arXiv:2603.08259v1 [math.CO] 9 Mar 2026

固定色类大小的着色采样

Aiya Kuchukova、Will Perkins 和 Xavier Povill

摘要。1970 年，Hajnal 和 Szemerédi 证明了埃尔德什提出的一个猜想：对于最大度为 Δ 的图，存在一种均衡的 $\Delta+1$ 着色；也就是说，任意两个颜色类的大小相差至多为 1。2007 年，Kierstand 和 Kostochka 重新证明了这一结果，并给出了一种可在多项式时间内生成此类着色的算法。本文研究如何对均匀随机均衡着色进行近似采样。一系列研究为不受颜色类大小约束的着色提供了多项式时间采样算法，最近的一项改进由 Carlson 和 Vigoda 针对 $q \geq 1.809\Delta$ 提出。本文给出了一种多项式时间算法，可在 $q > 2\Delta$ 时对均衡着色进行采样。此外，我们的结果还适用于与均衡着色偏差较小的着色（并由此推论其存在性）。证明采用了多元多项式的多项式几何框架，并由此确立了均匀随机着色的颜色类大小所满足的多元局部中心极限定理。

1. 引言

1.1. 带约束的抽样

组合学及其应用中的许多有趣问题，都可以表述为带有全局约束的独立集、匹配、图割或着色问题。因此，能够对这些基本对象进行带约束抽样，有助于解决范围广泛且细致的问题，并增强当前用于抽样的技术和工具。我们首先举例说明一些可以抽样的基本对象，以及引入约束如何改变抽样问题。

铁磁伊辛模型是一个关于图割和磁体的统计物理模型，便是一个例子。对于所有参数和所有图，都可以近似计数 [18] 并对模型状态进行抽样 [33] 。然而，当对磁化（割一侧的顶点数／自旋为正的粒子数）施加限制时，就会出现算法阈值。对于磁化固定的铁磁伊辛模型，Carlson、Davies、Kolla 和 Perkins 确定了一个计算阈值 [3], ，这意味着在某些温度和磁化范围内存在高效的采样算法，而在另一些范围内，除非 NP=RP，否则无法进行抽样（ [21] 也展示了动力学阈值的例子）。另一个值得关注的例子是独立集，通常使用硬核模型进行研究。当对独立集的大小施加约束时，Davies 和 Perkins [8] 证明了计算阈值的存在；存在 α_c ，使得可以在多项式时间内对大小为 αn 、针对 $\alpha < \alpha_c$ 的独立集进行抽样，但除非 NP=RP，否则不存在针对 $\alpha > \alpha_c$ 的采样算法。Jain、Michelen、Pham 和 Vuong [15], 证明了大小为 $k \leq (1-\delta)\alpha_c$ 的独立集上的下上游走具有快速混合性质。

对物体大小施加约束对于统计物理模型而言很自然，因为它们区分了粒子数可变的情形（称为巨正则系综）与粒子数固定的情形（称为 正则系综）。实际上，关于巨正则系综的采样算法的研究结果要多得多，因为增加额外约束会带来更高的复杂性。在附加约束下

佐治亚理工学院数学学院，美国佐治亚州亚特兰大；加泰罗尼亚理工大学，西班牙巴塞罗那电子邮件地址</style】： aiya_kuchukova@gatech.edu、 math@willperkins.org、 xavier.povill@upc.edu。

系统的行为可能会彻底改变；例如，一个表现良好的系统（如随机图上的铁磁伊辛模型）在对磁化施加约束后，可能会呈现“玻璃态”行为 [26]。

请注意，我们迄今提到的约束示例都是一维的。在本文中，我们将探讨在模型上施加多个全局约束的情形。更确切地说，我们将证明，给定一个整数向量（满足某些假设），我们可以对颜色类大小构成所要求向量的着色进行抽样。这是一个微妙的问题，因为每个颜色类大小都对应一个大小受限的独立集，而且不同颜色的并集还应覆盖图的所有顶点。我们将在下一小节介绍着色采样的背景以及已知的存在性结果。

1.2. 带多个约束的着色采样

在考察带约束的着色之前，我们先介绍无约束着色采样的背景，因为这一问题也远未得到充分理解。下面是一个关于着色采样的经典猜想 [17, 38]:

猜想 1.1。 对于最大度为 Δ 且 $q \geq \Delta+2$ 的图类，存在一种多项式时间算法，可以近似均匀地抽样 q-着色。

此外，人们猜想，一种简单的马尔可夫链——Glauber 动力学——能够实现这一点。

过去 30 年里，人们在解决这一猜想方面取得了许多进展。例如，Jerrum 在其开创性论文中证明了当 $q \geq 2\Delta+1$ [17] 时该猜想成立。Vigoda 的另一项令人振奋的成果是，为 $q > \frac{11}{6}\Delta$ [38] 采样着色。针对某些特殊图族的界，也有许多令人瞩目的改进 [9, 28, 12, 25, 10, 29, 13, 37, 6]。对于一般图，q 被 Chen 、 Delcourt 、 Moitra 、 Perarnau 和 Postle 进一步改进为 $(11/6-\varepsilon)\Delta$ [5], ，最近 Carlson 和 Vigoda 又将其改进为 $q \geq 1.809\Delta$ [4]。

尽管这一方向取得了令人瞩目的进展，这个问题仍然极具挑战性；要将所需颜色数降至 $\Delta+2$, 或许还需要更多新思路。因此，以下问题似乎值得探讨：我们现有的工具和技术有多精细？我们能在多大程度上控制所采样的着色？

现在我们定义此前提到的颜色类大小约束。

定义 1.2 ($\vec{n}$-着色)**：** 给定向量 $\vec{n}=(n_1, \ldots, n_q)$， $\vec{n}$-着色是指对图的顶点进行正常着色，使得颜色为 i 的顶点有 n_i 个， $\forall i \in [q]$。

现在让我们描述 $\vec{n}$ 着色中或许最简单的一种情况，即均衡着色。

定义 1.3 （均衡着色）**：** q-均衡着色是一种正常着色，使用 q 种颜色，并且任意一对颜色类的大小之差至多为 1。注意，如果 n 整除 q，则颜色类大小相等。

Erdős 于 1964 年猜想，任何最大度为 Δ 的图都有一个均衡（$\Delta+1$）-着色。1970 年，Hajnal 和 Szemerédi 给出了该猜想的证明 [11]。后来 Kierstead 和 Kostochka 提供了一个更简洁的证明，同时还给出了构造这种着色的多项式时间算法。 [20]。

作为我们主要定理的推论，当 $q \geq 2\Delta$ 时，我们建立了一种用于近似抽样均匀均衡着色的多项式时间算法。

定义 1.4. 令 μ 为目标分布。如果某算法的输出分布 ν 满足 $\|\nu-\mu\|_{\mathrm{TV}} \leq \varepsilon$，则称该算法从 μ 进行 ε-近似抽样。

定理 1.5 均衡着色采样。 存在一种采样算法，给定 $q \geq 2\Delta$以及图类中任意一个含有 n 个顶点、最大度为 Δ 的图 G，该算法能够以高概率对图 G 上的均衡着色进行 ε-近似采样，运行时间为 $O\left(n^{(q+1)/2}\log n \log(\frac{1}{\varepsilon})^2\right)$。

在该定理的一个更一般版本中，我们证明存在一种用于对我们称为“偏斜”的着色进行采样的算法，并将其存在性确立为一个推论。

定理 1.6 偏斜着色采样**.** 固定 $q \geq 2\Delta + 1$。存在足够小的常数 $c = c(\Delta) > 0$，使得对于任意在 n 个顶点上、来自最大度为 Δ 的图类的 G，以及满足对所有 $i \in [q]$ 均有 $\|\vec{n}\|_1 = n$ 和 $|n_i - \frac{n}{q}| < cn$ 的 $\vec{n}$，存在一个算法，能以高概率对 G 上的 $\vec{n}$-着色进行 ε-近似抽样，运行时间为 $O\Big(n^q \log n \log(\frac{1}{\varepsilon})^2\Big)$。

作为简单推论，我们得到此类着色的存在性。

推论 1.7. 固定 $q \geq 2\Delta + 1$。则存在足够小的常数 $c > 0$，使得当 n 足够大，且任意 $\vec{n}$ 对所有 $i \in [q]$ 满足 $\|\vec{n}\|_1 = n$ 和 $|n_i - \frac{n}{q}| \leq cn$ 时，每个在 n 个顶点上、最大度为 Δ 的图 G 都具有一个 $\vec{n}$-着色。

据我们所知，除公平情形外，关于偏斜着色存在性的了解非常少。我们猜想，对每个颜色类大小给出一个界（与最大度为 Δ 的图中保证存在的独立集大小相匹配）即已足够。该猜想推广了 Hajnal 和 Szemerédi 的定理。

猜想 1.8.对任意最大度为 Δ 的图 G，以及满足对所有 $i \in [q]$ 均有 $\|\vec{n}\|_1 = n$ 和 $n_i \leq \left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor$ 的 $\vec{n}$，存在 G 的一个 $\vec{n}$-着色。

注意，即使我们要求 $n_i \leq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$，该猜想也不成立（对 $1 \leq r \leq \Delta - 1$ 而言，大小为 $\Delta + 1$、带有 r 个独立顶点的团的并是一个反例）。该猜想对团的并是紧的。

由于 $q \geq 2\Delta$ 是一个自然障碍，证明该猜想的第一步或许可以是证明：在对颜色类大小施加更强条件 $n_i \leq \left\lfloor \frac{n}{2\Delta} \right\rfloor$ 时，结论仍然成立。

我们还猜想，或许可以对极不均衡的着色进行抽样，不过证明需要新的思路。

猜想 1.9. 对于最大度为 Δ 的图，只要 $\vec{n}$ 满足对所有 $i \in [q]$ 都有 $n_i \leq \left\lfloor \frac{n}{2\Delta} \right\rfloor$，就存在一个多项式时间近似采样算法，可对均匀的 $\vec{n}$-着色进行抽样

1.3. 简要预备知识：Potts 模型与着色模型、单变量零点自由性

下面给出本文中贯穿使用的一些统计物理模型的定义。

下面的模型称为反铁磁 Potts 模型，它是另一种常见统计物理模型——反铁磁 Ising 模型的推广。它通过引入惩罚非正规着色的权重，区分非正规着色与正常着色。

定义 1.10（反铁磁 Potts 模型）**.** 设 w 为惩罚参数。我们定义配分函数

$$Z_G(w) := \sum_{\sigma \in [q]^V} w^{|m_G(\sigma)|},$$

其中 $m(\sigma)$ is为着色 σ 中单色边的数目（不一定是正常）.

这也定义了一种自然的吉布斯测度：若 X 是随机（不一定合法）的着色，则

$$\mathbb{P}_{G,w}[X = \sigma] = \frac{w^{m_G(\sigma)}}{Z_G(w)}.$$

注意，在 $w=0$ 处，配分函数计数的是合法着色的数量，而吉布斯测度就是合法着色上的均匀分布。如果颜色数满足$q \geq \Delta+1$，则存在合法着色，因此配分函数在 $w=0$ 处非零。尽管概率分布要求 w 为非负实数，但也可以研究复数 w对应的配分函数。Liu、Sinclair 和 Srivastava 证明，在复平面中， $w=0$ 周围存在一个无零区域 [23]。

定理 1。11 [23]。 存在一个 $\tau_\Delta>0$ ，使得以下结论成立。设 D_Δ 是复平面中的一个单连通区域，它是以线段 $[0,1]$上所有点为圆心、半径为 τ_Δ 的圆盘的并集。对于任意最大度不超过 $\Delta \geq 3$ 的图 G 以及整数$q \geq 2\Delta$， $Z_{G,\ q}(w) \neq 0$ 当 $w \in D_\Delta$时。

利用他们的无零点性结果和 Barvinok 的一个定理 [1], ，他们得到了一个确定性算法，用于近似计数最大度有界的图 G 的合法着色，以及一个用于对 G的着色进行抽样的采样算法。下一节将进一步说明无零点性结果如何有助于组合算法。

我们将使用带有外场（权重）的 Potts 模型，每种颜色对应一个外场。由于该模型仅定义在正常着色上，为简便起见，我们将其称为着色模型（等价地，也可以将其定义在所有着色上，并对单色边施加惩罚$w=0$）。

定义 1.12 （带外部场的着色模型）。 着色模型 是通过配分函数定义的模型

$$Z_G(\lambda_1,\ldots,\lambda_q) := \sum_{\substack{\sigma\in[q]^V \\ \sigma \text{ proper}}} \prod_{i=1}^{q} \lambda_i^{|\sigma^{-1}(i)|}$$

