\rho}} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_X \Phi_{\rho}(y, |f(y)|/\lambda) d\mu(y) \leq 1\right\},$$

其中 $\Phi_{\rho}(x,t) = \Phi(x,t^{\rho})$。根据泛函 $\|\cdot\|_{L^{\varphi}_{\rho}}$ 的此定义，我们有：

$$\||f|^{\rho}\|_{L^{\varphi}} = \|f\|^{\rho}_{L^{\varphi}_{\rho}},$$

参见 [34] 的引理 3.2。

现在，为了证明极大算子的有界性，我们需要考虑函数 $\varphi(x,t)$ 满足的一些条件。设 p、$q \geq 1$ 和 $\eta > 0$ 已给定。

(φ3; 0; p) 存在常数 $A_{2,0,p} \geq 1$ 使得

$$\frac{\varphi(x,t_1)}{t_1^p} \leq A_{2,0,p}\frac{\varphi(x,t_2)}{t_2^p},$$

只要 $0 < t_1 < t_2 \leq 1$，对所有 $x \in X$；

(φ3; ∞; q)存在常数$A_{2,\infty,q} \geq 1$，使得

$$\frac{\varphi(x,t_1)}{t_1^q} \leq A_{2,\infty,q}\frac{\varphi(x,t_2)}{t_2^q},$$

对所有 $x \in X$，只要 $1 \leq t_1 < t_2$;

($\varphi 5;\eta$) 对每个 $\gamma>0$，都存在常数 $B_{\gamma,\eta}$, $0<B_{\gamma,\eta}\le 1$，使得

$$\varphi(x,B_{\gamma,\eta}t)\le\varphi(y,t),$$

每当 x、$y\in X$、$d(x,y)\le\frac{\gamma}{t^\eta}$且 $t\ge 1$;

($\varphi 6$) 在 X、g 和 h 上存在两个函数，并且存在常数 B_∞，$0<B_\infty\le 1$ 使得 $0\le g(x)\le 1$，$0\le h(x)\le 1$ 对每个 $x\in X$ 和 $\varphi(\cdot,g(\cdot))\in L^1(X)$，$h\in L^1(X)$ 以及

$$\varphi(x,B_\infty t)\le\varphi(y,t)+h(x),$$

对 x、$y\in X$ 和 $g(y)\le t\le 1$。

前述条件足以得到该框架中极大函数的有界性。事实上，由于在我们的设定中，测度 μ 是 Ahlfors ν-正则的，这意味着 μ 满足倍增条件。已知若 μ 满足倍增条件，则空间 X 对任意 $\lambda>0$ 满足 ($M\lambda$) 条件，即存在常数$C>0$ 使得

$$\mu(\{x\in X:M_\lambda f(x)>k\})\le\frac{C}{k}\int_X|f(y)|d\mu(y),$$

对所有可测函数 $f\in L^1(X)$ 和 $k>0$，其中 $M_\lambda f$ 是如下定义的膨胀 Hardy-Littlewood 极大函数

$$M_\lambda f(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{\mu(B(x,\lambda r))}\int_{B(x,r)}|f(y)d\mu(y)|,$$

更多详情请参见 [14]。特别地，对于 $\lambda=1$，$M_1=\mathscr{M}_\mu$，Hardy-Littlewood 极大算子满足 ($M1$)。

接下来，假设函数 $\varphi(x,t)$ 满足上文针对满足 $\eta\le\frac{q}{\nu}$ 的 p_1、$q_1>1$ 和 $\eta>0$ 所述的条件 ($\varphi 3;0,p$)、($\varphi 3;\infty,q$)、($\varphi 5;\eta$) 和 ($\varphi 6$)。则存在常数 $C>0$，使得

$$\|\mathscr{M}_\mu(f)\|_{L^\varphi}\le C\|f\|_{L^\varphi},$$

对于所有 $f\in L^\varphi(X)$，此事实的证明见 [33, 定理3。7] 另请参见 [32]。

现在，由逐点不等式 (1.16) 可得:

$$\|T_K^*(f)\|_{L^\varphi}\le C\left\|\mathscr{M}_\mu(g)^{1-\frac{q}{\nu}}\right\|_{L^\varphi}\|g\|_{\mathcal{M}_\mu^{p,q}}^{\frac{q}{\nu}}.$$

