arXiv:2603.08253v1 [math.CV] 9 Mar 2026

与亏格2曲线相关的权重 2 Kleinian 超椭圆函数

MATVEY SMIRNOV

Abstract. 我们介绍一类与亏格为 2 的复曲线相关的新型特殊函数，它类似于 Kleinian 超椭圆 σ函数。这些函数与权重 2 θ函数的关系，和 σ函数与经典 θ函数的关系相同。所介绍函数的一个关键特征是：它们对于亏格2代数曲线均有良好定义，不受任何限制（特别是无需假设该曲线在无穷远点处具有魏尔斯特拉斯点）。

Key术语。 Kleinian 超椭圆函数，亏格为 2 的曲线。

1. Introduction

过去三十年来，高亏格克莱因函数的研究受到了广泛关注。受到关注的主要原因之一，是采用 $\wp$-函数方法研究可积系统（尤其是 KP方程）十分便利。关于克莱因函数理论近期进展的全面综述，参见 [7]及其中的参考文献。然而，旨在对亏格 >1的克莱因函数进行数值计算的研究论文为数不多。值得一提的例子包括 [4] 和 [3], , 它们的方法是通过 theta 函数表示$\wp$-函数；还有 [18], , 其中通过对 KdV方程进行积分来数值计算 $\wp$-函数。这与椭圆情形形成鲜明对比：对于椭圆情形，各类特殊函数的有效数值计算方法早已广为人知且研究透彻（例如参见 [20], [11], [16], [15], 和 [17]）。

椭圆函数计算中最有效的方法是 Landen 方法（或等价地，算术几何平均法）。下面回顾这一方法的基本思路。Landen 方法要构造一系列椭圆曲线的同源 $C_0 \leftarrow C_1 \cdots \leftarrow C_n$ （从初始曲线 C_0 出发，迭代地将其中一个周期“加倍”而得到）。若恰当选取这些同源曲线，则当 n 足够大时，曲线 C_n 便“足够接近”退化，与之相关的椭圆函数可通过初等函数的显式公式求得。随后，利用已经计算出的 C_k的值，近似求出与 C_{k-1} 相关的椭圆函数的值。魏尔斯特拉斯椭圆函数（即亏格1克莱因函数）的这一过程见 [20]。

我们旨在给出一种基于与 Landen 方法类似思想的算法，用以计算亏格2克莱因函数。显然，这样的算法需要三个主要要素：

(a) 一种给定曲线 C 后构造另一条曲线 $\hat{C}$ 的方法，并带有一个 $\hat{}$ 等源映射 $\mathrm{Jac}(C) \leftarrow \mathrm{Jac}(C)$。要求反复应用此方法能够产生可控的曲线退化。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 32A08, 32A10.1

(b) 一个公式，用来通过与 C 相关联的克莱因函数，表示与 C相关联的克莱因函数。(c) 对“接近退化”的曲线（即通过反复应用 (a) 中的构造所得到的曲线）所关联的克莱因函数的近似。

有了这些要素，便很容易制定一种算法，计算亏格 2 克莱因函数，其思路与上述 Landen 方法类似。

对于 (a) 部分，Richelot 提出了一种经典方法，用于构造具有同源雅可比簇的亏格 2 曲线（现代形式的 Richelot 同源由 Humbert 提出 [14]）。这种构造已用于计算亏格 2 曲线的周期（例如，参见 [6] 和 [10]），也用于基于同源的密码学（例如，参见 [8], [12], [21], 及其中的参考文献）。然而，在要素 (a)中使用 Richelot 同源曲线存在一个问题。也就是说，克莱因函数的定义对曲线方程有一项额外限制（即只有一个无穷远点），而构造同源曲线的过程并不能保持这一性质。

本文介绍一组与亏格 2 曲线相关、据我们所知是全新的四个特殊函数。这些函数的构造类似于 σ函数，但取了平方。也就是说，它们构成曲线雅可比簇上某个线丛的整体截面空间的一组基，而该线丛是 σ函数所对应线丛的张量平方。仿照 Mumford 在 [19]中采用的 θ函数术语，我们将这些函数称为权重 *2* 的克莱因函数。下文将证明，经典的亏格 2 克莱因函数（即 σ, ζ_j和$\wp_{jk}$）可以通过这些函数及其导数表示。因此，我们着重于为权重 2 的克莱因函数构造计算程序，而非经典克莱因函数。

权重 2 的克莱因函数的一个重要特点是，其定义不需要对曲线的代数方程施加任何条件（与 σ函数不同，后者通常仅对无穷远点为魏尔斯特拉斯点的超椭圆曲线定义；虽然有一种方法 [1] 可以为此类曲线定义 σ函数，但它需要额外选定一个分支点）。此外，由于权重 2 的克莱因函数的作用类似于权重 2 的 θ 函数，它们定义了一个将亏格 2 曲线的库默尔曲面嵌入 $\mathbb{CP}(3)$的映射。这一特点将使我们能够找到一条关联 Richelot 同源曲线的权重 2 克莱因函数的方程，从而获得算法的组成部分(b)。最后，我们指出，对于所引入的权重 2 克莱因函数，问题 (c) 也可以显式解决。这些结果（以及该算法）将发表于后续论文中。

本文的组织结构如下。在第2 节中，我们介绍一些记号，并推导出若干 $\wp$-函数的性质。在第 3节中，我们介绍权重 2 的克莱因函数。从权重 2 的克莱因函数空间中选取四个特定函数，并推导它们与经典克莱因超椭圆函数之间的关系。最后，在第4 节中，我们求出所介绍函数的二阶泰勒展开。

2. Meromorphic functions associated with curves of genus 2

本节中，我们固定一些记号，并回顾与亏格2曲线相关的 $\wp$- 函数的定义和性质。由于文献中通常

要求曲线只有一个无穷远点（而我们关注的是一般情形），因此为求完整起见，我们给出所有必要结果的证明。

2.1. **记号**。为简洁起见，我们将次数为 $\leqslant k$ 的复多项式空间记为 $\mathfrak{P}_k$。给定多项式 f，我们用 f_j 表示 f 中 x^j 的系数。在本节中，$f\in\mathfrak{P}_6$ 表示次数为 5 或 6 且根均为单根的复多项式。我们称这类多项式为可容许的。如果 f 满足 $f_6=0$ 且 $f_5=4$，就称其为魏尔斯特拉斯形式（文献中通常还附加一个条件，即 $f_4=0$；我们不要求满足此条件）。我们用 $\mathcal{X}_f$ 表示与多项式 f 对应的亏格为 2 的曲线，即其仿射部分由二元空间 x,y 中的方程 $y^2=f(x)$ 给出。除仿射部分外，此曲线在 $\deg f=5$ 时还包含一个无穷远点，在 $\deg f=6$ 时包含两个无穷远点；这些点恰好是函数 $(x,y)\mapsto x$ 的极点（我们将其简称为 x）。最后，令 $\mathscr{J}_f\colon\mathcal{X}_f\to\mathcal{X}_f$ 表示作用于 $\mathcal{X}_f$ 上的超椭圆对合，即在 $\mathcal{X}_f$ 的仿射部分上，$\mathscr{J}_f(x,y)=(x,-y)$。

我们用ω_1^f 和 ω_2^f 表示 $\mathcal{X}_f$ 上的标准全纯 1-形式，其表达式分别为$\omega_1^f=dx/y$ 和 $\omega_2^f=xdx/y$。令 Per$_f$ 表示 $\mathcal{X}_f$上形式ω_1^f、ω_2^f的周期格，即

$$\mathrm{Per}_f=\{w\in\mathbb{C}^2:\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}=\int_\gamma\begin{pmatrix}\omega_1^f\\\omega_2^f\end{pmatrix}\text{ for some }\gamma\in H_1(\mathcal{X}_f,\mathbb{Z})\}.$$

我们用 Jac$_f$表示 $\mathcal{X}_f$的雅可比簇，即 $\mathrm{Jac}_f=\mathbb{C}^2/\mathrm{Per}_f$。此外，令 $\mathfrak{L}_f$ 为 $\mathcal{X}_f$ 上的典范超椭圆除子类（即任意点 $P\in\mathcal{X}_f$对应的除子$P+\mathscr{J}_f(P)$的类），并令 $\mathscr{A}_f(D)$ 表示任意 $\mathcal{X}_f$上次数为 2 的有效除子 D 的除子类 $D-\mathfrak{L}_f$ 在阿贝尔映射下于 Jac$_f$ 中的像。我们将 $\mathcal{X}_f$ 上的次数为 2 的有效除子与曲面 $\mathcal{X}_f^{(2)}$（曲线 $\mathcal{X}_f$的对称笛卡尔平方）中的元素对应起来。采用这一记号，$\mathscr{A}_f$是一个从 $\mathcal{X}_f^{(2)}$ 到 Jac$_f$上的双亚纯映射。更准确地说，$\mathscr{A}_f$将所有属于类 $\mathfrak{L}_f$ 的除子映射到零，并将 $\mathcal{X}_f^{(2)}\backslash\mathfrak{L}_f$双射映射到 $\mathrm{Jac}_f\setminus\{0\}$。最后，我们陈述映射 $\mathscr{A}_f$的一项重要性质，即

$$\mathscr{A}_f[(\mathscr{J}_f(P))+(\mathscr{J}_f(Q))]=-\mathscr{A}_f[(P)+(Q)] \tag{2.1}$$