$\vec{}$向量 $\lambda \in \mathbb{C}^q$ 称为逸度，表示分配给每种颜色的权重。注意，对于 $\vec{\lambda}=\vec{1}$，配分函数仅仅计算合法着色的数量。对于$\vec{}$正实数 λ，该模型在合法着色空间上诱导出一个吉布斯测度，其定义为

$$\mathbb{P}_{G,\vec{\lambda}}(\sigma) := \frac{\prod_{i=1}^{q} \lambda_i^{|\sigma^{-1}(i)|}}{Z_G(\lambda_1,\ldots,\lambda_q)}.$$

在不引起混淆的情况下，我们通常会省略$\mathbb{P}_{G,\ \vec{\lambda}}$ 的下标。

$\vec{}$与前一个模型一样，概率分布要求 λ 为非负实向量，$\vec{}$然而，我们仍然可以分析复数 λ对应的配分函数，具体内容将在下面的小节中解释。

1.4. 多维无零性

在某些参数范围内，该模型具有一项极其强大的性质，即配分函数不存在复零点（零点自由性）。这可以推出模型的一些性质，例如确定性计数、 [41], 谱独立性、 [7], 中心极限定理、 [27], 强空间混合、 [34],以及簇展开 [36], ，因此在近似和采样算法中具有应用价值。

已有大量研究证明了不同模型的零点自由性，而且其研究动机各不相同，这一点颇为有趣。例如，李-杨定理表明，对于某些配分函数，无论图 [40]如何，其零点都位于复单位圆上。该定理的一个推论是，铁磁伊辛模型在复平面上几乎处处不存在相变（即模型行为不会发生剧烈变化）。另请参阅关于硬核模型 [31], 伊辛模型 [32], [30], 以及单体-二聚体模型 [14]的更多研究。值得注意的是，在大多数情况下，我们必须假设图的最大度有界 Δ，因为零点自由半径通常取决于 Δ。

我们证明零点自由性的动机，是为了精确控制颜色类大小的累积量（期望、协方差等）。log Z 的导数与这些累积量密切相关，因此证明 log Z 的解析性（这可由 Z的零点自由性直接推出），便能让我们控制这些累积量。

例如，零点自由性意味着任意阶累积量都有线性上界。由此可得的一个结果是，我们可以计算协方差矩阵行列式的渐近性，这对算法的运行时间至关重要。此外，解析性保证了泰勒展开收敛，我们将其应用于颜色类大小随机向量的特征函数。这有助于我们建立局部中心极限定理（LCLT），该定理保证吉布斯分布在极限下逐点趋近于正态分布。我们认为，这一事实本身在组合学上就很有趣。此外，我们还将其用于算法中的拒绝采样部分，概述见小节 1.5 ，详情见第 3节。

现在，我们概述着色模型的零点自由性结果（见定义 1.12）。我们采用的方法与 Liu、Sinclair 和 Srivastava 为带惩罚的 Potts 模型 [23] （见定义 1.10）提出的蓝图相似，但我们需要将他们的结果推广到多元配分函数，并处理 q 个参数（每种颜色对应一个），而不是一个参数。这样做是为了让每种颜色都有自己的变量，从而能够调控各颜色类的大小。将现有工具推广到多元情形，可以控制不同参数，进而更好地理解具有全局约束的模型，并设计高效算法。

定义 1.13 （假设）。 设 $\nu = 0.9$, $\varepsilon_I := 10^{-4}\Delta^{-4}$。从现在起，我们假设$\vec{\lambda} \in \mathbb{C}^q$ 的选取满足：对于任意 $i, j \in [q]$,

(1) |辐角 $\lambda_i| \le \nu\varepsilon_I/2$;
(2) |实部 $\ln\frac{\lambda_i}{\lambda_j}| \le \Delta\varepsilon_I$;
(3) $\lambda_i \notin (-\infty, 0]$;

定理 1.14 （周围的零点自由性 $\vec{1}$)。 对于 $q \ge 2\Delta$, $\Delta \ge 1$ 以及最大度为 G 的图Δ，并且 $\vec{\lambda} \in \mathbb{C}^q$ 满足定义 *1.13* 中的假设，则 $Z_G(\vec{\lambda}) \neq 0$。

该结果的推论使我们可以用半径为常数l_∞的无零球来重新表述它:

推论 1.15。 设 $R \in \mathbb{R}$ 使得 $0 < R \le \nu\varepsilon_I/4 \approx 2.2 \times 10^{-5}\Delta^{-4}$。若 $\vec{\lambda} \in \mathbb{C}^q$ 选择为满足$|\lambda_i - 1| \le R$ 对每个 $i \in [q]$，则定义 *1.13* 中的假设成立。因此，对于$q \ge 2\Delta$， $\Delta \ge 1$，以及最大度为 G 的图 Δ， $Z_G(\vec{\lambda}) \neq 0$ 在以 R 为中心、半径为 $\vec{1}$ 的多圆盘内。

证明见第 2 节。证明的核心思路是按照未固定（尚未着色）顶点的数量进行归纳论证。在归纳的每一步中，我们证明一个顶点被着色为 i 而非着色为 j 的概率之比非常接近 1。

值得注意的是，在 Liu、Sinclair 和 Srivastava 的论文中， [23] 该定理一般适用于他们称为“可接受的”着色，并且对无三角形图所需的颜色更少。文中还提到，他们的结果应当可以推广到列表着色。我们预计，这些推广对于我们的模型也成立。请注意，我们以足够一般的方式表述定理，因此，若能改进零点自由区域，抽样和存在性结果也将立即得到改进。

1.5. 局部中心极限定理

作为我们的主要定理之一，我们证明了局部中心极限定理（LCLT），该定理表明，着色模型的吉布斯分布逐点趋近于正态分布。我们还得到了协方差矩阵的特征值和行列式的渐近控制，因此可以对抽样得到 $\vec{n}$-着色的概率给出下界。这是拒绝采样的主要组成部分。

定理 1.16（局部中心极限定理）。设 $q \geq 2\Delta$、 $\Delta \geq 1$ 和 $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^q$ 满足$\|\vec{\lambda} - \vec{1}\|_\infty \leq R/2$，其中 R 是零点自由半径。令 $\vec{X} =$（X_1，……，X_{q-1}）表示删去最后一种颜色后的颜色类大小随机向量。我们将其期望值和协方差矩阵分别记为 $\mu :=\mathbb{E}[\vec{X}]$ 和 $\Sigma :=$Cov（$\vec{X}$）。那么，对于满足 $\sum n_i \leq n$的 $\vec{n} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{q-1}$，

$$\mathbb{P}_{\vec{\lambda}}(\vec{X} = \vec{n}) = (1 + o(1))\frac{1}{(2\pi)^{(q-1)/2}\sqrt{\det \Sigma}} \exp\left(-\tfrac{1}{2}(\vec{n} - \vec{\mu})^\top \Sigma^{-1}(\vec{n} - \vec{\mu})\right) + o\left(n^{-(q-1)/2}\right).$$

引理 1.17 (协方差行列式渐近**).** 令 $q \geq$最大 **{**2Δ,3**}**，$\Delta \geq 1$ 和 $\vec{\lambda} \in \mathbb{C}^q$，使得 $|\vec{\lambda} - \vec{1}| \leq R/2$，其中 R 是零点自由半径，

$$\det(\Sigma) = \Theta(n^{q-1}).$$

注意，如果我们选择 $\vec{\lambda} = \vec{1}$（对应于均匀分布），由对称性可得 $\mathbb{E}[X_i] = n/q$。我们证明，若 $\|\vec{n} - \vec{\mu}\| < C\sqrt{n}$，则 exp $\left(-\frac{1}{2}(\vec{n} - \vec{\mu})^\top \Sigma^{-1}(\vec{n} - \vec{\mu})\right) =\Omega(1)$，因此

$$\pi(\vec{X} = \vec{n}) = \Theta\left(n^{-(q-1)/2}\right).$$

这是证明中的一个重要组成部分，因为它保证了要得到目标着色，拒绝采样步骤需要重复的次数。我们将在下一小节说明具体做法。

局部中心极限定理的证明用到了两个简单的要素。第一个是特征函数的对数（$\varphi :=\mathbb{E}[e^{i\langle t, X\rangle}]$）的泰勒展开，这可以在特征函数非零的区域内进行（该区域包含于Z（$\vec{\lambda}$）原有的零点自由区域中）。容易证明，当 t 较小时，φ 由对应于期望和协方差的项主导（见小节 3.3）。当 t 较大时，我们利用一个给出特征函数上界的引理，从而证明较大的 t 所产生的贡献可以忽略不计（见小节 3.4）。

1.6. 均衡着色采样

本小节将说明如何对均衡着色进行抽样；下一小节则会说明如何稍微调整算法，以对偏斜着色进行抽样。我们将局部中心极限定理作为主要工具，用以保证拒绝采样成功。拒绝采样是抽样中的标准工具（例如见 [19] ）。

根据 Vigoda 的经典结果 [38], ，存在一种算法，可以在 $O(n \log n \log(1/\varepsilon))$内近似均匀地抽样着色，其中 $q \geq \frac{11}{6}\Delta$。Glauber 动力学就是这类算法的一个例子（有关混合时间的详情，请参见 [2], [24] ）。我们将此作为拒绝采样算法的第一步。

定义 1.18（拒绝采样算法）。

(1) 近似地抽取一个均匀着色（例如，运行 Glauber 动力学$T = O_\varepsilon(n\log\ n)$步）。(2) 检查生成的着色是否为 $\vec{n}$-着色。若是，则输出该着色；若否，则拒绝该结果并重复第一步。

由于局部中心极限定理连同对协方差矩阵的行列式的界蕴含$\pi(\vec{X} = \vec{x}) = \Theta\left(n^{-(q-1)/2}\right)$，容易证明，在经过 $O(n^{(q-1)/2}\log(1/\varepsilon))$次拒绝采样迭代后，算法失败的概率至多为 $1 - \varepsilon$。因此，算法的总运行时间为 $O\left(n^{(q+1)/2}\log(n)\log(\frac{1}{\varepsilon})^2\right)$。注意，该算法实际上使我们能够抽样的不仅是均衡着色。对于任意满足 $\sum_i n_i = n$ 且$|n_i - n/q| < c\sqrt{n}$ 的常数 $c > 0$ 和 $\vec{n}$，我们知道局部中心极限定理以及对协方差矩阵的特征值的界蕴含 $\pi(\vec{X} = \vec{x}) = \Theta\left(n^{-(q-1)/2}\right)$，因此同一拒绝算法仍然有效。

1.7. 偏斜着色采样

自然可以预期，我们能够以抽样均衡着色的同样方式来抽样偏斜着色（$|n_i - n/q| < cn$ 对于较小的 c）。然而，会出现若干困难。其中之一是证明我们能够（在算法上）找到权重 $\vec{\lambda}$，使得它们在期望上给出正确的（或接近正确的）颜色类大小。对于均衡着色（以及偏离均衡 $O(\sqrt{n})$的着色），取 $\vec{\lambda} = \vec{1}$（以便从均匀分布中抽样）就已足够。为了能够抽样与均衡具有线性偏差的着色，我们需要找到$\vec{\lambda}$ 使得 $\|\mathbb{E}_{\vec{\lambda}}[\vec{X}] - \vec{n}\|_\infty \le c\sqrt{n}$。这将使我们能够从对应于 λ 的吉布斯分布$\vec{}$中抽样着色，并利用局部中心极限定理证明拒绝采样是有效的。注意，我们所关心的概率分布仅在零点自由区域内有意义，因此仅仅找到适当的权重选择是不够的，还必须证明它们位于零点自由区域内。

为了求出 $\vec{\lambda}$，我们将零点自由区域离散化，使得 $\lambda_i = 1 + k_i \frac{1}{\sqrt{n}}$ 对于 ~~$i \in$~~ $[q-1]$，$k_i \in \{-\lfloor R\sqrt{n}\rfloor, \dots, \lfloor R\sqrt{n}\rfloor\}$（为简便起见，我们保留 $\lambda_q = 1$）。我们证明期望映射是$O(n)$-利普希茨的（第 4.1 小节），并且由于最优 $\vec{\lambda}$ 与某一候选$\vec{\lambda}'$ 之间的距离至多为 $\frac{1}{\sqrt{n}}$（在 l_2 中），每种颜色的期望之差至多为 $\sqrt{n}$。因此，$\vec{}$我们只需对每个候选 λ 运行拒绝采样，直到获得 $\vec{n}$ 着色。由于共有 $\Theta(n^{(q-1)/2})$ 个候选，运行时间为 $O\left(n^q \log(n)\log(\frac{1}{\varepsilon})^2\right)$。

为了弄清该技术能够采样哪些着色，我们证明期望映射（限制于某一超平面）在零点自由区域上是满射（小节 4.2），从而可以证明，该过程对任意满足 $\sum n_i = n$ 且 $\|\vec{n} - \frac{n}{q}\vec{1}\|_\infty \le cn$、且 c 足够小的着色都有效。

