arXiv:2603.08226v1 [math.HO] 9 Mar 2026

由半距离带近似的双曲、椭圆和抛物圆盘

久洛·拉科什

摘要。双曲、椭圆和抛物圆盘可以在基于单位圆盘的双曲几何贝尔特拉米–凯莱–克莱因模型中，用不等式$\frac{x^2}{C^2}+2y^2-2y\le 0$ ($0<C<1$)来描述，且仅相差双曲全等关系。上述双曲、椭圆和抛物圆盘与由不等式 $\frac{x^2}{C^2}+y^2-1\le 0$ 和 $y\ge 0$给出的支撑半距离带有些相近。本文探讨“相近”可能意味着什么，并从面积和周长的角度寻求更精确的近似。

引言

据说，在几何学中，所有重要事物都有三个版本：椭圆、抛物和双曲。因此，论文标题中提到的一些对象恰好具备这三个形容词，尤其令人欣喜。不过说得严肃些，在双曲几何中，椭圆抛物线是一类双曲二次曲面，其凸闭包就是这里所讨论的双曲、椭圆和抛物圆盘。

双曲、椭圆和抛物圆盘可以用不等式来描述

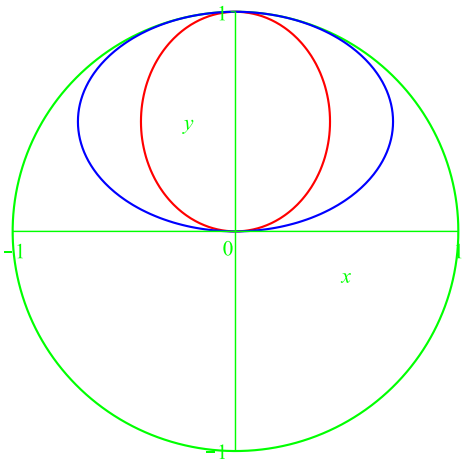
$$\frac{x^2}{C^2}+2y^2-2y\le 0 \tag{1}$$

($0<C<1$)，在基于单位圆盘的双曲几何贝尔特拉米–凯莱–克莱因模型中，在双曲全等的意义下。（在这一典范表示中，它看起来像是按比率 C压缩后的支撑极限圆盘，见图1(a)。）上述双曲、椭圆和抛物圆盘与其由不等式给出的支撑半距离带相当接近，例如

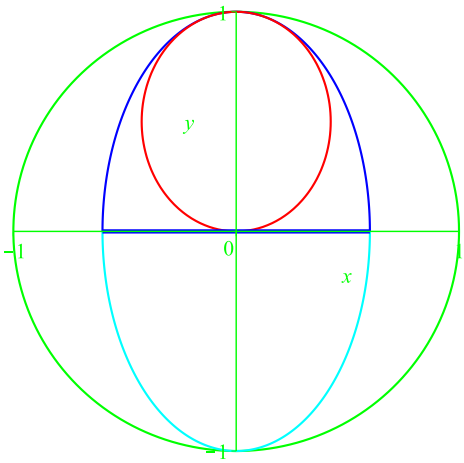
$$\frac{x^2}{C^2}+y^2-1\le 0 \qquad \text{and} \qquad y\ge 0. \tag{2}$$

（在这一典范表示中，支撑距离带看起来像是按比率 C压缩后的模型圆盘，而支撑半平面则由 h-椭圆抛物线顶点处的切线生成，见图1(b)。）只要对双曲椭圆抛物线哪怕只作极为简略的考察，这一现象就很难被忽略。（尤其是当它与综合几何视角相配合时。）双曲、椭圆和抛物圆盘及其支撑半距离带均为凸集（贝尔特拉米–凯莱–克莱因模型在这方面是忠实的），且前者包含于后者之中（从前者的内部点看，它们的边界见于 360° ），因此无论就面积还是周长而言，这种“逼近”都必然相当粗糙：双曲、椭圆和抛物圆盘在这些量上应具有“较少的量”（即便是无穷），少于支撑

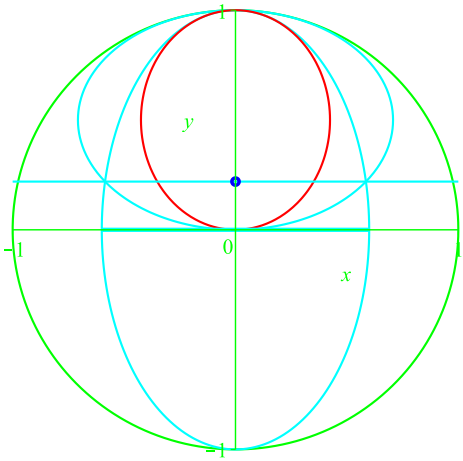
2020年 数学学科分类。主分类号：51M10，次分类号：51M09、51M25。关键词和短语。初等双曲几何，几何趣题，初等分析。



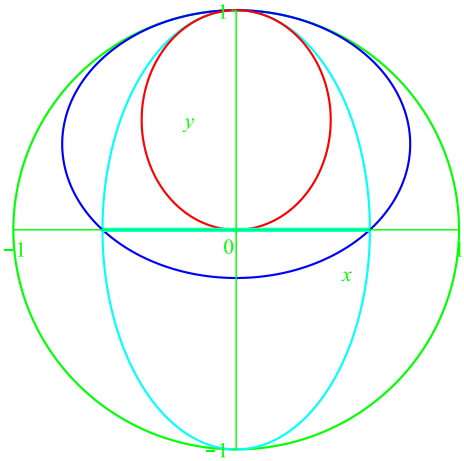
1(a) 支撑极限圆 [蓝色]。



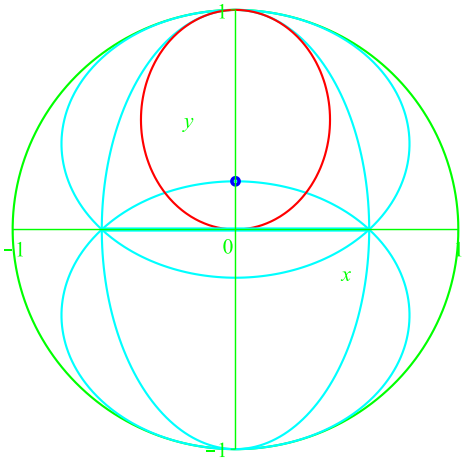
1(b) 支撑半距离带 [蓝色]。



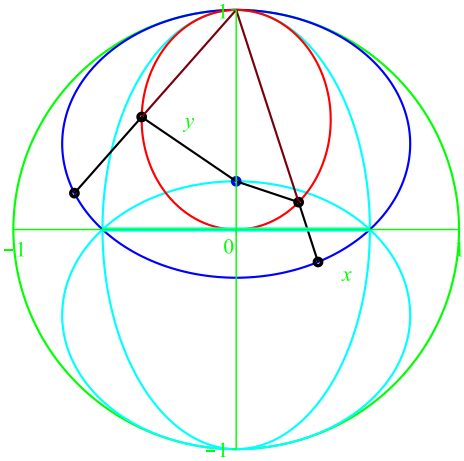
1(c) 焦点 I [蓝色]。



1(d) 准线极限圆 [蓝色]。



1(e) 焦点 II [蓝色]。



1(f) 焦距性质 [黑色]。

图 1 与 h-椭圆抛物线 [红色]相关的几何元素。

半距离带，但具有可比性（即便是无穷大）。本文将考察这一情形，并使这些陈述更为精确；纯粹出于兴趣。

现在，上述所考虑的双曲椭圆抛物线的焦点由点 $\left(0, \frac{C^2}{2-C^2}\right)$ 给出。（见图 1(c)。）因此，一个合理的猜测是用由不等式给出的半距离带来逼近双曲、椭圆和抛物圆盘

$$\frac{x^2}{C^2} + y^2 - 1 \leq 0 \qquad \text{and} \qquad y \geq \frac{C^2}{2 - C^2}.$$

这在一般情况下也不特别奏效；但在此过程中，我们毕竟可以找到在面积或周长方面替代双曲、椭圆和抛物圆盘的对象。

本文是对双曲圆锥曲线的一种宣传。它也呈现了关于（初等）双曲几何的图景。然而，它并非双曲几何的导论。它是为已经对双曲几何产生兴趣的人，或已修过双曲几何课程、并想检验自己的知识是否足够全面以处理双曲几何中一个相当次要问题的学生而写的。

1. 背景——双曲几何

双曲几何。经过欧几里得、萨凯里、兰伯特、施韦卡特、陶里努斯、高斯等人此前的诸多思考（尤以他们为著），参见施泰克尔、恩格尔 [76]，，双曲几何因罗巴切夫斯基 [54]（1829年）和鲍耶 [8]（1831年）的独立研究而登上历史舞台，参见博诺拉 [13]。原版著作不易获取（尤其是因为它们分别以俄语和拉丁语写成），不过有附有注释的译本，读来获益匪浅。关于罗巴切夫斯基的原著《几何原本》（或《原理》）[54]，，可参阅恩格尔 [55] 的德译本。此外，罗巴切夫斯基还发表了后续著作（深度不一），其中一些相对较早便有了法语或德语译本，参见 [56]（1837年）、[57]（1840年）（另见 [58]）。对我们而言，Papadopoulos [60] 编译的罗巴切夫斯基《泛几何学》《泛几何学》较新的英文版（俄文版：1855年，法文版：1856年）最为相关。这部作品原本是罗巴切夫斯基关于双曲几何的最后一部著作，或许也是他打磨得最完善的一部，但与他的早期作品相当接近。我认为 Papadopoulos 的注释版极为有用，尤其是因为它还为经典双曲几何的现有文献提供了很好的导读，其中包括基础著作的其他版本。（不过，由于多语环境的影响，书中偶尔会有笔误。）关于鲍耶的原著附录 [8]，，有哈尔斯特德 [9]，的优质英译本，而卡尔泰西 [12] 编注的版本则很有启发性。（一般而言，为了便于查阅，我们将优先引用英文文献；若无英文版本，则依次引用德文或法文、意大利文和俄文；最后才引用其他语言的文献，并注明语言。即使未来技术可预见地会进一步消除语言障碍，我们仍将如此。）罗巴切夫斯基和鲍耶的著作属于综合性的，但仅具半公理化性质。这当然不足为奇，因为当时尚未建立精确的公理体系；希尔伯特的《基础》[36] 原版（1899年）直到很久之后才出版。然而，罗巴切夫斯基和鲍耶都对缺少双曲几何相对于欧几里得几何的一致性证明感到不满。

双曲几何模型证明了一致性。（这里我们要指出，关于最初那些模型的起源，Stillwell [77] 提供了

不仅有出色的译文，还有深刻的评论。）贝尔特拉米–凯莱–克莱因圆盘模型由贝尔特拉米 [5] （1868年）提出。当然，从其视角来看，贝尔特拉米的工作偏向微分几何。（他著名的伪球面也出现在其中。）克莱因 [45] （1871年）（他了解贝尔特拉米 [5], [6]）将贝尔特拉米–凯莱–克莱因圆盘模型重新表述为纯粹的射影形式。他的工作受到凯莱 [17]的启发（因此得名；在当时，常曲率几何的统一是一个重要议题）。克莱因的工作明显偏向射影几何，他还为射影模型考虑了更一般的基底二次曲面。无论如何，贝尔特拉米和克莱因都得到了距离公式（3）。随后，贝尔特拉米[6] （1868年）继续研究共形球模型和半空间模型，时间早于庞加莱 [69]，维数也高于庞加莱所研究的情形。随后，克莱因 [46] （1873年）进一步阐述了与射影几何相关的若干问题。双曲面模型在 Killing [42] （1879年）的著作中略有提及，之后在Killing [43] （1880年）中得到了更详细的论述（另见Killing [44]）。Killing将这种一般的坐标化方法归功于魏尔斯特拉斯于1872年提出的工作（在正曲率的情形下，这一说法似乎确实如此）。这比庞加莱 [68] 和考克斯 [20]的工作稍早。尽管这些著作也都早于希尔伯特重新公理化的工作，但它们足以令人确信双曲几何的相对一致性。

然而，必须指出，罗巴切夫斯基和鲍耶已经在双曲几何中实现了某种计算上的普适性。具体来说，他们使用一种由坐标 (p, q) 表示的“直角坐标系” $\in \mathbb{R}^2$ ，其中 q 是点到一条固定的距离标定直线的有向距离，而 p是该点在固定直线上的垂直投影的标定值。在这个坐标系中，他们发现线元为 $(\mathrm{d}s)^2 = (\cosh \frac{q}{k})^2(\mathrm{d}p)^2 + (\mathrm{d}q)^2$。参见 [55], §21. (34)（注：$\cosh \frac{q}{k} = \frac{1}{\Pi \sin(q)}$）以及 [12] §32. (I–II)。（这里的 $k > 0$ 是度量相对于某个指定度量的缩放常数，稍后将对~~此作进~~一步说明。）尤其是，从现代观点来看，他们将双曲平面构造为一个黎曼空间。当然，当时黎曼几何尚未发展起来。黎曼于1854年发表了他那篇著名的演讲，这篇演讲本身也部分受到双曲几何的启发；直到 1868 [71], 才以印刷形式问世。参见 [72] （斯皮瓦克[75], 约斯特 [39]对此作了详尽评注）。值得注意的是，黎曼的著作最终对贝尔特拉米产生了多大影响，参见 [60] 以及阿尔卡拉·维森特 [3]。然而，另一个问题是，这种“直角坐标系”并不特别适合研究双曲平面的全等关系。

关于双曲几何的全面介绍包括 Coolidge [19] (1909年)、Som- merville [74](1914年)、Liebmann [51] (1905年)、 [52] (1912年)、 [53] (1923年)，以及克莱因 [49] (1928年)的遗著；该书以 [47], [48] (1893年)为基础，但后来经过重新编写，甚至引用了希尔伯特 [37] (1901年)的成果。这些书看起来或许有些过时，但事实并不完全如此：总的来说，双曲几何本身只有在第一次世界大战之前才相对处于数学界关注的前沿；此后，关注点转向了更一般的几何学，这在很大程度上要归功于黎曼、贝尔特拉米、克莱因、Killing、恩格尔、弗里德里希·恩格尔、弗里德里希·舒尔、希尔伯特、庞加莱等人的工作；至少，他们都曾受到双曲几何的启发。另一方面，双曲几何作为一种标准工具或研究背景，已经广泛存在于数学的多个分支中。因此，就现代数学而言，双曲几何（综合的）达到了与欧几里得几何（综合的）相同的地位；事实上，其地位甚至更高。因此，较新的双曲几何导论往往以学生为对象，讲述一个精彩的故事（有时还相当有激情，参见 G. Horváth [32]），或者采用较为简短的、以模型为基础的论述，而这些论述通常从属于

特定数学领域的需要。（不过，也有人讲述了一个略有不同的故事：第二次世界大战后，在匈牙利，鲍耶的工作被认为具有足够的民族性和国际性，值得引以为傲并在学术上加以推广。这促成了鲍耶的现代批评性译本 [10], [11] ；促成了罗巴切夫斯基著作的版本编纂 [59]；促成了 Kerékjártó 关于分别重新编写希尔伯特 [36] 和 F. Schur [73] 著作的译本出版 [40], [41]；还促成了 Rédei [70] 和 Szász [80], 的著作问世，这些著作大致分别秉承了克莱因和 Liebmann 的思想。事实上，双曲几何成为高中数学教师培训的一项内容，参见 Hajós、Strohmajer [35], （后者实际上大量沿用了鲍耶优雅的几何论证），以及 Szenthe、Juhász [81]。）

不过，我同意，现代简明的双曲几何论述（如 Berger [7]）足以介绍若干相关模型，并说明它们之间的典范过渡映射。之后，可以根据需要补充更多细节，最常见的是讨论全等群、距离或角度公式、圆周的描述、三角学、面积与角亏之间的关系、无穷小弧长和面积元（我会把这些称为标准主题）。另一方面，经验表明，研究双曲几何迟早也会培养出某种综合几何视角。

无论如何，对许多人而言，双曲几何是一种文化体验。的确，有时人们只是觉得双曲几何的种种特征颇为有趣，并无特别的实际意义。然而，就趣味数学而言，双曲几何不像欧几里得几何那样容易入门：初等双曲几何通常涉及比初等欧氏几何更多的分析（以及一般而言更多的计算）。（计算确实可能相当有效，但也可能让我们省去了几何洞见。）再加上研究双曲几何的人更容易受到数学家的标准评判，因此，要找到发表双曲几何趣闻的地方，总让人有些不安。即便如此，近几十年来，双曲几何大概还是变得更受欢迎了。

双曲平面与贝尔特拉米–凯莱–克莱因模型。 以单位圆盘为基础的贝尔特拉米–凯莱–克莱因模型，可以极其直接地引入双曲平面几何：令 h-点为平面上开单位圆盘内的点；令 h-直线为普通直线与开单位圆盘的非空交集（换言之，即普通直线在开单位圆盘上的非空截迹）。下文中，“h-”意为“从双曲几何的视角来看”。那么，这一关联几何就是以单位圆盘为基础的贝尔特拉米–凯莱–克莱因模型；更一般地说，双曲平面几何是指任何与这一关联模型抽象同构的关联几何。该关联模型的自同构就是直射变换（为清楚起见，也称为 h-直射变换）。更一般地说，双曲平面几何是指所有能够从其关联结构自然构建出来的事物，也就是说，直到 h-直射变换为止。（有趣的是，双曲几何是一种纯粹的直射几何。这与欧几里得几何不同：欧几里得几何的直射几何是仿射几何；球面几何也与之不同：其直射几何是二重覆盖射影几何。）

构建过程中的自然元素如下：尽管我们无法仅凭关联几何自然地重构单位圆盘的环境欧几里得空间，但我们可以重构环境射影平面（即欧几里得平面的射影闭包）。其中一个论据是，利用笛沙格定理，我们可以检验 h平面中 h线的射影共点性，因此可以刻画线束的轨迹

