arXiv:2603.08247v1 [math.CV] 9 Mar 2026

广义 Hirzebruch 流形上的 Levi问题

S. IVASHKOVYCH、C. MIEBACH 与 V. SHEVCHISHIN

纪念 Alan T. Huckleberry

Abstract. 我们回顾由 Hirschowitz 以及 Grauert-Remmert-Ueda 建立的、在存在对称性的情形下求解 Levi问题的经典方法。随后，我们通过在若干新情形中求解 Levi问题来说明这些方法，即广义 Hirzebruch 流形以及非对角型初级 Hopf 曲面。

1. Introduction

多复变函数理论的核心问题之一是所谓的*Levi*问题，可陈述如下。设 X 是一个复流形，并设 (D, p) 是 X 上的一个局部Stein域。在何种条件下 D 是 Stein 的? 对于$X = \mathbb{C}^n$，Levi问题首先由 Oka [O61] 解决，他证明了 $\mathbb{C}^n$ 上的每一个局部 Stein域都是 Stein 的。这一基本结果由 Docquier 和 Grauert 推广到任意 Stein流形上的局部 Stein 域，见 [DoGr60]。在 [Fuj64] 中，Fujita 证明了 $\mathbb{P}^n$ 上唯一不是 Stein 的局部 Stein 域是 $(\mathbb{P}^n, \mathrm{id})$。

本文将介绍两种在存在对称性的情况下求解Levi问题的方法。第一种方法由 Ueda 在 [Ue80] 中提出，旨在将 Fujita 定理推广到 Grassmann 流形上的局部 Stein 域。他的主要洞见是，可以将 Matsushima 和 Morimoto 关于复约化群的全纯主丛的工作 [MaMo60] 与 Grauert 和 Remmert 在 [GrRe56] 中取得的深刻成果结合起来。这与 [Nem13] 有关。

我们将通过求解广义 Hirzebruch 流形 X_k上的局部 Stein 域的 Levi问题来阐释这些思想；也就是说，研究全纯向量丛 $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(k) \to \mathrm{Gr}_d(\mathbb{C}^n)$ 的射影化全空间，其中 $k \geqslant 0$，而 $\mathrm{Gr}_d(\mathbb{C}^n)$ 是由 d 维线性子空间构成的 Grassmann 流形。特别地，这包括求解 Hirzebruch 曲面上的域的 Levi问题。

定理 1. 设 D 是 $k \geqslant 0$上广义*Hirzebruch*流形X_k 上的局部*Stein*域。若 D 不是*Stein*的，则出现下列可能性之一：
(1) 对于某个覆盖在（V）上的局部*Stein*域 $V_d\mathrm{Gr}\mathbb{C}^n$（$\mathbb{C}^n$）（这包括情形$D = X_k$）；
(2) D 是例外除子 E_∞的1-完备邻域上的有限无分歧覆盖；

2010年 数学主题分类。 主分类32E40，次分类32M05。

(3) D 是 $B\setminus E_\infty$上的有限无分歧覆盖，其中 B 是例外除子 E_∞的1-完备邻域；*(4)* D 是 $X_k \setminus E_\infty$ 上的有限覆盖（这包括情形 $D = X_k \setminus E_\infty$）；

这里，我们所说的 D （或 B）是 1-完备的，是指在压缩例外除子 E_∞ 后，它变成 Stein。

作为第二个应用，我们将研究某些紧黎曼曲面乘积中的局部 Stein 域。

定理 2。设 Σ_g 是亏格为 $g \geqslant 0$ 的紧黎曼曲面，且 D 是 $\Sigma_g \times \mathbb{P}^1$ 中的局部 *Stein* 域。如果 D 不是 *Stein*，则只有以下情况可能发生：

(1) $D = D_1 \times \mathbb{P}^1$，其中 D_1 是 Σ_g 中的一个域；
或 *(2)* $D = \Sigma \times D_2$，其中 D_2 是 $\mathbb{P}^1$ 中的一个域。