$\vec{}$我们还需要确保能够从对应于 λ的吉布斯分布中采样。这可以通过 Glauber 动力学在 $O(n \log n)$ 步内完成。我们证明 $q \ge 2\Delta + 1$的混合时间，方法是在小节4.3中使用标准路径耦合技术。

1.8. 组织结构

本文结构如下：第 2 节证明了着色模型的零点自由性结果；第 3 节证明了随机着色中颜色类大小向量的局部中心极限定理，并以拒绝采样算法的运行时间作为结尾；第 4 节展示$\vec{}$如何找到 λ，它们给出了正确的期望色类大小，并展示了在$\vec{}\lambda$ 零点自由区域内 Glauber 算法的运行时间。图 1 展示了证明的结构。注意，对于均衡着色采样，只需要图中的中间层。

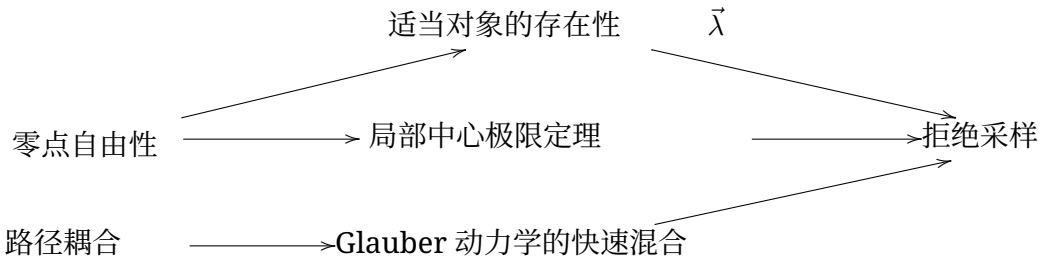


图 1. 证明概要

2. 零点自由性

2.1. 概述

回顾着色模型的配分函数和吉布斯测度：

$$Z_G(\lambda_1,\dots,\lambda_q) := \sum_{\substack{\sigma\in[q]^V\\ \sigma \text{ proper}}} \prod_{i=1}^{q} \lambda_i^{|\sigma^{-1}(i)|}, \qquad \mathbb{P}_{G,\vec{\lambda}}(\sigma) := \frac{\prod_{i=1}^{q}\lambda_i^{|\sigma^{-1}(i)|}}{Z_G(\lambda_1,\dots,\lambda_q)}$$

若要使其具有概率解释，我们需要 $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$，但我们仍可将配分函数视为复数上的多元多项式。

注记 2.1. 在 $\vec{\lambda}=\vec{1}:=(1,\dots,1)$ 处，配分函数计数所有正常的 q-着色。由于$q\geq 2\Delta$，正常的 q-着色总是存在，因此 $Z_G(\vec{1})\neq 0$。

本节的目的是证明，在 $\mathbb{C}^q$ 中存在一个球 B，其围绕 $\vec{1}$，使得 $\forall\vec{\lambda}\in B$，$Z_G(\lambda)\neq 0$。

此处的证明采用 Liu、Sinclair 和 Srivastava [23] 关于 Potts 模型的框架，其中构型的权重由该着色的单色边数目定义。

变量 ω 定义了单色边的“惩罚”。设 $m_G(\sigma)$ 为着色 σ 所引入的单色边数。Potts 模型的配分函数是对所有着色（包括不合法的着色）求和，其中着色的权重与$\omega^{m_G(\sigma)}$ 成正比。换言之，他们的 Potts 模型的配分函数为

$$Z_G(\omega) := \sum_{\sigma\in[q]^V} \omega^{m_G(\sigma)}$$

注意，配分函数是单变量的。在我们的情形中，配分函数是多变量的，因为每种颜色都有各自的权重，因此我们需要将证明中的若干关键要素推广到多变量情形。不过需要注意的是，我们的模型不允许出现单色边，因此这类边的惩罚为 $\omega=0$。

由于所有步骤都必须针对我们的模型进行调整，我们将给出详细的计算，并沿用 [23] 的结构和定义，方便熟悉相关内容的读者轻松辨别其中的差异。

2.2. 主要结果

在本节中，我们固定常数 $\nu=0.9$、$\varepsilon_R := 10^{-2}\Delta^{-2}$ 和 $\varepsilon_I := 10^{-4}\Delta^{-4}$。我们用 ln 表示对数的主值分支，它在 $\mathbb{C}\setminus(-\infty,\ 0]$ 上解析，并满足 $\arg(z) := \operatorname{Im}\ln\ z\in(-\pi,\ \pi)$。

我们通常会采用以下关于 $\lambda\in\mathbb{C}^q$ 的假设。

定义 2.2 （关于 $\vec{\lambda}$ 的假设）。若对于任意 $i,j\in[q]$，$\vec{\lambda}\in\mathbb{C}^q$ 均有效，则称 $\vec{\lambda}\in\mathbb{C}^q$ 有效：

（1） $\lambda_i\notin(-\infty,0]\subset\mathbb{R}$（2） $|$的辐角$(\lambda_i)|\leq\nu\varepsilon_I/2$（3） $|\ln\frac{\lambda_i}{\lambda_j}|\leq\Delta\varepsilon_I$ 的实部

我们记 $\lambda_{\min} := \min\{1,\min_{i\in[q]}|\lambda_i|\}$，以及 $\lambda_{\max} := \max\{1,\max_{i\in[q]}|\lambda_i|\}$。

注 2.3.请注意，假设 *1* 是必要的，这样假设 *2* 中的量才有定义；此时 $|\arg(\lambda_i/\lambda_j)|\leq\nu\varepsilon_I<\pi$，因此假设 *3* 也有定义。

我们将证明的主要结果如下：

定理 2.4 (围绕 $\vec{1}$的零点自由性)。设 $\Delta\geq 1$，$q\geq 2\Delta$，并设 G 是一个最大度为 Δ的图。假设 $\vec{\lambda}\in\mathbb{C}^q$ 满足定义 *2.2*中的有效性条件。那么，$Z_G(\vec{\lambda})\neq 0$。

定义 2.2 中的假设是通过$\vec{}$个分量与 λ之比的对数来表述的。这对于某些应用而言可能不太实用，但可以证明，任何$\vec{\lambda} \in \mathbb{C}^q$ 足够接近 $\vec{1}$ (例如，在 ℓ_∞ 距离下)的值都满足这些条件。

引理 2.5. 令 $R := \nu\varepsilon_I/4$。那么，任何满足 $\vec{\lambda} \in \mathbb{C}^q$ 的 $|\lambda_i - 1| \le R$ 对于每个 $i \in [q]$ 都是有效的，其含义见定义 *2.2*。

因此，我们可以从定理 2.4推导出以下推论：

推论 2.6 (零点自由半径)。 令 $\Delta \ge 1$、 $q \ge 2\Delta$，并设 G 是最大度为 Δ 的图。那么，对于任意 $\vec{\lambda} \in B_{\ell_\infty}(\vec{1}, R)$，其中 $R = \nu\varepsilon_I/4$，有 $Z_G(\vec{\lambda}) \neq 0$。

引理 *2.5*的证明。 令 $i \in [q]$。注意 $|\lambda_i - 1| \le R$ 意味着 $|$实部$\{\lambda_i - 1\}| \le R$，因此实部 $\lambda_i \ge 1 - R > 0$。

对于假设 3，注意到只需证明 $|$实部 $\ln\ \lambda_i| \le \Delta\varepsilon_I/2$ 对所有 $i \in [q]$成立。根据关于 $\vec{\lambda}$的假设，我们有 $1 - R \le |\lambda_i| \le 1 + R$，因此

$$\operatorname{Re}\ln\lambda_i = \ln|\lambda_i| \le \ln(1+R) \le R \le \frac{\nu\varepsilon_I}{4} < \frac{\Delta\varepsilon_I}{2}$$

另一方面，

$$\operatorname{Re}\ln\lambda_i \ge \ln(1-R) \ge -2R > -\frac{\Delta\varepsilon_I}{2}$$

这里用到了对 $0 \le x \le 1/2$ 有 $\ln(1-x) \ge -2x$，这一点通过比较导数很容易看出。

对于假设 2，由于区域 $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \le c\}$ 关于实轴对称，因此不失一般性，可假设 辐角(λ_i) $\in [0, \pi]$。于是，

$$\tan(\arg(\lambda_i)) \le \frac{R}{1-R} \le 2R$$

这里用到了 $R < 1/2$。最后，由于反正切 x 在 x 上单调递增，且对所有$x \ge 0$都有 $x \ge$ 反正切 $x \ge 0$，我们得出

$$\arg(\lambda_i) \le \arctan 2R \le 2R \le \frac{\nu\varepsilon_I}{2}.$$

■

注 2.7。 定理 *2.4*证明中使用的常数并未经过特别优化，因此零点自由半径还有改进的空间。

注 2.8. 根据 推论 *2.6*， $Z_G(\vec{\lambda})$ 在单连通区域$B = B_{\ell_\infty}(\vec{1},\ R) \subseteq \mathbb{C}^q$内无零。因此，存在一个对数分支，使得 对数 $Z_G(\vec{\lambda})$ 在 $\vec{\lambda} \in B$ (即一个解析函数 $f : B \longrightarrow \mathbb{C}$ 满足 $e^{f(\vec{\lambda})} = Z_G(\vec{\lambda})$) 上定义良好且解析。本节的证明中，我们总是可以取对数的主值分支，但下一节的结果则并非如此。

归纳证明不仅表明 $Z_G(\vec{\lambda}) \neq 0$，而且实际上还给出了其范数的一个下界（尽管它随 n 指数级衰减，但之后在界定 $|\log\ Z_G(\vec{\lambda})|$时会派上用场）。

推论 2.9。 设 $\Delta \ge 1$， $q \ge 2\Delta$，并设 G 是一个图，具有 n 个顶点，最大度为 Δ。$\vec{}$设 $\lambda \in \mathbb{C}^q$ 根据定义 *2.2* 是有效的。那么，

$$\left|Z_G(\vec{\lambda})\right| \ge 0.99^n \left(\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}\right)^{n\Delta},$$

其中 $\lambda_{min} := \min\{1, \min_{i\in[q]} |\lambda_i|\}$ 且 $\lambda_{max} := \max\{1, \max_{i\in[q]} |\lambda_i|\}$。

2.3. 部分着色与递归结构

我们将证明 定理 2.4 在一个稍强的假设下；图的某些顶点可能已经被“已固定”为一种颜色。这将使我们能够对图的未固定顶点的数目使用归纳法。我们将通过如下定义来形式化这一想法：

定义 2.10（部分-q-着色图）。设 $q \geq 1$。部分-q-着色图 (G, τ) 是一个图 G，并附带一个部分 q-着色 $\tau\colon V(G) \longrightarrow [q] \cup \{*\}$。部分着色必须是适当的，即对每条边 $uv \in E(G)$，必须满足 $\tau(u) \neq \tau(v)$ 或 $\tau(u) = \tau(v) = *$。满足 $\tau(v) = *$ 的顶点 $v \in V(G)$ 称为未固定。满足 $\tau(v) = c \in [q]$ 的顶点称为固定为颜色 c。此外，我们要求对所有已固定的 v，$\deg_G(v) = 1$。

注 2.11. 我们可以将模型扩展到部分着色图 (G, τ)，方法是将配分函数限制为仅对与已固定顶点上的 τ 一致的着色求和。也就是说，我们定义

$$Z_{G,\tau}(\vec{\lambda}) := \sum_{\substack{\sigma \in [q]^{V(G)} \\ \sigma(v)=\tau(v) \text{ for pinned } v}} \prod_{v \in V(G)} \lambda_{\sigma(v)}$$

我们用 $\mathcal{C}_{G,\tau}$ 表示与固定顶点上的 τ 一致的 G 的合法 q-着色集合。

我们还将引入以下操作：它将一个部分q-着色的图 (G, τ)˜ 转换为另一个部分q-着色的图 $(G, \tilde{\tau})$，后者的未固定顶点少一个：

定义 2.12（固定操作）。设 v 是 (G, τ) 中一个度为 d 的顶点。将顶点 $\sim v$ 固定为颜色 c，是指构造一个新图 G，其中用 d 个副本 $v_1, \ldots, v_d$ 替换顶点 v（每个副本分别与 v 的一个不同邻点相连），并为其赋予一个部分着色 $\tilde{\tau}$，定义如下：对于所有 $i \in [d]$，$\tilde{\tau}(v_i) = c$；对于所有其他的 $\sim w \in V(G) \setminus \{v_1, \ldots, v_d\}$，$\tilde{\tau}(w) = \tau(w) \setminus \{v\}$。

注记 2.13. 注意，应用前一个操作后，新固定的顶点的度都为 *1*，这符合部分着色图的定义。

由于我们使用的模型只允许合法着色，因此我们绝不会想要将某个顶点固定为其邻域中已经出现的颜色。因此，按照[23], 中的记号，我们将颜色（对于给定顶点）分为好 颜色和坏 颜色：

定义 2.14（好颜色、坏颜色）。 $c \in [q]$ 是顶点 v 的好颜色，当且仅当它不同于 v 的邻居所固定的所有颜色。否则，它称为坏颜色。顶点 v 的好颜色集合记为 Γ_v，坏颜色集合记为 B_v。

只要上下文清楚表明我们指的是一个部分着色图，且其底层部分着色 τ没有歧义，我们就将(G, τ)记作 G，尽管这存在记号滥用。对于 Z_G（代替$Z_{G,\tau}$）以及$\mathcal{C}_G$（代替$\mathcal{C}_{G,\tau}$），也采用同样的记法。

接下来，我们将通过顶点数较少的未固定图，递归地建立表述零点自由问题所需的定义。

定义 2.15（受限配分函数、边缘伪概率、边缘比率）。 设$\sim G$ 是一个部分已q着色的图。设 λ 是一个形式变量向量。对于给定的未固定顶点$v \in V(G)$和一种颜色 $i \in [q]$，我们定义

$$Z^{(i)}_{G,v}(\vec{\lambda}) := \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{C}_G \\ \sigma(v)=i}} \prod_{v \in V(G)} \lambda_{\sigma(v)}$$

其对应于 限制到 v 具有某种颜色的着色所对应的配分函数 i.