对所有 $(P)+(Q)\in\mathcal{X}_f^{(2)}$。

2.2. **定义在 $\mathcal{X}_f^{(2)}$ 和雅可比簇f上的亚纯函数**。现在，我们通过以下公式在曲面 $\mathcal{X}_f^{(2)}$ 上引入亚纯函数 ξ_{11}^f、ξ_{12}^f 和 ξ_{22}^f

$$\xi_{22}^f(D)=x_1+x_2,\ \xi_{12}^f(D)=-x_1x_2,\ \xi_{11}^f(D)=\frac{F_f(x_1,x_2)-2y_1y_2}{4(x_1-x_2)^2},$$

其中 $D=(x_1,\ y_1)+(x_2,\ y_2)\in\mathcal{X}_f^{(2)}$ 和

$$F_f(a,b)=2f_0+f_1(a+b)+2f_2ab+f_3ab(a+b)+2f_4a^2b^2+f_5a^2b^2(a+b)+2f_6a^3b^3.$$

由于 $\mathscr{A}_f\colon\ \mathcal{X}_f^{(2)}\to\mathscr{J}_f$ 是双亚纯的，因此存在唯一的亚纯函数$\wp_{11}^f$、$\wp_{12}^f$和 $\wp_{22}^f$ 定义在雅可比簇f 上，对一般的 $D\in\mathcal{X}_f^{(2)}$ 满足方程 $\wp_{jk}^f(\mathscr{A}_f(D))=\xi_{jk}^f(D)$。为简便起见，我们用符号$\wp_{jk}^f$ 同时表示上述定义在雅可比簇f 上的函数及相应的 Per$_f$-周期函数

在 $\mathbb{C}^2$上。引入的函数 ξ_{jk}^f 和 $\wp_{jk}^f$ 在亏格 2 代数曲线理论中广为人知（例如参见 [8] 和 [2]）。以下命题概述函数 ξ_{jk}^f 和 $\wp_{jk}^f$ 的重要性质。

命题 2.1. 以下结论成立。

(i) 函数 $\wp_{jk}^f$ 是偶的。*(ii)* 亚纯函数1、 $\wp_{11}^f$、 $\wp_{12}^f$和 $\wp_{22}^f$ 线性无关。*(iii)* 设 $(\infty_1)+(\infty_2)$ 是函数 x 在 $\mathcal{X}_f$ 上的极点除子（即$\infty_2=\mathscr{J}_f(\infty_1)$，并且若次数 $f=5$，则 $\infty_1=\infty_2$）。对 $j=1$、2，考虑 $\mathcal{X}_f^{(2)}$ 中的不可约子簇 $A_j^f=\{D=(P)+(\infty)_j\colon \quad P\in\mathcal{X}_f\}$。那么这些除子

$$(\xi_{12}^f)+(A_1^f)+(A_2^f),\ (\xi_{22}^f)+(A_1^f)+(A_2^f)$$

在 $\mathcal{X}_f^{(2)}$ 上是有效的。

(iv) 考虑 $\mathcal{X}_f^{(2)}$ 中的不可约子簇 $L_f=\mathfrak{L}_f\cap\mathcal{X}_f^{(2)}$，它由 $\mathcal{X}_f$上次数为2 的特殊有效除子组成。那么存在 $k\in\mathbb{N}$ 使得除子

$$(\xi_{11}^f)+(A_1^f)+(A_2^f)+k(L_f)$$

在 $\mathcal{X}_f^{(2)}$ 上是有效的。

(v) 设B_j^f 是A_j^f 关于映射 $\mathscr{A}_f$、 $j=1$、2在雅可比簇f 中的像。则除子

$$(\wp_{jk}^f)+(B_1^f)+(B_2^f)$$

are effective for $(j,k)=(1,1),(1,2),(2,2)$.

证明。 陈述(i) 容易由(2.1)及等式得出

$$\xi_{jk}^{(f)}\left[(P)+(Q)\right]=\xi_{jk}^{(f)}\left[(\mathscr{J}_f(P))+(\mathscr{J}_f(Q))\right],$$

它们由函数 ξ_{jk}^f的定义显然可得。为证明(ii)，注意1、ξ_{22}^f与ξ_{21}^f 是 $\mathcal{X}_f^{(2)}$ 上线性无关的亚纯函数（例如，在对角线上考虑它们）。为证明 ξ_{11}^f 不属于函数1、ξ_{22}^f与 ξ_{12}^f 的线性张成，考虑任意满足 $f(x_0)\neq 0$的 $x_0\in\mathbb{C}$。设u 表示在 x的某个邻域内定义的 $\sqrt{f}$ 的任一分支。最后，对充分小的 $t\neq 0$，考虑除子 $D(t)=(x_0$、$-u(x_0))+(x_0+t$、 $u(x_0+t))\in\mathcal{X}_f^{(2)}$；若 $t\neq 0$，则它显然不属于函数 ξ_{jk}^f 的极点轨迹。容易看出，当 $t\to 0$时，$\xi_{22}^f(D(t))$ 与 $\xi_{12}^f(D(t))$ 分别收敛于 $2x_0$ 与 $-x_0^2$。另一方面，当 $t\to 0$时 $|\xi_{11}^f(t)|\to+\infty$。因此， ξ_{11}^f 不能是1、ξ_{22}^f与 ξ_{21}^f的线性组合。于是，1、ξ_{22}^f、 ξ_{12}^f与 ξ_{11}^f 线性无关，并且由于 $\mathscr{A}_f$是双亚纯的，陈述(ii)得证。

根据函数的定义，命题 (iii) 和 (iv) 显然成立 ξ_{jk}^f；只需证明 ξ_{11}^f 在解析集对角线 $=\{(P)+(P)$ 上$P\in\mathcal{X}_f\}$没有极点。为此，注意在一般点 $D\in$ 处，函数 ξ_{22}^f和 ξ_{12}^f 构成 $\mathcal{X}_f^{(2)}$ 上的局部坐标。因此， $(x_1-x_2)^2=\left(\xi_{22}^f\right)^2+4\xi_{12}^f$ 在一般 $D\in$点处是定义解析集对角线的函数。因此，要证明 ξ_{11}^f 在对角线上没有极点，只需注意分子

$F_f(x_1,\ x_2)-2y_1y_2$ 在定义 ξ^f_{11} 的表达式中沿对角线有一个零点。命题 (v) 现在由 (iii) 和 (iv) 立即得出，因为解析集 L 被映射 $\mathscr{A}_f$ 压缩到一点。

□

我们以 $\wp^f_{jk}$ 所满足的四次关系结束本小节。

命题 2.2. 设 f 为一个可容许多项式。为方便起见，我们用 $\wp^f_0$ 表示 雅可比簇f 上恒等于 1 的函数。则存在三个变量的齐次多项式 K_3 和 K_4，其次数分别为3 和 4，使得关系式

$$\left(\left(\wp^f_{22}\right)^2+4\wp^f_0\wp^f_{12}\right)\left(\wp^f_{11}\right)^2+K_3\left(\wp^f_0,\wp^f_{12},\wp^f_{22}\right)\wp^f_{11}+K_4\left(\wp^f_0,\wp^f_{12},\wp^f_{22}\right)=0 \tag{2.2}$$

成立。

命题2.2 的证明以及 K_3 和 K_4 的显式公式见 [8,第3节。1]不过请注意，此处的关系式是用函数ξ^f_{jk} 表示的（这不影响证明，因为 $\mathscr{A}_f$ 是双亚纯的），而且我们的记号与 [8], 中的略有不同，因此需要对 K_3 和 K_4的表达式作相应调整。出于好奇，我们还给出该关系式（2.2）的行列式形式（魏尔斯特拉斯形式下多项式的一个特例见 [2]）。也就是说，（2.2）等价于等式 2。

$$\det\begin{pmatrix} -f_0 & \frac{f_1}{2} & 2\wp^f_{11} & -2\wp^f_{12}\\ \frac{f_1}{2} & -f_2-4\wp^f_{11}-f_6\left(\wp^f_{12}\right)^2 & \frac{f_3}{2}+\frac{f_5}{2}\wp^f_{12}+f_6\wp^f_{12}\wp^f_{22} & 2\wp^f_{22}\\ 2\wp^f_{11} & \frac{f_3}{2}+\frac{f_5}{2}\wp^f_{12}+f_6\wp^f_{12}\wp^f_{22} & -f_4-f_5\wp^f_{22}-f_6\left(\wp^f_{22}\right)^2 & 2\\ -2\wp^f_{12} & 2\wp^f_{22} & 2 & 0\end{pmatrix}=0. \tag{3}$$

可以验证，左侧（$\geqslant 5$ 中的 $\wp^f_{jk}$ 所有次数为 2.3）的项相互抵消，其余项相加后恰好得到 [8, 第 3 节1]中给出的多项式。