从而抽象地得到环境射影平面中的点；等等。特别是， h直射变换将抽象地延拓为环境射影平面上的某些共线变换。根据射影几何基本定理，我们可以轻松概览（h）直射变换。在BCK模型看来，我们发现，h直射变换恰好是那些将单位圆映射到自身的共线变换的轨迹。（就射影平面的抽象重构而言，单位圆对应于所谓的“绝对”，即“渐近点”的二次曲面。）因此， h直射变换群自然同构于 $\mathrm{PO}(2,1) \simeq \mathrm{O}^{\uparrow}(2,1)$。对 h直射变换的这一概览足以使我们能够在双曲几何中使用射影工具。特别是，利用射影结构，我们可以自然地为 h平面赋予拓扑。（尽管直接从关联结构进行拓扑化也非常简单，因为开半平面很容易定义。）利用射影结构，更确切地说，利用（绝对的）二次曲面，我们可以在任意选定的缩放参数 $k > 0$下定义h平面上的自然度量，使得在BCK模型中有

$$\mathrm{dist}^{[k]}_{\mathrm{BCK}}\left((x_1,y_1),(x_2,y_2)\right) = k\,\mathrm{arcosh}\,\frac{1-x_1x_2-y_1y_2}{\sqrt{1-(x_1)^2-(y_1)^2}\sqrt{1-(x_2)^2-(y_2)^2}}. \tag{3}$$

事实上，这些度量可以刻画为在 h-共线变换下不变的度量：对于任意两个点，其 h中点（h对称中心）到任一原点的距离，等于这两个原点之间距离的一半。不同的选择 k会导出不等价的度量。以一种自然但复杂的方式，$\mathrm{dist}^{[k]}_{\mathrm{BCK}}$ 还可进一步刻画为使高斯曲率为 $-\frac{1}{k^2}$的度量；而以一种简单得多、但不那么自然的方式，$\mathrm{dist}^{[k]}_{\mathrm{BCK}}$ 还可进一步刻画为这样一种度量：在渐近三角形中，中心（对称线的交点）到各边的距离为 k 反双曲正切 1 2。然而， k纯粹是一个缩放常数；尽管有时会类比球面几何而保留它，选择 $k = 1$才最为自然；它可以说表示自然的自然双曲度量。下文中我们使用 $k \equiv 1$。（但请注意，在较早的文献中，“虚几何”的观念是被认真对待的。在那些文献中使用 $k_{\mathrm{old}} = \mathrm{i}k$，例如用 $\cos\frac{d}{k_{\mathrm{old}}}$ 代替 $\cosh\frac{d}{k}$。例如，Coolidge [19] (1909年)相当不赞成使用双曲余弦，甚至克莱因 [49] (1928年)也只是勉强使用；然而，Liebmann [51] (1905年)和 Sommerville [74] (1914年)的用法已经符合现代惯例。尽管如此，那些关于“虚几何”的早期著作却有一种奇特的现代感，而且在某种意义上颇具数学家的风格。）在 BCK 模型中，连接 h点的 h线段（无论是从 h直线的拓扑性质推得，还是从 h度量角度定义）对应于连接单位圆盘中相应点的普通欧几里得线段，等等。归根结底，在基于单位圆盘的 BCK 模型中自然定义的概念，一旦公理体系得到澄清，就会形成双曲平面几何的一个模型，而且显然，即使在此之前也是如此；高维推广也同样直接。

与 BCK模型相关的其他特征将在后文需要时再作回顾。不过，通常假定读者熟悉BCK模型，并能够在其中进行计算。无论如何，BCK模型为呈现双曲几何提供了一种相对简单的方式，也能有效地完成至少某些计算。

双曲圆锥曲线。双曲圆锥曲线的系统研究显然始于 Story [78] （1882年）。Killing [44] （1885年）通过更具综合性的阐释，补充了这种解析方法。随后，D’Ovidio 也讨论了双曲圆锥曲线

[24], [25], [26] （1891年）、Barbarin [4] （1901年）、Liebmann [50] （1902年）、Massau [61] （1905年）、Liebmann [51], Coolidge [19]。Vörös[82] / [83] （1909/10年）对圆锥曲线进行了非常详尽的研究。（为便于比较，关于二次曲面的平行研究记录包括 Barbarin [4], Coolidge [18] （1903年）、Bromwich [16] （1905年）、Coolidge [19], 和 Vörös [84] （1912年）。）因此可以说，到1910年，双曲圆锥曲线已得到相当充分的研究；不过，上述文献并非都同样容易获取。归根结底，关键在于， h圆锥曲线最简单的定义方式，是将其视为射影模型（最简单的例子是贝尔特拉米–凯莱–克莱因模型）中的圆锥曲线。这样一来，它们便具有与欧几里得情形类似的综合描述（本质上是焦点描述）和性质。Sommerville [74] 和 Klein [49] 也讨论过双曲圆锥曲线；但由于缺乏具体应用，人们对它们的普遍兴趣逐渐减退。（参见 Liebmann [51], [52], [53]。）后来的研究中，以下几项较为值得关注：Fladt [28], [29], [30]进一步讨论了双曲圆锥曲线分类的算术方面。Epshtein [27], Pevzner [65], [66], [67], Molnár [62], [63], [64]采用不同方法重新探讨了双曲圆锥曲线。（另请参阅其中引用的文献。）近年来，双曲圆锥曲线受到了一定关注，参见 G. Horváth [34], Weiss [85], Izmestiev [38], Csima, Szirmai [22], Božić Dragun, Koncul [15], 及其中引用的文献。事实上，对于非双曲几何专家而言，Izmestiev [38] 的阐述或许是一个不错的入门选择。不过，本文除圆周外，只讨论一种双曲圆锥曲线： h椭圆抛物线，下面将对此作出解释。但读者需要熟悉圆周（作为标准主题的一部分）。

2. 双曲椭圆抛物线简介

h-椭圆抛物线这一名称及其解析描述源自 Story [78]。考虑到双曲圆锥曲线的分类，这个名称相当贴切。（分类可参阅 Fladt [28] ，不过其中图11、12、13、14应分别重新标为图12、14、11、13；或者，也可以将图11–14中的整组图片顺时针旋转。此外，也可参阅 Izmestiev [38]中的图24–26。）接下来，我们将讨论 h-椭圆抛物线的焦点。

焦点的解析方法。我们来考虑标准方程

$$\frac{x^2}{C^2} + 2y^2 - 2y \overset{\leftrightarrow}{=} 0. \tag{4}$$

（这里， $\overset{\leftrightarrow}{=}$ 表示我们确实认真对待等式，但仅在形式上且忽略非零标量的意义下。）若改用齐次坐标 $[x_1, x_2, x_3]$ （其中有 $x = \frac{x_1}{x_3}$ 和$y = \frac{x_2}{x_3}$） ，则（4）可改写为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \frac{1}{C^2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \overset{\leftrightarrow}{=} 0. \tag{5}$$

用对偶齐次坐标 $[\xi_1, \xi_2, \xi_3]'$表示的对偶圆锥曲线为

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \frac{1}{C^2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} C^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} \overset{\leftrightarrow}{=} 0. \tag{6}$$

也就是说

$$C^2(\xi_1)^2 - 2\xi_2\xi_3 - 2(\xi_3)^2 \overset{\leftrightarrow}{=} 0. \tag{7}$$

同样，绝对值具有通常的形式方程

$$x^2 + y^2 - 1 \overset{\leftrightarrow}{=} 0, \tag{8}$$

带有对偶圆锥曲线

$$(\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 - (\xi_3)^2 \overset{\leftrightarrow}{=} 0. \tag{9}$$

于是，经过简单计算可得，由（7）和（9）生成的线束只包含两个奇异圆锥曲线。它们是

$$C^2 \cdot \left((\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 - (\xi_3)^2\right) - \left(C^2(\xi_1)^2 - 2\xi_2\xi_3 - 2(\xi_3)^2\right) \overset{\leftrightarrow}{=} 0. \tag{10}$$

and

$$1 \cdot \left((\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 - (\xi_3)^2\right) - \left(C^2(\xi_1)^2 - 2\xi_2\xi_3 - 2(\xi_3)^2\right) \overset{\leftrightarrow}{=} 0. \tag{11}$$

第一个是在对偶射影平面中的一对直线，在环境射影平面中对应一对点；而第二个在对偶射影平面中只是一个点椭圆（一对虚直线）。

事实上，（10）可化简为

$$(\xi_2 + \xi_3)(C^2\xi_2 + (2 - C^2)\xi_3) \overset{\leftrightarrow}{=} 0.$$

这里，因子 $\xi_2 + \xi_3 \overset{\leftrightarrow}{=} 0$ 对应点 $[0, 1, 1] = (0, 1)$，而因子$C^2\xi_2 + (2 - C^2)\xi_3 \overset{\leftrightarrow}{=} 0$对应点 $[0, C^2, 2 - C^2] = \left(0, \frac{C^2}{2-C^2}\right)$。因此，我们可以称 $(0, 1)$ 和 $\left(0, \frac{C^2}{2-C^2}\right)$ 为这个双曲圆锥曲线的焦点，但只有第二个点是真双曲点，而第一个点则可更简洁地描述为该圆锥曲线唯一的渐近点。（相比之下，（11）可化简为

$$(1 - C^2)(\xi_1)^2 + (\xi_2 + \xi_3)^2 \overset{\leftrightarrow}{=} 0,$$

由此，我们无法像前面那样提取出两个射影点。）

乍看之下，这似乎有些古怪，但对于具备解析射影几何经验的人来说，这套故弄玄虚的做法足以让他们相信，我们的h-椭圆抛物线的焦点（或焦点们）应如此确定。

[这与欧几里得情形有类比：例如，我们来考虑抛物线

$$x^2 - 2py \overset{\leftrightarrow}{=} 0,$$

其中 $p > 0$。对偶圆锥曲线为

$$(\xi_1)^2 - \frac{2}{p}\xi_2\xi_3 \overset{\leftrightarrow}{=} 0. \tag{12}$$

对偶欧几里得绝对由下式给出

$$(\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 \overset{\leftrightarrow}{=} 0. \tag{13}$$

（这个对象只存在于对偶图景中。它将欧几里得度量编码为一个非零倍数。不必担心，毕竟在真正的欧几里得几何中，并不存在自然的距离尺度。）由 (12) 和 (13) 生成的线束中有两个奇异圆锥曲线：第一个是

$$1 \cdot \left((\xi_1)^2 + (\xi_2)^2\right) - \left((\xi_1)^2 - \frac{2}{p}\xi_2\xi_3\right) \overset{\leftrightarrow}{=} 0, \tag{14}$$

第二个则是 (13) 本身。其中，第一个在对偶射影空间中是一对直线：(14) 可简化为

$$\xi_2\left(\xi_2+\frac{2}{p}\xi_3\right)\overset{\leftrightarrow}{=}0.$$

因子$\xi_2 \overset{\leftrightarrow}{=} 0$ 对应于点 $[0,1,0]$, ，该点是抛物线的理想点；因子 $\xi_2+\frac{2}{p}\xi_3 \overset{\leftrightarrow}{=} 0$对应于点 $[0,1,\frac{2}{p}]=\left(0、\ \frac{p}{2}\right)$。它们是抛物线的两个焦点，但只有第二个是真正的欧几里得点。]

至此结束了我们的 h-椭圆抛物线焦点的解析几何动机。（ h-圆锥曲线的一般情形更为复杂，参见 Story [78],Izmestiev [38]）。

焦点的综合方法。对 h-椭圆抛物线、尤其是其焦点的一种综合解释由 Killing [44], 给出，但详细论述则由 Liebmann [50]给出。根据这一综合解释，我们典范的 h-椭圆抛物线的（普通）点，是与焦点 $F^C=\left(0,\frac{C^2}{2-C^2}\right)$ 以及极限圆距离相等的 h-点，该极限圆的方程

$$(15)\qquad (x^2+y^2-1)+(1-C^2)(y-1)^2\equiv x^2+(y-1)((2-C^2)y+C^2)=0.$$

（参见图 1.(f)。）这种解释一点也不令人意外，因为从渐近点（尤其是从渐近焦点）出发的任何正则化距离，都是到具有给定渐近点的极限圆的有向距离。

我们将证明这一刻画：一般来说，点到极限圆的距离总是沿着极限圆的一条轴测量的，也就是说，沿着一条经过极限圆渐近点的直线测量。由于极限圆 (15) 的渐近点为 (0, 1)，因此，我们可以根据直线 l_t 与 $x+t(y-1)=0$ 的交点，对我们的 h-椭圆抛物线和极限圆进行参数化，其中 $t\in\mathbb{R}$。在这种参数化下， h-椭圆抛物线上的对应点为

$$P^C(t)=\left(\frac{2tC^2}{2C^2+t^2},\frac{t^2}{2C^2+t^2}\right),$$

而极限圆上的对应点为

$$H^C(t)=\left(\frac{2t}{2-C^2+t^2},\frac{-C^2+t^2}{2-C^2+t^2}\right).$$

（参见图 1.(f)。）于是我们可以验证

$$\mathrm{dist}_{\mathrm{BCK}}(H^C(t),P^C(t))=\mathrm{dist}_{\mathrm{BCK}}(P^C(t),F^C).$$

事实上，两边化简后得到

$$=\operatorname{arcosh}\frac{C^2(2-C^2)+(1-C^2)t^2}{2C\sqrt{(1-C^2)(C^2+(1-C^2)t^2)}}=\operatorname{artanh}\frac{C^2C^2+(1-C^2)t^2}{C^2(2-C^2)+(1-C^2)t^2}.$$

另一方面， l_t与 $H^C(t)$的垂直平分线以及 F^C至多交于一点，因此， $X=P^C(t)$是 l_t上唯一满足 $\mathrm{dist}_{\mathrm{BCK}}(H^C(t)\ X)$ $=\mathrm{dist}_{\mathrm{BCK}}(X,F^C)$ 的 h点。这证明了 Killing 的刻画是成立的。

（准线极限圆不要与准线（$3C^2-2$）$y\overset{\leftrightarrow}{=}C^2$混淆，后者是焦点 F^C 关于 h椭圆双曲线的极线。后者具有一定的几何意义，详见 Story [78] 或 Izmestiev [38] ，但它甚至不一定会产生一条真正的双曲直线。）

以综合方式关联的几何元素。方程为

$$(x^2+y^2-1)+(y-1)^2 \equiv x^2+2y^2-2y=0. \tag{16}$$

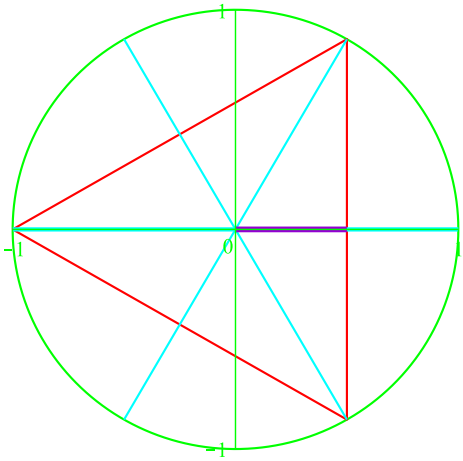
可称为标准 h-椭圆抛物线的支撑极限圆。参见图 1.(a)。（“极限圆”也称为“抛物圆”，这个名称十分传神，可惜在英语中并不常用。）从综合几何的角度看，它给出了包含该 h- 椭圆抛物线的最小极限圆盘。支撑极限圆与该 h- 椭圆抛物线仅交于一个特殊点，即 h-椭圆抛物线的顶点。（在此处的标准情形中，该点为 (0, 0)。）连接该 h-椭圆抛物线的顶点与渐近点的 h-直线即为其坐标轴；显然，它是该 h-椭圆抛物线唯一的对称轴。（在此处的标准情形中，它是直线 $x=0$。）支撑距离带 $\frac{x^2}{C^2}+y^2-1\leq 0$ 从综合几何的角度看，是所有与该 h-椭圆抛物线相交且坐标轴与该 h-椭圆抛物线相同的等距线之并集的闭包。（“等距线”也称为“超圆”，有时会使用这个名称。）在标准图示中，这一点可以非常直观地看出：该 h-椭圆抛物线是支撑极限圆的 C-压缩版本，而支撑距离带则是单位圆盘的 C-压缩版本。支撑半平面 $y\geq 0$ 是包含该 h-椭圆抛物线的半平面，其边界直线在该抛物线的顶点处与之相切。支撑半距离带是支撑距离带与支撑半平面的交集。（参见图 1.(b)。）焦点可以表征为：支撑极限圆与支撑距离带边界的交点沿垂直于坐标轴的方向投影到坐标轴上所得的点。（在标准图示中，这些交点为 $\left(\pm\frac{2C\sqrt{1-C^2}}{2-C^2},\frac{C^2}{2-C^2}\right)$；由于中心性，欧几里得垂直投影忠实地反映了模型中的关系。参见图 1.(c)。）准线极限圆 (15) 可以表征为经过该 h-椭圆抛物线的渐近点以及支撑半距离带顶点的极限圆。（在标准图示中，后者的顶点为 $(\pm C, 0)$。参见图 1.(d)。）焦点和准线极限圆彼此之间还有如下表征方式：焦点与顶点之间的距离就是焦距。（在此处的标准情形中，该距离为反双曲正切 $\frac{C^2}{2-C^2}$。）若将支撑极限圆沿其任一坐标轴，朝远离渐近点的方向平移焦距，就会得到准线极限圆。反过来，将准线极限圆关于顶点处的切线反射后，它与坐标轴的交点就是焦点。（参见图 1.(e)。）根据前文讨论可知，渐近点、支撑极限圆、顶点、坐标轴、（非渐近）焦点以及准线极限圆，都可以通过相对于该 h-椭圆抛物线的综合几何关系简单地加以表征。

此外，若给定一条（准线）极限圆及其内部的一个（焦点）点，则可将它们移至标准位置，从而得到一条标准的 h-椭圆，等等。最终，h-椭圆抛物线在解析上和综合上都可以设想为与普通欧几里得抛物线颇为相似。

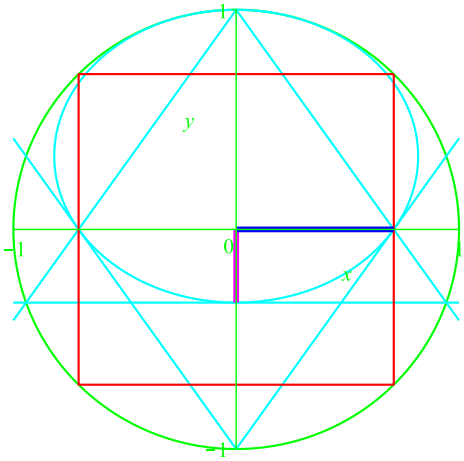
值得注意的距离以及对 h-椭圆抛物线的度量。在开始之前，让我们在此指出$\mathrm{dist}_{\mathrm{BCK}}((0,0),(t,0))$ $=\mathrm{dist}_{\mathrm{BCK}}((0,0),(0,t))$ =反双曲正切 t。