利用上文引入的空间 $L^\varphi_\rho(X)$，其中 $\rho=1-\frac{q}{\nu}$，我们可以写成

$$\|T_K^*(f)\|_{L^\varphi}\le C\|\mathscr{M}_\mu(g)\|_{L^\varphi_{(1-\frac{q}{\nu})}}^{1-\frac{q}{\nu}}\|g\|_{\mathcal{M}_\mu^{p,q}}^{\frac{q}{\nu}}.$$

现在，若函数 $\varphi_{(1-\frac{q}{\nu})}$ 满足条件 ($\varphi 3;0,p$)、($\varphi 3;\infty,q$)、($\varphi 5;\eta$) 和 ($\varphi 6$)，其中 p、$q>1$ 和 $\eta>0$ 满足 $\eta\le\frac{q}{\nu}$，则可得到以下函数不等式

$$\|T_K^*(f)\|_{L^\varphi}\le C\|g\|_{L^\varphi_{(1-\frac{q}{\nu})}}^{1-\frac{q}{\nu}}\|g\|_{\mathcal{M}_\mu^{p,q}}^{\frac{q}{\nu}}.$$

我们在此研究了勒贝格空间、洛伦兹空间、莫雷空间、奥利奇空间、变指数勒贝格空间和奥利奇-穆谢拉克空间。当然，这份列表并不全面；对于任何配备范数 $\|\cdot\|_{E^{\mathrm{r}}}$ 的函数空间 $E^{\mathrm{r}}(X)$，只要该范数满足性质 (4.1)、(4.2) 和 (4.3)，就能得到形式如 (4.4) 的一般估计。

利益冲突。我们声明，就所提交的工作而言，不存在任何构成利益冲突的商业或关联利益。

致谢。本研究得到 GDRI ECO-Math 的支持。

参考文献

[1]T. Adamowicz、P. Harjulehto、P. Hästö。无界拟度量测度空间上变指数勒贝格空间中的极大算子。《斯堪的纳维亚数学》第116卷，第1期，第5–22页，（2015年）。[2] R. Alvarado、P. Hajłasz。关于支持庞加莱不等式的度量测度空间的一则注记。《林琴国家科学院物理、数学与自然科学类汇刊》31，第1期，第15–23页，（2020年）。[3] A. Björn、J. Björn，《度量空间上的非线性势理论》。《欧洲数学学会数学专著》17，欧洲数学学会，苏黎世，（2011年）。[4] R.R. Coifman、G. Weiss。某些齐型空间上的非交换调和分析。《数学讲义》第242卷。施普林格，柏林，（1971年）。[5] D. Chamorro。《勒贝格空间与洛伦兹空间》第3卷。Amarun，ISBN 978-2-9559834-2-3，（2020年）。[6] D. Chamorro、A. Marcoci和L. Marcoci。粗糙算子的新逐点不等式及其应用。《数学分析与应用杂志》550，129595，（2025年）。[7] A. Cianchi。Orlicz空间中某些经典算子的强型与弱型不等式。《伦敦数学学会杂志》60(1)，187–202，（1999年）。[8] A. Cianchi。最优奥利茨-索博列夫嵌入。《伊比利亚美洲数学杂志》20，第2期，427–474，（2004年）。[9] D. Cruz-Uribe、A. Fiorenza。变指数勒贝格空间。Birkhäuser，（2013年）。[10] D. Cruz-Uribe、P. Shukla。齐型空间上变指数勒贝格空间中的分数阶极大算子的有界性。《数学研究》242(2)，109–139，（2018年）。[11] F. Deringoz等。第三类Orlicz空间和广义Orlicz–Morrey空间上的广义分数阶极大算子与积分算子。《正性》23：727–757（2019年）。[12] L. Diening、P. Harjulehto、P. Hästö、M. Ruzicka. 变指数勒贝格空间与索博列夫空间。《数学讲义》2017，施普林格，（2011年）。[13] Eridani、Y. Sawano。定义于度量测度空间上的广义莫雷空间中的分数阶积分算子。《A. Razmadze数学研究所学报》第158卷，13–24，（2012年）。[14] J. García-Cuerva、J.L. Rubio de Francia。《加权范数不等式及相关主题》，《北荷兰数学研究》第116卷，北荷兰，阿姆斯特丹，（1985年）。[15] J. García-Cuerva、A. E. Gatto。与非倍增测度相关的分数阶积分算子的有界性。《数学研究》第162卷，第3期，第245–261页，（2004年）。