3. Kleinian functions of weight 2

本节介绍权重 2 的克莱因函数。我们推导这些函数所需的全部性质，并说明如何通过它们表示经典克莱因函数 σ, ζ_j, $\wp_{jk}$ 。

3.1. 第二类某些亚纯形式的周期。遵循 Baker [2]，我们通过以下公式引入 $\mathcal{X}_f$ 上的第二类亚纯 1-形式 r^f_1 和 r^f_1

$$r^f_1=\frac{f_3x+2f_4x^2+3f_5x^3+4f_6x^4}{4y}dx,\ r^f_2=\frac{f_5x^2+2f_6x^3}{4y}dx. \tag{3.1}$$

令 $\eta^f:\mathsf{Per}_f\to\mathbb{C}^2$ 表示由以下条件定义的加法群同态

$$\eta^f(w)=-\int_\gamma\begin{pmatrix}r^f_1\\ r^f_2\end{pmatrix},\ \text{where } w=\int_\gamma\begin{pmatrix}\omega^f_1\\ \omega^f_2\end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

同态 η^f 定义良好，因为 r_j^f 是第二类的（因此积分与表示 γ的闭曲线的选择无关），且映射

$$H_1(\mathcal{X}_f,\mathbb{Z}) \to \mathrm{Per}_f\,,\ \gamma \mapsto \int_\gamma \begin{pmatrix}\omega_1^f\\ \omega_2^f\end{pmatrix}$$

是一个群同构。为了陈述同态η^f 的主要性质，我们需要在 Per$_f$ 上引入交配对 $\langle\cdot,\cdot\rangle_f$。它定义为 Per$_f$ 上由$H_1(\mathcal{X}_f,\ \mathbb{Z})$上的交配对规范诱导的双线性形式，即 $\langle w_1, w_2\rangle_f$等于 $\gamma_1\circ\gamma_2$，其中 $\circ$表示 $H_1(\mathcal{X}_f,\ \mathbb{Z})$ 上的交配对，并且

$$w_j = \int_{\gamma_j} \begin{pmatrix}\omega_1^f\\ \omega_2^f\end{pmatrix},\ \ j = 1,2.$$

交配对 $\langle\cdot,\cdot\rangle_f$ 是 Per$_f$ 上非退化的反对称 $\mathbb{Z}$-双线性形式，并且存在一组基 a_1,a_2,b_1, $b_2 \in$ Per$_f$，使得 $\langle a_j, b_j\rangle_f = 1$, $j = 1,2$ 且 $\langle a_1, a_2\rangle_f = \langle b_1, b_2\rangle_f = \langle a_1, b_2\rangle_f = \langle a_2, b_1\rangle_f = 0$。任何满足这些性质的四元向量组都是一组基，我们称这样的四元组为 Per$_f$ 中的辛基。现在我们可以陈述 η^f 的主要性质，它可视为经典勒让德恒等式 [9, 的推广。定理 4.2]。取 Per$_f$ 中任意一组辛基 a_1, a_2, b_1, b_2 以及 2×2 矩阵 3.3
( )

$$A = \begin{pmatrix}a_1 & a_2\end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix}b_1 & b_2\end{pmatrix},\ \eta_A = \begin{pmatrix}\eta^f(a_1) & \eta^f(a_2)\end{pmatrix},\ \eta_B = \begin{pmatrix}\eta^f(b_1) & \eta^f(b_2)\end{pmatrix}.$$

那么这些恒等式

$$\begin{gathered}\eta_A^T B - A^T\eta_B = B\eta_A^T - A\eta_B^T = 2i\pi I,\\ \left(\eta_A\eta_B^T\right)^T = \eta_A\eta_B^T,\ (\eta_A^T A)^T = \eta_A^T A,\ (\eta_B^T B)^T = \eta_B^T B\end{gathered} \tag{3.4}$$

成立。这些恒等式的证明直接应用黎曼双线性关系，并在 [2, § 8] 中给出（请注意，我们的记号与 [2]中的记号相差一个因子 2）。我们还指出，式（3.4）的一个重要推论是

$$\eta^f(w)^T v - \eta^f(v)^T w \in 2\pi i\,\mathbb{Z}\quad \forall v,w \in \mathrm{Per}_f\,. \tag{3.5}$$

显然，只需对 v、$w \in \{a_1$、a_2、b_1、$b_2\}$验证这一事实即可，而在这种情况下，结论由式（3.4）显而易见。

3.2. 权重 2 的克莱因函数。 考虑线性空间 $\mathfrak{S}_f$，它由满足以下性质的全纯函数 ϕ（定义在 $\mathbb{C}^2$ 上）构成

$$\phi(z+w) = \exp\left[2\eta(w)^T\left(z+\frac{w}{2}\right)\right]\phi(z) \tag{3.6}$$

对于所有 $z\in\mathbb{C}^2$ 和 $w\in$ Per$_f$。我们将空间 $\mathfrak{S}_f$ 的元素称为权重 *2* 的克莱因函数。

我们将使用 theta函数研究空间 $\mathfrak{S}_f$，因此在本小节末尾固定一些记号。首先任取辛基 $a_1, a_2, b_1, b_2 \in$Per$_f$，并考虑 $H_1(\mathcal{X}_f,\mathbb{Z})$ 中对应的元素 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$。考虑按 (3.3) 定义的矩阵 A, B, η_A, η_B。显然，由方程定义在$\mathcal{X}_f$ 上的全纯 1-形式 ϕ_1, ϕ_2

$$\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix}\omega_1^f\\ \omega_2^f\end{pmatrix} \tag{3.7}$$

相对于周期 α_1 和 α_2归一化。它们的周期矩阵 $\Omega = A^{-1}B$ 是一个黎曼矩阵，即它是对称的，且其虚部正定。按照 Mumford [19, 定义 II.1。2] 我们考虑 权 2 θ-函数空间，即 R_2^Ω由所有满足下列条件的全纯函数 ϕ 组成，定义在 $\mathbb{C}^2$ 上，使得

$$\phi(z+n+\Omega m) = \exp\left[-2i\pi m^T\Omega m - 4i\pi m^T z\right]\phi(z)$$

对所有 $z\in\mathbb{C}^2$ 以及所有 $m,\ n\in\mathbb{Z}^2$。

命题 3.1。 空间 $\mathfrak{S}_f$ 满足以下性质。

(i) 令 $T(\phi)(z) = \exp\left[z^T(\eta_A A^{-1})z\right]\phi(A^{-1}z)$。则 T是线性空间 R_2^Ω 到 $\mathfrak{S}_f$ 上的同构。*(ii)* $\mathfrak{S}_f$ 中的所有元素都是偶函数，且维数$\mathfrak{S}_f = 4$。*(iii)* 对所有 $z\in\mathbb{C}^2$，存在 $\phi\in\mathfrak{S}_f$ 使得 $\phi(z)\neq 0$。此外，对于z、$z'\in\mathbb{C}^2$，方程 $\phi(z) = \phi(z')$ 对所有 $\phi\in\mathfrak{S}_f$ 成立，当且仅当点 $z+z'$、 $z-z'$ 中至少有一个属于Per$f$。*(iv)* 对于任意二元偶次2 多项式 $p(z_1、z_2) = p_0 + p_{11}z_1^2 + p_{12}z_1z_2 + p_{22}z_2^2$，存在唯一函数 $\phi\in\mathfrak{S}_f$，使得 p与 ϕ 在零点的二阶泰勒展开一致，即 $\phi(z) = p(z) + \bar{o}(z^2)$。

证明。 考虑任意一个二元 ϕ整函数。注意，如果对给定的 z，对于某个 $w\in$ Per$f$中的所有 $-w$ （以及所有 z），式（3.5）成立，那么对 $-w$ （以及所有 z）也成立。此外，由式（3.5）容易看出，若式（3.6）对 $v,\ w\in$ Per$f$成立，那么对$v+w$也成立。因此，要验证 $\phi\in\mathfrak{S}_f$，只需验证任意一个基在 Per$f$中都满足式（3.6）。

现在证明 (i)。设 $\phi\in R_2^\Omega$，并考虑 $k\in\mathbb{Z}^2$。那么 $w = Ak$属于 Per$f$，由式（3.4）可得

$$\begin{aligned}T(\phi)(z+w) = \exp\left[(z+w)^T(\eta_A A^{-1})(z+w)\right]\phi(A^{-1}(z+w)) = \phi(A^{-1}z+k)\times\\ \exp\left[z^T(\eta_A A^{-1})z + z^T(\eta_A A^{-1})Ak + k^TA^T(\eta_A A^{-1})z + k^TA^T(\eta_A A^{-1})Ak\right] =\\ \exp\left[z^T(\eta_A A^{-1})z + 2z^T\eta_A k + k^TA^T\eta_A k\right]\phi(A^{-1}z) =\\ \exp(2z^T\eta(w) + w^T\eta(w))T(\phi)(z).\end{aligned}$$