此前，我们已经指出，距离$_{1\ 2}$ 自然对数~~3~~ = 反正切$_{1\ 2}$ 可以（相对于 $k=1$）利用渐近三角形从几何上加以刻画，参见图2(a)。另一个

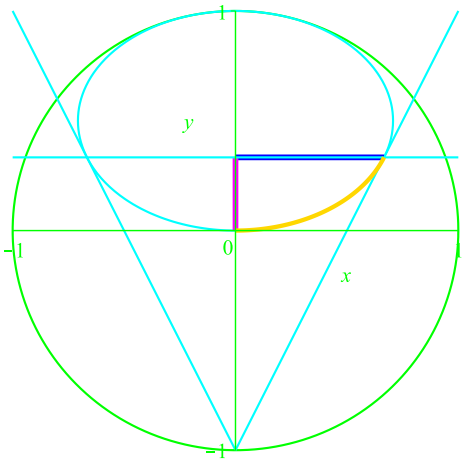
图2 值得注意的距离以及对 h-椭圆抛物线的度量。 →



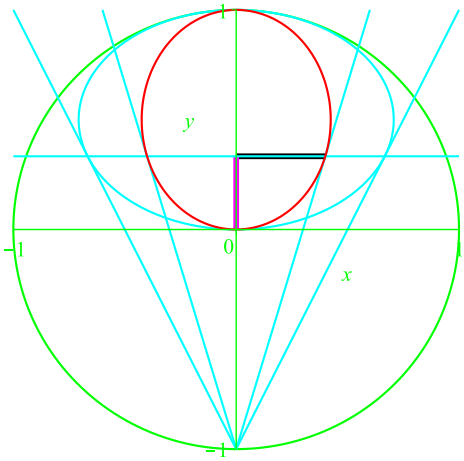
2(a) 1 2 自然对数 3 = 反正切 $\frac{1}{2}$ [紫色]。



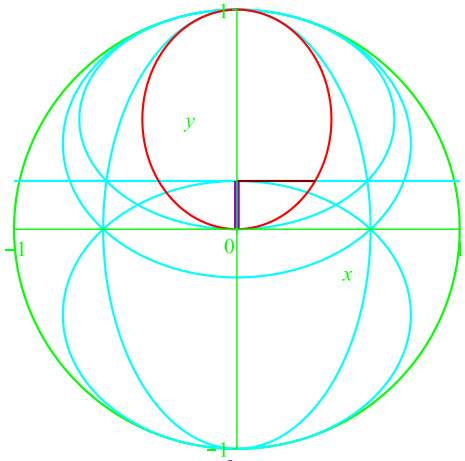
2(b) 自然对数$(1+\sqrt{2})$ = 反正切 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ = 双曲正弦 1 [蓝色], (以及 1 2 自然对数 2 = 反正切 $\frac{1}{3}$ [洋红色])。



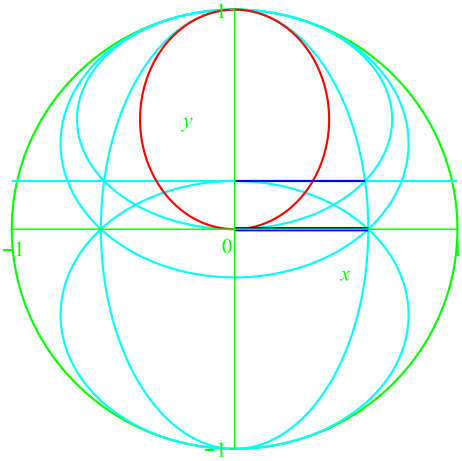
2(c) 1 2 自然对数 2 = 反正切 $\frac{1}{3}$ [洋红色],
自然对数$(1+\sqrt{2})$ = 反正切 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ = sinh 1 [蓝色],
以及 1（按弧长计） [金色]。



2(d) 1 2 自然对数 2 = 反正切 $\frac{1}{3}$ [洋红色]
反双曲正切$(\frac{\sqrt{2}}{2}C)$ = 反双曲正弦 $\sqrt{\frac{C^2}{2-C^2}}$ [黑色]。



2(e) 反双曲正切 $\frac{C^2}{2-C^2}$ = 自然对数 $\frac{1}{\sqrt{1-C^2}}$ [紫色],
自然对数 $\sqrt{\frac{1+C}{1-C}}$ [蓝色]。反双曲正切C^2 [棕色]。



2(f) 反双曲正切 $C =$

这样的距离是 $\ln(1+\sqrt{2}) = \text{反正切}\ \frac{\sqrt{2}}{2} = \sinh 1$，可以参照渐近正方形从几何上刻画，见图2(b)。然而，这个距离以及距离 $\frac{1}{2}\ln 2 = \text{反正切}\ \frac{1}{3}$，都可以简单地使用极限圆来刻画。事实上，如果取一个极限圆和任意一个外部渐近点，那么就可以作出极限圆的两条切线；在由此得到的弦式角平分构形中，如图2(c)所示，上述距离可以据此刻画。（如果极限圆是标准极限圆，且外部渐近点为 $(-1,0)$，那么切线为 $\pm 2x - y - 1 = 0$，切点为 $(\pm\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$，而外部渐近点关于该极限圆的极线为 $y = 1/3$。）就刻画距离（尺度）而言，这也特别简洁，因为朝向（任意）外部渐近点的极限圆弧长度恰好为 $2\cdot 1$。（参见 $\mathrm{L}^{\mathrm{hyp}}(\partial^{\cup} E^1_\eta) = 2\sqrt{\frac{2\eta}{1-\eta}}$ 稍后((28))中关于 $\eta = 1/3$ 的内容。）

对于任何具有类似设置的 h-椭圆抛物线，特征距离 $\frac{1}{2}\ln 2 = \operatorname{arctan}\frac{1}{3}$ 也同样存在，但外部渐近点应选为坐标轴的渐近点，且该点不在 h-椭圆抛物线的（闭包）中（即“反轴渐近点”），见图2(d)。图2(d)中的这一构型可用于测量 C，而无需参照支撑距离带。图2(e)中展示了焦距 $\operatorname{artanh}\frac{C^2}{2-C^2} = \ln\frac{1}{\sqrt{1-C^2}}$ 和“经典参数” $\operatorname{artanh} C^2$。图2(f)中展示了支撑距离带的半径 $\operatorname{artanh} C$。（如果将 h-椭圆抛物线视为 h-椭圆的极限对象，那么该半径对应于短半轴长。）用综合几何的术语来说，半径的双曲余弦等于焦距的指数函数（$\cosh\operatorname{artanh} C = \frac{1}{\sqrt{1-C^2}} = \exp\operatorname{artanh}\frac{C^2}{2-C^2}$）。

3. The area

面积差的计算。设

$$E^C = \left\{(x,y) : \frac{x^2}{C^2} + 2y^2 - 2y \le 0\right\}, \tag{17}$$

and

$$B^C = \left\{(x,y) : \frac{x^2}{C^2} + y^2 - 1 \le 0 \quad \text{and} \quad 0 \le y\right\}.$$

我们的首要目标是计算 $E^C \setminus B^C$ 的双曲面积。

众所周知，BCK模型中的面积密度为

$$\mathrm{da}_{\mathrm{hyp}}(x,y) = \frac{1}{(1-x^2-y^2)^{3/2}}\,|\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y|.$$

利用这一点，我们可以有效地处理面积问题。

Set

$$B^C_\eta = B^C \cap \{(x,y) : y \le \eta\}$$

（参见图 5(a)）。那么 B^C_η 是属于线段 $\{0\}\times[0,\eta]$ 的距离带。作为热身，我们可以计算它的双曲面积：

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{\mathrm{hyp}}(B^C_\eta) &= \int_{y=0}^{\eta}\int_{x=-C\sqrt{1-y^2}}^{C\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{(1-x^2-y^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{y=0}^{\eta}\left[\frac{x}{(1-y^2)\sqrt{1-x^2-y^2}}\right]_{x=-C\sqrt{1-y^2}}^{C\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$= \int_{y=0}^{\eta} \frac{2C}{(1-y^2)\sqrt{1-C^2}}\,\mathrm{d}y$$
$$= \frac{2C}{\sqrt{1-C^2}}\operatorname{artanh}\eta.$$

（在此及下文中，如果积分结果可以作为原函数使用，我们就不再单独调用原函数。）

当然，这一结果并不需要完整了解密度函数：面积必定与线段 $\{0\}\times[0,\eta]$ 的双曲长度成正比，而该长度为 $\operatorname{arctan}\eta$；求出系数 $\frac{2C}{\sqrt{1-C^2}}$ 并不困难，尽管从相应的弧长公式推导它时需要进行一些分析。事实上，罗巴切夫斯基和鲍耶都能够使用他们的直角坐标系计算出这样的面积：他们知道，弧元与坐标轴之间的有向面积为 $(\sinh\ q)\,\mathrm{d}p$。（为了与我们的设定进行比较：在当前情形中，直角坐标系附着于直线 $x=0$，因此 $p=(\operatorname{sgn}\ y)\operatorname{dist}_{\mathrm{BCK}}((0,0),(0,y))$ $=\operatorname{artanh}\ y$，以及 $q=-(\operatorname{sgn}\ x)\operatorname{dist}_{\mathrm{BCK}}((0,y),(x,y))$ $=-\operatorname{artanh}\frac{x}{\sqrt{1-y^2}}$。）关于

这里的等距线为 $q=\pm$反双曲正切C(常数)。这意味着待计算的面积为 $2\cdot$双曲正弦(反双曲正切C) $\cdot$反正切 $\eta=2\cdot\frac{C}{\sqrt{1-C^2}}\cdot$反正切 η。（我们指出，罗巴切夫斯基尤其着迷于由双曲面积计算得出的解析公式。）（在下文中，为简单起见，“罗巴切夫斯基和鲍耶已知”可理解为指罗巴切夫斯基 [60] 和鲍耶 [12]。）

接下来我们计算.....的面积

$$E_\eta^C = E^C \cap \{(x,y)\,:\,y\le\eta\} \tag{18}$$

$\subset B_\eta^C$（参见图 5(a)）。这里

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{\mathrm{hyp}}(E_\eta^C) &= \int_{y=0}^{\eta}\int_{x=-C\sqrt{2y(1-y)}}^{C\sqrt{2y(1-y)}} \frac{1}{(1-x^2-y^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \int_{y=0}^{\eta}\left[\frac{x}{(1-y^2)\sqrt{1-x^2-y^2}}\right]_{x=-C\sqrt{2y(1-y)}}^{C\sqrt{2y(1-y)}}\mathrm{d}y\\ &= \int_{y=0}^{\eta}\frac{2C\sqrt{2y}}{(1-y^2)\sqrt{1+y-2C^2y}}\,\mathrm{d}y\\ &= \frac{2C}{\sqrt{1-C^2}}\operatorname{artanh}\left(\frac{\sqrt{2\eta}\sqrt{1-C^2}}{\sqrt{1+\eta-2\,C^2\eta}}\right)-2\arctan\left(\frac{C\sqrt{2\eta}}{\sqrt{1+\eta-2\,C^2\eta}}\right).\end{aligned}$$

将 $\frac{2C}{\sqrt{1-C^2}}$反双曲正切.....改写为 $\frac{2C}{\sqrt{1-C^2}}$自然对数.....，可使用反双曲正切 $\eta=$自然对数 $\frac{\sqrt{1+\eta}}{\sqrt{1-\eta}}$，或者，

$$\operatorname{artanh}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{A}} = \ln\frac{\sqrt{A}+\sqrt{a}}{\sqrt{A-a}} \qquad (0<a<A),$$

分别可得

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{\mathrm{hyp}}(B_\eta^C\setminus E_\eta^C) &= \mathbf{A}_{\mathrm{hyp}}(B_\eta^C)-\mathbf{A}_{\mathrm{hyp}}(E_\eta^C)\\ &= \frac{2C}{\sqrt{1-C^2}}\ln\frac{\sqrt{1+\eta}}{\sqrt{1+\eta-2\,C^2\eta}+\sqrt{2\eta}\sqrt{1-C^2}}+2\arctan\frac{C\sqrt{2\eta}}{\sqrt{1+\eta-2\,C^2\eta}}.\end{aligned}$$

取极限 $\eta \nearrow 1$，得到

$$\mathbf{A}_{\mathrm{hyp}}(B^C \setminus E^C) = \frac{2C}{\sqrt{1-C^2}} \ln \frac{1}{2\sqrt{1-C^2}} + 2 \arctan \frac{C}{\sqrt{1-C^2}}.$$

因此，我们可以得出结论：半距离带 B^C 确实仅以有限面积 h支配椭圆抛物盘 E^C。稍作改写，可得

$$\mathbf{A}_{\mathrm{hyp}}(B^C \setminus E^C) = \frac{2C}{\sqrt{1-C^2}} \left(\operatorname{artanh} \frac{C^2}{2-C^2} - \ln 2 \right) + 2 \arcsin C. \tag{19}$$

面积差的解释。令 $B^C_{\mathrm{up}\,\omega}$ 为将 B^C 沿 y轴向上平移双曲距离 ω 后所得的集合。注意，平移后的距离带为

$$B^C_{\mathrm{up}\,\omega} = \left\{ (x,y) : \frac{x^2}{C^2} + y^2 - 1 \le 0 \quad \text{and} \quad \tanh \omega \le y \right\}.$$

（遗憾的是，这种不变记号遵循的理念与 B^C_η的记号不同。事实上，后者本可以用更不变的形式记为 $B^C_{\text{lin-cut}\,\omega}$，其中含有$\omega$ =反双曲正切 η。）接下来，我们要寻找一个半距离带 $B^C_{\mathrm{up}\,\alpha(C)}$，使得$B^C_{\mathrm{up}\,\alpha(C)}$ 与 E^C 的面积“相等”。当然，这里的意思是

$$\int_{x^2+y^2<1} \left(\chi_{B^C_{\mathrm{up}\,\alpha(C)}}(x,y) - \chi_{E^C}(x,y) \right) \mathrm{da}_{\mathrm{hyp}}(x,y) = 0,$$

其中 χ 表示“示性函数”。利用（19）以及距离带线段的面积公式（该公式表明

$$\int_{x^2+y^2<1} \left(\chi_{B^C}(x,y) - \chi_{B^C_{\mathrm{up}\,\omega}}(x,y) \right) \mathrm{da}_{\mathrm{hyp}}(x,y) = \frac{C}{\sqrt{1-C^2}} \omega,$$

我们可以立即回答这个问题：

$$\alpha(C) = \operatorname{artanh} \frac{C^2}{2-C^2} - \ln 2 + \frac{\arcsin C}{C} \sqrt{1-C^2}.$$

这里，具有几何意义的量 $\alpha(C)$，是 $B^C_{\mathrm{up}\,\alpha(C)}$ 到 h-椭圆抛物线顶点的“支撑点”的距离。这并不完全是先前预期的焦距 $\operatorname{artanh} \frac{C^2}{2-C^2}$（尽管与之相差不远）：

尽管反双曲正切$\alpha(C)$ 随着 C 单调递增；我们发现

$$\lim_{C \searrow 0} \operatorname{artanh} \alpha(C) = 1 - \ln 2,$$

and

$$\lim_{C \nearrow 1} \operatorname{artanh} \alpha(C) - \operatorname{artanh} \frac{C^2}{2-C^2} = -\ln 2,$$

但一般而言，偏差

$$1 - \ln 2 > \operatorname{artanh} \alpha(C) - \operatorname{artanh} \frac{C^2}{2-C^2} > -\ln 2.$$

有界且单调递减。然而，

$$\lim_{C \nearrow 1} \frac{\mathbf{A}_{\mathrm{hyp}} \left(B^C_{\text{up artanh} \frac{C^2}{2-C^2}} \setminus E^C \right)}{\mathbf{A}_{\mathrm{hyp}} \left(E^C \setminus B^C_{\text{up artanh} \frac{C^2}{2-C^2}} \right)} = 1.$$

因此，以焦点为支撑的半距离带 B^C 向上反双曲正切 $\frac{C^2}{2-C^2}$ 用于近似 E^C，终究不算太差。尽管如此， $\alpha(C) =$ 反双曲正切 $\frac{C^2}{2-C^2}$ 仅在$C = 0.801986\ldots$时出现

我们提一下，(19) 还可以从几何角度作些解释。令 A^C 为顶点是（$\pm C$，0）和（0，1）的（部分）渐近三角形。它表示为

$$A^C = \{(x, y) : |x| \le C(1 - y) \quad \text{and} \quad 0 \le y\}.$$

其面积可计算为

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{\text{hyp}}(A^C) &= \int_{y=0}^{1} \int_{x=-C(1-y)}^{C(1-y)} \frac{1}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{y=0}^{1} \left[\frac{x}{(1-y^2)\sqrt{1-x^2-y^2}} \right]_{x=-C(1-y)}^{C(1-y)} \mathrm{d}y \\
&= \int_{y=0}^{1} 2\,\frac{C}{(1+y)\,\sqrt{(1-y)\,(1+y-C^2+C^2y)}} \,\mathrm{d}y \\
&= \left[-2 \arctan \frac{C\sqrt{1-y}}{\sqrt{1+y-C^2+C^2y}} \right]_{y=0}^{1} \\
&= 2 \arctan \frac{C}{\sqrt{1-C^2}} = 2 \arcsin C.
\end{aligned}$$

当然，这又是一次非常不严谨的计算；利用角亏计算三角形面积要简单得多：在非渐近顶点处，角度为 Π(反双曲正切 C) $=$反余弦 双曲正切 反双曲正切 $C =$反余弦 $C = \frac{\pi}{2} -$反正弦 C。因此，面积，也就是角亏，为 $\pi - 0 - 2(\frac{\pi}{2} -$反正弦 $C) = 2$ 反正弦 C。