[16] P. Hajłasz、P. Koskela。带庞加莱不等式的索博列夫。《美国数学学会回忆录》145，（2000年）。[17] P. Harjulehto、P. Hästö和M. Pere。度量空间上的变指数勒贝格空间：Hardy-Littlewood 极大算子。《实分析交流》30，87–104，（2004–2005年）。[18] L. Hedberg。关于某些卷积不等式。《美国数学学会会刊》36，505–510，（1972年）。[19] T. Heikkinen、H. Tuominen。奥利茨-索博列夫延拓与测度密度条件。《数学分析与应用杂志》368，508–524，（2010年）。[20] J. Heinonen、P. Koskela。具有受控几何的度量空间中的拟共形映射。《数学学报》181，第1期，1–61，（1998年）。[21]J. Heinonen、P. Koskela。关于利普希茨函数、上梯度与庞加莱不等式的一则注记。《新西兰数学杂志》28，37–42，（1999年）。[22] J. Heinonen、P. Koskela、N. Shanmugalingam和J. T. Tyson。度量测度空间上的索博列夫空间：基于上梯度的方法。New Mathematical Monographs，27。剑桥大学出版社，剑桥，（2015年）。[23] C. Hoang、K. Moen和C. Pérez。粗糙算子的逐点估计及其在索博列夫不等式中的应用。JAMA 155，43–74，（2025年）。[24] C. Hoang、K. Moen 和C. Pérez。黎斯势型算子给出的新逐点界。《Journal of Functional Analysis》，第289卷，第9期，1，111060，（2025年）。[25] C. Hoang、K. Moen 和C. Pérez。重新审视子表示公式。La Matematica，（2025年）。https://doi.org/10.1007/s44007-025-00151-3。[26] T. Hytönen。度量空间上的非齐次分析及Tolsa的RBMO空间框架。《出版数学》54(2)，485–504，（2010年）。[27] S. Keith、K. Rajala。关于度量测度空间上庞加莱不等式的一则注记。《斯堪的纳维亚数学》95，299–304，（2004年）。Ł. Korobenko、D. Maldonado、C. Rios。从索博列夫不等式到倍增。《美国数学学会会刊》143，4017–4028，（2015年）。[29] D. Kosz。非倍增情形下洛伦兹空间上的极大算子。《数学杂志》298，1523–1543，（2021年）。[30] F. Nazarov、S. Treil、A. Volberg。非齐次空间上Calderón-Zygmund算子的弱型估计与科特拉不等式。《国际数学研究通知》（9），463–487，（1998年）。[31] F. Nazarov、S. Treil、A. Volberg。非齐次空间上的Tb定理。《数学学报》190(2)：151–239，（2003年）。[32] T. Ohno、T. Shimomura。度量测度空间上的Musielak–Orlicz空间中的极大算子与黎斯势算子。《积分方程与算子理论》90：62，（2018年）。[33] T. Ohno、T. Shimomura。无界度量测度空间上Musielak-Orlicz空间中极大算子的有界性与索博列夫不等式。《数学科学通报》199，（2025年）。[34]H. Rafeiro 和S. Samko。变Musielak–Morrey–Orlicz型空间、变赫尔茨空间和广义变指数勒贝格空间中的粗糙核极大算子。《积分方程与算子理论》89，111–124（2017年）。[35] N. Samko。增长条件下拟度量测度空间上广义莫雷空间中某些次线性算子的加权有界性。《傅里叶分析与应用杂志》28：27，（2022年）。

[36] I. Sihwaningrum, Y. Sawano. 度量测度空间上Morrey空间中的分数阶积分算子的弱型与强型估计。欧亚数学杂志，4，1，76–81，（2013年）。[37] I. Sihwaningrum, H. Gunawan& E. Nakai. 度量测度空间上广义莫雷空间中的极大算子与分数阶积分算子。《数学新闻》291(8–9), 1400–1417，（2018年）。[38] X. Tolsa. BMO, H^1与Calder´on-Zygmund算子及非倍增测度。《数学年刊》319，89-149，（2001年）。