设 $\Delta \geq 1$ 为图 G 的最大度，并假设 $q \geq \Delta + 1$。那么，我们定义边缘伪概率

$$\mathcal{P}_{G,\vec{\lambda}}[\sigma(v) = i] := \frac{Z^{(i)}_{G,v}(\vec{\lambda})}{Z_G(\vec{\lambda})}$$

并且，给定另一种颜色 $j \in \Gamma_v$，我们定义边缘比率

$$R^{(i,j)}_{G,v} := \frac{Z^{(i)}_{G,v}(\vec{\lambda})}{Z^{(j)}_{G,v}(\vec{\lambda})}.$$

注 2.16. 以上所有表达式都应理解为形式变量向量 $\vec{\lambda}$ 的多项式之商。注意，在这种解释下，对于任意 $i \in B_v$，$Z^{(i)}_{G\,v,}(\vec{\lambda}) = 0$。另一方面，如果 $i \in \Gamma_v$ 且 $q \geq \Delta + 1$，我们知道至少存在一种与当前部分着色一致的G 正常着色，因此 $Z^{(i)}_{G\,v,}(\vec{\lambda}) \neq 0$（并且，根据同样的推理，$Z_G(\vec{\lambda}) \neq 0$）。因此，边缘伪概率和边缘比率都是良定义的。不过，将形式$\vec{}$变量替换为特定值 $\lambda \in \mathbb{C}^q$ 后，仍有可能出现 $Z^{(i)}_{G\,v,}(\vec{\lambda}) = 0$ 和/或 $Z_G(\vec{\lambda}) = 0$。

注释 2.17。边缘伪概率的名称和记号源于这样一个事实：对于实数正值 λ，在我们的模型下，这是 v 具有颜色 i 的边缘概率。然而请注意，对于一般的 $\lambda \in \mathbb{C}^q$，该量并没有直接的概率意义。

我们希望将 $R^{(i,j)}_{G\,v,}(\vec{\lambda})$ 与一个未固定顶点数少于 G 的图的配分函数联系起来。分子 $Z^{(i)}_{G\,v,}(\vec{\lambda})$ 可以与将顶点 v 固定为颜色 i 后得到的图联系起来；而分母 $Z^{(j)}_{G\,v,}(\vec{\lambda})$ 则可以与将顶点 v 固定为颜色 j 后得到的图联系起来。接下来，我们定义一列图，以便在这两种情形之间进行插值。

定义 2.18（图 $G^{(i,j)}_k$）。给定一个部分着色图 G、一个度为 d 的未固定顶点 v，以及 v 的邻居的一个排序（记作 $w_1, \ldots, w_d$），对于每个 $k \in [d]$ 以及每个 $i, j \in \Gamma_v$，我们定义部分着色图 $G^{(i,j)}_k$：它由 G 得到，方法是将 v 替换为 d 个副本 $v_1, \ldots, v_d$，将每个 v_ℓ 连接到 w_ℓ，把顶点 $v_1, \ldots, v_{k-1}$ 固定为颜色 i，把顶点$v_{k+1}, \ldots, v_d$ 固定为颜色 j，并删除 v_k。

由此可以推导出一个递推关系，用每个 $G^{(i,j)}_k$ 中的边缘伪概率来表示 G 中的比值。

引理 2.19 递推关系。设顶点 w_1、…、$w_{\deg_G(v)}$ 是图 G中顶点 v 的邻居。那么，

$$R^{(i,j)}_{G,v}(\vec{\lambda}) = \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \prod_{k=1}^{\deg_G(v)} \frac{1 - \mathcal{P}_{G^{(i,j)}_k,\vec{\lambda}}[\sigma(w_k) = i]}{1 - \mathcal{P}_{G^{(i,j)}_k,\vec{\lambda}}[\sigma(w_k) = j]}$$

$\vec{}$**注 2.20**。递推关系在将 λ 视为形式$\vec{}$变量向量时成立。只要所有项都良定义，将特定的 $\lambda \in \mathbb{C}^q$代入后，递推关系也成立，即

- $Z(j)_{G,v}(\vec{\lambda}) \neq 0$,
- $Z_{G^{(i,\ j)\ k}}(\lambda) \neq 0$，并且
- $P_{G(i,\ j)\ k\ ,\ \vec{\lambda}}[\sigma(w_k) = j] \neq 1$ 对所有 $k \in [\deg_G(v)]$均成立。

证明。我们先定义一个辅助图 $H^{(i,j)}_k$，它与 $G^{(i,j)}_k$ 类似，但其中 v_k 被固定为颜色 i，而非被删除。

定义 2.21（图 $H_k^{(i,j)}$）。给定一个部分着色图 G、一个度为 d 的未固定顶点 v，以及 v 的邻居的一个排序 $w_1,\dots,w_d$，我们通过将顶点 v 替换为 d 个副本 $v_1,\dots,v_d$ 来定义图 $H_k^{(i,j)}$：将每个 v_ℓ 连接到 w_ℓ，将顶点 $v_1,\dots,v_k$ 固定为颜色 i，并将顶点 $v_{k+1},\dots,v_d$ 固定为颜色 j。

注意，$H_0^{(i,j)}$ 和 $H_d^{(i,j)}$ 对应于边界情形：所有 v 的副本分别都被赋予 j颜色，或都被赋予 i颜色。因此，$Z_{H_d^{(i,j)}}(\vec{\lambda}) = \lambda_i^{d-1} Z_{G\,u}^{(i)}(\vec{\lambda})$ 且 $Z_{H_0^{(i,j)}}(\vec{\lambda}) = \lambda_j^{d-1} Z_{G\,u}^{(j)}(\vec{\lambda})$。因此，我们可以将边缘比率写作

$$R_{G,u}^{(i,j)}(\vec{\lambda}) = \frac{Z_{G,u}^{(i)}(\vec{\lambda})}{Z_{G,u}^{(j)}(\vec{\lambda})} = \frac{\lambda_j^{d-1}}{\lambda_i^{d-1}} \frac{Z_{H_d^{(i,j)}}(\vec{\lambda})}{Z_{H_0^{(i,j)}}(\vec{\lambda})} = \frac{\lambda_j^{d-1}}{\lambda_i^{d-1}} \prod_{k=1}^{d} \frac{Z_{H_k^{(i,j)}}(\vec{\lambda})}{Z_{H_{k-1}^{(i,j)}}(\vec{\lambda})}$$

$H_k^{(i,j)}$ 的合法着色与满足$\sigma(w_k) \neq i$的 $G_k^{(i,j)}$ 的合法着色之间存在一一对应。因此，

$$Z_{H_k^{(i,j)}}(\vec{\lambda}) = \lambda_i (Z_{G_k^{(i,j)}}(\vec{\lambda}) - Z^{(i)}_{G_k^{(i,j)},w_k}(\vec{\lambda}))$$

同理，

$$Z_{H_{k-1}^{(i,j)}}(\vec{\lambda}) = \lambda_j (Z_{G_k^{(i,j)}}(\vec{\lambda}) - Z^{(j)}_{G_k^{(i,j)},w_k}(\vec{\lambda})).$$

因此，

$$R_{G,u}^{(i,j)}(\vec{\lambda}) = \frac{\lambda_j^{d-1}}{\lambda_i^{d-1}} \frac{\lambda_i^d}{\lambda_j^d} \prod_{k=1}^{d} \frac{Z_{G_k^{(i,j)}}(\vec{\lambda}) - Z^{(i)}_{G_k^{(i,j)},w_k}(\vec{\lambda})}{Z_{G_k^{(i,j)}}(\vec{\lambda}) - Z^{(j)}_{G_k^{(i,j)},w_k}(\vec{\lambda})} = \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \prod_{k=1}^{d} \frac{1 - P_{G_k^{(i,j)},\vec{\lambda}}[\sigma(w_k) = i]}{1 - P_{G_k^{(i,j)},\vec{\lambda}}[\sigma(w_k) = j]}.$$

■

2.4. 复分析工具

在本小节中，我们将介绍证明所需的复分析工具。前三个引理来自 [23], ，而后三个则是对 [23]中隐含使用的简单事实的推广。

设 D 是 $\mathbb{C}$ 中具有以下性质的一个区域：

- 对于任意 $z \in D$，$\mathrm{Re}(z) \in D$。
- 对于任意 z_1，$z_2 \in D$，存在一点 $z_0 \in D$，使得数 $z_1 - z_0$，$z_2 - z_0$ 中一个的实部为零，而另一个的虚部为零。
- 若 z_1，$z_2 \in D$ 满足 $\mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)$ 或 $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$，则线段$[z_1, z_2]$ 位于 D 中。

正如 Liu、Sinclair 和 Srivastava 所指出的，[23], 关于实轴对称的矩形区域将满足上述所有性质。

引理 2.22（复函数中值定理——摘自 [23]）。设 f 是上述区域 D 上的全纯函数，且对于 $z \in D$，$\mathrm{Im}(f(z))$ 与$\mathrm{Im}(z)$符号相同。进一步假设存在正常数 ρ_I 和 ρ_R，使得

- 对于所有 $z \in D$, $|$虚部$(f\prime(z))| \leq \rho_I$;
- 对于所有 $z \in D$, 实部$(f\prime(z)) \in [0, \rho_R]$.

则对任意 z_1、$z_2 \in D$，存在 $C_{z_1,\,z_2} \in [0, \rho_R]$ 使得

$$|\,\mathrm{Re}(f(z_1) - f(z_2)) - C_{z_1,z_2} \cdot \mathrm{Re}(z_1 - z_2)| \leq \rho_I \cdot |\,\mathrm{Im}(z_1 - z_2)|,$$

并且进一步，

$$|\operatorname{Im}(f(z_1)-f(z_2))| \le \rho_R \cdot \begin{cases} |\operatorname{Im}(z_1-z_2)|, & \text{when } \operatorname{Im}(z_1)\cdot\operatorname{Im}(z_2)\le 0; \\ \max\{|\operatorname{Im}(z_1)|,|\operatorname{Im}(z_2)|\}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

下一个引理的第一点用于证明函数

$$f(x) := -\ln(1-e^x) \tag{1}$$

满足前一个引理的条件。

引理 2.23 (引理 3.6，出自 [23])。考虑由 D 给出的区域

$$D = \{z \mid \operatorname{Re}(z) \in (-\infty,-\zeta) \text{ and } |\operatorname{Im}(z)| < \tau\},$$

其中 $\tau < 1/2$ 和 ζ 是满足 $\tau^2 + e^{-\zeta} < 1$ 的正实数，函数 f 在式 (1) 中定义。这些满足引理 2.22 的假设，只要定理陈述中的 ρ_R 和 ρ_I 分别取为 $\frac{e^{-\zeta}}{1-e^{-\zeta}}$ 和 $\frac{\tau e^{-\zeta}}{(1-e^{-\zeta})^2}$，即可。

下一个引理提供了一种对复数之和进行下界估计的方法，前提是我们知道它们之间的角度足够小。

引理 2.24 (引理 3.7，出自 [23])。设 z_1、z_2、……、z_n 是复数，且任意两个非零 z_i 之间的角度至多为 $\alpha \in [0,\pi/2)$。则 $|\sum_{i=1}^n z_i| \ge \cos(\alpha/2)\sum_{i=1}^n |z_i|$。