现在我们可以得出

$$E^C = B^C_{\text{up artanh } \frac{C^2}{2-C^2}} + B^C_{3/5} - A^C \qquad \text{in hyperbolic area.} \tag{20}$$

（参见图3。）这可以理解为

$$\int_{x^2+y^2<1} \left(\chi_{B^C_{\text{up artanh } \frac{C^2}{2-C^2}}}(x, y) + \chi_{B^C_{3/5}}(x, y) - \chi_{A^C}(x, y) - \chi_{E^C}(x, y) \right) \mathrm{da}_{\text{hyp}}(x, y) = 0.$$

必须注意，有限面积的元素可以相当自由地放置。例如， B^C向上反双曲正切 $\frac{C^2}{2-C^2} + B^C_{3/5}$可以替换为 B^C向上反双曲正切 $\frac{C^2}{2-C^2}$−自然对数 2；此外， A^C可以将其放置，使其底边与支撑距离带的任意一条垂直直径重合，并使渐近方向朝上或朝下。

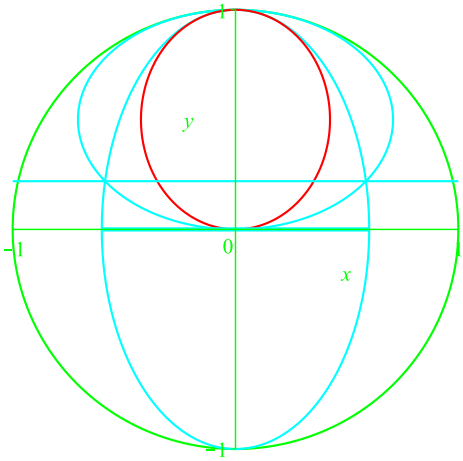
不过，还有一种比（20）更优雅的解释。首先，我们可以将定义（17）（以及（18））扩展到 $C = 1$的情形。由此得到支撑极限圆盘（在 η处作某种截断）。令

$$D^C = B^C \cap E^1,$$

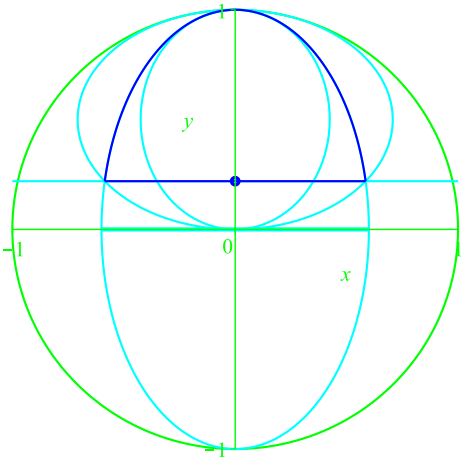
参见图4。显然， D^C 比 B^C更接近 E^C 。真正的问题在于，这种新的近似是否更优雅。

可以看出

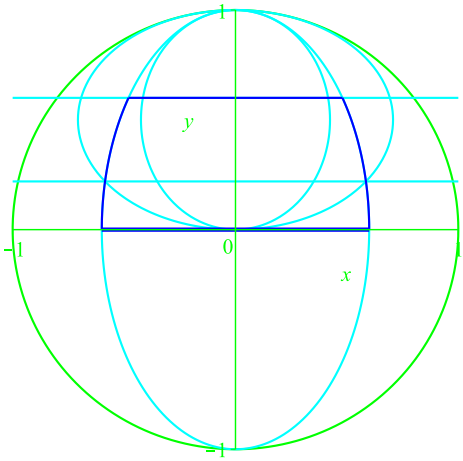
$$\mathbf{A}_{\text{hyp}}(D^C \setminus E^C) = \mathbf{A}_{\text{hyp}}(B^C \setminus E^C) - \mathbf{A}_{\text{hyp}}(B^C \setminus D^C)$$



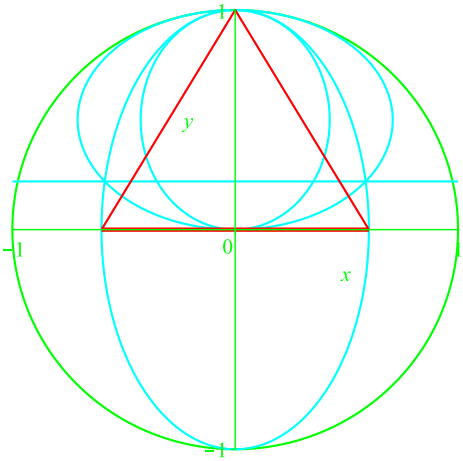
3(a) ∂E^C [红色]。



3(b) $\partial B^C_{\text{向上反双曲正切}\,C^2/(2-C^2)}$ [蓝色]。

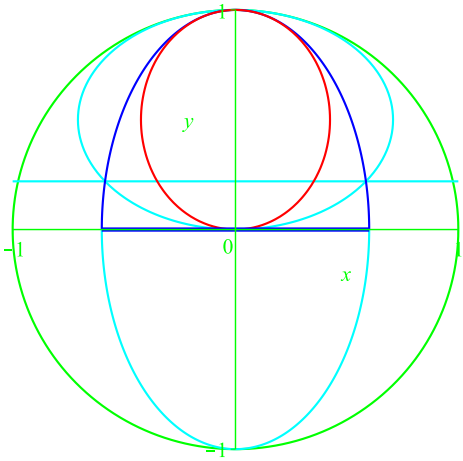


3(c) $\partial B^C_{3/5}$ [蓝色]。

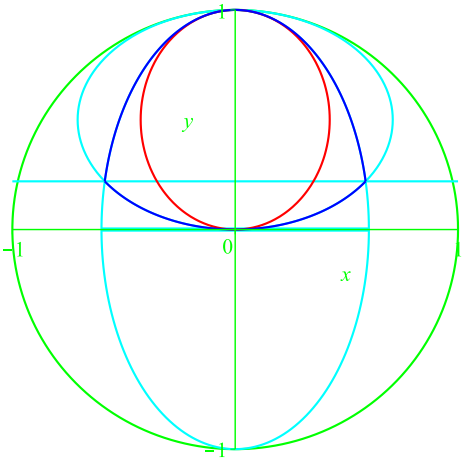


3(d) ∂A^C [红色]。

图3 对$E^C = B^C_{\text{up 反双曲正切}\,C^2/(2-C^2)} + B^C_{3/5} - A^C$ 双曲面积。



4(a) ∂E^C [红色], ∂B^C [蓝色]



4(b) ∂E^C [红色], ∂D^C [蓝色]。

图4 对 $E^C = D'^C_{\text{up}\,1-\text{自然对数}2}$ 在面积中。

$$
\begin{aligned}
&= \mathbf{A}_{\mathrm{hyp}}(B^C \setminus E^C) - \mathbf{A}_{\mathrm{hyp}}(B^C_{C^2/(2-C^2)} \setminus E^1_{C^2/(2-C^2)}) \\
&= \mathbf{A}_{\mathrm{hyp}}(B^C \setminus E^C) - \mathbf{A}_{\mathrm{hyp}}(B^C_{C^2/(2-C^2)}) + \mathbf{A}_{\mathrm{hyp}}(E^1_{C^2/(2-C^2)}).
\end{aligned} \tag{21}
$$

我们已经看到，$\mathbf{A}_{\mathrm{hyp}}(B^C_{C^2/(2-C^2)}) = \frac{2C}{\sqrt{1-C^2}}$ 反双曲正切 $\frac{C^2}{2-C^2}$。我们也可以计算 e

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}_{\mathrm{hyp}}(E^1_\eta) &= \int_{y=0}^{\eta} \int_{x=-\sqrt{2y(1-y)}}^{\sqrt{2y(1-y)}} \frac{1}{(1-x^2-y^2)^{3/2}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{y=0}^{\eta} \left[\frac{x}{(1-y^2)\sqrt{1-x^2-y^2}} \right]_{x=-\sqrt{2y(1-y)}}^{\sqrt{2y(1-y)}} \mathrm{d}y \\
&= \int_{y=0}^{\eta} \frac{2\sqrt{2y}}{(1-y^2)\sqrt{1-y}} \,\mathrm{d}y \\
&= 2\frac{\sqrt{2\eta}}{\sqrt{1-\eta}} - 2\arctan\frac{\sqrt{2\eta}}{\sqrt{1-\eta}}.
\end{aligned}
$$

上面的计算又有些多余。首先，我们本可以利用先前（更复杂的）计算，使用 $\mathbf{A}_{\mathrm{hyp}}(E^1_\eta) = \lim_{C\nearrow 1} \mathbf{A}_{\mathrm{hyp}}(E^C_\eta)$。其次，极限圆弧段的面积早已为罗巴切夫斯基和鲍耶所知。（它等于一个极限圆扇形的面积减去一个顶点处渐近的对称三角形的面积。）无论如何，这就得出：

$$
\mathbf{A}_{\mathrm{hyp}}(E^1_{C^2/(2-C^2)}) = 2\frac{C}{\sqrt{1-C^2}} - 2\arctan\frac{C}{\sqrt{1-C^2}}.
$$

比较式（19）、（21）以及我们刚才考察的面积，可得：

$$
\mathbf{A}_{\mathrm{hyp}}(D^C \setminus E^C) = \frac{2C}{\sqrt{1-C^2}}(1-\ln 2). \tag{22}
$$

令 $D^C_{\mathrm{up}\,\omega}$ 定义为将 D^C 沿着y坐标轴向上平移双曲距离 ω 后所得的图形。那么， D^C 与 $D^C_{\mathrm{up}\,\omega}$之间的面积差为$\frac{2C}{\sqrt{1-C^2}}\omega$（我们可以通过在 $y=\eta \gg 0$ 处切开并平移下半部分，再去掉重叠的距离带段，来理解它们之间的关系）。这意味着：

$$
E^C = D^C_{\mathrm{up}\,1-\ln 2} \qquad \text{in area.} \tag{23}
$$

这是一个出乎意料地简单的关系： E^C 与 D^C 向上平移 1 – 自然对数 2 个双曲距离后，面积相同。值得注意的是，平移距离并不取决于 C。

4. 周长

周长差的计算。 从理论上讲，比较 E^C 与 B^C 的周长，比比较面积稍微复杂一些，因为面积 $B^C \setminus E^C$ 可以直接计算。对于周长，则需要某种特定的解释。我们将简单地采用带截断 $y \le \eta$ 的正则化，记作 $\eta \nearrow 1$。面积计算中也用过这类截断，但当时它们只是为了方便计算。在这里，截断的作用是概念性的，用来指明一种特定的方法，而这种方法相当合理。

让我们详细解释我们的正则化过程。就边界而言，令

$$
\partial^{\cup} E^C_\eta = \partial E^C_\eta \cap \{(x,y) : y \le \eta\},
$$

and

$$\partial^{\cup} B_\eta^C = \partial B_\eta^C \cap \{(x,y) : y \le \eta\},$$

此外，令

$$M_\eta^C = [-C\sqrt{1-\eta^2}, -C\sqrt{2\eta(1-\eta)}] \times \{\eta\} \cup [C\sqrt{2\eta(1-\eta)}, C\sqrt{1-\eta^2}] \times \{\eta\},$$

参见图5。关于弧长 $\mathbf{L}_{\mathrm{hyp}}$，我们得到

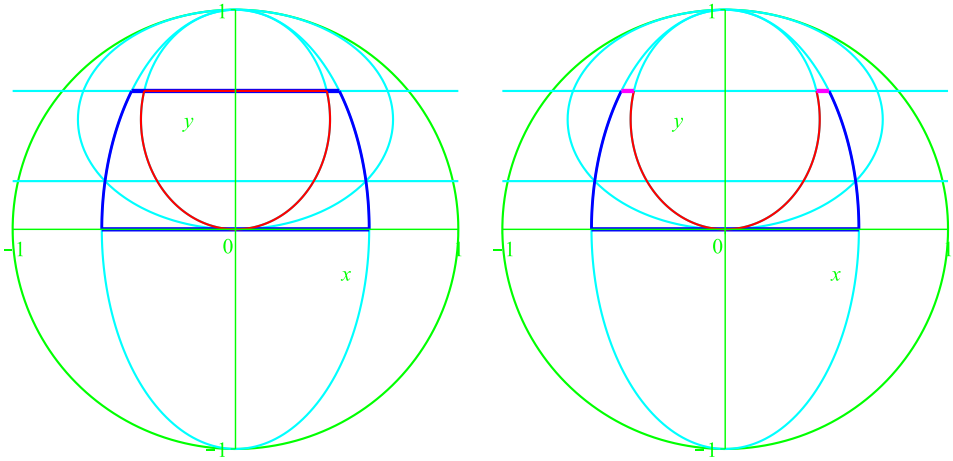
$$\mathbf{L}_{\mathrm{hyp}}\left(\partial^{\cup} B_\eta^C\right) - \mathbf{L}_{\mathrm{hyp}}\left(\partial^{\cup} E_\eta^C\right) + \mathbf{L}_{\mathrm{hyp}}(M_\eta^C) = \mathbf{L}_{\mathrm{hyp}}\left(\partial B_\eta^C\right) - \mathbf{L}_{\mathrm{hyp}}\left(\partial E_\eta^C\right) \ge 0.$$

（最后一个不等式成立，是因为我们讨论的是有界凸域，且一个包含在另一个之中。）

现在，只要 $\lim_{\eta\nearrow 1} \mathbf{L}_{\mathrm{hyp}}(M_\eta^C) = 0$ 且

$$\lim_{\eta\nearrow 1} \mathbf{L}_{\mathrm{hyp}}\left(\partial^{\cup} B_\eta^C\right) - \mathbf{L}_{\mathrm{hyp}}\left(\partial^{\cup} E_\eta^C\right) = G^C \tag{24}$$

存在，我们就可以确信， B^C 与 E^C 的周长之差为G^C。接下来，我们将进行这些计算。



5(a) ∂E_η^C [红色]， ∂B_η^C [蓝色]。

5(b) $\partial^{\cup} E_\eta^C$ [红色]， $\partial^{\cup} B_\eta^C$ [蓝色]，M_η^C [洋红色]。

图 5 线性截断。

首先，我们注意到

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_{\mathrm{hyp}}\left(M_\eta^C\right) &= 2\,\mathrm{dist}\left((C\sqrt{1-\eta^2},\eta),(C\sqrt{2\eta(1-\eta)},\eta)\right) \\
&= 2\,\mathrm{arcosh}\,\frac{\sqrt{\eta+1}-C^2\sqrt{2\eta}}{\sqrt{1-C^2}\sqrt{1+\eta-2\,C^2\eta}} \\
&= 2\,\mathrm{artanh}\,\frac{\left(\sqrt{\eta+1}-\sqrt{2\eta}\right)C}{\sqrt{\eta+1}-C^2\sqrt{2\eta}}.
\end{aligned}$$

这意味着

$$\lim_{\eta\nearrow 1} \mathbf{L}_{\mathrm{hyp}}\left(M_\eta^C\right) = 0,$$

确实如此。因此，我们可以通过考察（24）继续进行。

I众所周知，BCK模型中的弧长元（平方）由下式给出 y

$$\text{“}(\mathrm{d}s_{\mathrm{hyp}})^{2}\text{”} = \frac{(1-y^2)(\mathrm{d}x)^2 + 2xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + (1-x^2)(\mathrm{d}y)^2}{(1-x^2-y^2)^2}.$$

即， C^1 弧 γ 的双曲长度：$(a,b) \to \{(x,y)\colon\ \ x^2+y^2<1\}$ 为

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{\mathrm{hyp}}(\gamma) &= \int_{t=a}^{b} \sqrt{\frac{(1-(\gamma(t)_2)^2)(\dot\gamma(t)_1)^2 + 2\gamma(t)_1\gamma(t)_2\dot\gamma(t)_1\dot\gamma(t)_2 + (1-(\gamma(t)_1)^2)(\dot\gamma(t)_2)^2}{(1-(\gamma(t)_1)^2-(\gamma(t)_2)^2)^2}}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{t=a}^{b} \frac{\sqrt{(1-|\gamma(t)|^2)|\dot\gamma(t)|^2 + (\gamma(t)\dot\gamma(t))^2}}{1-|\gamma(t)|^2}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

将此应用于映射 $\gamma_{B^C,\ \eta}\colon\ \ t\in(0,\eta) \mapsto (C\sqrt{1-t^2}, t)$，可得

$$\mathbf{L}_{\mathrm{hyp}}(\gamma_{B^C,\eta}) = \int_{t=0}^{\eta} \frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\cdot\frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\operatorname{artanh}\eta.$$

再说，使用弧长公式其实并非必要。这段弧的弧长自然与线段 $\{0\}\times[0,\eta]$的双曲长度成正比，而该长度为反双曲正切 η；求出它与轴向长度的比例系数并不难。事实上，罗巴切夫斯基和鲍耶早已知道，单侧等距线的弧长等于其轴向长度乘以 $\cosh d$，其中 d 是该等距线的特征距离（半径）。（这实际上是他们解析研究的基石。）在目前的情形中，$d=$反双曲正切 C，所以 $\cosh\ d=\cosh$ 反双曲正切 $C=\frac{1}{\sqrt{1-C^2}}$，确实如此。

现在，由此可得

$$\mathbf{L}_{\mathrm{hyp}}\left(\partial^{\cup}B^C_\eta\right) = 2\frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\operatorname{artanh}\eta + 2\operatorname{artanh}C. \tag{25}$$

将弧长公式应用于映射 $\gamma_{E^C,\ \eta}\colon\ t\in(0,\eta) \mapsto (C\sqrt{2t(1-t)},\ t)$，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{\mathrm{hyp}}\left(\partial^{\cup}E^C_\eta\right) &= 2\,\mathbf{L}_{\mathrm{hyp}}(\gamma_{E^C,\eta}) \\ &= 2\int_{t=0}^{\eta} \frac{\sqrt{C^2+2\,t-3\,C^2t}}{(1-t)\,(1+t-2\,C^2t\,)\,\sqrt{2t}}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\left(\frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\operatorname{artanh}\sqrt{\frac{2\eta\,(1-C^2)}{C^2+2\,\eta-3\,C^2\eta}} - \operatorname{artanh}\sqrt{\frac{2\eta\,(1-C^2)^2}{C^2+2\,\eta-3\,C^2\eta}}\right).\end{aligned} \tag{26}$$