现在令 $w = Bk$，并类似地写出

$$\begin{aligned}T(\phi)(z+w) = \exp\left[(z+w)^T(\eta_A A^{-1})(z+w)\right]\phi(A^{-1}(z+w)) = \phi(A^{-1}z+\Omega k)\times\\ \exp\left[z^T(\eta_A A^{-1})z + z^T(\eta_A A^{-1})Bk + k^TB^T(\eta_A A^{-1})z + k^TB^T(\eta_A A^{-1})Bk\right] =\\ \phi(A^{-1}z)\exp\left[-2\pi ik^TA^{-1}Bk - 4\pi ik^TA^{-1}z + z^T(\eta_A A^{-1})z\right]\times\\ \exp\left[z^T\left(A^T\right)^{-1}\eta_A^TBk + k^T(\eta_B^TA + 2\pi iI)A^{-1}z + k^T(\eta_B^TA + 2\pi iI)A^{-1}Bk\right] =\\ \phi(A^{-1}z)\exp\left[-2\pi ik^TA^{-1}z + z^T(\eta_A A^{-1})z + z^T\left(A^T\right)^{-1}(A^T\eta_B + 2\pi iI)k\right]\times\\ \exp\left[\eta^f(w)^Tz + \eta^f(w)^Tw\right] = T(\phi)(z)\exp\left[2\eta^f(w)^Tz + \eta^f(w)^Tw\right].\end{aligned}$$

因此，若 $\phi\in R_2^\Omega$，则 $T(\phi)\in\mathfrak{S}_f$。我们省略类似的计算，它表明逆向蕴含成立，即 $T(\phi)\in\mathfrak{S}_f\Rightarrow\phi\in R_2^\Omega$。因此，命题 (i) 得证。

陈述 (ii) 和 (iii) 可由相应的空间性质推出 R_2^Ω（关于 (ii)，参见 [19, 命题 II.1。3] 关于 (iii)，参见 [19, 定理 II.1。3]）。

现在证明(iv)。令 $a(z) = a_1z_1 + a_2z_2$ 为$\mathbb{C}^2$上的任意非零线性形式。首先证明存在 $\phi\in\mathfrak{S}_f$ 使得 $\phi(z) = a^2(z) + \bar{o}(z^2)$。

令 $\tilde{a}(z) = a(Az)$。由于 Ω 是亏格为 2 的曲线的周期矩阵，显然 theta 除子 Θ_Ω 是 $\mathbb{C}^2$ 中的一个连通子流形（根据 [19, 定理 I.3.1]，它与曲线在阿贝尔映射下的像仅相差一个平移）。此外，已知 theta 除子的高斯映射是支配的（参见例如 [5, 命题 4.4.2]），因此存在 $q \in \Theta_\Omega$ 使得 $T_q\Theta_\Omega = \ker \tilde{a}$。也就是说，我们有在零点处的展开 $\theta(z-q;\ \Omega) = c\tilde{a}(z) + \bar{o}(z)$，其中有一个常数$c \neq 0$。由于 theta 函数是偶的，我们得到 $\phi(z) = \theta(z-q;\ \Omega)\theta(z+q,\ \Omega) = -c^2\tilde{a}(z)^2 + \bar{o}(z^2)$。显然，$\phi \in R_2^\Omega$，而 $\tilde{a}(A^{-1}z)^2 = a(z)^2$ 是 $-c^{-2}T(\phi)$ 在 0 处的二阶泰勒展开。由于线性形式的平方生成二阶齐次多项式的向量空间，因此对任意 $p(z) = p_{11}z_1^2 + p_{12}z_1z_2 + p_{22}z_2^2$，存在 $\phi \in \mathfrak{S}_f$ 使得 $\phi(z) = p(z) + \bar{o}(z^2)$ 在零点处成立。由 (iii) 可知，$\mathfrak{S}_f$ 包含在零点处不为零的函数。因此，对任意偶二次多项式 p，存在 $\phi \in \mathfrak{S}_f$ 使得 p 是 ϕ的二阶泰勒展开。由于二元 $\leqslant 2$ 次偶多项式空间的维数为 4（因此等于 $\dim \mathfrak{S}_f$），命题 (iv) 得证。□

定义 3.2. 对于可容许多项式 f，我们将权重 2 的基本克莱因函数定义为 $\mathfrak{S}_f$ 中唯一一个在零点处的泰勒展开等于 $z_1^2 + \bar{o}(z^2)$ 的元素。记作 S^f。

函数 S^f 的所有重要性质都可通过它的 theta 函数显式表达式得到。

命题 3.3. 设 ∞_1 是 $\mathcal{X}_f$ 上的一个点，该点在命题 *2.1 (iii)*中引入 Δ 表示与周期基α_1、α_2、β_1、β_2 以及所选点 ∞_1 相对应的黎曼常数向量（见 *[19, 定理 II.3。1]*）。那么存在一个非零常数 c 使得等式

$$S^f(z) = c\exp\left[z^T(\eta_A A^{-1})z\right]\theta(A^{-1}z - \Delta;\Omega)\theta(A^{-1}z + \Delta;\Omega) \tag{3.8}$$

对所有 $z \in \mathbb{C}^2$ 均成立。

证明。设 $\phi(z) = \theta(z-\Delta;\Omega)\theta(z+\Delta;\Omega)$。显然，$\phi \in R_2^\Omega$，因此由命题 3.1 (i) 可得 $T(\phi) \in \mathfrak{S}_f$。所以我们需要求出 ϕ 在 0 处的二阶泰勒展开。根据 Δ 的定义，显然 $\Delta \in \Theta_\Omega$，且 $T_\Delta\Theta_\Omega$ 由一个非零切向量 $v \in T_{\infty_1}\mathcal{X}_f$ 在阿贝尔映射下的推前所张成（该映射由归一化 1-形式 ϕ_1 和 ϕ_2 定义，见 (3.7)）。因此，$T_\Delta\Theta_\Omega$ 由 A^{-1} 的第二列张成（要看出这一点，可使用 (3.7) 以及如下事实：在无穷远点处，ω_1^f 有一个零点，而 ω_2^f 没有）。令 $a(z) = z_1$ 和 $\tilde{a}(z) = a(Az)$。根据前面的讨论，显然 $T_\Delta\Theta_\Omega = \ker\tilde{a}$。因此，存在 $c \neq 0$，使得 $\tilde{a}(z)^2$ 是 $c\phi$ 的二阶泰勒展开。于是，$cT(\phi)$ 在零点处的二阶泰勒展开等于 $a(z)^2 = z_1^2$。根据命题 3.1 (iv) 中证明的唯一性，函数 $cT(\phi)$ 与 S^f 重合。另一方面，$cT(\phi)$ 显然与 (3.8) 右端相同。□

推论 3.4. 令 B_1^f 和 B_2^f 表示 雅可比簇f 中由命题 *2.1 (v)*定义的子流形。令 $\tilde{B}_j^f$ 为 B_j^f 关于商映射$\mathbb{C}^2 \to$雅可比簇f的原像。则 $(S^f) = (\tilde{B}_1^f) + (\tilde{B}_2^f)$。

证明。 这可直接由 Δ 的定义（即 [19]中的定理 II.3.1）以及命题3.3 得出。□

推论 3.5。 函数 S^f、$\wp_{11}^f S^f$、$\wp_{12}^f S^f$、$\wp_{22}^f S^f$ 在 $\mathbb{C}^2$ 上都是整全纯函数，并且构成空间 $\mathfrak{S}_f$ 的一组基。

证明。 推论 3.4 与命题2.1(v) 的结合表明，函数 $\wp_{jk}^f S^f$ 是整函数，因此属于 $\mathfrak{S}_f$。命题 2.1 (ii) 表明函数 S^f、$\wp_{11}^f S^f$、$\wp_{12}^f S^f$、$\wp_{22}^f S^f$线性无关，并且根据命题 3.1 (ii) 它们构成 $\mathfrak{S}_f$中的一组基。 □

定义 3.6。 对于一个可容许多项式 f，我们定义 $S_{jk}^f = \wp_{jk}^f S^f$，其中$(j、k) = (1、1)、(1、2)、(2、2)$。我们将这些函数以及函数 S^f称为权重 2 的典范克莱因函数。

3.3. **与亏格 2 的克莱因西格玛函数的关系**。 本节最后简要讨论亏格 2 的经典克莱因函数与上述定义的函数之间的联系。在本小节中，我们始终假设 f 是魏尔斯特拉斯形式的一个可容许多项式。回顾 [22]，曲线 $\mathcal{X}_f$ 的超椭圆σ-函数由公式定义

$$\sigma^f(z) = c\exp\left[\frac{1}{2}z^T(\eta_A A^{-1})z\right]\theta(A^{-1}z-\Delta;\Omega), \tag{3.9}$$

其中 A和 η_A 的定义同上一小节，并且 Δ与命题 3.3中的相同。常数 c 的选取应满足等式

$$\frac{\partial\sigma^f}{\partial z_1}(0,0) = 1. \tag{3.10}$$

函数 σ^f 不依赖于 Per 中辛基的选取，这一点已在 [22]中证明。值得注意的是，利用函数 S^f可以很容易地证明这一点。首先注意到 $\left(\sigma^f\right)^2 = S^f$，正如我们在下面的命题3.7(i)中所证明的（证明这一事实不需要 σ^f 的唯一性，只需使用公式（3.9）和（3.10））。由此可知， σ^f 在符号变化意义下唯一确定。最后，符号由（3.10）确定。