该结果使用了 [GrRe56]，并结合 Brun 的一个定理，见 [Br77], 。该定理解决了 Stein流形上的全纯纤维丛中、纤维为紧黎曼曲面的域的 Levi问题。

上述几何方法中的第二种由 Hirschowitz 在 [Hir74] 和 [Hir75] 中发展；他研究了任意无穷小齐性流形 X 上的域（D, p）的 Levi问题，并作出了更严格的假设： D 具有连续的多重次调和穷竭函数。为区别于局部 Stein 域，我们将这类域称为伪凸 域。我们将通过证明以下结果来展示 Hirschowitz 的方法。

定理 3。设 X 是一个非对角型的初级 *Hopf* 曲面。那么，每个伪凸域 $D \subsetneq X$ 都是 *Stein*。

这一结果完成了 [LY15] 和 [Mie14], 中开始的工作；这两篇文献考察了对角初级 Hopf曲面的情形。

2. The Levi problem over generalized Hirzebruch manifolds

本节将紧密遵循 Ueda 在 [Ue80] 中的论证，以解决 Grassmann 流形上的射影化线丛之上的域的 Levi问题。

2.1. Ueda 对 Grauert 和 Remmert 方法的推广。回顾一下，复流形 X 上的黎曼域是一个二元组（D, p），其中 D 是一个连通的豪斯多夫拓扑空间，且 p: $D \to X$ 是局部同胚。该同胚在 D 上诱导出一个显然的复结构，并且 p 成为局部双全纯映射，参见 [GuRo65]。如果存在一个 Stein 邻域 $U \ni x$ ，使得 $p^{-1}(U)$ 的所有连通分支都是 Stein，则黎曼域（D, p）称为在点 $x \in X$ 上局部 Stein。进一步地，如果（D, p）在 X的每一点上都是局部 Stein，则称其在 X 上局部 Stein。

供后文使用，我们指出 Grauert 和 Remmert 的一项重要结果，后来 Ueda 将其推广，参见 [GrRe56, 命题 6] 以及 [Ue80, 第 4] 节。陈述该结果之前，回顾一下，对于复流形 X 上的黎曼域 (D, p)，可以定义其边界 ∂D，参见 [GrRe56, 定义 4]。此外，可以赋予 $D := D \cup \partial D$ 豪斯多夫拓扑空间结构，使得 p: $D \to X$ 延拓为连续

映射$\overline{p}$:$\overline{D} \to X$。设 $A \subset X$ 为一个处处稠密的解析集。若边界点 $x \in \partial D$具有 D 中的一个邻域 U，使得 $(U, p|_U)$ 是满足$U \cap \partial D \subset p^{-1}(A)$ 的单叶域，则称该边界点沿 A 可去。我们用 $\partial^r D$ 表示所有沿 A可去的边界点组成的集合。可以证明

$$(D^* := D \cup \partial^r D, p^* := \overline{p}|_{D^*})$$

再次是 X上的黎曼域，称为 D 沿 A的延拓。

定理 2.1（格劳尔特-雷默特，Ueda）。设 X 为复流形，并设（D，p）为 X上的黎曼域。设 $A \subset X$ 为正余维的解析子集，使得 D 在 $X \setminus A$上局部*Stein*。

（*1*）若 D 没有沿 A可去的边界点，则 D 在 X上局部*Stein*。（*2*）沿 A 的延拓 p^*: $D^* \to X$ 在 X上局部*Stein*。