像之前一样，将 $\frac{1}{\sqrt{1-C^2}}$反双曲正切 ... 改写为 $\frac{1}{\sqrt{1-C^2}}$对数 . . .，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{\mathrm{hyp}}\left(\partial^{\cup}B^C_\eta\right) - \mathbf{L}_{\mathrm{hyp}}\left(\partial^{\cup}E^C_\eta\right) = 2\frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\ln\frac{\sqrt{C^2\,(1+\eta)}}{\sqrt{C^2+2\,\eta-3\,C^2\eta}+\sqrt{1-C^2}\sqrt{2\eta}} \\ + 2\operatorname{artanh}\sqrt{\frac{2\eta\,(1-C^2)^2}{C^2+2\,\eta-3\,C^2\eta}} + 2\operatorname{artanh}C.\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}G^C &\equiv \lim_{\eta\nearrow 1}\mathbf{L}_{\mathrm{hyp}}\left(\partial^{\cup}B^C_\eta\right) - \mathbf{L}_{\mathrm{hyp}}\left(\partial^{\cup}E^C_\eta\right) \\ &= 2\frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\ln\frac{C}{2\sqrt{1-C^2}} + 2\operatorname{artanh}\sqrt{1-C^2} + 2\operatorname{artanh}C.\end{aligned} \tag{27}$$

这最终就是“$\mathbf{L}_{\mathrm{hyp}}\left(\partial^{\cup}B^{C}\right)-\mathbf{L}_{\mathrm{hyp}}\left(\partial^{\cup}E^{C}\right)$”的公式。我们指出，

$$\ln\frac{C}{2\sqrt{1-C^{2}}}=\operatorname{artanh}\frac{C^{2}}{2-C^{2}}+\ln C-\ln 2.$$

运用初等分析的标准方法，可以证明 G^{C} 在 $C\in(0,1)$上严格递增，且$\lim_{C\searrow 0}G^{C}=0$与$\lim_{C\nearrow 1}G^{C}=+\infty$。

周长差的解释。此外，我们仍可寻找$B^{C}_{\mathrm{up}\,\beta(C)}$，使得“$\mathbf{L}_{\mathrm{hyp}}\left(\partial^{\cup}B^{C}_{\mathrm{up}\,\beta(C)}\right)-\mathbf{L}_{\mathrm{hyp}}\left(\partial^{\cup}E^{C}\right)$”$=0$。由于一般而言，“$\mathbf{L}_{\mathrm{hyp}}\left(\partial^{\cup}B^{C}\right)-\mathbf{L}_{\mathrm{hyp}}\left(\partial^{\cup}B^{C}_{\mathrm{up}\,\omega}\right)$”$=2\frac{1}{\sqrt{1-C^{2}}}\omega$，故有

$$\beta(C)=\ln\frac{C}{2\sqrt{1-C^{2}}}+\sqrt{1-C^{2}}\left(\operatorname{artanh}\sqrt{1-C^{2}}+\operatorname{artanh}C\right).$$

可以证明，$\beta(C)$在 $C\in(0,1)$上严格递增，且$\lim_{C\searrow 0}\beta(C)=0$ 以及$\lim_{C\nearrow 1}\beta(C)=+\infty$。但 $\lim_{C\nearrow 1}\beta(C)-$反双曲正切 $\frac{C^{2}}{2-C^{2}}=-$自然对数 2。

可以预料的是，用 D^{C} 可以得到更好的近似。可以看出，“$\mathbf{L}_{\mathrm{hyp}}\left(\partial B^{C}\right)-\mathbf{L}_{\mathrm{hyp}}\left(\partial D^{C}\right)$”$=\mathbf{L}_{\mathrm{hyp}}\left(\partial^{\cup}B^{C}_{C^{2}/(2-C^{2})}\right)-\mathbf{L}_{\mathrm{hyp}}\left(\partial^{\cup}E^{1}_{C^{2}/(2-C^{2})}\right)$。由（25）式，

$$\mathbf{L}_{\mathrm{hyp}}\left(\partial^{\cup}B^{C}_{C^{2}/(2-C^{2})}\right)=2\frac{1}{\sqrt{1-C^{2}}}\operatorname{artanh}\frac{C^{2}}{2-C^{2}}+2\operatorname{artanh}C.$$

容易计算得

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{\mathrm{hyp}}\left(\partial^{\cup}E^{1}_{\eta}\right)&=2\,\mathbf{L}_{\mathrm{hyp}}(\gamma_{E^{1},\eta})\\&=2\int_{t=0}^{\eta}\frac{1}{(1-t)^{2}}\sqrt{\frac{1-t}{2t}}\,\mathrm{d}t\\&=2\left[\sqrt{\frac{2t}{1-t}}\right]_{t=0}^{\eta}=2\sqrt{\frac{2\eta}{1-\eta}}.\end{aligned}\tag{28}$$

但这也可以通过令（26）取极限 $C\nearrow 1$ 得出。此外，罗巴切夫斯基和鲍耶早已知道，对于弦长为 $2r\,(=2$ 反双曲正切 $\sqrt{\frac{2\eta}{1+\eta}})$ 的极限圆弧，相应的弧长为 $2\sinh r\,(=2\sqrt{\frac{2\eta}{1-\eta}})$。无论如何，由此可得

$$\mathbf{L}_{\mathrm{hyp}}\left(\partial^{\cup}E^{1}_{C^{2}/(2-C^{2})}\right)=2\frac{C}{\sqrt{1-C^{2}}}.$$

于是我们有

$$\begin{aligned}G'^{C}&\equiv\text{“}\mathbf{L}_{\mathrm{hyp}}\left(\partial D^{C}\right)-\mathbf{L}_{\mathrm{hyp}}\left(\partial E^{C}\right)\text{”}\\&=\text{“}\mathbf{L}_{\mathrm{hyp}}\left(\partial B^{C}\right)-\mathbf{L}_{\mathrm{hyp}}\left(\partial E^{C}\right)\text{”}\\&\quad-\mathbf{L}_{\mathrm{hyp}}\left(\partial^{\cup}B^{C}_{C^{2}/(2-C^{2})}\right)+\mathbf{L}_{\mathrm{hyp}}\left(\partial^{\cup}E^{1}_{C^{2}/(2-C^{2})}\right)\\&=2\frac{\ln C-\ln 2}{\sqrt{1-C^{2}}}+2\operatorname{artanh}\sqrt{1-C^{2}}+2\frac{C}{\sqrt{1-C^{2}}}.\end{aligned}\tag{29}$$

同样，G'^{C} 在 $C\in(0,1)$ 上严格递增，且 $\lim_{C\searrow 0}G'^{C}=0$ and $\lim_{C\nearrow 1}G'^{C}=+\infty$。

现在，我们寻找满足“$\mathrm{L_{hyp}}\left(\partial D^C{}_{\mathrm{up}\ \widehat{\beta}(C)}\right)$”$=0$的 D^C 向上 $\widehat{\beta}(C)$。同样，由于“$\mathrm{L_{hyp}}\left(\partial D^C\right)-\mathrm{L_{hyp}}\left(\partial D^C_{\mathrm{up}\,\omega}\right)$”$=2\frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\omega$，可得

$$\widehat{\beta}(C)=\ln C-\ln 2+\sqrt{1-C^2}\,\operatorname{artanh}\sqrt{1-C^2}+C.$$

$\widehat{\beta}(C)$可以证明，$\beta(C)$在 $C\in(0,1)$上严格递增，且 $\lim_{C\searrow 0}\beta(C)=0$ 和 $\lim_{C\nearrow 1}\beta(C)=1-$ 自然对数 2。情况不像面积的情形那么理想，但至少有一些相似之处。遗憾的是，我们未能找到一种实际可行且简单的替代对象来代替 ∂E^C。

然而，重要的是，我们已经找到了关于 E^C 和 B^C之间周长差的答案。

不过，在这一问题上，此时或许仍有一个挥之不去的疑问。我们只通过一种特定类型的正则化，才得以求出周长差。我们不禁要问，是否存在另一种方法，能够像面积差计算一样稳定。在给出具体答案之前，我们需要先介绍一些预备知识：

5. 背景：Study–de Sitter 平面几何

正如双曲几何是BCK模型的环境射影空间中单位圆内部的几何，Study–de Sitter 几何是BCK模型的环境射影空间中单位圆外部的几何。就平面而言，从微分几何的角度，我们令

$$\text{“}(\mathrm{d}s_{\mathrm{SdS}})^2\text{”}=-\frac{(1-y^2)(\mathrm{d}x)^2+2xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+(1-x^2)(\mathrm{d}y)^2}{(1-x^2-y^2)^2},$$

但应注意，对于 $x^2+y^2>1$，该度量变为不定的（洛伦兹型）。相应的面积元为

$$\mathrm{da}_{\mathrm{SdS}}(x,y)=\frac{1}{(x^2+y^2-1)^{3/2}}\,|\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y|.$$

（在上述公式中，我们只是改变了自然双曲表达式的符号，以便稍后不必用负的弧长和体积进行计算。）应注意，上述公式并未相当完整地描述该几何。原因在于，Study–de Sitter几何是环境射影平面中单位圆的外部，因此在欧几里得视角下为理想点的那些点附近需要另一种坐标化。我们将此留给读者，或参见下文引用的文献。

Study–de Sitter 几何学最早由 Study [79]（1907）研究（参见 A’Campo- Neuen、Papadopoulos [1]）。值得注意的是，Vörös [82]（1909年）也出于度量计算的目的，对外部点进行了几何化处理（参见 G. Horváth [33]）。如今通称的「de Sitter 空间」得名于 de Sitter [23]（1917年）的研究；他从广义相对论的角度考察了这些空间（参见 Coxeter [21]）。有关现代综述，请参阅 Fillastre、Seppi [31]。

设 K 是双曲几何的 BCK 模型中的一个非空紧凸集（因此它位于单位圆的内部）。其共极（互补$\widetilde{\ }$极线）集 K 定义如下。考虑环境射影空间中所有与 K 相交的直线。然后取这些直线关于绝对（即$\widetilde{\ }$单位圆）的极点，这些极点构成集合 K。那么其边界 ∂K 对应于$\widetilde{\ }$与 K 相切的切线的极线。于是 K 总是包含一条仅含

绝对外部点的射影直线（例如， K 中任意一点的极线），而且这条直线是 K的~同伦收缩。

与我们相关的点是

$$\mathbf{A}_{\mathrm{hyp}}(K) = -2\pi + \mathbf{L}_{\mathrm{SdS}}(\partial\widetilde{K}) \tag{30}$$

and

$$\mathbf{L}_{\mathrm{hyp}}(\partial K) = \mathbf{A}_{\mathrm{SdS}}(\widetilde{K}). \tag{31}$$

也就是说，面积和周长的计算关于极线互为对偶。等式 (30) 和 (31) 与球面几何中的情形类似。与球面几何相比，除符号约定外，导致 (31) 不对称的原因是：这里我们考虑的不是极线，而是补极线（这样计算面积时就不会有那么多难以理解之处）。

我们以 $K = K^C$ 为以原点为中心、双曲半径为 $R \equiv$ 反双曲正切C的圆盘为例，说明 (30) 和 (31)。该圆盘的边界由方程$x^2 + y^2 - C^2 = 0$ 给出，而共极集的边界为 $x^2 + y^2 - 1/C^2 = 0$。于是

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{\mathrm{hyp}}(K^C) &= \int_{x^2+y^2\le C^2} \frac{1}{(1-x^2-y^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{C} \frac{1}{(1-r^2)^{3/2}}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{\theta=0}^{2\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\right]_{r=0}^{C}\mathrm{d}\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{1-C^2}}-1\right)\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{1-C^2}}-1\right) \equiv 2\pi\left(\cosh R - 1\right).
\end{aligned}$$

（当然，这个面积早已为罗巴切夫斯基和鲍耶所知。）共极集的边界参数化为 $\gamma_{K,\ 1/C}$: $t \in [0,\pi] \to (\ \frac{1}{C}\cos\ t, \frac{1}{C}\sin\ t\ )$。于是

$$\mathbf{L}_{\mathrm{SdS}}(\partial\widetilde{K}^C) = \mathbf{L}_{\mathrm{SdS}}(\gamma_{K,1/C}) = \int_{t=0}^{2\pi}\sqrt{\frac{1}{1-C^2}}\,\mathrm{d}t = 2\pi\frac{1}{\sqrt{1-C^2}} \equiv 2\pi\cosh R.$$

这与（30）相符。同样,

$$\mathbf{L}_{\mathrm{hyp}}(\partial K^C) = \mathbf{L}_{\mathrm{hyp}}(\gamma_{K,C}) = \int_{t=0}^{2\pi}\sqrt{\frac{C^2}{1-C^2}}\,\mathrm{d}t = 2\pi\frac{C}{\sqrt{1-C^2}} \equiv 2\pi\sinh R.$$

（同样，这一周长早已为罗巴切夫斯基和鲍耶所知。）此处,

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{\mathrm{SdS}}(\widetilde{K}^C) &= \int_{x^2+y^2\ge 1/C^2} \frac{1}{(x^2+y^2-1)^{3/2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=1/C}^{\infty} \frac{1}{(r^2-1)^{3/2}}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{\theta=0}^{2\pi}\left[-\frac{1}{\sqrt{r^2-1}}\right]_{r=1/C}^{\infty}\mathrm{d}\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{C}{\sqrt{1-C^2}}\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi\frac{C}{\sqrt{1-C^2}} \equiv 2\pi\sinh R.
\end{aligned}$$

这与（31）相符。

要全面解释（30）、（31）的运作机制，超出了本文的范围。不过，此时我们的目标在某种意义上与其说是数学层面的，不如说是心理层面的：我们希望以另一种方式再次确认弧长差的计算。因此，我们可以比之前留出更多空间，发挥数学想象。

6. 周长 II

此时，很明显，“$\mathrm{L}_{\mathrm{hyp}}\left(\partial^{\cup} B^{C}\right) - \mathrm{L}_{\mathrm{hyp}}\left(\partial^{\cup} E^{C}\right)$”的一个合适候选是 $\mathrm{A}_{\mathrm{SdS}}(\,\widetilde{B}^{C} \setminus \widetilde{E}^{C})$。由对偶圆锥曲线（6）可得（相对于绝对的）配极圆锥曲线为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}^{\top} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{C^2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \equiv$$
$$\equiv \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}^{\top} \begin{bmatrix} C^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \equiv C^2 x^2 + 2\,y - 2 \overset{\leftrightarrow}{=} 0.$$

若按字面理解该方程，则可得到 $\partial\widetilde{E}^{C}$ 的隐式方程，参见图 6(a)。计算 $\partial\widetilde{B}^{C}$ 更为复杂：B^{C} 的任意切线，要么与超圆弧相切，要么经过顶点。超圆的对偶为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}^{\top} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{C^2} & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \equiv$$
$$\equiv \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}^{\top} \begin{bmatrix} C^2 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \equiv C^2 x^2 + y^2 - 1 \overset{\leftrightarrow}{=} 0.$$

点 $(\pm C,\,0) = [\pm C, 0, 1]$ 的极线是直线 $\pm C x + y - 1 \overset{\leftrightarrow}{=} 0$。然后，如图 6(a) 所示，将这些极线组合得到 $\partial\widetilde{B}^{C}$。接着，$\widetilde{E}^{C}$ 和 $\widetilde{B}^{C}$ 分别是 $\partial\widetilde{E}^{C}$ 和 $\partial\widetilde{B}^{C}$ 的非凸“外部”。为了从不同视角观察图形，我们可以考虑一个 h-共线变换 Ξ（例如向下平移），它将 E^{C} 的一个内点映射到原点；这样，Ξ 可扩展至环境射影空间，而 $\partial\widetilde{E}^{C}$ 和 $\partial\widetilde{B}^{C}$ 的像将避开无穷远直线，见图 6(b)。

无论如何，我们的计算目标是求出图 6(a) 中红色曲线与蓝色曲线之间的 SdS面积。为进行这项计算，我们定义辅助集合：对于$\eta \in (0,1)$,

$$^{-}\widetilde{W}_{\eta}^{C} = \{(x,y) : C^2x^2 + y^2 - 1 \geq 0,\, 0 \leq y \leq \eta,\, x \leq 0\},$$

参见图 6(c)；

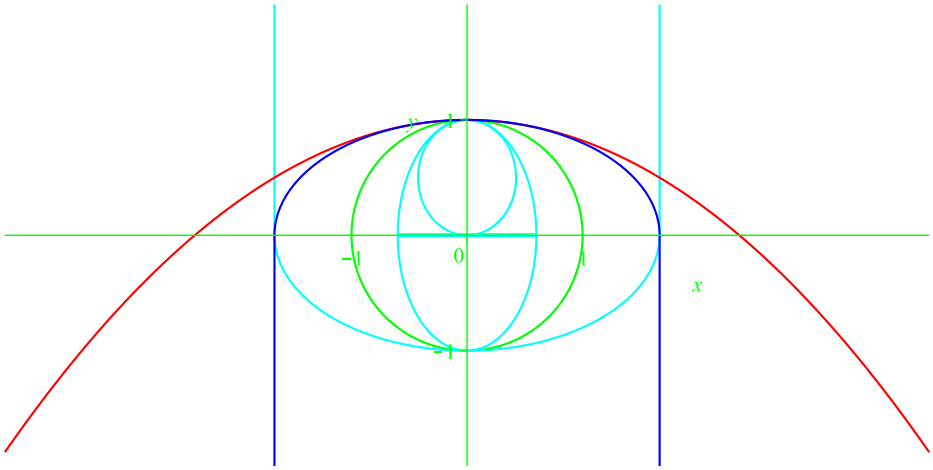
$$^{-}\widetilde{E}_{\eta}^{C} = \{(x,y) : C^2x^2 + 2\,y - 2 \leq 0,\, y \leq \eta,\, x \leq 0\},$$

参见图 6(d)；

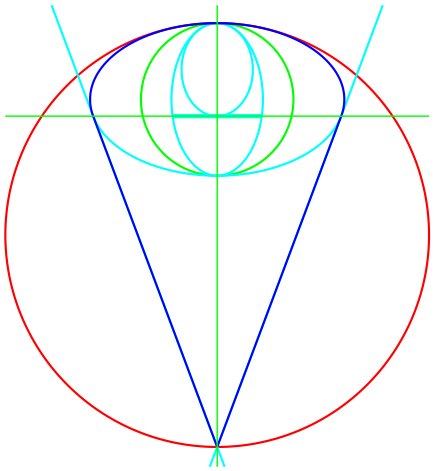
$$^{-}\widetilde{Z}^{C} = \{(x,y) : x \leq -\tfrac{1}{C},\, y \leq 0\},$$