下面的命题概述了函数 σ^f 的基本性质。

命题 3.7。 设 f 是一个魏尔斯特拉斯形式的可容许多项式。则以下陈述成立。

(i) 函数 σ^f 是奇的，且 $\left(\sigma^f\right)^2 = S^f$。

(ii) 对于 $(j,k) = (1,1),(1,2),(2,2)$，等式

$$\frac{\partial^2}{\partial z_j\partial z_k}\ln\sigma^f = -\wp_{jk}^f \tag{3.11}$$

成立。

(iii) 函数 σ^f 满足加法公式

$$\frac{\sigma^f(u+v)\sigma^f(u-v)}{\sigma^f(u)^2\sigma^f(v)^2} = \wp_{22}^f(u)\wp_{12}^f(v) - \wp_{22}^f(v)\wp_{12}^f(u) + \wp_{11}^f(v) - \wp_{11}^f(u).$$

证明。 为证明命题 (i) 注意，对于多项式 f 满足 $\deg f = 5$，命题 Δ 中的向量 Δ 来自命题 3.3 是一个奇半周期，因此 $\theta(z-\Delta;\ \Omega) = -\theta(z+\Delta;\ \Omega)$。于是，由（3.8）可得

$$S^f = c\exp[z^T(\eta_A A^{-1})z]\theta(A^{-1}z-\Delta;\Omega)^2$$

取适当的常数 c。由（3.9）和（3.10）立即可见，$\left(\sigma^f\right)^2 = S^f$。事实上，$\sigma^f$ 为奇的是显然的，这既可由定义（3.9）看出，也可由以下事实得出：它必然是奇的或偶的（因为它的平方是偶的），而条件（3.10）只有在 σ^f 为奇时才可能成立。

命题(ii)和(iii)分别在 [2, § 11] 和 [2, § 30]中证明（高亏格情形的推广亦见 [22] ）。□

公式（3.11）说明了记号中下标的选取方式 $\wp^f_{jk}$。依照 Baker [2] 对魏尔斯特拉斯形式下的多项式 f，我们用$\wp^f_{jkl}$ 表示相应变量的三阶对数导数，即

$$\wp^f_{jkl} = -\frac{\partial^3}{\partial z_j \partial z_k \partial z_l} \ln \sigma^f.$$

对于阶为 $\geqslant 4$ 的导数也采用类似记号，但我们不会用到它们。对于 σ^f 的一阶对数导数，使用字母 ζ，即 $\zeta^f_j = \partial \ln \sigma^f / \partial z_j$。

注。应注意，对于 f 非魏尔斯特拉斯形式的多项式，不存在函数 ϕ 使得方程（3.11）在用 ϕ 替代 $\ln \sigma^f$时仍然成立。事实上，利用下文命题4.6中所述的求导方法，可以验证一般而言

$$\frac{\partial \wp^f_{11}}{\partial z_2} \neq \frac{\partial \wp^f_{12}}{\partial z_1}.$$

我们通过证明经典克莱因函数可以用权重 2 的克莱因函数及其一阶导数表示，来结束本小节。对于函数 $\wp^f_{jk}$ 和 ζ^f_j，这种表示显而易见。为了表示函数 σ^f，我们使用 σ^f 的倍增公式。

命题 *3.8. </style}*设 f 是一个魏尔斯特拉斯形式的可容许多项式。那么等式

$$\sigma^f(2z) = \sigma^f(z)^4(\wp^f_{122}(z)\wp^f_{12}(z) - \wp^f_{22}(z)\wp^f_{112}(z) - \wp^f_{111}(z)) = S^f(z)^2(\wp^f_{122}(z)\wp^f_{12}(z) - \wp^f_{22}(z)\wp^f_{112}(z) - \wp^f_{111}(z)) \tag{3.12}$$

对一般的 $z \in \mathbb{C}^2$ 成立。

证明。取一般的 $u = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}^T$并考虑 $v_t = \begin{pmatrix} u_1 + t & u_2 \end{pmatrix}^T$。将命题 3.7 (iii) 中的加法公式应用于 u 和 v_t，再取极限$t \to 0$，得到（3.12）（注意，当 $\sigma(u - v_t)/t \to -1$ 时 $t \to 0$）。□

推论 3.9. 设 f 是一个魏尔斯特拉斯形式的可容许多项式。那么等式

$$\sigma^f(2z) = S^f_{12}(z)\frac{\partial S^f_{22}}{\partial z_1}(z) - S^f_{22}(z)\frac{\partial S^f_{12}}{\partial z_1}(z) + S^f_{11}(z)\frac{\partial S^f}{\partial z_1}(z) - S^f(z)\frac{\partial S^f_{11}}{\partial z_1}(z) \tag{3.13}$$

对所有 $z \in \mathbb{C}^2$ 成立。

证明。 直接计算表明

$$S^f_{12}(z)\frac{\partial S^f_{22}}{\partial z_1}(z) - S^f_{22}(z)\frac{\partial S^f_{12}}{\partial z_1}(z) = S^f(z)^2\left(\wp^f_{122}(z)\wp^f_{12}(z) - \wp^f_{22}(z)\wp^f_{112}(z)\right),$$

$$S^f(z)\frac{\partial S^f_{11}}{\partial z_1}(z) - S^f_{11}(z)\frac{\partial S^f}{\partial z_1}(z) = S_f(z)^2\wp^f_{111}(z).$$

将这些恒等式代入（3.12）可得（3.13）。 □

4. Taylor expansions of Kleinian functions of weight 2

本节将计算函数 S^f_{jk}的二阶泰勒展开。这些展开对于后续推导至关重要。首先，我们来陈述最终结果。

定理 4.1。 设 f 为一个可容许多项式。则以下展开式

$$S^f_{22}(z) = 2z_1z_2 + \bar{o}(z^2),\ S^f_{12}(z) = -z_2^2 + \bar{o}(z^2),\ S^f_{11}(z) = 1 + \bar{o}(z^2) \tag{4.1}$$

成立。

我们分几个步骤证明定理 4.1。

引理 4.2。 设 f 为一个可容许多项式。那么 $S^f_{12}(0) = S^f_{22}(0) = 0$ 和$S^f_{11}(0) \neq 0$。

证明。 证明思路与命题 2.1 (ii)的相当相似。任取 $x_0 \in \mathbb{C}$ 使得 $f(x_0) \neq 0$，并考虑定义在 x_0的某个邻域内的任意单值分支 u，它是 $\sqrt{f}$ 定义在 x_0的某个邻域内。取此平方根分支后，我们定义除子 $D(t) = (x_0,\ -u(x_0)) + (x_0 + t,\ u(x_0) + t) \in \mathcal{X}^{(2)}_f$，其中 $t \neq 0$较小。根据定义，$\mathscr{A}_f(D(t))$ 可以表示为向量

$$A(t) = \begin{pmatrix} \int_{x_0}^{x_0+t} \frac{dx}{u(x)} \\ \int_{x_0}^{x_0+t} \frac{xdx}{u(x)} \end{pmatrix},$$

当 $t \to 0$时收敛到 $\mathbf{0}$。显然，$S(A(t)) \to 0$，因为 $t \to 0$。还需注意，$\wp^f_{21}(\mathscr{A}_f(D(t)))$和 $\wp^f_{22}(\mathscr{A}_f(D(t)))$分别收敛到 $-x_0^2$和 $2x_0$，当 $t \to 0$时。相乘可得 $S^f_{12}(A(t)),\ S^f_{22}(A(t)) \to 0$ 当 $t \to 0$时。因此，$S^f_{12}(0) = S^f_{22}(0) = 0$。显然，$S^f_{11}(0)$ 不可能等于零，否则不存在函数 $\phi \in \mathfrak{S}_f$ 满足 $\phi(0) \neq 0$，由推论 3.5 可知，这与命题3.1(iii)矛盾。 □

引理 4.3。 设 f 为可容许多项式。则存在 $c \in \mathbb{C}$ 使得展开式

$$S^f_{12}(z) = az_2^2 + \bar{o}(z^2) \tag{4.2}$$

成立。

证明。 令 $(P_1) + (P_2) \in \mathcal{X}^{(2)}_f$ 为函数 x 的零点除子（即，P_1和 P_2 是 $\mathcal{X}_f$ 中具有零 x 坐标的点；若 $f(0) = 0$，则 $P_1 = P_2$ 是一个魏尔斯特拉斯点）。令 $C_j = \{\mathscr{A}_f[(P_j) + (P)]\colon\ P \in \mathcal{X}_f\} \subset$雅可比簇$_f$。最后，令 $\tilde{C}_j$ 为关于商映射 $\mathbb{C}^2 \to$雅可比簇$_f$ 的 C_j 的原像。