2.2. **广义 Hirzebruch 流形**。设 $M = \mathrm{Gr}_d(\mathbb{C}^n)$为 $\mathbb{C}^n$的所有 d维复线性子空间的 Grassmann 流形。由于 M 的皮卡群同构于 $\mathbb{Z}$，对每个整数 $k \geqslant 0$，我们有全纯线丛$\mathcal{O}(k) \to M$，可将其紧化为全纯 $\mathbb{P}^1$-丛 q_k： $X_k \to M$。换言之， X_k 是$\mathrm{Gr}_d(\mathbb{C}^n)$上秩为2的全纯向量丛 $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(k)$的射影化。注意，由于线丛 $\mathcal{O}(k)$是正的， X_k 中的无穷远截面 E_∞ 是一个例外除子。因此，在收缩 E_∞ 之后，开集$X_k \setminus E_0$（其中 E_0 是 X_k中的零截面）成为一个具有孤立奇点的Stein空间。

例。如果 $M = \mathbb{P}^1 = \mathrm{Gr}_1(\mathbb{C}^2)$，那么 X_k 是第 k 个赫希布鲁赫曲面。

为了应用 Ueda 的思想，我们将把 X_k 描述为一个全纯主丛的底空间。为此，首先回顾一下，每个 $g \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$ 都可以唯一地写成 $g = \lambda_g \widetilde{g}$，其中 $\lambda_g \in \mathbb{C}^*$ 且 $\widetilde{g} \in \mathrm{SL}(d, \mathbb{C})$。群 $G := \mathrm{GL}(d, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*$ 通过以下方式作用于$V := \mathbb{C}^{n \times d} \times \mathbb{C}^2$

$$(g, \mu) \cdot (Z, w) := \big(Zg^{-1}, (\mu w_1, \lambda_g^k \mu w_2)\big).$$

注。注意， G 是复约化群，因为它是其极大紧子群 $\mathrm{U}(d) \times \mathrm{U}(1)$ 的复化。

令 $\mathbb{C}^{n \times d}_{d-1}$为满足 $\mathrm{rk}(Z) \leqslant d-1$的 $Z \in \mathbb{C}^{n \times d}$解析集，并考虑 V中的两个解析子集 $A_1 := \mathbb{C}^{n \times d} \times \{0\}$ 和 $A_2 := \mathbb{C}^{n \times d}_{d-1} \times \mathbb{C}^2$。直接验证可得， G 在 $\Omega := V \setminus (A_1 \cup A_2)$ 上自由且适当作用，且 $\Omega/G \cong X_k$。换言之，我们有一个全纯 G- 主丛 π: $\Omega \to X_k$。

注记。 X_k 的例外除子 E_∞ 与 $\pi\big(\{w_1 = 0\}\big)$重合。

为便于后续使用，我们注意到以下内容

引理 2.2。对于$(Z, w) \in \Omega$，令$G \cdot (Z, w)$ 表示相应的 G-轨道在 V中的拓扑闭包。于是有

$$\overline{G \cdot (Z, w)} = \overline{\mathrm{GL}(d, \mathbb{C}) \cdot Z} \times \{0\} \cup \{0\} \times (\mathbb{C}e_1) \cup \{0\} \times (\mathbb{C}e_2).$$

特别地， V 的原点位于Ω中每个 G-轨道的闭包内。

2.3. 关于 X_k的局部 Stein 域。 对于每个关于 X_k 的黎曼域（$D,\ p$），我们都可以定义它在 Ω 上的拉回：

$$\widetilde{D} := \big\{(v,x) \in \Omega \times D;\ \pi(v) = p(x)\big\}$$

从而得到交换图

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{D} & \xrightarrow{\ \widetilde{\pi}\ } & D \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \widetilde{p}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle p} \\ V \supset \Omega & \xrightarrow[\ \pi\ ]{} & X_k. \end{array}$$

这里，$\widetilde{\pi}\colon D \to D$ 仍是一个 G-主丛，我们可以将（$D, \widetilde{p}$）视为 V 上的黎曼域。

我们将需要 Matsushima 与 Morimoto 的下述结果，见 [MaMo60, Th´eor`emes 4et 5]。

定理 2.3. 设 G 为复约化群，并设 $\pi\colon P \to B$ 为全纯G-主丛。则全空间 P 为 *Stein* 当且仅当底 B 为 *Stein*。