参见图 6(e)。然后，$^{+}\widetilde{W}_{\eta}^{C}$、$^{+}\widetilde{E}_{\eta}^{C}$、$^{+}\widetilde{Z}^{C}$ 可以用类似方式定义，但将其关于 y坐标轴反射。这些集合远离绝对，因此其 SdS面积有限；$(\,\widetilde{B}^{C} \setminus \widetilde{E}^{C}) \cap \{(x,y) : y \leq \eta\}$的 SdS面积也有限。事实上，

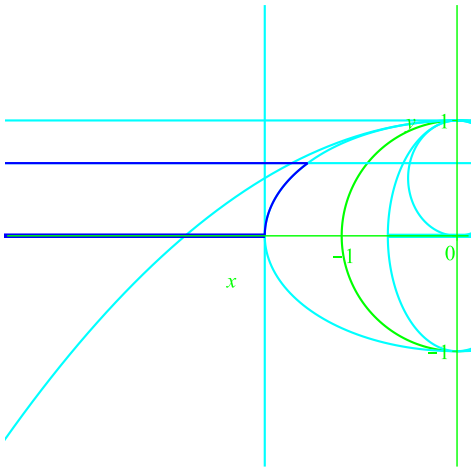
$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\mathrm{SdS}}((\widetilde{B}^{C} \setminus \widetilde{E}^{C}) \cap \{(x,y) : y \leq \eta\}) &= \mathbf{A}_{\mathrm{SdS}}(^{-}\widetilde{W}_{\eta}^{C}) + \mathbf{A}_{\mathrm{SdS}}(^{-}\widetilde{Z}^{C}) - \mathbf{A}_{\mathrm{SdS}}(^{-}\widetilde{E}_{\eta}^{C}) \\ &\quad + \mathbf{A}_{\mathrm{SdS}}(^{+}\widetilde{W}_{\eta}^{C}) + \mathbf{A}_{\mathrm{SdS}}(^{+}\widetilde{Z}^{C}) - \mathbf{A}_{\mathrm{SdS}}(^{+}\widetilde{E}_{\eta}^{C}) \\ &= 2\,\mathbf{A}_{\mathrm{SdS}}(^{-}\widetilde{W}_{\eta}^{C}) + 2\,\mathbf{A}_{\mathrm{SdS}}(^{-}\widetilde{Z}^{C}) - 2\,\mathbf{A}_{\mathrm{SdS}}(^{-}\widetilde{E}_{\eta}^{C}). \end{aligned}$$



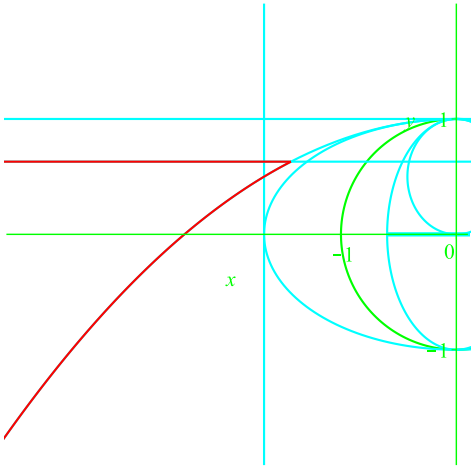
6(a) $\partial\widetilde{E}^C$ [红色], $\partial\widetilde{B}^C$ [蓝色]



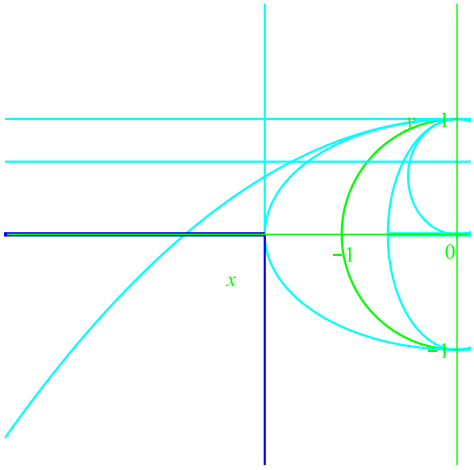
6(b) 射影变换之后。



6(c) $\partial\widetilde{\widetilde{W}}_\eta^C$ [蓝色]。



6(d) $\partial\widetilde{\overline{E}}_\eta^C$ [红色]。



6(e) $\partial\widetilde{\widetilde{Z}}^C$ [蓝色]。

图 6 周长差的极坐标计算

现在让我们计算这些面积。

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{\mathrm{SdS}}({}^{-}\widetilde{W}_\eta^C) &= \int_{y=0}^{\eta}\int_{x=-\infty}^{-\frac{1}{C}\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{(x^2+y^2-1)^{3/2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \int_{y=0}^{\eta}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}\left(\sqrt{x^2+y^2-1}-x\right)}\right]_{x=-\infty}^{-\frac{1}{C}\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y\\ &= \int_{y=0}^{\eta}\frac{1-\sqrt{1-C^2}}{(1-y^2)\sqrt{1-C^2}}\,\mathrm{d}y\\ &= \frac{1-\sqrt{1-C^2}}{\sqrt{1-C^2}}\,\operatorname{artanh}\eta.\end{aligned}$$

此外，这实际上还可以推广到 $\eta\in(-\infty,1)$，

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{\mathrm{SdS}}({}^{-}\widetilde{E}_\eta^C) &= \int_{y=-\infty}^{\eta}\int_{x=-\infty}^{-\frac{1}{C}\sqrt{2(1-y)}} \frac{1}{(x^2+y^2-1)^{3/2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \int_{y=-\infty}^{\eta}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}\left(\sqrt{x^2+y^2-1}-x\right)}\right]_{x=-\infty}^{-\frac{1}{C}\sqrt{2(1-y)}}\mathrm{d}y\\ &= \int_{y=-\infty}^{\eta}\frac{C^2}{(1-y)2\sqrt{1-C^2(1+y)/2}(\sqrt{1-C^2(1+y)/2}+1)}\,\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\operatorname{artanh}\frac{\sqrt{1-C^2}}{\sqrt{1-C^2(1+\eta)/2}}\\ &\quad-\operatorname{artanh}\frac{2-C^2+2\sqrt{1-C^2(1+\eta)/2}}{2-C^2\eta+2\sqrt{1-C^2(1+\eta)/2}}.\end{aligned}$$

Ho然而，对于 $\eta\in(-1,1)$，尤其是我们所关注的情形 $\eta\in(0,1)$，

$$\operatorname{artanh}\frac{2-C^2+2\sqrt{1-C^2(1+\eta)/2}}{2-C^2\eta+2\sqrt{1-C^2(1+\eta)/2}} = \operatorname{artanh}\sqrt{1-C^2(1+\eta)/2}+\operatorname{artanh}\eta, \tag{32}$$

这是反双曲正切 $A+\operatorname{artanh}B$ $=\operatorname{artanh}\frac{A+B}{1-AB}$ 加法公式的标准应用；或者也可以通过转录 $\ln\frac{1+\sqrt{1-C^2(1+\eta)/2}}{C}$ 得到。（但由于定义域问题，右端不适合用于上文积分中的原函数。）此外，

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{\mathrm{SdS}}({}^{-}\widetilde{Z}^C) &= \int_{x=-\infty}^{-\frac{1}{C}}\int_{y=-\infty}^{0}\frac{1}{(x^2+y^2-1)^{3/2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{x=-\infty}^{-\frac{1}{C}}\left[\frac{y+\sqrt{x^2+y^2-1}}{\sqrt{x^2+y^2-1}\,(x^2-1)}\right]_{y=-\infty}^{0}\mathrm{d}x = \int_{x=-\infty}^{-\frac{1}{C}}\frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x\\ &= \left[-\operatorname{arcoth}x\right]_{x=-\infty}^{-\frac{1}{C}} = \operatorname{artanh}C.\end{aligned}$$

因此，

$\mathbf{A}_{\mathrm{SdS}}((\widetilde{B}^C\setminus\widetilde{E}^C)\cap\{(x,y)\,:\,y\le\eta\}) =$

$$
\begin{aligned}
&= 2\left(\mathbf{A}_{\mathrm{SdS}}(\widetilde{{}^{-}W}_{\eta}^{C}) + \mathbf{A}_{\mathrm{SdS}}(\widetilde{{}^{-}Z}^{C}) - \mathbf{A}_{\mathrm{SdS}}(\widetilde{{}^{-}E}_{\eta}^{C})\right) \\
&= 2\Bigg(\frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\ \operatorname{artanh}\eta - \frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\operatorname{artanh}\frac{\sqrt{1-C^2}}{\sqrt{1-C^2(1+\eta)/2}} \\
&\qquad + \operatorname{artanh}\frac{2-C^2+2\sqrt{1-\ C^2(1+\eta)/2}}{2-C^2\eta+2\sqrt{1-\ C^2(1+\eta)/2}} - \operatorname{artanh}\eta + \operatorname{artanh}C\Bigg) \\
&= 2\Bigg(\frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\ln\frac{C\sqrt{(1+\eta)/2}}{\sqrt{1-C^2(1+\eta)/2}+\sqrt{1-C^2}} \\
&\qquad + \operatorname{artanh}\sqrt{1-C^2(1+\eta)/2} + \operatorname{artanh}C\Bigg),
\end{aligned}
$$

其中我们使用了式（32），并按通常方式将$\frac{1}{\sqrt{1-C^2}}$反双曲正切.....转换为 $\frac{1}{\sqrt{1-C^2}}$自然对数.....。然后，取极限 $\eta \nearrow 1$，得到

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}_{\mathrm{SdS}}(\widetilde{B}^C \setminus \widetilde{E}^C) &= \lim_{\eta\nearrow 1}\mathbf{A}_{\mathrm{SdS}}((\widetilde{B}^C \setminus \widetilde{E}^C)\cap\{(x,y)\ :\ y\le\eta\}) \\
&= 2\left(\frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\ln\frac{C}{2\sqrt{1-C^2}} + \operatorname{artanh}\sqrt{1-C^2} + \operatorname{artanh}C\right).
\end{aligned}
$$

因此，我们最终重新得到了（27），这令人放心。

7. 贝尔特拉米–庞加莱半平面模型中的计算

经验表明，在双曲平面的贝尔特拉米–庞加莱半平面（BPh）模型中，某些计算更为容易。（事实上，它们有时简单得近乎可笑，而在BCK模型中却从来不会如此。）因此，考察事物在BPh 模型中的情形是合理的。

贝尔特拉米–庞加莱半平面模型在此不作详细解释，相关阐述已有很多。我们仅为计算之便回顾若干技术事项。考虑模型中真正的双曲点，即“内部”点时，BCK模型中坐标为（x，y）的点对应于BPh 模型中的点（$\check{x}$，$\check{y}$），其中

$$
\check{x} = \frac{x}{1-y}, \qquad \check{y} = \frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{1-y}. \tag{33}
$$

反过来，BPh 模型中的点 ($\check{x}$, $\check{y}$) 转换为 BCK 模型中的点 (x, y)，其中

$$
x = \frac{2\check{x}}{\check{x}^2+\check{y}^2+1}, \qquad y = \frac{\check{x}^2+\check{y}^2-1}{\check{x}^2+\check{y}^2+1}. \tag{34}
$$

那么，用新的坐标表示，面积密度为

$$
\mathrm{d}\check{a}_{\mathrm{hyp}} = \frac{|\mathrm{d}\check{x}\wedge\mathrm{d}\check{y}|}{\check{y}^2};
$$

弧长元（平方）由下式给出

$$
\text{“}(\mathrm{d}\check{s}_{\mathrm{hyp}})^2\text{”} = \frac{(\mathrm{d}\check{x})^2+(\mathrm{d}\check{y})^2}{\check{y}^2}.
$$

规范 h-椭圆抛物线及相关对象的转录。将 (34) 代入式 (1)，即可转录出 h-椭圆抛物盘的描述。得到 4((1 − C^2)ˇx^2 − C^2ˇy^2 + C^2)

$$\frac{}{\left(\quad \check{x}^2+\check{y}^2+1\ \right)_2}\le 0,\ \text{或者等价地,}$$

$$\frac{1-C^2}{C^2}\check{x}^2-\check{y}^2+1\le 0.$$

考虑到我们只处理 ˇ$y > 0$，这在欧几里得视角下是双曲线的闭半个内部。同样，半距离带 (2) 可写为

$$\left(\frac{\sqrt{1-C^2}}{C}\check{x}-\check{y}\right)\left(\frac{\sqrt{1-C^2}}{C}\check{x}+\check{y}\right)\equiv\frac{1-C^2}{C^2}\check{x}^2-\check{y}^2\le 0\quad\text{and}\quad\check{x}^2+\check{y}^2-1\ge 0.$$

我们还可以注意到，支撑极限圆 (16) 可写为

$$\check{y}^2-1=0,$$

这正是

$$\check{y}=1$$

因为需要 ˇ$y > 0$。这样，我们可以将 ∂E^C、∂B^C、∂D^C 转换为 BPh 模型中的 ˇ ∂、ˇ E^C、ˇ ∂、ˇB^C、ˇ ∂、ˇD^C。不再赘述，图 7 展示了 BPh 模型中一般构形的样子。不过，我们要指出，焦点F^C =(0, $\frac{C^2}{2-C^2}$) 转换为 ˇF^C =(0, $\frac{1}{\sqrt{1-C^2}}$)，而后者恰好是上文所讨论相应双曲线的一个焦点。仅凭这一点来命名焦点，理由并不充分，但现在看来倒是颇有意思。（相应地，极限圆准线 (15) 转换为 ˇ$y=\sqrt{1-C^2}$，它是欧几里得意义下与双曲线上的焦点 ˇF^C 相对应的准线。）

BPh 模型中的面积差计算。我们仅关注 ˇ$\mathrm{A}_{\mathrm{hyp}}$(ˇ$E^C$ \ ˇD^C) 的关键计算。对于 $\vartheta\in($ $1+\infty$)，令

$$\check{E}^C_\vartheta=\check{E}^C\cap\{(\check{x},\check{y})\,:\,\check{y}\le\vartheta\}$$

and

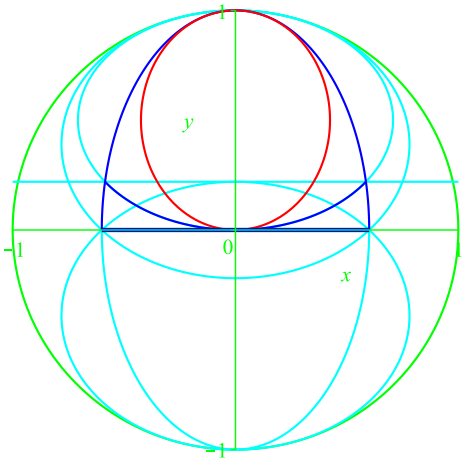
$$\check{D}^C_\vartheta=\check{D}^C\cap\{(\check{x},\check{y})\,:\,\check{y}\le\vartheta\}.$$

注意，此处我们使用极限圆截断，因此，例如，E^C_η不会在任何 ϑ 下转写为 ˇE^C_ϑ。不过，面积计算中使用何种截断并不重要。接下来

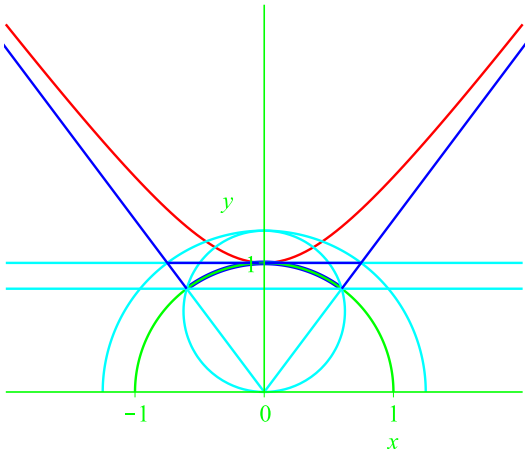
$$\begin{aligned}\check{\mathbf{A}}_{\mathrm{hyp}}(\check{D}^C_\vartheta)&=\int_{\check{y}=1}^{\vartheta}\int_{\check{x}=-\frac{C}{\sqrt{1-C^2}}\check{y}}^{\frac{C}{\sqrt{1-C^2}}\check{y}}\frac{1}{\check{y}^2}\,\mathrm{d}\check{x}\,\mathrm{d}\check{y}\\&=\int_{\check{y}=1}^{\vartheta}\frac{2C}{\sqrt{1-C^2}}\frac{1}{\check{y}}\,\mathrm{d}\check{y}\\&=\frac{2C}{\sqrt{1-C^2}}\ln\vartheta.\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\check{\mathbf{A}}_{\mathrm{hyp}}(\check{E}^C_\vartheta)&=\int_{\check{y}=1}^{\vartheta}\int_{\check{x}=-\frac{C}{\sqrt{1-C^2}}\sqrt{\check{y}^2-1}}^{\frac{C}{\sqrt{1-C^2}}\sqrt{\check{y}^2-1}}\frac{1}{\check{y}^2}\,\mathrm{d}\check{x}\,\mathrm{d}\check{y}\\&=\int_{\check{y}=1}^{\vartheta}\frac{2C}{\sqrt{1-C^2}}\frac{\sqrt{\check{y}^2-1}}{\check{y}^2}\,\mathrm{d}\check{y}\end{aligned}$$