证明中的一个重要部分需要从关于 z 的界推导出关于 e^z 的界，反之亦然。以下两个引理将提供所需结果。

引理 2.25. 设 r、$\theta \in \mathbb{R}$ 满足 $|\theta| \le \theta_0 < \pi$ 和 $|r| \le r_0$，其中 r_0、$\theta_0 \in \mathbb{R}^{\ge 0}$ 为某些常数。设 $z := r + i\theta$。那么，$|\text{辐角}(e^z)| \le \theta_0$，且 $e^{-r_0} - \theta_0^2/2 \le \text{实部}(e^z) \le e^{r_0}$。此外，若 $\theta_0 \le \ln 2 \cong 0.693$，则还有 $e^{-r_0-\theta_0^2} \le \text{实部}(e^z)$。

证明。显然，$\arg(e^z) = \arg(e^{i\theta}) = \theta$。因此，$|\arg(e^z)| \le \theta_0$。对于实部，注意到 $\operatorname{Re}(e^z) = e^r \cos\theta \le e^{r_0}$。此外，对所有 $x \in \mathbb{R}$，$\cos x \ge 1 - x^2/2$（可通过比较一阶和二阶导数得出），因此 $\operatorname{Re}(e^z) \ge e^r(1-\theta^2/2) \ge e^{-r_0}(1-\theta^2/2) \ge e^{-r_0} - \theta_0^2/2$。

当 $0 \le \theta_0 \le \ln 2$ 时，我们有 $1 - \theta^2/2 \ge e^{-\theta^2}$（同样，由一阶导数的简单比较可得），因此得到 $\operatorname{Re}(e^z) \ge e^{-r_0}(1-\theta_0^2/2) \ge e^{-r_0-\theta_0^2}$ 的额外下界。■

引理 2.26。设 $z \in \mathbb{C}$ 满足 $\operatorname{Re}(z) \ne 0$ 且 $|\arg(z)| \le \theta \le 0.1$。则，$\ln(\operatorname{Re}(z)) \le \operatorname{Re}(\ln(z)) \le \ln(\operatorname{Re}(z)) + \theta^2$ 且 $|\operatorname{Im}(\ln(z))| \le \theta$。

证明。第二个结论显然，因为 $\operatorname{Im}(\ln(z)) = \arg(z)$。对于第一个结论，注意到 $\operatorname{Re}(\ln(z)) = \ln(|z|)$，因此

$$\ln(\operatorname{Re}(z)) = \ln\left(|z|\cos(\arg(z))\right) = \operatorname{Re}(\ln(z)) + \ln\left(\cos(\arg(z))\right) \le \operatorname{Re}(\ln(z)),$$ 并且

$$\ln(\text{实部}(z)) = \text{实部}(\ln(z)) + \ln\left(\cos(\text{辐角}(z))\right) \ge \text{实部}(\ln(z)) + \ln(\cos(\theta)) \ge \text{实部}(\ln(z)) + \ln\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)$$

$$\ge \operatorname{Re}(\ln(z)) - \frac{\theta^2/2}{1-\theta^2/2} \ge \operatorname{Re}(\ln(z)) - \theta^2$$

其中我们用到了 $\theta < 1$，$\ln(1+x) \ge x/(1+x)$ 对于 $x > -1$，以及 $\cos(x) \ge 1 - x^2/2$ 对所有 $x \in \mathbb{R}$ 都成立。■

最后，得到一个与引理 2.24 类似的结果。

引理 2.27. 设 $z_1, \ldots, z_k \ne 0$ 是复数，使得对于所有 $i \in [k]$ 和某个 $\theta < \pi/2$，$|\text{辐角}(z_i)| \le \theta$。那么，$\sum_{i=1}^k z_i \ne 0$ 且 $\left|\text{辐角}\left(\sum_{i=1}^k z_i\right)\right| \le \theta$。

证明。 辐角条件意味着对于所有 $i \in [k]$，$\operatorname{Re}\ z_i > 0$。令 $m := \max_{i\in[k]} |\operatorname{Im}\ z_i| / \operatorname{Re}\ z_i$。那么，

$$\left|\arg\left(\sum_{i=1}^{k} z_i\right)\right| = \left|\arctan\left(\frac{\sum_{i\in[k]} \operatorname{Im} z_i}{\sum_{i\in[k]} \operatorname{Re} z_i}\right)\right| \le \arctan\left(\frac{\sum_{i\in[k]} |\operatorname{Im} z_i|}{\sum_{i\in[k]} \operatorname{Re} z_i}\right) \le \arctan\left(\frac{\sum_{i\in[k]} m \operatorname{Re} z_i}{\sum_{i\in[k]} \operatorname{Re} z_i}\right)$$
$$= \arctan m \le \theta$$

其中我们用到了反正切$(-x) =$ 反正切(x)，并且它在 $x \ge 0$ 上是递增函数。■

2.5. 归纳假设

证明 定理 2.4 的无零点性结果的主要思路是选取一个顶点 u，并将配分函数改写为以下各项之和：$Z^{(i)}_{G\,u}(\vec{\lambda})$ 对所有 $i \in \Gamma_u$。如果我们能够证明这些项之间的角度很小，那么只要其中一项非零，整个和就非零（见 引理 2.24）。

$Z^{(i)}_{G\,u,}(\vec{\lambda})$ 的无零点性，以及角度很小这一事实，都是通过对图中未固定顶点的数量进行归纳证明的。对于前者，我们只需利用 $Z^{(i)}_{G\,u,}(\vec{\lambda}) = \lambda_i^{\deg(u)-1} Z_{\tilde{G}}(\vec{\lambda})$，其中 $\tilde{G}$ 是将顶点 u 固定为颜色 i 后得到的图。对于后者，我们需要界定比值 $R^{(i,j)}_{G\,u\,,}$ 的辐角。为此，我们使用引理 2.19，其中我们推导出了一个递归公式，用某些图 $G^{(i,j)}_k$ 的边缘伪概率来表示 $R^{(i,j)}_{G\,u\,,}$；这些图的未固定顶点数量都比 G 少一个。

以下内容以下引理概述了构成我们的归纳假设的陈述 s.

引理 2.28。 设 G 是一个部分q着色的图，最大度为 $\Delta \ge 1$，且 $q \ge 2\Delta$。设u 是 G的一个未固定顶点。则对于一个有效的 $\lambda \in \mathbb{C}^q$（其含义见定义 2.2），

(1) 对所有 $i \in \Gamma_u$，

$$\left|Z^{(i)}_{G,u}(\vec{\lambda})\right| \ge 0.99^{\ell-1} \frac{\lambda_{min}^{n+\ell(\Delta-1)}}{\lambda_{max}^{\ell\Delta}} > 0,$$

其中 ℓ 表示未固定顶点的数量，n 表示 G的顶点总数。

(2) 对于 i、$j \in \Gamma_u$，如果 u 的所有邻居均已固定，则 $R^{(i,j)}_{G\,u\,,}(\vec{\lambda}) = \lambda_i/\lambda_j$。

(3) 对于 $i, j \in \Gamma_u$, $R^{(i,j)}_{G\,,u}(\vec{\lambda}) \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$。

(4) 对于 $i, j \in \Gamma_u$，如果 u 有 d_u 个未固定邻居，则

$$\left|\operatorname{Re}(\ln R^{(i,j)}_{G,u}(\vec{\lambda})) - \ln R^{(i,j)}_{G,u}(\vec{1})\right| \le d_u\varepsilon_R + \left|\operatorname{Re} \ln \frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right|.$$

(5) 对于 $i, j \in \Gamma_u$，如果 u 有 d_u 个未固定邻居，则

$$\left|\operatorname{Im}(\ln R^{(i,j)}_{G,u}(\vec{\lambda}))\right| \le d_u\varepsilon_I + \left|\operatorname{Im} \ln \frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right|.$$

(6) 对于 $i \notin \Gamma_u, j \in \Gamma_u$，我们有 $R^{(i,j)}_{G\,u\,,}(\vec{\lambda}) = 0$。

注 2.29。由于对 λ_i/λ_j 的假设，其对数是良定义的 $\vec{\lambda}$，而比值$R^{(i,j)}_{G\,u\,,}(\vec{\lambda})$ 根据第 *1* 项是良定义的。根据第 $R^{(i,j)}_{G\,u\,,}(\vec{\lambda})$ 项，我们可以取其对数*3*。

注记 2.30。 注意，$Z^{(i)}_{G\,u,}(\vec{1})$ 计算 G 中具有 $\sigma(u) = i$ 的着色数目。对于$i \in \Gamma_u$和 $q \ge \Delta + 1$，该数目非零，因此 $R^{(i,j)}_{G\,u\,,}(\vec{1})$ 是正实数的商，从而$\ln R^{(i,j)}_{G\,,u} \in \mathbb{R}$。

最　　完整配分函数的 o-freeness 容易得出，一旦 引理 2.28得到证明　　d:

推论 2.31。设 G 是一个部分-q-着色的图，其最大度为 $\Delta \geq 1$，且 $q \geq 2\Delta$。设 u 是 G 的一个未固定顶点。则，

$$|Z_G(\vec{\lambda})| \geq 0.99 \min_{i \in \Gamma_u} \left\{ |Z^{(i)}_{G,u}(\vec{\lambda})| \right\} > 0.99^{\ell} \frac{\lambda_{min}^{n+\ell(\Delta-1)}}{\lambda_{max}^{\ell\Delta}} > 0,$$

其中，ℓ 是未固定顶点的数量，而 n 是 G 的顶点总数。

证明。注意到 $Z^{(i)}_{G\,u'}(\vec{\lambda}) = 0$ 对于 $i \in B_u$。因此，$Z_G(\vec{\lambda}) = \sum_{i \in \Gamma_u} Z^{(i)}_{G\,u'}(\vec{\lambda})$。由于 虚部(ln z) =辐角(z)，根据 5中的 引理 2.28，我们知道这些项之间的角度至多为

$$\left| \arg\left(R^{(i,j)}_{G,u}(\vec{\lambda}) \right) \right| \leq \Delta\varepsilon_I + \left| \operatorname{Im} \ln \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \right| \leq (\Delta + \nu)\varepsilon_I$$

其中还使用了 2 中的假设，该假设来自 定义 2.2。结合 引理 2.24 以及以下事实$(\Delta + \nu)$ $\varepsilon_I/2 \leq \Delta\varepsilon_I \leq 10^{-4} \leq \arccos 0。99$，我们得到

$$\left| \sum_{i \in \Gamma_u} Z^{(i)}_{G,u}(\vec{\lambda}) \right| \geq \cos\left((\Delta + \nu)\varepsilon_I/2\right) \sum_{i \in \Gamma_u} \left| Z^{(i)}_{G,u}(\vec{\lambda}) \right| \geq 0.99 \min_{i \in \Gamma_u} \left| Z^{(i)}_{G,u}(\vec{\lambda}) \right|$$

于是，根据1中的引理 2.28，即可得到结果。 ■

前一个推论指出，对于任意部分着色图，其配分函数都无零。因此，我们的主定理是部分着色为“空”的特殊情形：

定理 *2.4* 的证明。设 G 是一个最大度为 $\Delta \geq 1$的图，且 $q \geq 2\Delta$。根据定义，$Z_G(\vec{\lambda}) = Z_{G,\,\tau}(\vec{\lambda})$，其中 $(G,\ \tau)$ 是部分着色图，并且对所有 $v \in V(G)$，$\tau(v) = *$。利用推论 2.31，$Z_{G,\,\tau}(\vec{\lambda}) \neq 0$，由此即可得出所需结论。■

推论 2.9 可通过在 $\ell = n$ 中取推论 2.31类似地得到，因为所有顶点均未固定。注意，推论 2.31 不仅用于最终得出零点自由性的结论，而且还会在归纳的每一步中使用。

2.6. 归纳假设的推论

本节余下部分将介绍 引理 2.28 的归纳证明。首先，我们将证明 引理 2.28 的一系列推论，这些推论将用于完成归纳步骤。以下我们始终假设 G 是一个最大度为 $\Delta \geq 1$ 的部分着色图，且引理 2.28 成立；还假设 $q \geq 2\Delta$，并且 u 是 G 的一个未固定顶点，具有 d_u 个未固定邻居，$\vec{}$以及 $\lambda \in \mathbb{C}^q$ 是有效的，其含义见 定义 2.2。

引理 2.32。对于任意 $i \in \Gamma_u$，

- $\mathcal{P}_{G,\vec{1}}[\sigma(u) = i] \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *and*
- $\mathcal{P}_{G,\vec{\lambda}}[\sigma(u) = i] \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

证明。注意，由于推论 2.31，两个伪概率都是良定义的（对于 G，我们知道该推论成立，因为我们假设引理 2.28 成立）。注意，$\mathcal{P}_{G,\vec{1}}[\sigma(u) = i] \in \mathbb{R}$ 表示其中 $\sigma(u) = i$的着色所占的比例；对于 $i \in \Gamma_u$ 和 $q \geq \Delta + 1$，该比例不可能为零。