$\wp_{12}^f$ 的定义意味着 $\left(S_{12}^f\right) = (C_1) + (C_2)$。现在注意到， $\tilde{C}_j$ 是 $\mathbb{C}^2$ 中的一个子流形， $0 \in \tilde{C}_j$，而 $T_0\tilde{C}_j$ 由相对于阿贝尔映射，在点 P_j 处指向 $\mathcal{X}_f$ 的切 $\tilde{}$ 向量的推前所张成。因此，对于 $j = 1$， T_0C_j 由 $\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}^T$ 张成，2（这由以下事实可知： ω_2^f 在 P_j 处有一个零点，而 ω_1^f 没有）。分别考虑子流形 C_1、C_2 在零点处的定义函数 v_1、v_2，即它们定义在零 $U \subset \mathbb{C}^2$ 的某个邻域内，使得对于所有满足 $v_j(z) = 0$ 的 $z \in U$，有 $z \in U \cap C_j \Leftrightarrow v_j(z) = 0$ 和 $dv_j(z) \neq 0$。由 $\tilde{}$ 对 T_0C_j 的描述可知， $v_j(z) = \alpha_j z_2 + \bar{o}(z)$，其中 $\alpha_j \neq 0$。最后，对于 $(S_{12}^f) = (C_1) + (C_2)$， v_1v_2 在零点处的芽整除 S_{12}^f 的芽。于是得到展开式（4.2）。□

注记。 沿着引理证明的思路 4.3，很容易推导出$S_{12}^f(z)$ 关于 theta函数的公式。结果与公式（3.8）相同，但 Δ 应替换为对应于其中一个点的黎曼常数向量 P_j，而非无穷远点。

推论 4.4。 设 f 是一个可容许多项式。则存在 $c \in \mathbb{C}$，使得展开式

$$\begin{aligned} S_{22}^f(z) &= cz_1z_2 + \bar{o}(z^2) \\ S_{12}^f(z) &= -\frac{c^2}{4}z_2^2 + \bar{o}(z^2) \end{aligned} \tag{4.3}$$

成立。

证明。 考虑命题 K_3 和 K_4 中的多项式2.2。由于关系式（2.2）是 4 阶齐次的，我们可以将其乘以 $\left(S^f\right)^4$，得到关系式

$$\left(\left(S_{22}^f\right)^2 + 4S^fS_{12}^f\right)\left(S_{11}^f\right)^2 = -K_3\left(S^f, S_{12}^f, S_{22}^f\right)S_{11}^f - K_4\left(S^f, S_{12}^f, S_{22}^f\right). \tag{4.4}$$

引理 4.2 说明（4.4）右端在$z = 0$ 处至少有 6 阶零点（注意，所有函数都是偶的）。因此，函数

$$\left(S_{22}^f\right)^2 + 4S^fS_{12}^f$$

在 $z = 0$ 处也至少有 6 阶零点。由展开式

$$\begin{aligned} S^f(z) = z_1^2 + \bar{o}(z^2),\ S_{12}^f(z) = az_2^2 + \bar{o}(z^2), \\ S_{22}^f(z) = p_{11}z_1^2 + p_{12}z_1z_2 + p_{22}z_2^2 + \bar{o}(z^2), \end{aligned}$$

可得

$$\left(S_{22}^f\right)^2 + 4S^fS_{12}^f = (p_{11}z_1^2 + p_{12}z_1z_2 + p_{22}z_2^2)^2 + 4az_1^2z_2^2 + \bar{o}(z^4).$$

由于左侧在零点处以 6 阶消失，我们得到

$$(p_{11}z_1^2 + p_{12}z_1z_2 + p_{22}z_2^2)^2 + 4az_1^2z_2^2 = 0.$$

因此， $p_{11} = p_{22} = 0$ 与 $p_{12}^2 + 4a = 0$。于是， （4.3）在 $c = p_{12}$下成立。 □

为了进一步进行，我们需要对权重 2 的克莱因函数求导。下面给出的方法源自 [2], ，其中计算是针对魏尔斯特拉斯形式的多项式进行的。首先，我们引入亚纯函数 ρ_1^f 与 ρ_2^f，它们在 $\mathbb{C}^2$ 上定义为1-形式 r_1^f 与 r_2^f 的积分。也就是说，若 $z \in \mathbb{C}^2$ 与 $\mathscr{A}_f(D)$ 模Per$f$重合，其中 $D = (x_1,\ y_1) + (x_2,\ y_2)$为非特殊除子，则存在一条曲线 γ，位于 $\mathcal{X}_f$ 上，连接 $(x_1,\ -y_1)$ 到$(x_2,\ y_2)$ 并且

$$z = \int_\gamma \begin{pmatrix} \omega_1^f \\ \omega_2^f \end{pmatrix}.$$

显然， γ 在相差加上同调于零的周期的意义下被定义，因此，若点 $(x_1、\ y_1)$ 与 $(x_2、\ y_2)$ 均不在无穷远点，则积分 $\rho_j^f(z) = \int_\gamma r_1^f$、$j = 1$、2是良定义的，且不依赖于 γ 的选取。显然，上述构造定义了 ρ_j^f 于集合 $\mathbb{C}^2 \setminus (\tilde{B}_1^f \cup \tilde{B}_2^f)$上，其中子流形 $\tilde{B}_j^f \subset \mathbb{C}^2$已在推论3.4中定义。

引理 4.5. 设 f 为可容许多项式。则下列陈述成立。

(i) 函数 ρ_1^f 与 ρ_2^f 是 $\mathbb{C}^2$上的奇亚纯函数。*(ii)* 设 λ^f 表示Per$f$-周期亚纯函数，它在 $\mathbb{C}^2$ 上由方程定义

$$\lambda^f(D) = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

对于 $D = (x_1、\ y_1) + (x_2、\ y_2)$。那么 λ^f 是奇的，且这些函数

$$\left(\rho_1^f - \frac{\lambda^f}{2}\right) S^f,\ \rho_2^f S^f$$

是 $\mathbb{C}^2$上的整解析函数。

（*iii*）对于所有 $w \in$Per$f$，关系式

$$\rho_1^f(z+w) = -\eta_1^f(w) + \rho_1(z),\ \rho_2^f(z+w) = -\eta_2^f(w) + \rho_2^f(z)$$

hold, where $\eta^f(w) = \begin{pmatrix} \eta_1^f(w) & \eta_2^f(w) \end{pmatrix}^T$.

证明。 命题 （iii）显然。事实上，假设

$$z = \int_\gamma \begin{pmatrix} \omega_1^f \\ \omega_2^f \end{pmatrix},$$

其中 γ是 $\mathcal{X}_f$上的一条曲线，它连接 $(x_1、\ -y_1)$ 与 $(x_2、\ y_2)$。那么 $z + w$ 可用同样的方式由曲线 $\tilde{\gamma}$表示，而 $\tilde{\gamma}$是通过添加一个表示周期 w的闭路从 γ 得到的。根据定义（即由公式 (3.2)）， r_k^f 的相应积分等于 $-\eta_k^f(w)$，因此（iii）成立。要证明 ρ_1^f、 ρ_2^f和 λ^f是奇的，根据 (2.1)，只需应用超椭圆对合并验证符号变化。最后，我们注意到， （ii）表明 ρ_1^f 和 ρ_2^f 是亚纯的。因此，剩下要证明的是（ii）。为此，我们需要做一些准备。

令 ∞_1,∞_2 表示曲线 $\mathcal{X}_f$ 的无穷远点。与推论 3.4 一样，令$B_j^f \subset$Jac$f$为集合 $B_j^f = \{\mathscr{A}_f[(P) + (\infty_j)]:\ P \in \mathcal{X}_f\}$，并令 $\tilde{B}_j^f \subset \mathbb{C}^2$为相对于商映射 $\mathbb{C}^2 \to$ Jac$f$ 的 B_j^f 的原像。现在固定 $j \in \{1、\ 2\}$，并考虑满足 $z = \mathscr{A}_f(D)$ mod Per$f$ 的 $z \in \tilde{B}_j^f$，其中 $D = (x、\ y) + (\infty_j)$，且 $(x、\ y)$ 不是无穷远点。显然，一般的 $z \in \tilde{B}_j^f$ 可以表示成这样的

形式。考虑点 (x, y) 和 ∞_j 的邻域 U、$V \subset \mathcal{X}_f$，以及亚纯函数 u_1、u_2，它们分别定义在 U 和 v_1上；另有 v_2 定义在 V上，使得 $du_k = r_k^f|_U$且对 $k = 1$有 $dv_k = r_k^f|_V$，2（这些邻域和函数确实存在，因为 r_k^f 是第二类的）。此外，如有必要，我们可以缩小 U 和 V，使得 $U \cap V = \varnothing$、U 和 V 均为单连通，并且对所有 $P \in U$ 和 $Q \in V$，除子 $(P) + (Q)$ 均为非特殊的。在这种情况下，我们有一个双全纯映射 $A : U \times V \to W$，其中 $W \subset \mathbb{C}^2$ 是 z 的一个邻域，满足$A((x, y), \infty_j) = z$，并且 $A(P, Q)$对所有 $P \in U$、$Q \in V$均为 $\mathscr{A}_f[(P) + (Q)]$的一个代表。此外，存在一个常数 $c \in \mathbb{C}$，使得对所有 $w \in W\backslash\tilde{B}_1^f$ 都有 $\rho_k^f(w) = u_k(P) + v_k(Q) + c$，其中 $A(P, Q) = w$。