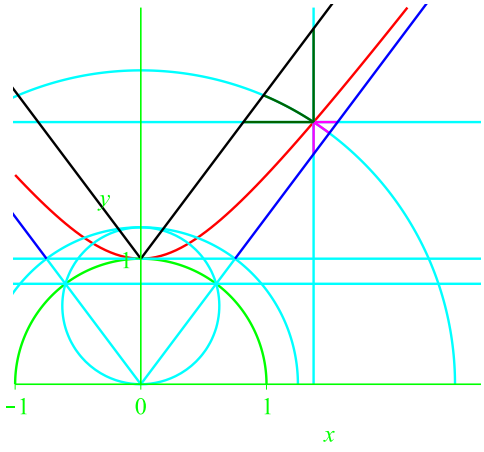


7(a)∂E^C [红色], ∂B^C [蓝色], ∂D^C [蓝色]。

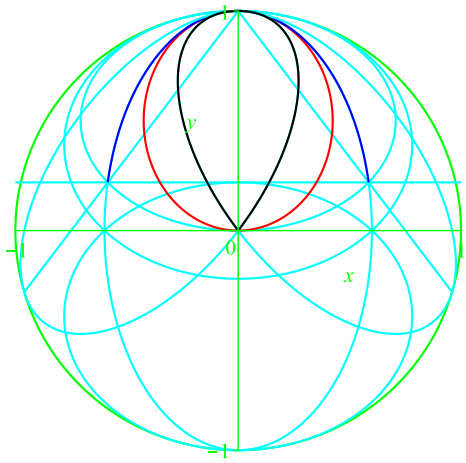


7(b) $\partial\check{} E^C$ [红色], $\partial\check{} B^C$ [蓝色], $\partial\check{} D^C$ [蓝色]。

图 7 从 BCK 模型到 BPh 模型的转录。



8(a) 截断的变体 [洋红色和深绿色], $\partial\check{} V^C$ [黑色]。



8(b) ∂V^C [黑色]。

图 8 一些变体。

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2C}{\sqrt{1-C^2}}\left(-\frac{\sqrt{\vartheta^2-1}}{\vartheta} + \operatorname{artanh}\frac{\sqrt{\vartheta^2-1}}{\vartheta}\right)\\
&\equiv \frac{2C}{\sqrt{1-C^2}}\left(-\frac{\sqrt{\vartheta^2-1}}{\vartheta} + \operatorname{arcosh}\vartheta\right)\\
&\equiv \frac{2C}{\sqrt{1-C^2}}\left(-\frac{\sqrt{\vartheta^2-1}}{\vartheta} + \ln\left(\vartheta+\sqrt{\vartheta^2-1}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Thus

$$\begin{aligned}\check{\mathbf{A}}_{\mathrm{hyp}}(\check{D}_\vartheta^C \setminus \check{E}_\vartheta^C) &= \check{\mathbf{A}}_{\mathrm{hyp}}(\check{D}_\vartheta^C) - \check{\mathbf{A}}_{\mathrm{hyp}}(\check{E}_\vartheta^C)\\ &= \frac{2C}{\sqrt{1-C^2}}\left(\frac{\sqrt{\vartheta^2-1}}{\vartheta} - \ln\left(\vartheta+\sqrt{\vartheta^2-1}\right) + \ln\vartheta\right)\\ &= \frac{2C}{\sqrt{1-C^2}}\left(\sqrt{1-\frac{1}{\vartheta^2}} - \ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{\vartheta^2}}\right)\right).\end{aligned}$$

因此,

$$\check{\mathbf{A}}_{\mathrm{hyp}}(\check{D}^C \setminus \check{E}^C) = \lim_{\vartheta\nearrow+\infty} \check{\mathbf{A}}_{\mathrm{hyp}}(\check{D}_\vartheta^C \setminus \check{E}_\vartheta^C) = \frac{2C}{\sqrt{1-C^2}}\,(1-\ln 2)\,.$$

请注意，上述计算比 BCK 情形中的计算更易于用标准微积分处理。

BPh 模型中弧长差的计算。对于 $\vartheta\in(1+\infty)$，令

$$\partial^\cup \check{E}_\vartheta^C = \partial\check{E}^C \cap \{(\check{x},\check{y}) : \check{y}\le\vartheta\}$$

and

$$\partial^\cup \check{D}_\vartheta^C = \partial\check{D}^C \cap \{(\check{x},\check{y}) : \check{y}\le\vartheta\}.$$

容易看出，$\partial^\cup D_\vartheta^C$限制于 $\check{}x\ge 0$ 的双曲循环部分的弧长为

$$\int_{\check{y}=1}^{\vartheta}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\check{y}}\left(\frac{C}{\sqrt{1-C^2}}\check{y}\right)\right)^2}\,\frac{\mathrm{d}\check{y}}{\check{y}} = \int_{\check{y}=1}^{\vartheta}\frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\,\frac{\mathrm{d}\check{y}}{\check{y}} = \frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\log\vartheta,$$

而 $\partial^\cup\check{}D_\vartheta^C$限制于 $\check{}x\ge 0$ 的极限圆部分的弧长为

$$\int_{\check{x}=0}^{\frac{C}{\sqrt{1-C^2}}} 1\,\frac{\mathrm{d}\check{x}}{1} = \frac{C}{\sqrt{1-C^2}}.$$

因此,

$$\check{\mathbf{L}}_{\mathrm{hyp}}\left(\partial^\cup\check{D}_\vartheta^C\right) = 2\frac{C}{\sqrt{1-C^2}} + 2\frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\log\vartheta.$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\check{\mathbf{L}}_{\mathrm{hyp}}\left(\partial^\cup\check{E}_\vartheta^C\right) &= 2\int_{\check{y}=1}^{\vartheta}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\check{y}}\left(\frac{C}{\sqrt{1-C^2}}\sqrt{\check{y}^2-1}\right)\right)^2}\,\frac{\mathrm{d}\check{y}}{\check{y}}\\ &= 2\int_{\check{y}=1}^{\vartheta}\sqrt{\frac{C^2+\check{y}^2-1}{(1-C^2)(\check{y}^2-1)}}\,\frac{\mathrm{d}\check{y}}{\check{y}}\\ &= 2\left(\frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\operatorname{artanh}\sqrt{\frac{\vartheta^2-1}{C^2+\vartheta^2-1}} - \operatorname{artanh}\sqrt{\frac{(1-C^2)(\vartheta^2-1)}{C^2+\vartheta^2-1}}\right).\end{aligned}$$

像之前一样，将$\frac{1}{\sqrt{1-C^2}}$反双曲正切.....改写为 $\frac{1}{\sqrt{1-C^2}}$自然对数.....，我们得到

$$\begin{aligned}&\check{\mathbf{L}}_{\mathrm{hyp}}\left(\partial^\cup\check{D}_\vartheta^C\right) - \check{\mathbf{L}}_{\mathrm{hyp}}\left(\partial^\cup\check{E}_\vartheta^C\right) =\\ &= 2\left(\frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\left(C+\ln\frac{C\vartheta}{\sqrt{C^2+\vartheta^2-1}+\sqrt{\vartheta^2-1}}\right) + \operatorname{artanh}\sqrt{\frac{(1-C^2)(\vartheta^2-1)}{C^2+\vartheta^2-1}}\right).\end{aligned}$$

因此

$$\text{“}\check{\mathbf{L}}_{\mathrm{hyp}}(\check{D}^C) - \check{\mathbf{L}}_{\mathrm{hyp}}(\check{E}^C)\text{”} = \lim_{\vartheta \nearrow +\infty} \check{\mathbf{L}}_{\mathrm{hyp}}\left(\partial^{\cup}\check{D}^C_{\vartheta}\right) - \check{\mathbf{L}}_{\mathrm{hyp}}\left(\partial^{\cup}\check{E}^C_{\vartheta}\right)$$
$$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\left(C + \ln\frac{C}{2}\right) + \operatorname{artanh}\sqrt{1-C^2}\right).$$

这与（29）得到的结果相同。（这里的计算不像面积情形那么简单，但比 BCK 情形稍微简单一些。）

不过请注意，我们使用的是极限圆截断，而不是直线截断，因此并未重现 G'^C 的计算。另一方面，BPh 模型特别适合用来处理这一差异。可以看出，如果像图8(a)（洋红色弧线）那样，取一些经过 $\partial^{\cup}\check{}E^C_{\vartheta}$ 端点的特定截断，那么相应双曲弧上的截断点彼此并不相距太远，如 $\vartheta \nearrow +\infty$ 所示；事实上，考虑相对于欧几里得情形的畸变 $\frac{1}{\check{y}}$ 时，它们之间的距离以及截断弧的长度都趋于 0。这至少适用于经过 h-椭圆抛物线渐近点的极限圆截断、垂直于 h-椭圆抛物线的直线截断，以及经过 h-椭圆抛物线渐近点的直线截断。我们不明确进行估算，但读者现在可以很容易看出，上述所有截断类型都会得到相同的弧长差极限。

事实上，即使将超圆弧沿着 h-椭圆抛物线的渐近点进行极限圆平移，上述观察仍然成立，参见图8(a)（深绿色弧线）。这引出了以下想法：

一种内逼近。我们可以取出 ∂D^C ($\partial\check{}D^C$) 的双曲弧，并沿着 h-椭圆抛物线的渐近点进行极限圆平移，使双曲弧的端点平移至 h-椭圆抛物线的顶点。然后取凸闭包，得到 V^C ($\check{}V^C$)。在 BCK模型中这很难处理，

$$V^C = \big\{(x,y)\,: x^2 + 2\,C(\sqrt{1-C^2}\,x + Cy)(y-1) \le 0,$$
$$x^2 + 2\,C(-\sqrt{1-C^2}\,x + Cy)(y-1) \le 0\big\},$$

参见图8(b)；但在 BPh 模型中很容易描述，

$$\check{V}^C = \left\{(\check{x},\check{y})\,:\,\check{y} \ge 1 + \frac{\sqrt{1-C^2}}{C}|\check{x}|\right\},$$

参见图8(a)。在后一种设置下，我们可以很容易地进行计算。

无论如何，总体模式是

$$B^C \supset D^C \supset E^C \supset V^C,$$

在 BPh 模型中同样如此。

关于面积，显然

$$\check{\mathbf{A}}_{\mathrm{hyp}}(\check{D}^C \setminus \check{V}^C) = \int_{\check{y}=1}^{\infty} \frac{2C}{\sqrt{1-C^2}}\,\frac{1}{\check{y}^2}\,\mathrm{d}\check{y} = \left[-\frac{2C}{\sqrt{1-C^2}}\,\frac{1}{\check{y}}\right]_{\check{y}=1}^{\infty} = \frac{2C}{\sqrt{1-C^2}}.$$

因此

$$\mathbf{A}_{\mathrm{hyp}}(\check{E}^C \setminus \check{V}^C) = \frac{2C}{\sqrt{1-C^2}}\ln 2.$$

我们还可以看出

$$\check{E}^C = \check{V}^C_{\mathrm{up}\,-\ln 2} \quad \text{in area.}$$

从周长的角度来看，利用极限圆截断，我们很容易看出

$$\text{“}\check{\mathbf{L}}_{\mathrm{hyp}}(\check{D}^C)-\check{\mathbf{L}}_{\mathrm{hyp}}(\check{V}^C)\text{”}=\frac{2C}{\sqrt{1-C^2}}$$

（我们在极限圆弧上得到差值）。因此

$$\widehat{G}^C\equiv\text{“}\check{\mathbf{L}}_{\mathrm{hyp}}(\check{E}^C)-\check{\mathbf{L}}_{\mathrm{hyp}}(\check{V}^C)\text{”}=2\left(\frac{1}{\sqrt{1-C^2}}\left(\ln\frac{2}{C}\right)-\operatorname{artanh}\sqrt{1-C^2}\right).$$

这里 $\widehat{G}^C$ 在 $C\in(0,1)$上单调递增；$\lim_{C\searrow 0}\widehat{G}^C=0$ 且$\lim_{C\nearrow 1}\widehat{G}^C=+\infty$。取

$$\widehat{\beta}(C)=\ln\frac{2}{C}-\sqrt{1-C^2}\operatorname{artanh}\sqrt{1-C^2},$$

可以看出

$$\text{“}\check{\mathbf{L}}_{\mathrm{hyp}}(\check{E}^C)-\check{\mathbf{L}}_{\mathrm{hyp}}(\check{V}^C_{\mathrm{up}\,-\widehat{\beta}(C)})\text{”}=0$$

使用极限圆截断和标准直线截断时，$\widehat{\ }$成立。这里 $\beta(C)$在 $C\in(0,1)$上单调递增 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$；$\lim_{C\searrow 0}\beta(C)=0$ 且$\lim_{C\nearrow 1}\beta(C)=$自然对数 2。

8. 反思

我们所做的“错误之处” 很容易指出：我们在 BCK模型中进行了大量不必要且复杂的计算。更准确地说：在处理 E^C的面积与周长问题时，我们确实进行了“必要的”和“不必要的”计算。“必要的”计算直接与 E^C_η有关，而“不必要的”计算则涉及超循环线段和极限线段等的面积与周长。对于后者，我们本可以引用罗巴切夫斯基和鲍耶早已知晓的常识；或者，如果有人对那些论述的数学严谨性不满意，也可以参考各种入门著作。因此，不必要计算的结果本可以由非常经典的知识与这些模型的基本距离公式结合得到。必要计算的情况有所不同，但即使在那里，面积计算也更容易从 BPh 模型中反向构造出来。这就引出了（必要）计算的学术诚信问题：虽然原函数相对容易验证，但要得到它们却并不容易。通过经典方法和计算机代数软件可以获得这些原函数，但过程可能相当杂乱。归根结底，声称这些工作是手算完成的，或是凭借朴素直觉完成的，是相当不现实的。（为了有所体会，读者可以尝试在关于 x和 y的积分中交换积分次序，计算 $\mathrm{A}_{\mathrm{SdS}}(\widetilde{W}^C_\eta)$、$\mathrm{A}_{\mathrm{SdS}}(\widetilde{E}^C_\eta)$、$\mathrm{A}_{\mathrm{SdS}}(\widetilde{V}^C_\eta)$。诚然，这一计算更为复杂，但也没有复杂到无法承受，因此不妨一试。）还有一个相对次要、但会影响计算实际面貌的问题如下：起初，积分主要都用“artanh”表示。这些表达式本可以用“ln”表示；就加法公式和渐近估计而言，这样会更有利。另一种可能是用“arsinh”表示这些表达式，此时所得表达式通常更简单（这也可以作为给读者的另一个有趣练习），而且我们不必像使用“artanh”时那样检查函数定义域（尽管这通常很容易做到）。换句话说：我们本可以为了得到漂亮的表达式而采取更机会主义的做法，而不是追求统一。归根结底，可以说，我们在 BCK模型中进行计算的论述并不符合数学论述的效率要求。

我们做得不错的地方。尽管上一段提出了批评，我认为我们广泛讨论 BCK模型中的情形，仍然做得很好。理由如下：理解所遵循的路径不同于数学交流的效率原则。BCK模型对于研究双曲圆锥曲线而言很自然，因此，即使某些计算在另一种模型中更简单，在一个易于接触的情形下熟悉该模型仍然是有益的。为了理解论证的整体比例，即使是不必要计算的要素也值得一看。不断援引参考资料可能会混淆论证的深度，而且假装读者从一开始就应当立即记住经典著作的内容，也令人恼火。就考察共线变换和凸性性质而言，BCK模型在理论上更为优越，因此无论如何都很难完全不提及它。此外，周长的极线计算需要环境射影空间这一背景。大量使用“artanh”是合理的选择：双曲三角函数与球面几何中的三角函数更具类比性；然而，“artanh”在算术上比“arsinh”更接近 ln，也更符合 BCK模型的精神。另一方面，我们走出 BCK模型，这一点也做得很好：不应忽视替代性方法，尤其是在它们更为有效时。双曲几何特别清楚地表明，在数学中采取机会主义的做法非常有用；改变观点并采用综合几何思想，能够大幅加快计算。如今，罗巴切夫斯基关于从多个视角考察双曲几何将推动微积分取得巨大进展的希望，被认为过于天真；但至少对于与双曲几何有关的计算，采用多个视角——无论是否为综合的——确实可能提高计算的有效性，或者更确切地说，有助于避免在较难处理的情形中掉入某些陷阱。此外，归根结底，这一点也适用于数学研究：相较于能够用简短篇幅呈现的内容，拥有较为广泛的知识储备以供选择，会更加现实。

我们在数学上确实学到了什么。尽管没有进行明确的比较，但我们的认识凸显出，从解析视角来看，非退化圆锥曲线分为三个层次：第一层是均匀圆锥曲线（欧几里得情形中的圆、双曲情形中的圆周），它们是最简洁优美的；第二层是一些奇特但可以用解析方法处理的圆锥曲线（例如欧几里得情形中的抛物线，以及双曲情形中的 h-椭圆抛物线）；最后，在第三层中，是解析处理起来更具挑战性的圆锥曲线（例如欧几里得和双曲情形中的真椭圆）。

我们总体上做了什么。希望我们已经对一些双曲圆锥曲线有所了解。（但愿学得不太少，也不至于太多。）不过，重点并不在此。就技术层面而言，数学已经与通俗教科书相去甚远。这当然是好事，比如消费电子产品的发展就是如此。尽管如此，这种分离也可能造成巨大的鸿沟。不过，有一类数学命题，对于技术娴熟的人来说，可以称为“观察”；它们并非全然 trivial，却可以借助现有的技术工具进行充分探究。如今，我认为，阐述技术信息是有价值的，而且只要可能，就应该付诸实践。然而，这既不意味着模仿初等数学，也不意味着一味追求难以解释的优雅；真正有价值的是从多个角度审视问题。经验告诉我们，数学理解更可能来自一种浅显易懂的论述。这里所说的“浅显”，并非内容匮乏，而是让读者有机会反思某种方法的利弊、可能性与局限。我们生活在电子时代，但数学论述往往仍沿袭

旧有的习惯，例如强调经典问题和／或某种特定方法的优雅。前一种情况下，人们未必认同经典问题相对重要；后一种情况下，缺乏比较，人们也未必能欣赏某种方法之美。（因此，最优雅的论述本身也可能枯燥乏味，或显得空洞。）而且，极其优雅的纯理论方法也无法为应用做好准备。研究论文在处理问题方面可能堪称杰作，却未必会揭示其中的困难与其他可行方法。此外，尽管数学中的有效性值得称许，篇幅限制却常常制约研究的广度。因此，我认为，从多个角度探讨技术性强但挑战性不大的问题，同时留一些空间供读者作审美判断，或许会引起兴趣。

参考文献

[1] A’Campo-Neuen, Annette；Papadopoulos, Athanase：《Eduard Study 论文〈非欧几何的贡献 I〉札记》。载于： [2], 第14章，253–262。https://doi.org/10 4171 196 1 14 。/ - /

[2] Alberge, Vincent；Papadopoulos, Athanase 编：《非欧几何十八篇论文》。IRMA 数学与理论物理讲义，29。欧洲数学会，苏黎世，2019年。https://doi.org/10 4171 196 。/ Alcalá

[3] Vicente, Miriam：《意大利非欧几何的开端》。 [加泰罗尼亚语。]《加泰罗尼亚数学学会公报》34（2019年）5–32。https://revistes.iec.cat/index.php/BSCM/article/view/104068 003 。Barbarin, P.：《非欧解析

[4] 几何研究》。比利时皇家科学院《荣誉论文及其他论文集》，第60/1卷，布鲁塞尔，1901年。168页。[5] Beltrami, Eugenio：《非欧几何的解释性论文》。数学杂志 6（1868年），284–312。英文译本： [77], 7–34。参见 https://eudml.org/doc/203538。[6] Beltrami, Eugenio：《常曲率空

间的基本理论》。《纯数学与应用数学年刊》，第二辑，2（1868年），232–255。英文译本： [77], 41–62。https://doi.org/10 1007 02419615 。/BF Berger, Marcel：《几何学 I、II》。M.