我们现在可以证明定理 1。为此，设（D, p）为广义Hirzebruch流形 X_k 上的局部Stein域。由定理 2.3 可知$\widetilde{p}\colon D \to V$ 在 Ω 上是局部 Stein 的。

令 $A_1 \cup A_2$ 为边界点集。若 $\partial^r D = \emptyset$，则由定理 2.1 可知，D 在 V 上局部为 Stein。于是，D 是 Stein 的，因此由定理 2.3 可知，D 也是 Stein 的。因此，以下我们假设 $\partial^r D$ 非空。令 $(D^*,\ \widetilde{p}^*)$ 为 $(D,\ \widetilde{p})$ 沿 $A_1 \cup A_2$的延拓。

若 $x \in \partial^r D$，则对于某个$\overline{(Z,\ w)} \in \Omega$，有 $\widetilde{p}^*(x) \in G \cdot (Z,\ w) \subset A_1 \cup A_2$。利用引理 2.2，我们将区分几种情形。

情形 1. 如果 $\partial^r D$ 包含一个位于 V原点上方的点，那么 D^* 包含一个与 $0 \in V$的某个邻域双全纯的单叶域。由于 Ω 中每个 G-轨道的闭包都包含 0，因此在这种情况下我们得到 $D = X_k$。

情形 2. 假设 $\partial^r D$ 包含一个位于 $(Z,\ 0)$ 上方的点，其中 $0 \neq Z \in \mathbb{C}^{n\times d}_{d-1}$。再次利用引理 2.2，我们看到在这种情况下，$D^*$ 包含一个与 $\{Z\} \times \mathbb{C}^2$ 双全纯的单叶域。因此，D 中的每个点都包含经过该点的整个 $\mathbb{P}^1$-纤维。这意味着 D 具有 $q_k^{-1}(V)$ 的形式，其中 V 是 $\mathrm{Gr}_d(\mathbb{C}^n)$ 上的某个域。

情形 3. 假设 $\partial^r D$ 包含一个位于 $(0,\ w)$ 上方的点，且 $w \neq 0$。那么，对于某个 $\varepsilon > 0$，D^*包含 $U \times \Delta^2_\varepsilon(w^*)$ 上方的一个单叶邻域，其中 $U = U_0 \setminus \mathbb{C}^{n\times d}_{d-1}$，且 U_0 是 $0 \in \mathbb{C}^{n\times d}$的某个邻域。我们将始终假设 U_0 在乘以满足 $|\lambda_g| < 1$的 λ_g 时保持不变。

用 $g \in \mathrm{GL}(d,\mathbb{C})$ 作用于该集合，并借助 $|\lambda_g| < 1$，我们得到 D^* 包含一个展布于其上的域

$$U \times \Delta_\varepsilon(w_1^*) \times \big\{\, |w_2| \geqslant |w_2^*| \,\big\}. \tag{2.1}$$

事实上，任取 $Z \in U$，并注意到对任意 $|\lambda_g| < 1$ 都有 $\lambda_g Z \in U$。然后用 λ_g^{-1} 作用$\widetilde{\ }$，得到 D^* 中位于点 $x = (Z, w_1, \lambda^{-k} w_2) \in \Omega$ 之上的一个点。这意味着$\sim D^*$ 在该 x 之上可能包含 $d \leqslant k$ 个点，且它们满足 (2.1)。

子情形 3a. 设 $w_1 \neq 0$。在锥上的域$\widetilde{\ }$以 μ，我们得到

$$U \times \left(\left\{ |w_2| \geqslant \frac{|w_2^*|}{|w_1^*|} |w_1| \right\} \setminus \{ w_1 = 0 \} \right). \tag{2.2}$$