对于第二个条件，首先我们注意到 $\mathcal{P}_{G,\,\vec{\lambda}}[\sigma(u) = i] \neq 0$，这是引理 1 的引理 2.28的结论；然后我们注意到可以将其改写为

$$\frac{1}{P_{G,\vec{\lambda}}[\sigma(u) = i]} = \sum_{j \in \Gamma_u} R^{(j,i)}_{G,u}(\vec{\lambda}),$$

其中我们用到了 $\sum_{j\in\Gamma_u}\mathcal{P}_{G,\vec{\lambda}}[\sigma(u)=j]=1$。

引理 5 的第 引理 2.28 项以及 2 的第 定义 2.2项，$\left|\text{辐角}(R^{(j,i)}_{G,u},(\vec{\lambda}))\right|\le(d_u+\nu)\varepsilon_I$ 对所有 $j\in\Gamma_u$均成立。因此，引理 2.27 给出

$$\arg\left(\frac{1}{\mathcal{P}_{G,\vec{\lambda}}[\sigma(u)=i]}\right)\le(d_u+\nu)\varepsilon_I\le 2\Delta\varepsilon_I\le 0.0002<\pi$$

因此 $\mathcal{P}_{G,\vec{\lambda}}[\sigma(u)=i]\notin(-\infty,0)$。 ■

引理 2.33。对于任意 $i,\ j\in\Gamma_u$,

$$e^{-(d_u+0.05)\varepsilon_R}\le\frac{\operatorname{Re}R^{(i,j)}_{G,u}(\vec{\lambda})}{R^{(i,j)}_{G,u}(\vec{1})}\le e^{(d_u+0.05)\varepsilon_R}$$

证明。令 $r_0:=d_u\varepsilon_R+\Delta\varepsilon_I$ 以及 $\theta_0:=(d_u+\nu)\varepsilon_I$。考虑 $z:=\ln\left(R^{(i,j)}_{G,u}(\vec{\lambda})/R^{(i,j)}_{G,u},(\vec{1})\right)$。引理 4和 5 的 引理 2.28 项意味着

$$|\operatorname{Im}(z)|=\left|\operatorname{Im}\ln R^{(i,j)}_{G,u}(\vec{\lambda})\right|\le d_u\varepsilon_I+\left|\operatorname{Im}\ln\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right|\le\theta_0,$$

and

$$|\operatorname{Re}z|=\left|\operatorname{Re}\ln R^{(i,j)}_{G,u}(\vec{\lambda})-\ln R^{(i,j)}_{G,u}(\vec{1})\right|\le d_u\varepsilon_R+\left|\operatorname{Re}\ln\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right|\le r_0,$$

其中，在两种情况下，最后一个不等式都用到了关于 λ 的假设，这些假设来自 定义 2.2 。注意到 $\theta_0\le(\Delta+1)\varepsilon_I\le 2\Delta\varepsilon_I\le 0.0002$，因此 引理 2.25 给出

$$e^{-r_0-\theta_0^2}\le\frac{\operatorname{Re}R^{(i,j)}_{G,u}(\vec{\lambda})}{R^{(i,j)}_{G,u}(\vec{1})}\le e^{r_0}.$$

只需证明两边的指数都小于 $(d_u+0.05)\varepsilon_R$，这可由下式推出

$$r_0+\theta_0^2\le d_u\varepsilon_R+\Delta\varepsilon_I+(d_u+\nu)^2\varepsilon_I^2\le d_u\varepsilon_R+5\Delta^2\varepsilon_I\le(d_u+0.05)\varepsilon_R.$$

■

引理 2.3 **4.** *[伪概率到实概率的近似]* 对于任意 $i\in\Gamma_u$,

$$\left|\operatorname{Im}\left(\ln\frac{\mathcal{P}_{G,\vec{\lambda}}[\sigma(u)=i]}{\mathcal{P}_{G,\vec{1}}[\sigma(u)=i]}\right)\right|\le(d_u+\nu)\varepsilon_I$$

and

$$\left|\operatorname{Re}\left(\ln\frac{\mathcal{P}_{G,\vec{\lambda}}[\sigma(u)=i]}{\mathcal{P}_{G,\vec{1}}[\sigma(u)=i]}\right)\right|\le(d_u+0.1)\varepsilon_R.$$

证明。伪概率之比的对数是良定义的，这一点由引理 2.32可知。使用该引理证明中的相同技巧，对于任意 $j\in\Gamma_u$ 我们可以写成

$$\frac{P_{G,\vec{1}}[\sigma(u)=j]}{P_{G,\vec{\lambda}}[\sigma(u)=j]}=\sum_{i\in\Gamma(u)}\mathcal{P}_{G,\vec{1}}[\sigma(u)=j]R^{(i,j)}_{G,u}(\vec{\lambda})=\sum_{i\in\Gamma_u}\mathcal{P}_{G,\vec{1}}[\sigma(u)=i]\frac{R^{(i,j)}_{G,u}(\vec{\lambda})}{R^{(i,j)}_{G,u}(\vec{1})}\tag{2}$$

令 $\xi_{i,\ j}=R^{(i,j)}_{G,u},(\vec{\lambda})/R^{(i,j)}_{G,u},(\vec{1})$。利用引理 2.33、引理 2.28 的第5 项以及定义 2.2中的假设，我们可以对每个$\xi_{i,\ j}$的实部和辐角进行界定：

$$|\arg(\xi_{i,j})|=\left|\operatorname{Im}\ln R^{(i,j)}_{G,u}(\vec{\lambda})\right|\le(d_u+\nu)\varepsilon_I,\quad\text{and}$$
$$e^{-(d_u+0.05)\varepsilon_R}\le\operatorname{Re}\xi_{i,j}\le e^{(d_u+0.05)\varepsilon_R}$$

注意，等式 (2) 右侧的表达式是 $\xi_{i,\,j}$的凸组合。因此，对 实部$\xi_{i,\,j}$ 的界可转化为等式 (2) 左侧实部的界；辐角的界也同样如此（根据引理 2.27）。总而言之，我们得到如下结果：

$$\left|\arg\left(\frac{P_{G,\vec{1}}[\sigma(u)=j]}{P_{G,\vec{\lambda}}[\sigma(u)=j]}\right)\right| \le (d_u+\nu)\varepsilon_I, \quad \text{and} \tag{3}$$

$$e^{-(d_u+0.05)\varepsilon_R} \le \operatorname{Re}\left(\frac{P_{G,\vec{1}}[\sigma(u)=j]}{P_{G,\vec{\lambda}}[\sigma(u)=j]}\right) \le e^{(d_u+0.05)\varepsilon_R} \tag{4}$$

注意到 $\operatorname{Im}\ln z = \arg(z)$，式 (3) 正是我们想要证明的结论。为了在式 (4) 中重新引入对数，我们使用引理 2.26。由此得到上界

$$\operatorname{Re}\ln\left(\frac{P_{G,\vec{1}}[\sigma(u)=j]}{P_{G,\vec{\lambda}}[\sigma(u)=j]}\right) \le (d_u+0.05)\varepsilon_R + (d_u+\nu)^2\varepsilon_I^2 \le (d_u+0.1)\varepsilon_R$$

以及下界

$$\operatorname{Re}\ln\left(\frac{P_{G,\vec{1}}[\sigma(u)=j]}{P_{G,\vec{\lambda}}[\sigma(u)=j]}\right) \ge -(d_u+0.05)\varepsilon_R$$

结合这两个界，我们得到实部绝对值的所述界。 ■

对于下一个结果，我们需要保证顶点 w_k of $G_k^{(i,j)}$ 中没有任何颜色“过于可能”。我们通过以下定义来量化这一点，该定义与 Liu、Sinclair 和 Srivastava [23]中的定义类似：

定义 2.35 (良好顶点)。 设 H 为一个部分着色图。若对于任意颜色 $c \in \Gamma_v$，都有 $\mathcal{P}_{H,\vec{1}}[\sigma(v) = c] \le 1/(d_v+2)$，其中 d_v 表示 v的未固定邻居数，则称顶点 $v \in V(H)$ 为良好 顶点。

引理 2.36。 设 i，$j \in \Gamma_u$ 且 $k \in [$度数$_G(u)]$。考虑图 $G_k^{(i,j)}$，它由 定义 2.21中的图 G和未固定顶点 u构造而成。设 w_1、……、w_k表示 u在 G中的邻居。那么，顶点 w_k 在 $G_k^{(i,j)}$ 中是好的。

˜证明。 设 $d := \deg_{G_k^{(i,j)}}(w_k)$，并设 d 为其未固定邻居的数量。根据该图的定义， w_k 在 $G_k^{(i,j)}$ 中的邻居比在 G中少一个，因此 $\tilde{d} \le d \le \Delta-1$。由于 $q \ge 2\Delta \ge d+\tilde{d}+2$，只需证明对于所有 $c \in \Gamma_{w_k}$，$\mathcal{P}_{G_k^{(i,j)},\,\vec{1}}[\sigma(w_k) = c] \le 1/(q-d)$。

注意， $Z^{(c)}_{G_k^{(i,j)},\,w_k}(\vec{1})$统计的是与 $G_k^{(i,j)}$ 的部分着色一致，且将 $\sigma(w_k)$赋为 $= c$的合法着色数量。因此，我们需要证明，将 $\sigma(w_k)$赋为 $= c$ 的着色数量至多占总数的 $1/(q-d)$。为此，我们将证明存在一个单射函数 $f : \mathcal{C}^{(c)} \times [q-d] \longrightarrow \mathcal{C}$，其中 $\mathcal{C}$ 是所有与 $G_k^{(i,j)}$ 的部分着色一致的可能着色构成的集合，而 $\mathcal{C}^{(c)} \subset \mathcal{C}$ 是其中将 $\sigma(w_k)$赋为 $= c$的着色所构成的子集。

固定颜色的顺序（例如由 $[q] \subset \mathbb{Z}$ 诱导的自然顺序）。对于给定的 $\sigma \in \mathcal{C}^{(c)}$ 和 $\ell \in [q-d]$，我们将 $f(\sigma,\ell)$ 定义为如下着色：其中，对所有 $z \ne w_k$，$f(\sigma,\ell)(w_k)$ 是 $[q]\setminus\sigma(N(w_k))$ 的第 ℓ 个元素，而 $f(\sigma,\ell)(z) = \sigma(z)$。注意，这一定义是良定义的，因为 $|\sigma(N(w_k))| \le q-d$。剩下的只需证明该函数是单射。

假设 $\sigma,\tilde{\sigma} \in \mathsf{C}^{(c)}$ 和 $\ell,\tilde{\ell} \in [q-d]$ 满足 $f(\sigma,\ell) = f(\tilde{\sigma},\tilde{\ell})$。这意味着，对于所有 $z \ne w_k$，$\sigma(z) = f(\sigma,\ell)(z) = f(\tilde{\sigma},\ell)(z) = \tilde{\sigma}(z)$，而 $\sigma(w_k) = c = \tilde{\sigma}(w_k)$，因此 $\sigma = \tilde{\sigma}$。于是，我们得到等式 $\sigma(N(w_k)) = \tilde{\sigma}(N(w_k))$，所以 $f(\sigma,\ell)(w_k) = f(\tilde{\sigma},\ell)(w_k)$ 意味着 $\ell = \ell$。 ■

注 2.37. 我们的良好性条件等价于在 [23] 中取 $w = 0$ 。注意，顶点 w_k 或图 $G_k^{(i,j)}$ 并没有什么特殊之处：对于任何度至多为 $\Delta-1$ 的顶点，同样的证明都成立。

对于下一个引理，我们采用以下记号 $a_{G,\,u}^{(i)}(\vec{\lambda}) := \ln(P_{G,\,\vec{\lambda}}[\sigma(u) = i])$ 对于 $i \in \Gamma_u$，并定义 $f(x) := -\ln(1-e^x)$。回顾一下，这个函数与引理 f_1 中的函数相同 引理 2.23。

引理 2.38. 假设 u 是 G中的良好顶点，且 $d_u \le \Delta - 1$。那么，对于任意颜色 i、$j \in \Gamma_u$，存在一个实常数 $C_{G,\,u,\,i} = C \in [0, \frac{1}{d_u+\nu}]$，使得

$$\left| \operatorname{Re}\left(f(a_{G,u}^{(i)}(\vec{\lambda})) - f(a_{G,u}^{(i)}(\vec{1}))\right) - C \cdot \operatorname{Re}\left(a_{G,u}^{(i)}(\vec{\lambda}) - a_{G,u}^{(i)}(\vec{1})\right) \right| \le \varepsilon_I; \tag{5}$$

$$\left| \operatorname{Im} f(a_{G,u}^{(i)}(\vec{\lambda})) - \operatorname{Im} f(a_{G,u}^{(j)}(\vec{\lambda})) \right| \le \varepsilon_I; \tag{6}$$

$$\left| \operatorname{Im} f(a_{G,u}^{(i)}(\vec{\lambda})) \right| \le \varepsilon_I; \tag{7}$$