[7] Cole 和 S. Levy 由法文译出。Universitext。施普林格出版社，柏林，1987年。[8] Bolyai, Johann：《附录：展示绝对真实的空间科学：独立于欧几里得第十一公设（其真伪先验地永远无法判定）；并在公设为假时附上圆的几何化正方》。 [1831.] 摘印自：Bolyai, Wolfgang：《尝试以直观方法及其固有的明证性，引导求知青年学习初等及高等纯数学基础》。附三篇附录。第一卷：特尔古穆列什改革学院印刷， [特尔古穆列什改革学院，特尔古穆列什，] 1832。 [第二卷：1833年。]http://real-eod.mtak.hu/id/eprint/2922 http://real-eod.mtak.hu/id/eprint/[9] Bolyai, John：《绝对空

间科学：独立于欧几里得第十一公设的真伪（对此先验地永远无法判定）》。Dr. George Bruce Halsted 从拉丁文译出。 [拉丁文原版： [8] 1831。] The Neomon；得克萨斯州奥斯汀；1896年。另见 [14]。[10] Bolyai János：《附录》。 [匈牙利语。] [拉丁文原版： [8] 1831。] 由卡尔泰西·费伦茨作序、注释并补充。匈牙利科学院出版社，布达佩斯，1952年。https://real-eod.mtak.hu/id/eprint/[11] [Bolyai, János：《附录：空间科学》。匈牙利语。] [拉

丁文原版： [8] 1831。] 由卡尔泰西·费伦茨编辑，并撰写导言、注释及补充内容。匈牙利科学院出版社，布达佩斯，1973年。https://real-eod.mtak.hu/id/eprint/[12]

Bolyai, Janos：《附录：空间理论》。 [拉丁文原版： [8] 1831。] 由 Ferenc Kárteszi 教授编辑，并撰写导言、评论及补遗。Barna Szénássy 教授撰写补篇。匈牙利科学院出版社，布达佩斯， [；北荷兰出版社，阿姆斯特丹等地，] 1987。https://real-eod.mtak.hu/id/eprint/15513

[13] Bonola, Roberto：《非欧几何：其发展的批判性与历史性研究》。 [意大利文原版：1906年。] H. S. Carslaw 经授权译成英文，并附加附录。Federico Enriques 撰写导言。The Open Court Publishing Company，芝加哥，1912年。另见 [14]。[14] Bonola, Roberto：《非欧几何：其发展的批判性与历史性研究》。H. S. Carslaw 经授权译成英文，并附加附录。Federico Enriques 撰写导言。 [原版：The Open Court Publishing Company，芝加哥，1912年。意大利文原版：1906年。] 附有补编，收录 Dr. George Bruce Halsted 对 John Bolyai《绝对空间科学》的译文 [原版：The Neomon，得克萨斯州奥斯汀，1896年。译自拉丁文原版 [8] 1832], Nicholas Lobachevski《平行线理论》 [原版：得克萨斯大学，得克萨斯州奥斯汀，1891年。译自德文原版 [57] 1840]。Dover，纽约，1955年。[15] Božić Dragun, Ivana；Koncul, Helena：《准双曲平面与双曲平面中的圆锥曲线渐屈线》。《几何学杂志》114:18（2023年），17页。https://doi.org/10 1007 00022 023 00682 6 。/s - - - Bromwich, T. J. I’A.：《二次曲面的分类》。《美国数学学会汇刊》6（1905年），275–285。https://doi.org/10 2307 1986220 。/ Cayley, Arthur：《关于量子形式的第六篇回忆录》。《伦敦皇家学会哲学汇刊》149（1859年），61–90。https://doi.org/10 1098 1859 0004 。/rstl. 。Coolidge, Julian Lowell：《双曲空间中的二次曲面》。《美国数学学会汇刊》4（1903年），161–170。https://doi.org/10 2307 1986356 。/ Coolidge, Julian Lowell：《非欧几何原理》。Clarendon Press，牛津，1909年。[20] Cox, Homersham：《虚几何中的齐次坐标及其在力系中的应用》。《纯粹与应用数学季刊》18（1881年）178–192页及（1882年）193–215页。[21] Coxeter, H. S. M.：《德西特世界的几何背景》。《美国数学月刊》50（1943年），217–228。https://doi.org/10 2307 2303924 。/ Csima, G.；Szirmai, J.：《双曲平面中广义圆锥曲线的等视曲线》。《乌克兰数学杂志》71（2020年），1929–1944。https://doi.org/10 1007 11253 020 01756 3 。/s - - - de Sitter, W.：《论惯性相对性：关于爱因斯坦最新假说的评论》。《荷兰皇家艺术与科学学院学报》 / / （） – **19** 1917 1217 1225 。[24] D’Ovidio, Enrico：《射影度量中圆锥曲线的焦点性质》。都灵皇家科学院学报 26 （ 1891 年），237–264。[25] D’Ovidio, Enrico：《射影度量中的共焦圆锥曲线》。都灵皇家科学院学报 26（1891年），314–325。[26] D’Ovidio, Enrico：《射影度量中的圆锥曲线定理》。都灵皇家科学院学报 26（1891年），369–379。[27] Эпштейн, И. Ш. [Èpšteĭn, I. Š.]：《扩展双曲平面中实圆锥曲线的完整分类》。 [扩展双曲平面中实圆锥曲线的完整分类。]《高等院校数学学报》 [《高等院校数学学报》] （1960年）第1期，234–243。https://www.mathnet.ru/rus/ivm1975 [28] Fladt, Kuno：《平面双曲几何中的一般圆锥曲线方程》。《纯粹与应用数学杂志》197（1957年），121–139。https://doi.org/10 1515 1957 197 121 。/crll. 。。。Fladt, Kuno：《平面双曲几何中的一般圆锥曲线方程》II。《纯粹与应用数学杂志》199（1958年），203–207。https://doi.org/10 1515 1958 199 203 。/crll. 。。。Fladt, K.：《双曲几何中圆锥曲线的初等确定》。《匈牙利科学院数学学报》15（1964年），247–257。https://doi.org/10.1007/BF01897134 [29] [30]

[31] Fillastre, François；Seppi, Andrea：《球面、双曲及其他射影几何：凸性、对偶性与过渡》。载于： [2], 第16章，第321–409页。https://doi.org/10.4171/196/1/16。/-/G. Horváth, Ákos：《奇妙几何：连接之学》。 [匈牙利语。] Typotex， [布达佩斯，] 2013。[33] G. Horváth, Ákos：双曲平面几何再探。《几何学杂志》106（2015），341–362。https://doi.org/10.1007/s00022-014-0252-0。/s---G. Horváth, Ákos：非欧平面中的构造曲线。《日利纳大学学报：数学辑》28（2016），13–42。参见 https://arxiv.org/abs/1610.00473。Hajós György；Strohmajer, János：《几何学基础》。[匈牙利语。] （罗兰大学自然科学学院大学讲义。）Tankönyvkiadó，布达佩斯，1964年。[36] 希尔伯特，David：《几何学基础》（《几何基础》）。第2版英文版。由 Leo Unger 根据 Paul Bernays 博士修订增补的第十版德文版翻译。[德文原版：1899年。] Open Court；美国伊利诺伊州拉萨尔；1971年。[37] 希尔伯特，David：论常曲率曲面。《美国数学会汇刊》2（1901），87–99。https://doi.org/10.2307/1986308。/ Izmestiev, Ivan：球面与双曲圆锥曲线。载于： [2], 第263–320页。https://doi.org/10.4171/196/1/15。/-/ Jost, Jürgen（编）：伯恩哈德·黎曼——论几何学基础假设。由 Jürgen Jost 编辑、注释并翻译。扩充英文版。科学经典文本。Birkhäuser，2016年。https://doi.org/10.1007/978-3-319-26042-6。/----Kerékjártó, Béla：几何学基础。第一卷：欧几里得几何的基本构造。 [匈牙利文原版：1937年。] 匈牙利科学院出版社，布达佩斯，1955年。https://real-eod.mtak.hu/id/eprint/18028 Kerékjártó, Béla：几何学基础。第二卷：射影几何。 [匈牙利文原版：1944年。] 匈牙利科学院出版社，布达佩斯， [及 Gauthier-Villars，巴黎，] 1966。https://real-eod.mtak.hu/id/eprint/18029 Killing, W.：论两种具有恒定正曲率的空间形式。《纯粹与应用数学杂志》86（1879），72–83。https://eudml.org/doc/148388 Killing, W.：非欧空间形式中的计算。《纯粹与应用数学杂志》89（1880），265–287。https://eudml.org/doc/183439 Killing, Wilhelm：《非欧空间形式的解析处理》。B. G. Teubner，莱比锡，1885年。[45] 克莱因，Felix：论所谓的非欧几何。《数学年刊》4（1871），573–625。英文译本： [77], 83–110。https://doi.org/10.1007/BF02100583。/BF 克莱因，Felix：论所谓的非欧几何。（第二篇论文。）《数学年刊》6（1873），112–145。https://doi.org/10.1007/BF01443189。/BF Klein, F.：非欧几何，第一讲。1889—90年冬季学期讲授。Fr. Schilling 整理。第二次印刷。哥廷根，1893年。[48] Klein, F.：非欧几何，第二讲。1890年夏季学期讲授。Fr. Schilling 整理。第二次印刷。哥廷根，1893年。[49] Klein, Felix：《非欧几何讲义》。W. Rosemann 重新整理付印。J. Springer，柏林，1928年。参见 https://eudml.org/doc/203477 Liebmann, H.：非欧空间中的圆锥曲线与行星运动。《萨克森皇家科学院数学与物理学部报告》54（1902），393–423。[51] 海因里希·利布曼：《非欧几何》。G. J. Göschen’sche Verlagshandlung，莱比锡，1905年。[52] 海因里希·利布曼：《非欧几何》。第二版，重新修订。G. J. Göschen’sche Verlagshandlung；柏林、莱比锡；1912年。

[53] 海因里希·利布曼：《非欧几何》。第三版，重新修订。Walter de Gruyter & Co.；柏林、莱比锡；1923年。[54] 罗巴切夫斯基 [, 尼古拉·伊万诺维奇] ：几何学原理。（论几何学的基本原理。）喀山通报 [《喀山通报》] **25** （1829），178–187，228–241；27（1829），227–243；28（1830），251–283，571–636。[55] N. J. Lobatschefskij：论几何学基础。 [俄文原版： [54] 1829–1830年。] 见第1–66页，载于：尼古拉·伊万诺维奇·罗巴切夫斯基：《两篇几何学论文》。由弗里德里希·恩格尔从俄文翻译，附注释及作者传记。非欧几何史料。弗里德里希·恩格尔和保罗·施泰克尔编。B. G. Teubner，莱比锡，1898年。[56] Lobatschewsky, N.：虚几何。《纯粹与应用数学杂志》17（1837），295–320。https://doi.org/10 1515 1837 17 295 。/crll. . . Lobatschewsky, [57] Nicolaus：平行线理论的几何研究。G. Fincke书店，柏林，1840年。[58] 尼古拉斯·罗巴切夫斯基：平行线理论的几何研究。 [德文原版：[57] 1840。] 由 George Bruce Halsted 翻译。得克萨斯大学，奥斯汀，1891年。另见 [14]。[59] N. I. Lobacsevszkij：平行线理论的几何研究。 [德文原版： [57] 1840。] V. F. 卡冈作序并撰写注释和附录。 [俄文原版：1945年。] 译者：Bizám György。匈牙利科学院出版社，布达佩斯，1951年。https://real-eod.mtak.hu/id/eprint/13432 [60] [尼古拉·伊万诺维奇·罗巴切夫斯基：《泛几何学》。俄文原版1855年，法文版1856年。] 由阿塔纳斯·帕帕佐普洛斯翻译并编辑。欧洲数学会，苏黎世，2010年。https://doi.org/10 4171 087 。/ J. Massau：关于非欧几何的札记。摘自《根特专科学校毕业工程师协会年刊》，1904年，第419–456页；1905年，第379–513页。[61] Dequesne-Masquillier & Fils，蒙斯，1906年。[62] 埃米尔·莫尔纳：圆锥曲线焦点性质的综合“绝对”论述。 [匈牙利语。] 《数学评论》21（1970），335–355。https://real-j.mtak.hu/id/eprint/9368 [63] 埃米尔·莫尔纳：双曲几何中圆锥曲线的渐近线性质，以及渐近线与焦点关系的综合论述。 [匈牙利语。] 《数学评论》22（1971），77–91。https://real-j.mtak.hu/id/eprint/9370 [64] Molnár, E.：度量平面上的圆锥曲线。《匈牙利科学院数学学报》31（1978），317–343。https://doi.org/10 1007 01901981 。/ BF S. L. 佩夫兹涅尔：罗巴切夫斯基平面上二次曲线的焦点—准线性质。 [罗巴切夫斯基平面上二次曲线的焦点—准线性质。] 《高等院校数学学报》 [《高等院校数学学报》] （1960）第6期，184–194。https://www.mathnet.ru/rus/ivm2341 [65] [ ] S. L. 佩夫兹涅尔：罗巴切夫斯基平面上与焦点—准线性质对偶的二次曲线性质。 [罗巴切夫斯基平面上与焦点—准线性质对偶的二次曲线性质。] 《高等院校数学学报》 [《高等院校数学学报》] （1961）第5期，39–50。https://www.mathnet.ru/rus/ivm1917 [66] [ ] S. L. 佩夫兹涅尔：利用焦点—准线不变量对罗巴切夫斯基平面上不可约二次曲线进行详细分类。[利用焦点—准线不变量对罗巴切夫斯基平面上不可约二次曲线进行详细分类。] 《高等院校数学学报》 [《高等院校数学学报》] （1962）第6期，85–90。https://www.mathnet.ru/rus/ivm2117 [67] H. 庞加莱：非欧几何在二次型理论中的应用。《法国科学进步协会》10（1881），132–138。英文译本： [77], 139–145。[68] H. 庞加莱：福克斯群理论。《数学学报》1（1882），1–62。部分英文译本： [77], 123–129。https://doi.org/10.1007/BF02592124 [69]

[70] Rédei, L.: 《根据克莱因的欧氏与非欧几何基础》。Pergamon Press，牛津等地，1968年。14268 https://real-eod.mtak.hu/id/eprint/[71] 黎曼，伯恩哈德: 《作为几何学基础的假设》。哥廷根皇家科学协会论文集 13（1868年），133–150。135760 https://eudml.org/doc/[72] 黎曼，伯恩哈德: 《作为几何基础的假设》。[原文为德语 [71] 1868。（威廉·金登·克利福德译。）《自然》8（1873年），（第183期）14–17页及（第184期）36–37页。[73] 舒尔，弗里德里希: 《几何基础》。B. G. Teubner；莱比锡、柏林；1909年。[74] Sommerville, D. M. Y.: 《非欧几何原理》。G. Bell and Sons，伦敦，1914年。[75] 斯皮瓦克，迈克尔: 《微分几何综合导论》。第二卷。（原版1970年的第3版。）Publish or Perish；美国得克萨斯州休斯敦；1999年。[76] 施泰克尔，保罗；恩格尔，弗里德里希: 《从欧几里得到高斯的平行线理论：非欧几何前史文献集》。与弗里德里希·恩格尔合作，由保罗·施泰克尔编。B. G. Teubner，莱比锡，1895年。[77] 约翰·史迪威（编译）: 《双曲几何文献选编》。数学史第10卷。[伦敦数学会与] 美国数学会；美国罗得岛州普罗维登斯；1996年。[78] Story, William E.: 《圆锥曲线的非欧性质》。《美国数学杂志》5（1882年），358–381。https://doi.org/ 10 2307 2369551 。/ Study, E.: 《非欧几何论文集 I、II、III》。第一部分。[79] 《美国数学杂志》29（1907年），101–116。英文译本: [2], 第13章，237–251页。https://doi.org/10.2307/2370031 https://doi.org/ 10 4171 196 1 13 。 / - / Szász, Pál: 《鲍耶–罗巴切夫斯基几何导论》。 [匈牙利语。] 匈牙利科学院出版社，布达佩斯，1977年。https://real-eod.mtak.hu/id/eprint/[80] 9980 Szenthe, János；Juhász, Rozália: 《几何学基础》。[匈牙利语。（约瑟夫·阿蒂拉大学自然科学学院大学讲义。）Tankönyvkiadó，布达佩斯，1976年。[81] Vörös, Cyrill: 《解析鲍耶几何》。第1卷: 《平面几何》。 [匈牙利语。] Kókai，布达佩斯，1909年。[82] Vörös, Cyrill: 《绝对几何解析》。第1卷: 《鲍耶平面》。 [世界语。] Kókai，布达佩斯，1910年。[83] Vörös, Cyrill: 《绝对几何解析》。第2卷: 《鲍耶空间》。 [世界语。] Kókai，布达佩斯，1912年。[84] Weiss, Gunter: 《双曲平面中的特殊圆锥曲线》。《KoG》20（2016年），31–40。https://hrcak.srce.hr/174096 [85]

电子邮箱: gyula.lakos@uni-miskolc.hu

米什科尔茨大学数学研究所分析学系，H-3515 米什科尔茨大学城，匈牙利