事实上，对于任意的 $w_1 \neq 0$，找出 μ 使得 $w_1 = \mu w_1^*$，并作用于满足 (2.1) 的 $(w_1^*,\ w_2)$，通过此 μ 得到 $(w_1,\ \mu w_2)$。现在，由于我们有 $|w_2| > |w_2^*|$，将得到 $|\mu w_2| > |\mu w_2| = |w_2^*| \frac{|w_1|}{|w_1^*|}$，正如所需。因此，在这种情况下，$D$ 在某个包含 E 的 1-完备域 B 上有限展布。也就是说，若 $\sim w_2^* \neq 0$，则情形 (3) 出现；若 $w_2^* = 0$，则情形 (4) 出现。由于 $D^* \to U$ 是非分歧的，且当 $k \geqslant 2$ 时，$H_k \setminus E$ 的基本群为 $\mathbb{Z}_k$，我们看到覆盖数 d 应当是 k 的因数。$\widetilde{\ }$子情形 3b. 现在设 $w_1^* = 0 \neq w_{2^\circ}^*$ 那么 D^* 包含一个在 $\sim U \times \Delta_\varepsilon(0) \times \Delta_\varepsilon(w_2^*)$ 上的单叶邻域，其中某个 $\varepsilon > 0$。作用以 μ，我们得到 D^* 包含一个展布在锥上的域

$$U \times \left\{ |w_2| \geqslant \frac{|w_2^*|}{\varepsilon} |w_1| \right\}. \tag{2.3}$$

事实上，取 $|w_1| > \varepsilon$ $\mu = \frac{\varepsilon}{w_1}$，并作用于此 μ，从 $(w_1,\ w_2)$ 得到点 $(\varepsilon,\ \frac{\varepsilon\, w_2}{w_1})$。于是，由 (2.1) 可得

$$\left| \frac{\varepsilon\, w_2}{w_1} \right| \geqslant |w_2^*|,$$

这就是 (2.3)。在这种情况下，D 是例外除子E_∞的一个 1-完备邻域，也就是说，情形 (2) 成立。

本节余下部分将证明定理 2。

设 D 是 $\Sigma_g \times \mathbb{P}^1$ 中的一个局部Stein域，其中 $g \geqslant 0$。我们用 Ω 表示域$\sim \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$，并考虑 $\mathbb{C}^*$-主丛 $\pi\colon\ \Sigma_g \times \Omega \to \Sigma_g \times \mathbb{P}^1$。设 D 是 D 在 π 下的逆$\widetilde{\ }$像，并将 D 视为 $\Sigma_g \times \mathbb{C}^2$ 中的一个域。根据定理 2.3，$\sim D$ 在除 A 中的点$= \Sigma_g \times \{0\}$ 外的所有点处都是局部 Stein 的。它在作用下也保持 $\mathbb{C}^*$-不变

$$\lambda \cdot (s, w_1, w_2) = (s, \lambda w_1, \lambda w_2).$$

$\sim$ $\sim$ $\widetilde{\ }$记 D^* 为 D 沿 A 的延拓。根据定理 2.1，D^* 在 $\Sigma_g \times \mathbb{C}^2$ 中局部是 Stein 的。

根据 [Br77]，，要么 $\widetilde{D^*}$ 是 Stein，或者 $\widetilde{D}^* = \Sigma_g \times U$ 对于某个 Stein 域 $U \subset \mathbb{C}^2$。

$\widetilde{\ }$在第一种情况下，D 要么是 Stein（如果 D^* 不包含 A中的点），要么对于某个域 $D_1 \subset \Sigma_g$，D 具有 $D_1 \times \mathbb{P}^1$ 的形式。在第二种情况下，对于某个域 $D_2 \subset \mathbb{P}^1$，D 具有 $\Sigma_g \times D_2$的形式。

3. The Levi problem in non-diagonal primary Hopf surfaces

本节将解释 Hirschowitz 的方法如何为非对角初级Hopf曲面中的局部 Stein 域解决 Levi问题。这补充了 [LY15] 和 [Mie14] 的结果，其中讨论了对角初级Hopf曲面。