证明。我们将说明，可以定义参数 ζ和 τ，使其满足引理 2.23中的假设，从而 $a_{G,\,u}^{(i)}(\vec{\lambda})$ $a_{G,\,u}^{(i)}(\vec{1})$ $a_{G,\,u}^{(j)}(\vec{\lambda}) \in D_{\zeta,\,\tau}$，其中 D是引理 2.23中定义的区域。然后，我们可以应用引理 2.22 来得到所需的界。

断言2.38.1. 参数

$$\zeta := \ln(d_u+2) - (d_u+0.11)\varepsilon_R, \quad \text{and}$$
$$\tau := (d_u+0.91)\varepsilon_I$$

满足引理 2.23中的假设。

▷ 显然，ζ和 τ均为正数，因为 $\ln 2 > \Delta\varepsilon_R > (d_u+0.11)\varepsilon_R$。同样，很容易看出 $\tau = (d_u+0.91)\varepsilon_I \le \Delta\varepsilon_I < 1/2$。只需证明 $e^{-\zeta} + \tau^2 < 1$:

$$e^{-\zeta} + \tau^2 \le \frac{1}{d_u+2} e^{\Delta\varepsilon_R} + \Delta^2\varepsilon_I^2 \le \frac{1}{2}e^{0.01} + 10^{-8} < 1$$

◀

断言2.38.2。 设 $D = \{z \mid \operatorname{Re}(z) \in (-\infty,\ -\zeta)$ 和 $|\operatorname{Im}(z)| < \tau\}$，其中 ζ和 τ的定义与断言 2.38.1中的相同。那么，对任意 $i \in \Gamma_u$，都有 $a_{G,\,u}^{(i)}(\vec{\lambda}) \in D$ 以及 $a_{G,\,u}^{(i)}(\vec{1}) \in D$。

▷ 注意，我们假设 λ 是满足定义 2.2中假设的任意复向量。这些假设对 $\vec{1}$也成立，因此只需证明关于$a_{G,\,u}^{(i)}(\vec{\lambda})$的陈述。

由引理 2.34的第一部分，

$$\left|\operatorname{Im} \ln \mathcal{P}_{G,\vec{\lambda}}[\sigma(u) = i]\right| = \left|\operatorname{Im}\left(\ln \frac{\mathcal{P}_{G,\vec{\lambda}}[\sigma(u)=i]}{\mathcal{P}_{G,\vec{1}}[\sigma(u)=i]}\right)\right| \le (d_u+\nu)\varepsilon_I < \tau,$$

这里我们用到了$\mathcal{P}_{G,\,\vec{1}}[\sigma(u) = i] \in \mathbb{R}^+$。

From 结合引理 2.34的第二部分以及 u的良好性，我们得到 t

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \ln \mathcal{P}_{G,\vec{\lambda}}[\sigma(u)=i] &\le \operatorname{Re} \ln \mathcal{P}_{G,\vec{1}}[\sigma(u)=i] + \left|\operatorname{Re}\left(\ln \frac{\mathcal{P}_{G,\vec{\lambda}}[\sigma(u)=i]}{\mathcal{P}_{G,\vec{1}}[\sigma(u)=i]}\right)\right| \\ &\le -\ln(d_u+2) + (d_u+0.1)\varepsilon_R \\ &< -\zeta\end{aligned}$$

因此，$a_{G\,u'}^{(i)}(\vec{\lambda}) \in D$。 ◀

接下来，我们给出 ρ_R 和 ρ_I的一些界，其中它们定义于 引理 2.23:

Claim 2.38.3. 设 $\rho_R := \frac{e^{-\zeta}}{1-e^{-\zeta}}$且 $\rho_I := \frac{\tau\rho_R}{1-e^{-\zeta}}$。则 $\rho_R \le \frac{1}{d_u+0.91}$且 $\rho_I \le 3\varepsilon_I$。

▷ 根据 ζ的定义，我们有

$$\rho_R = \frac{1}{e^{\zeta}-1} = \frac{1}{(d_u+2)e^{-(d_u+0.11)\varepsilon_R}-1} \le \frac{1}{(d_u+2)(1-(d_u+0.11)\varepsilon_R)-1}$$
$$= \frac{1}{d_u+1-(d_u+2)(d_u+0.1)\varepsilon_R} \le \frac{1}{d_u+1-2\Delta^2\varepsilon_R} = \frac{1}{d_u+1-0.02} \le \frac{1}{d_u+0.91}$$

这里我们使用了基本不等式 $e^{-x} \ge 1-x$ 以及 $d_u+1 \le \Delta$。我们利用关于 ρ_R 的界来估计 ρ_I:

$$\rho_I \le \frac{(d_u+0.91)\varepsilon_I}{d_u+0.91}\frac{1}{1-e^{-\zeta}} = \frac{\varepsilon_I}{1-e^{-\zeta}}$$

只需证明 $e^{-\zeta} \le 2/3$，这很直接:

$$e^{-\zeta} = \frac{1}{d_u+2}e^{(d_u+0.11)\varepsilon_R} \le \frac{1}{2}e^{0.01} \le \frac{2}{3}.$$

◀

由 引理 2.23，我们知道函数 f 和区域 D 满足引理 2.22的假设。该引理表明，存在常数 $C \in [0, \rho_R]$ (可能依赖于G、 u、 i)，使得

$$\left|\operatorname{Re}\left(f(a^{(i)}_{G,u}(\vec{\lambda})) - f(a^{(i)}_{G,u}(\vec{1}))\right) - C\cdot\operatorname{Re}\left(a^{(i)}_{G,u}(\vec{\lambda}) - a^{(i)}_{G,u}(\vec{1})\right)\right| \le \rho_I \cdot \left|\operatorname{Im}(a^{(i)}_{G,u}(\vec{\lambda}) - a^{(i)}_{G,u}(\vec{1}))\right| \quad (8)$$

利用引理 2.34 和断言 2.38.3，我们可以用以下界估计等式 (8) 的右端

$$\rho_I \cdot \left|\operatorname{Im}(a^{(i)}_{G,u}(\vec{\lambda}) - a^{(i)}_{G,u}(\vec{1}))\right| \le 3\varepsilon_I(d_u+\nu)\varepsilon_I < \varepsilon_I,$$

这就证明了等式 (5)。

注意， $a^{(i)}_{G}$、$_u(\vec{\lambda})$、 $a^{(j)}_{G}$、$_u(\vec{\lambda})$ 和 $a^{(i)}_{G}$、$_u(\vec{\lambda}) - a^{(j)}_{G}$、$_u(\vec{\lambda})$ 都满足 |虚部 $z| \le (d_u+\nu)\varepsilon_I$；前两种情况是由引理 2.34 得出的，第三种情况则由引理 2.28 的第 5 项和定义 2.2 得出。因此，对这一对 $a^{(i)}_{G\,u}$、(λ)、 $a^{(j)}_{G\,u}$、(λ) 应用引理 2.22 的第二部分，可得等式 (6):

$$|\operatorname{Im}(f(a^{i}_{G,u}(\lambda)) - f(a^{j}_{G,u}(\lambda)))| \le \rho_R(d_u+\nu)\varepsilon_I \le \varepsilon_I.$$

最后，将引理 2.22 的第二部分应用于数对 $a^{(i)}_{G\,u}$,$(\vec{\lambda})$ $a^{(i)}_{G\,u}$,$(\vec{1})$，并利用$a^{(i)}_{G\,u,}(\vec{1}) \in \mathbb{R}$，可得:

$$|\operatorname{Im}(f(a^{(i)}_{G,u}(\lambda)) - f(a^{(i)}_{G,u}(\vec{1})))| \le \rho_R \cdot |\operatorname{Im}(a^{(i)}_{G,u}(\lambda))| \le \varepsilon_I$$

这再次由断言 2.38.3 和引理 2.34推出。这就证明了式（7），并完成了该引理的证明。■

注 2.39。请注意，这些界限比 [23], 中类似引理给出的界限略紧，因为我们无需用 f近似 f_κ 。

2.7. 引理2.28的证明

证明。我们将通过对未固定顶点的数量进行归纳法证明引理 2.28 。首先证明基例，即 u 是唯一的未固定顶点:

断言 2.39.1。 如果 u 是 G的唯一未固定顶点，则 引理 2.28中的归纳假设成立。

▷

(1) 注意，$Z^{(i)}_{G,u}(\vec{\lambda})$ 对满足以下条件的着色求和：它们与 G 上的部分着色一致，并且其中 $\sigma(u) = i$。由于 u 是唯一的未固定顶点，因此只有一种可能的此类着色σ。因此，我们有 $\left|Z^{(i)}_{G,u}(\vec{\lambda})\right| = \prod_{v\in V}\left|\lambda_{\sigma(v)}\right| \geq \lambda^n_{\min}$。注意，这不可能为零，因为 $\vec{\lambda}$满足 定义 2.2中的假设 1。

(2) 由于 $Z^{i}_{G,u}(\vec{\lambda}) = \lambda_i \prod_{v\in V\setminus u}\lambda_{\sigma(v)}$，因此 $R^{(i,j)}_{G,u}(\vec{\lambda}) = \frac{\lambda_i \prod_{v\in V\setminus u}\lambda_{\sigma(v)}}{\lambda_j \prod_{v\in V\setminus u}\lambda_{\sigma(v)}} = \frac{\lambda_i}{\lambda_j}$。

(3) 利用第 2 项以及假设 2，由定义 2.2，

$$\left|\arg(R^{(i,j)}_{G,u}(\vec{\lambda}))\right| = |\arg(\lambda_i/\lambda_j)| \leq \nu\varepsilon_I,$$

这远小于 π，因此 $R^{(i,j)}_{G,u}(\vec{\lambda}) \notin (-\infty,0)$。

(4), (5) 直接由第2项得出：

$$\left|\mathrm{Re}(\ln R^{(i,j)}_{G,u}(\vec{\lambda})) - \ln R^{(i,j)}_{G,u}(\vec{1})\right| = \left|\mathrm{Re}\ln\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right|, \quad \text{and}$$
$$\left|\mathrm{Im}\ln R^{(i,j)}_{G,u}(\vec{\lambda})\right| = \left|\mathrm{Im}\ln\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right|.$$

(6) 若 $i \notin \Gamma_u$，则根据定义有 $Z^{(i)}_{G,u} = 0$；而若 $j \in \Gamma_u$，则由第 1 项得 $Z^{(j)}_{G,u} \neq 0$。因此，在这种情况下，$R^{(i,j)}_{G,u}(\vec{\lambda})$ 是良定义的，且其取值为 0。

◀

现在假设 G 有 $\ell \geq 2$ 个未固定顶点（其中 u 是一个），并且对于最多有 $\ell - 1$ 个未固定顶点的任意部分着色图，引理 2.28都成立。证明 1 和 2 两项很直接。对于第1项，注意，将 u 固定为颜色 i后，我们得到一个新的图 G'，其配分函数为 $Z_{G'}(\vec{\lambda}) = \lambda_i^{\deg(u)-1} Z^{(i)}_{G,u}(\vec{\lambda})$。图 G' 比 G 少一个未固定顶点，因此可以假设 引理 2.28 对它成立。另一方面，注意 G' 的顶点总数至多比 G 多 $\Delta - 1$。因此，推论 2.31 告诉我们，$\left|Z_{G'}(\vec{\lambda})\right| \geq 0.99^{\ell-1}\lambda^{n+\ell(\Delta-1)}_{\min}/\lambda^{(\ell-1)\Delta}_{\max}$。根据定义，$|\lambda_i| \leq \lambda_{\max}$，所以我们得出$\left|Z^{(i)}_{G,u}(\vec{\lambda})\right| \geq 0.99^{\ell-1}\lambda^{n+\ell(\Delta-1)}_{\min}/\lambda^{\ell\Delta}_{\max} > 0$。

对于第2项，注意，如果 u 的所有邻居都已固定，那么对于任意 $k \in \{i,j\}$，$Z^{(k)}_{G,u}(\vec{\lambda}) = \lambda_k Z_{G-u}(\vec{\lambda})$（一般情况下这并不成立，因为 u 的未固定邻居会受到不能被着色为 i 或 j 的限制）。因此，$R^{(i,j)}_{G,u}(\vec{\lambda}) = \frac{\lambda_i Z_{G-u}(\vec{\lambda})}{\lambda_j Z_{G-u}(\vec{\lambda})} = \frac{\lambda_i}{\lambda_j}$。

对于 3 到 5这些项，我们将使用 引理 2.19中的递推关系：

$$R^{(i,j)}_{G,u}(\vec{\lambda}) = \frac{\lambda_i}{\lambda_j}\prod_{k=1}^{\deg_G(u)}\frac{1 - P_{G^{(i,j)}_k,\vec{\lambda}}[\sigma(w_k) = i]}{1 - P_{G^{(i,j)}_k,\vec{\lambda}}[\sigma(w_k) = j]}, \tag{9}$$