经过上述准备，我们现在分别考虑情形 $k = 1$ 和 $k = 2$。首先注意到，r_2^f 在点 ∞_j, $j = 1,2$ 处有一个 2 阶极点（若 $\deg f = 5$，则 r_2^f 在 $\infty_1 = \infty_2$ 处有一个二重极点）。这一事实显然可由 r_2^f 的定义 (3.1) 得出。因此，v_2 在 ∞_1 处有一个 1 阶极点，故 W 中的函数 ρ_2^f 沿子流形 $W \cap \tilde{B}_j^f$ 有一个 1 阶极点。由于 v_2 和 u_2 没有其他极点，我们得出 $\rho_2^f S^f$ 在W中全纯。因此，我们证明了 $\rho_2^f S^f$ 在一般$z \in \tilde{B}_j^f$，$j = 1,2$ 的邻域内全纯。因此，$\rho_2^f S^f$ 在一个离散集之外全纯，故由黎曼可去奇点定理（参见，例如 [13, 定理 7.1.2]），我们得出 $\rho_2^f S^f$ 处处全纯。因此，我们证明了函数ρ_2^f满足 (ii)。

现在我们考虑函数 ρ_1^f。由于 r_1^f 在无穷远点处的极点阶数为 3，我们需要修改前面的论证。考虑定义在 $\mathcal{X}_f$ 上的亚纯函数 g，其定义为 $(x, y) \mapsto y/x$。经过直接计算可得

$$2r_1^f - dg = \frac{2f_0 + f_1 x}{2x^2 y} dx,$$

因此，$2r_1^f - dg$ 在无穷远点处全纯。于是，函数 $2v_1 - g$ 在无穷远点处也全纯。现在令 $l(P, Q) = (y_1 - y_2)/(x_1 - x_2),$，其中 $P = (x_1, y_1)$ 且 $Q = (x_2, y_2)$。简单计算可知，对于任意不在无穷远点处的 P，函数$Q \mapsto l(P, Q) - g(Q)$ 在无穷远点处的极点阶数至多为 1。因此，函数$(P, Q) \mapsto u_1(P) + v_2(Q) - l(P, Q)/2$ 沿子流形$\{Q = \infty_j\}$有一个一阶极点。于是，$(\rho_1^f - \lambda^f/2)S^f$ 在 z的某个邻域内全纯。证明的其余部分与函数 ρ_2^f 的情形相同。□

命题 4.6。设 f 为可容许多项式。那么等式

$$\frac{\partial \ln S^f}{\partial z_1} = -2\rho_1^f + \lambda^f, \quad \frac{\partial \ln S^f}{\partial z_2} = -2\rho_2^f \tag{4.5}$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 \ln S^f}{\partial z_1^2} = -2\wp_{11}^f - f_6 \left(\wp_{12}^f\right)^2, \quad \frac{\partial^2 \ln S^f}{\partial z_1 \partial z_2} = -\frac{f_5}{2}\wp_{12}^f - f_6 \wp_{12}^f \wp_{22}^f, \\ \frac{\partial^2 \ln S^f}{\partial z_2^2} = -\frac{f_5}{2}\wp_{22}^f - f_6 \left(\left(\wp_{22}^f\right)^2 + \wp_{12}^f\right) \end{gathered} \tag{4.6}$$

成立。

注意，等式（3.11）可通过化简（4.6）并在 3.7 (i)成立时使用命题 f 处于魏尔斯特拉斯形式时得到。

证明。 考虑函数

$$a(z)=\frac{\partial \ln S^f}{\partial z_1}+2\rho_1^f-\lambda^f,\ b(z)=\frac{\partial \ln S^f}{\partial z_2}+2\rho_2^f.$$

由引理 4.5 (iii) 和空间 $\mathfrak{S}_f$ 的定义 (3.6) 易知，a 和 b 是以 Per$f$ 为周期的。此外，根据引理 4.5 (i) 以及 S^f 为偶函数这一事实，a 和 b 是奇函数。此外，由引理 4.5 (ii) 可知，aS^f 和 bS^f 是整全纯函数。因此，aS^f 和 bS^f 属于 $\mathfrak{S}_f$。由命题 3.1 (ii) 可知，$aS^f=bS^f=0$，因为 $\mathfrak{S}_f$ 中不存在非平凡奇元素。方程（4.5）随即成立，因为它们可以写成等式 $a=b=0$。

方程（4.6）由（4.5）经 [2] 中提出的直接计算即可得出；我们仅略述证明。对于非特殊除子 $D=(x_1,\ y_1)+(x_2,\ y_2)$映射 $\mathscr{A}_f$ 在 D 的一个适当邻域内是双全纯的。此外，若$(x_1,\ y_1)\neq(x_2,\ y_2)$，且 D 中的两个点都不是魏尔斯特拉斯点或无穷远点，那么 $(x_1,\ x_2)$ 构成 $\mathcal{X}_f^{(2)}$ 在 D 附近的局部坐标，且易于计算 $\mathscr{A}_f$ 的雅可比矩阵。具体而言，

$$\frac{\partial \mathscr{A}_f}{\partial x_1}=\begin{pmatrix}1/y_1\\ x_1/y_1\end{pmatrix},\ \text{and}\ \frac{\partial \mathscr{A}_f}{\partial x_1}=\begin{pmatrix}1/y_2\\ x_2/y_2\end{pmatrix}.$$

若令 $z=\begin{pmatrix}z_1 & z_2\end{pmatrix}^T=\mathscr{A}_f(D)$，则可通过求逆矩阵来计算逆映射 $z\mapsto(x_1(z),\ x_2(z))$ 的雅可比矩阵。简单计算可得

$$\frac{\partial x_1}{\partial z_1}=\frac{y_1x_2}{x_2-x_1},\ \frac{\partial x_2}{\partial z_1}=\frac{y_2x_1}{x_1-x_2},\ \frac{\partial x_1}{\partial z_2}=\frac{y_1}{x_1-x_2},\ \frac{\partial x_2}{\partial z_1}=\frac{y_2}{x_2-x_1}.$$

由于此计算在一般的 $z\in\mathbb{C}^2$ 处成立，我们可以通过以下公式计算函数 ϕ 的导数

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial z_1}&=\frac{\partial \phi}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial z_1}+\frac{\partial \phi}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial z_1}=\frac{\partial \phi}{\partial x_1}\frac{y_1x_2}{x_2-x_1}+\frac{\partial \phi}{\partial x_2}\frac{y_2x_1}{x_1-x_2},\\ \frac{\partial \phi}{\partial z_1}&=\frac{\partial \phi}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial z_1}+\frac{\partial \phi}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial z_1}=\frac{\partial \phi}{\partial x_1}\frac{y_1}{x_1-x_2}+\frac{\partial \phi}{\partial x_2}\frac{y_2}{x_2-x_1}\end{aligned}$$

将其应用于（4.5）可得（4.6）。 □

定理 *4.1* 的证明。 首先计算其值

$$\frac{\partial^2 S_{22}^f}{\partial z_1\partial z_2}(0).$$

首先写出

$$\frac{\partial^2 S_{22}^f}{\partial z_1\partial z_2}=\frac{\partial^2 S^f}{\partial z_1\partial z_2}\wp_{22}^f+\frac{\partial S^f}{\partial z_1}\frac{\partial \wp_{22}^f}{\partial z_2}+\frac{\partial S^f}{\partial z_2}\frac{\partial \wp_{22}^f}{\partial z_1}+S^f\frac{\partial^2 \wp_{22}^f}{\partial z_1\partial z_2}.\tag{4.7}$$

我们计算当 $z\to 0$时每一项的极限。为此，考虑任意一个不是 f 的根的 $x_0\in\mathbb{C}$，并令 u 为在x邻域内定义的 $\sqrt{f}$ 的任意分支。最后，对于足够小的 $t\neq 0$，考虑除子 $D(t)=(x_0,\ -u(x_0))+(x_0+t,\ u(x_0+t))\in\mathcal{X}_f^{(2)}$。根据定义，$\mathscr{A}_f(D(t))$ 可以表示为一个向量

$$A(t)=\begin{pmatrix}\int_{x_0}^{x_0+t}\frac{dx}{u(x)}\\ \int_{x_0}^{x_0+t}\frac{xdx}{u(x)}\end{pmatrix}.$$

因此，当 $t \to 0$ 时，我们有如下展开式

$$A_1(t) = \frac{t}{u(x_0)} + \bar{o}(t),\ A_2(t) = \frac{x_0 t}{u(x_0)} + \bar{o}(t),$$
$$S^f(A(t)) = \frac{t^2}{f(x_0)} + \bar{o}(t^2),\ \wp_{22}^f(A(t)) = 2x_0 + \bar{o}(1)$$
$$\frac{\partial S^f}{\partial z_1}(A(t)) = \frac{2t}{u(x_0)} + \bar{o}(t^2),\ \frac{\partial S^f}{\partial z_2}(A(t)) = \bar{o}(t^2),\ \frac{\partial^2 S^f}{\partial z_1 \partial z_2}(A(t)) = \bar{o}(t).$$