在第一个小节中，我们将以稍微更一般的形式回顾 Hirschowitz 在 [Hir75] 中提出的技巧，其形式见于 [Mie14]。

3.1. Hirschowitz 的技巧。

设 X 是一个复流形，其全纯切丛为 $TX \to X$，并设 $\pi\colon \mathbb{P}TX \to X$ 为射影化全纯切丛。在 X 上的连续函数若处处局部可表示为一个连续多重次调和函数与一个光滑严格多重次调和函数之和，则称其在 X 上是严格多重次调和的。

对于每个多重次调和函数 $\varphi \in \mathscr{C}(X)$，我们定义

$$C(\varphi) := \mathbb{P}TX \setminus \big\{[v] \in \mathbb{P}TX;\ \varphi \text{ is smooth around } \pi[v] \text{ and } \partial\varphi(v) \neq 0\big\}$$

以及

$$C(X) := \bigcap_{\substack{\varphi\in\mathscr{C}(X)\\ \text{plurisubharmonic}}} C(\varphi). \tag{3.1}$$

$C(\varphi)$ 中的每个集合（因而 $C(X)$ 也是如此）都是 $\mathbb{P}TX$ 中的闭集。下一个结果是 [Hir75, 命题 1.5], cf. [Mie14, 引理 2.3] 的一个略微推广。

命题 3.1. 设 X 是一个复流形，且 $\Omega := X \setminus \pi\big(C(X)\big)$。那么存在一个多重次调和函数 $\psi \in \mathscr{C}(X)$，它在Ω上严格多重次调和。

下文中，若复流形 X 上存在连续的多重次调和穷竭函数 $\rho\colon X \to \mathbb{R}^{>0}$，则称其为伪凸。

下一个结果见 [Hir75, 命题 2.6 和 3.4], 另见 [Mie14, 引理 2.4]。

命题3.2. 设 X 是一个伪凸复流形，且 $\gamma\colon U \to X$ 是 X 上全纯向量场的一条积分曲线，其中 U 是 $\mathbb{C}$ 中的一个域。若 $\gamma'(U)$ 与 $C(X)$ 相交，则 $\gamma'(U)$ 包含于 $C(X)$ 中。若 X 具有光滑的多重次调和穷竭函数，则 $\gamma'(U) \subset C(X)$ 意味着 $\gamma(U)$ 在 X 中相对紧。特别地，此时有 $U = \mathbb{C}$。

下面说明这些结果如何推出 $g = 0$，1 的定理 2。

设 Σ_g 是亏格为 $g = 0$ 或 $g = 1$ 的紧黎曼曲面，且 $X_g := \Sigma_g \times \mathbb{P}^1$。由于曲面 X_g 在其自同构群的单位连通分支 $G = \mathrm{Aut}^0(X)$ 作用下是齐性的，因此可以直接应用 Hirschowitz 的方法来描述 D 中的局部 Stein 域。

首先请注意，根据 Hir74，定理 2.1、引理 2.4]，每个局部伪凸域 $D \subset X_g$ 都有一个连续的多重次调和穷竭函数。考虑按 (3.1) 定义的集合 $C(D) \subset \mathbb{P}TX$。如果 $C(D) = \emptyset$，则根据命题 3.1，该域D 是 Stein。因此，假设 D 不是 Stein；于是对于某个 $x \in D$，$C(D) \cap \mathbb{P}T_xX$ 非空。

命题3.2的证明表明，各向同性群 G_x 作用于 $C(D)\cap\mathbb{P}T_xX$，另见 Hir75，命题 1.6]。若 $g=0$，则 $G=\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\times\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$，且 $G_x=B\times B$，其中 B 与 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 中的上三角矩阵群共轭。若 $g=1$，则 $G=\Sigma_1\times\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$，且 $G_x=\{0\}\times B$。在这两种情况下，G_x 都作用于 $\mathbb{P}T_xX\cong\mathbb{P}^1$，具有两个不动点和一个开轨道；这两个不动点分别对应于 $\Sigma_g\times\mathbb{P}^1$ 的水平纤维化和垂直纤维化的切线。如果 $C(D)$ 与开 G_x-轨道相交，那么根据 Hir75，命题 3.4] ， $D=X_g$ ，因为 $C(D)$ 的所有元素都会在 D 中生成内积分曲线。如果 $C(D)$ 与两个 G_x-不动点之一重合，那么 D 与 $x\in D$ 一起包含$X_g=\Sigma_g\times\mathbb{P}^1$的水平或垂直纤维。由于这两种纤维都没有强拟凸邻域，$C(D)$ 也必定包含位于 $D\setminus\{x\}$ 上方的点所对应的元素。因此，我们可以重复上述论证，并得出结论： $D=D_1\times\mathbb{P}^1$ ，其中 $D_1\subset\Sigma_g$ 为 Stein；或者 $D=\Sigma_g\times D_2$ ，其中 $D_2\subset\mathbb{P}^1$ 为 Stein；或者 $D=X_g$。

3.2. 非对角Hopf曲面中的局部Stein域。我们先回顾非对角型 Hopf 曲面的构造。映射 $f\colon\mathbb{C}^2\setminus\{0\}\to\mathbb{C}^2\setminus\{0\}$由公式定义

$$f(z,w)=(\lambda^k z+w^k,\lambda w)\quad\big(k\geqslant 1,0<|\lambda|<1\big)$$

在 $\mathbb{C}^2\setminus\{0\}$ 上生成一个自由且真作用的 $\mathbb{Z}$-作用。相应的商 $X:=(\mathbb{C}^2\setminus\{0\})/\mathbb{Z}$ 是一个非对角型主 Hopf 曲面。我们将商映射$p\colon\mathbb{C}^2\setminus\{0\}\to X$ 记为 $p(z,\ w)=[z,w]$。群 $G:=\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}$ 通过以下方式作用于 X

$$(a,b)\cdot[z,w]:=\big[a^k(z+bw^k),aw\big].$$

可以证明，$\mathrm{Aut}(X)\cong G/\langle f\rangle$。群 G 在 X 上有两个轨道。轨道$E:=G\cdot[1,0]$是 X 中的一条椭圆曲线，而轨道 $X^*:=G\cdot[0,1]\cong G/\langle f\rangle\cong\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$在 X 中是开集。

设 $D\subsetneq X$ 是一个局部Stein域。我们将证明 D 是 Stein。首先注意到， D 不可能包含 E。这是因为，由于 X^* 是 Stein，域 $D^*:=D\cap X^*$ 也是 Stein，因此其边界必定连通。利用 X 上的 G 作用以及 D 不是 G 不变这一事实，我们可以像证明 [Mie14, Proposition 4.1] 中那样，得到 D 的一个连续多重次调和穷竭函数。

下一步，我们将证明 D 的这个多重次调和穷竭函数在 D^* 上是严格多重次调和的。根据命题 3.1 和 3.2，我们只需排除以下可能性：存在一个由 $A\subset G$ 构成的单参数群，使得对于某个 $x\in D^*$， $A\cdot x$ 在 D 中相对紧。设 $A\subset G=\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}$ 是这样一个单参数群。如果从 A 到 $\mathbb{C}^*$ 的投影非平凡，那么 A 在 E 上传递地作用。因此， $A\cdot x$ 的闭包必定包含 E。否则，我们有$A\cong\mathbb{C}$ 通过 $t\cdot[z,w]=[z+tw^k,w]$ 作用。不失一般性，可设 $x=[0,1]\in D$。令 $t_m:=t_0\lambda^{-m}$，并注意到 $\lim_{m\to\infty}t_m=\infty$。于是

$$t_m\cdot[0,1]=[t_m,1]=[\lambda^m t_m+m\lambda^{(m-1)k},\lambda^m]=[t_0+m\lambda^{(m-1)k},\lambda^m]$$