为计算 $\wp_{22}^f$ 的导数，很容易应用命题4.6的证明中所述的方法。该方法给出公式

$$\frac{\partial \wp_{22}^f}{\partial z_1}(z) = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1},\ \frac{\partial \wp_{22}^f}{\partial z_2}(z) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$
$$\frac{\partial^2 \wp_{22}^f}{\partial z_1 \partial z_2}(z) = -\frac{f'(x_1)x_2 + f'(x_2)x_1}{2(x_2 - x_1)^2} + \frac{y_1 y_2}{(x_2 - x_1)^2} + \frac{f(x_2)x_1 - f(x_1)x_2}{(x_2 - x_1)^3},$$

其中 $z = \mathscr{A}_f(D)$ 与 $D = (x_1,\ y_1) + (x_2,\ y_2)$。将 $D(t)$ 代入这些公式，即得展开式

$$\frac{\partial \wp_{22}^f}{\partial z_1}(A(t)) = \frac{1}{t}(-2u(x_0)x_0 + \bar{o}(1)),\ \frac{\partial \wp_{22}^f}{\partial z_2}(A(t)) = \frac{1}{t}(2u(x_0) + \bar{o}(1)),$$
$$\frac{\partial^2 \wp_{22}^f}{\partial z_1 \partial z_2}(A(t)) = \frac{1}{t^2}(-2f(x_0) + \bar{o}(1)).$$

将 S^f、 $\wp_{22}^f$ 及其导数的所有展开式合并并代入（4.7），我们得到

$$\frac{\partial^2 S_{22}^f}{\partial z_1 \partial z_2}(A(t)) \to 2, \text{ when } t \to 0.$$

因此，由推论4.4 可知

$$S_{22}^f(z) = 2z_1 z_2 + \bar{o}(z^2),\ S_{12}^f(z) = -z_2^2 + \bar{o}(z^2).$$

尚需求出 S_{11}^f的2阶泰勒展开。其思路是考虑该展开式

$$S^f(z) = z_1^2 + a z_1^4 + b z_1^3 z_2 + c z_1^2 z_2^2 + d z_1 z_2^3 + e z_2^4 + \bar{o}(z^4).$$

将其代入方程

$$S^f \frac{\partial^2 S^f}{\partial z_2^2} - \left(\frac{\partial S^f}{\partial z_2}\right)^2 = -\frac{f_5}{2} S^f S_{22}^f - f_6 \left(\left(S_{22}^f\right)^2 + S^f S_{12}^f\right),$$
$$S^f \frac{\partial^2 S^f}{\partial z_1 \partial z_2} - \frac{\partial S^f}{\partial z_1}\frac{\partial S^f}{\partial z_2} = -\frac{f_5}{2} S^f S_{12}^f - f_6 S_{12}^f S_{22}^f,$$

由（4.6）可得： $b = c = 0$， $d = -f_5/6$ 以及 $e = -f_6/4$。因此，

$$S^f(z) = z_1^2 + a z_1^4 - \frac{f_5}{6} z_1 z_2^3 - \frac{f_6}{4} e z_2^4 + \bar{o}(z^4)$$

其中 a为某个常数。最后，考虑展开式

$$S_{11}^f = p_0 + p_{11} z_1^2 + p_{12} z_1 z_2 + p_{22} z_2^2 + \bar{o}(z^2).$$

将 S^f 和 S^f_{11} 的展开式代入方程

$$S^f\frac{\partial^2 S^f}{\partial z_1^2}-\left(\frac{\partial S^f}{\partial z_1}\right)^2=-2S^fS^f_{11}+f_6S^fS^f_{12}$$

并令 $\leqslant 4$ 阶的部分相等，我们得到恒等式

$$(2-2p_0)z_1^2+(2a-2p_0a-2p_{11})z_1^4-2p_{12}z_1^3z_2-2p_{22}z_1^2z_2^2+\\ +\frac{f_5p_0-f_5}{3}z_1z_2^3+\frac{f_6p_0-f_6}{2}z_2^4=0.$$

考察 z_1^2 的系数，我们立即得到 $p_0=1$ ，将其代回方程可得 $p_{11}=p_{12}=p_{22}=0$。

□

References

[1] Takanori Ayano 和 Victor M. Buchstaber。《与具有两个无穷远点的超椭圆曲线相关的西格玛函数》。载于：Regul. Chaotic Dyn. 31.1（2026），第 69–82 页。[2] Henry Frederick Baker。《多重周期函数理论导论》。大学出版社，1907。[3] Julia Bernatska。《平面代数曲线上的 $\wp$ 函数计算》。载于：arXiv 预印本 arXiv:2407.05632（2024）。[4] Julia Bernatska。《KdV方程的实条件及有限相空间中的精确准周期解》。载于：J. Geom. Phys. 206（2024），论文编号 105322，共 27 页。 ISSN：0393-0440。 DOI：10.1016/j.geomphys.2024.105322。 URL：https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2024.105322。[5] Christina Birkenhake 和 Herbert Lange。《复阿贝尔簇》。第二版。第 302 卷。数学科学基础丛书 [《数学科学基本原理》。施普林格出版社，柏林，2004，第 xii+635 页。ISBN：3-540-20488-1。[6] J-B Bost 和 J-F Mestre。《亏格为1和2的曲线的算术几何平均与周期》。载于：Gaz. Math. 38（1988），第 36–64 页。[7] V. M. Buchstaber、V. Z. Enolski 和 D. V. Leykin。《σ函数：新旧成果》。载于：《可积系统与代数几何》第 2 卷。第 459 卷。伦敦数学会讲义系列。剑桥大学出版社，剑桥，2020，第 175–214 页。[8] J. W. S. Cassels 和 E. V. Flynn。《亏格为2的曲线的通俗算术入门》。第 230 卷。伦敦数学会讲义系列。剑桥大学出版社，剑桥，1996，第 xiv[9] 页。[9] K. Chandrasekharan。《椭圆函数》。柏林：施普林格出版社，1985，第 xi[10] 页。[10] Rudolf Wing Tat Chow。《亏格为1和2的曲线的算术几何平均与周期》。博士论文。谢菲尔德大学，2018。[11] John E. Cremona 和 Thotsaphon Thongjunthug。《椭圆曲线上的复算术几何平均、周期与复椭圆对数》。载于：J. Number Theory 133.8（2013），第 2813–2841 页。 ISSN：0022-314X。[12] E. V. Flynn 和 Yan Bo Ti。《亏格二同源密码学》。载于：《后量子密码学》。第 11505 卷。计算机科学讲义。施普林格出版社，Cham，2019，第 286–306 页。

[13] Hans Grauert 和 Reinhold Remmert。《相干解析层》。第 265 卷。数学科学基础丛书]《数学科学基本原理》。施普林格出版社，柏林，1984，第 xviii ISBN 页。 ISBN：3-540-13178-7。[14] Georges Humbert。《阿贝尔函数的普通变换》。载于：《纯粹与应用数学杂志》7（1901），第 395–417 页。[15] Fredrik Johansson。《椭圆函数、椭圆积分与模形式的数值计算》。载于：《量子场论中的椭圆积分、椭圆函数与模形式》。数学符号计算专著丛书。施普林格出版社，Cham，2019，第 269–293 页。[16] Hugo Labrande。《准线性时间内计算 Jacobi theta函数》。载于：Math. Comp. 87.311（2018），第 1479–1508 页。 ISSN：0025-5718。[17] Wolfram Luther 和 Werner Otten。《椭圆函数的可靠计算》。载于：J. Univers. Comput. Sci. 4.1（1998），第 25–33 页。[18] Shigeki Matsutani。《超椭圆 KdV 解的数值表示》。载于：Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 138（2024），论文编号 108259，共 7 页。 ISSN：1007-5704。 DOI：10.1016/j.cnsns.2024.108259。 URL：https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2024.108259。[19] David Mumford。《Tata theta讲义》第一卷。《现代 Birkhäuser 经典著作》。C. Musili、M. Nori、E. Previato 和 M. Stillman 协助编写；重印 1983 年版。Birkhäuser Boston, Inc.，波士顿，MA，2007，第 xiv[20] 页。[20] M. Smirnov。《利用 Weierstrass函数求解共形映射问题》。载于：Comput. Math. Math. Phys. 62.5（2022），第 797–810 页。 ISSN：0965-5425。[21] Katsuyuki Takashima。《同源序列的高效算法及其密码学应用》。载于：《面向下一代密码学的数学建模》。第 29 卷。Math. Ind.（Tokyo）。施普林格出版社，新加坡，2018，第 97–114 页。[22] D. V. Leikin、V. M. Buchstaber、V. Z. Enolskii。《克莱因函数、超椭圆雅可比簇及其应用》。载于：Reviews in Mathematics and Math. Physics 10.2（1997），第 3–120 页。

119991 Russia, Moscow GSP-1, ul. Gubkina 8, Institute for Numerical Mathematics, Russian Academy of Sciences*Email address*: matsmir98@gmail.com