对所有 $m\in\mathbb{Z}$均成立。对于 $m\to\infty$ ，该序列收敛于 $[t_0,0]$。因此， E 包含于 $A\cdot[0,1]$的闭包中。我们由此得出， A 的存在意味着 D 包含 E，这是不可能的。

由于 D 具有一个在 D^*上严格多重次调和的耗尽函数，且 $D\cap E$ 是 Stein 的，因此应用 [Mie14，引理 5.3] 可证明 D 是 Stein 的。

References

[Br77] J. Brun, 《Stein 底空间上以紧曲线为纤维的纤维丛中的 Levi 问题》, Ann. Inst. Fourier 27 (1977), 第 3 期, 17–28 页。[DoGr60] F. Docquier 和 H. Grauert, 《Stein 流形子域的 Levi 问题与 Runge 定理》, Math. Ann. 140 (1960), 94–123 页。[Fuj64] R. Fujita, 《乘积空间上内部无临界点的域》, J. Math. Kyoto Univ. 4 (1964/65), 493–514 页。[GrRe56] H. Grauert 和 R. Remmert, 《复分析中的凸性: 非全纯凸全纯域及其在映射理论中的应用》, Comment. Math. Helv. 31 (1956), 152–183 页。[GuRo65] R. C. Gunning 和 H. Rossi, 《多复变解析函数》, Prentice-Hall, Inc., 恩格尔伍德克利夫斯, 新泽西州, 1965。[Hir74] A. Hirschowitz, 《在或多或少齐性空间上的伪凸性》, Invent. Math. 26 (1974), 303–322 页。[Hir75] , 《齐性空间的 Levi 问题》, Bull. Soc. Math. France 103 (1975), 第 2 期, 191–201 页。[Lel68] P. Lelong, 《解析泛函与整函数（n 变量）》, 蒙特利尔大学出版社, 蒙特利尔, 魁北克, 1968, 数学高级研讨班, 第 13 期（´1967 年夏）。[LY15] N. Levenberg 和 H. Yamaguchi, 《Hopf 曲面上的伪凸域》, J. Math. Soc. Japan 67 (2015), 第 1 期, 231–273 页。[MaMo60] Y. Matsushima 和 A. Morimoto, 《Stein 流形上的某些全纯纤维丛》, Bull. Soc. Math. France, 88 (1660), 137–155 页。[Mie14] C. Miebach, 《初级 Hopf 曲面中的非 Stein 伪凸域》, Izvestiya: Mathematics 78 (5) (2014), 1028–1035 页。[Ni01] T. Nishino, 《多复变函数论》, AMS 数学专著译丛, 第 193 卷（2001）。[Nar62] R. Narasimhan, 《复空间的 Levi 问题 II》, Math. Ann. 146 (1962), 195–216 页。[Nem13] S. Nemirovski, 《Levi 问题与半稳定商》, Complex Var. Elliptic Equ. 58 (2013), 第 11 期, 1517–1525 页。[O61] K. Oka, 《多变量解析函数论》, 岩波书店, 东京, 1961。[Ri68] R. Richberg, 《连续的严格伪凸函数》, Math. Ann. 175 (1968), 257–286 页。[S76] Y. T. Siu, 《每个 Stein 子簇都存在 Stein 邻域》, Invent. Math. 38 (1976/77), 第 1 期, 89–100 页。[Ue80] T. Ueda, 《Grassmann 流形上的伪凸域》, J. Math. Kyoto Univ. 202 (1980), 391–394 页。

Département de Mathématiques, Université de Lille, Villeneuve d'Ascq, France
电子邮箱: serge.ivashkovych@univ-lille.fr

Univ. Littoral Côte d'Opale, UR 2597, LMPA, Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées Joseph Liouville, F-62100 Calais, France电子邮箱: christian.miebach@univ-littoral.fr

Faculty of Mathematics and Computer Sciences, University of Warmia and Mazury, Olsztyn, Poland电子邮箱地址: vsevolod@matman.uwm.edu.pl