其中 $w_1,\ldots,w_{\deg_G(u)}$ 表示 u 在 G 中的邻居。

我们可以将此乘积限制为在 G 中未固定的顶点 w_k。这是因为，如果 w_k 在 G 中被固定为某个颜色 c，那么 $c \notin \{i,j\}$（回想一下，我们取的是 $i,j \in \Gamma_u$），因此 $P_{G^{(i,j)}_k,\vec{\lambda}}[\sigma(w_k) = i] = P_{G^{(i,j)}_k,\vec{\lambda}}[\sigma(w_k) = j] = 0$。这意味着与 w_k 对应的因子不会改变该乘积。因此，我们将此乘积限制为 u 的未固定邻居，并将它们重命名为 $w_1,\ldots,w_{d_u}$。

对于项目 3，我们将给出 $\left|\text{辐角 } R_{G,u}^{(i,j)}(\vec{\lambda})\right|$ 的一个粗略上界（注意，我们已经知道 $R_{G,u}^{(i,j)}(\vec{\lambda}) \neq 0$，这是由项目 1 得出的）。由等式 (9)：

$$\left|\arg R_{G,u}^{(i,j)}(\vec{\lambda})\right| \leq \left|\arg \frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right| + \sum_{k=1}^{d_u} \left|\arg(1 - \mathcal{P}_{G_k^{(i,j)},\vec{\lambda}}[\sigma(w_k) = i])\right| + \sum_{k=1}^{d_u} \left|\arg(1 - \mathcal{P}_{G_k^{(i,j)},\vec{\lambda}}[\sigma(w_k) = j])\right|$$

第一项可通过假设 2 进行界定，该假设来自定义 2.2。至于其余部分，注意，涉及 $\mathcal{P}_{G_k^{(i,j)},\vec{\lambda}}[\sigma(w_k) = i]$ 的项要么为零（若 $i \notin \Gamma_{w_k}$），要么可利用引理 2.38 中的等式 (7) 进行界定（若 $i \in \Gamma_{w_k}$）。对涉及颜色 j的项也可采用同样的推理。因此，

$$\left|\arg R_{G,u}^{(i,j)}(\vec{\lambda})\right| \leq \nu\varepsilon_I + 2d_u\varepsilon_I \leq 2\Delta\varepsilon_I \leq 0.0002 < \pi,$$

由此完成了第 3 项的证明。注意，我们能够应用引理 2.38 （以及由引理 2.28推出的所有其他引理），这是因为 $G_k^{(i,j)}$ 比 G少一个未固定顶点，因此满足归纳假设。

现在我们来讨论第 4 项和第 5项。为简化记号，令 $A(i)$ 表示 u 的未固定邻居集合，其中 i 是好颜色；令 $B(i)$ 表示 u 的未固定邻居集合，其中 i 是坏颜色。为简洁起见，再记 $G_k := G_k^{(i,j)}$。

对方程 (9) 取对数，得到：

$$-\ln(R_{G,u}^{(i,j)}(\vec{\lambda})) = -\ln\frac{\lambda_i}{\lambda_j} + \sum_{w_k \in A(i)} f(a_{G_k,w_k}^{(i)}(\vec{\lambda})) - \sum_{w_k \in A(j)} f(a_{G_k,w_k}^{(j)}(\vec{\lambda})) \tag{10}$$

$$= -\ln\frac{\lambda_i}{\lambda_j} + \sum_{w_k \in A(i)\cap A(j)} \left(f(a_{G_k,w_k}^{(i)}(\vec{\lambda})) - f(a_{G_k,w_k}^{(j)}(\vec{\lambda}))\right) + \sum_{w_k \in A(i)\cap B(j)} f(a_{G_k,w_k}^{(i)}(\vec{\lambda})) - \sum_{w_k \in A(j)\cap B(i)} f(a_{G_k,w_k}^{(j)}(\vec{\lambda})) \tag{11}$$

在 $\vec{\lambda}$ 和 $\vec{1}$均满足时，使用方程 (11)，并考虑到每个 w_k 只能出现在 3 个加数中的一个，且这样的项至多有 d_u 个，我们得到以下界：

$$\left|\mathrm{Re}(\ln R_{G,u}^{(i,j)}(\vec{\lambda}) - \ln R_{G,u}^{(i,j)}(\vec{1}))\right| \leq \left|\mathrm{Re}\ln\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right| + d_u \max\left\{\max_{w_k \in A(i)\cap B(j)}\left\{\left|\mathrm{Re}\, f(a_{G_k,w_k}^{(i)}(\vec{\lambda})) - f(a_{G_k,w_k}^{(i)}(\vec{1}))\right|\right\}, \max_{w_k \in B(i)\cap A(j)}\left\{\left|\mathrm{Re}\, f(a_{G_k,w_k}^{(j)}(\vec{\lambda})) - f(a_{G_k,w_k}^{(j)}(\vec{1}))\right|\right\}, \max_{v \in A(i)\cap A(j)}\left\{\left|\mathrm{Re}\left(f(a_{G_k,w_k}^{(i)}(\vec{\lambda})) - f(a_{G_k,w_k}^{(i)}(\vec{1}))\right) - \mathrm{Re}\left(f(a_{G_k,w_k}^{(j)}(\vec{\lambda})) - f(a_{G_k,w_k}^{(j)}(\vec{1}))\right)\right|\right\}\right\} \tag{12}$$

回想一下，G_k 比 G少一个已固定顶点，因此引理 2.28 的所有推论对它都成立。特别是，由引理 2.36 可知，w_k 在 G_k中是良好的。此外，根据 G_k的定义，$\deg_{G_k}(w_k) = \deg_G(w_k) - 1 \leq \Delta - 1$。因此，我们可以对 $w_k \in A(i) \cap B(j)$使用引理 2.38 中的方程 (5)，从而得到

$$\left|\mathrm{Re}\, f(a_{G_k,w_k}^{(i)}(\vec{\lambda})) - f(a_{G_k,w_k}^{(i)}(\vec{1}))\right| \leq \frac{1}{d_{w_k} + \nu}\left|\mathrm{Re}(a_{G_k,w_k}^{(i)}(\vec{\lambda})) - a_{G_k,w_k}^{(i)}(\vec{1})\right| + \varepsilon_I$$

其中 d_{w_k} is 的未固定邻居数 w_k。代入引理 2.34，得到 :

$$\left|\mathrm{Re}\, f(a_{G_k,w_k}^{(i)}(\vec{\lambda})) - f(a_{G_k,w_k}^{(i)}(\vec{1}))\right| \leq \left(\frac{d_{w_k} + 0.1}{d_{w_k} + \nu}\right)\varepsilon_R + \varepsilon_I$$

注意，$\varepsilon_I = \varepsilon_R/100\Delta^2$，并且 $d_{w_k} + \nu \leq d_{w_k} + 1 \leq \Delta$，所以 $\varepsilon_I \leq 0.01\varepsilon_R/(d_{w_k} + \nu)$。因此 ，

$$\left|\operatorname{Re} f(a^{(i)}_{G_k,w_k}(\vec{\lambda})) - f(a^{(i)}_{G_k,w_k}(\vec{1}))\right| \le \left(\frac{d_{w_k}+0.11}{d_{w_k}+\nu}\right)\varepsilon_R \le \varepsilon_R \tag{13}$$

对 $w_k \in A(j) \cap B(i)$ 成立类似的界。

唯一剩下的情形是 $w_k \in A(j) \cap A(i)$。回想一下，对于任意 $s \in \Gamma_{G_k,w_k}$，我们可以利用引理 2.38 的第 5 条 证明存在一个 $C_s \le \frac{1}{d_{w_k}+\nu}$ 使得

$$\left|\operatorname{Re}\left(f(a^{(s)}_{G,w_k}(\vec{\lambda})) - f(a^{(s)}_{G,w_k}(\vec{1}))\right) - C_s \cdot \operatorname{Re}\left(a^{(s)}_{G,w_k}(\vec{\lambda}) - a^{(s)}_{G,w_k}(\vec{1})\right)\right| \le \varepsilon_I \tag{14}$$

对于 $w_k \in A(i) \cap A(j)$， $i,j \in \Gamma_{G_k,w_k}$，因此我们可以将（14）应用两次，得到

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\operatorname{Re} f(a^{(i)}_{G_k,w_k}(\vec{\lambda})) - \operatorname{Re} f(a^{(i)}_{G_k,w_k}(\vec{1}))\right) - \left(\operatorname{Re} f(a^{(j)}_{G_k,w_k}(\vec{\lambda})) - \operatorname{Re} f(a^{(j)}_{G_k,w_k}(\vec{1}))\right)\right| \\
&\quad\le \left|C_i \cdot \operatorname{Re}\left(a^{(i)}_{G,u}(\vec{\lambda}) - a^{(i)}_{G,u}(\vec{1})\right) - C_j \cdot \operatorname{Re}\left(a^{(j)}_{G,u}(\vec{\lambda}) - a^{(j)}_{G,u}(\vec{1})\right)\right| + 2\varepsilon_I \\
&\quad= |C_i \operatorname{Re}\xi_i - C_j \operatorname{Re}\xi_j| + 2\varepsilon_I
\end{aligned} \tag{15}$$

其中 $\xi_i := a^{(i)}_{G,u}(\vec{\lambda}) - a^{(i)}_{G,u}(\vec{1})$.

如果 ξ_i 的实部和 ξ_j 的实部同号，那么

$$|C_i \operatorname{Re}\xi_i - C_j \operatorname{Re}\xi_j| \le |C_{i_{\max}} \operatorname{Re}\xi_{i_{\max}}|$$

其中 $i_{\max} :=$ 辐角最大 $_{t\in\{i,j\}} |C_t$ 实部 $\xi_t|$。

在这种情况下，利用引理 2.34，我们有

$$|C_i \operatorname{Re}\xi_i - C_j \operatorname{Re}\xi_j| \le \frac{1}{d_{w_k}+\nu}(d_{w_k}+0.1)\varepsilon_R \tag{16}$$

如果实部 ξ_i 和实部 ξ_j 具有相反符号，那么

$$|C_i \operatorname{Re}\xi_i - C_j \operatorname{Re}\xi_j| \le \frac{1}{d_{w_k}+\nu}|\operatorname{Re}\xi_i - \operatorname{Re}\xi_j| \tag{17}$$

我们可以将其改写为

$$\begin{aligned}
|\operatorname{Re}\xi_i - \operatorname{Re}\xi_j| &= \left|\operatorname{Re}\ln\left(\frac{P_{G_k,\vec{\lambda}}[\sigma(w_k)=i]}{P_{G_k,\vec{1}}[\sigma(w_k)=i]}\right) - \operatorname{Re}\ln\left(\frac{P_{G_k,\vec{\lambda}}[\sigma(w_k)=j]}{P_{G_k,\vec{1}}[\sigma(w_k)=j]}\right)\right| \\
&= \left|\operatorname{Re}\ln\left(\frac{P_{G_k,\vec{\lambda}}[\sigma(w_k)=i]}{P_{G_k,\vec{\lambda}}[\sigma(w_k)=j]}\right) - \operatorname{Re}\ln\left(\frac{P_{G_k,\vec{1}}[\sigma(w_k)=i]}{P_{G_k,\vec{1}}[\sigma(w_k)=j]}\right)\right| \\
&= \left|\operatorname{Re}\ln R^{i,j}_{G_k,w_k}(\vec{\lambda}) - \operatorname{Re}\ln R^{i,j}_{G_k,w_k}(\vec{1})\right| \\
&\le d_u\varepsilon_R + \Delta\varepsilon_I
\end{aligned}$$

在最后一行中，我们使用了引理2.28的第4项，以及定义2.2中的假设3。这关键依赖于以下事实： G_k 比 G少一个未固定顶点，因此我们可以假设引理2.28 对其成立。我们还需要 i， $j \in \Gamma_{w_k}$，但这直接由$w_k \in A$（i）$\cap A$（j）得出。

利用 $\varepsilon_I = \varepsilon_R/100\Delta^2$，我们最终得到

$$|\operatorname{Re}\xi_i - \operatorname{Re}\xi_j| \le \left(d_{w_k} + \frac{1}{100\Delta}\right)\varepsilon_R$$

将其代入方程（17）后可知，方程（16）中的界在这种情况下也成立。因此，无论实部 ξ_i 和实部 ξ_j 具有相同符号还是相反符号，

$$|C_i \operatorname{Re}\xi_i - C_j \operatorname{Re}\xi_j| \le \frac{1}{d_{w_k}+\nu}(d_{w_k}+0.1)\varepsilon_R \le \varepsilon_R \tag{18}$$

结合方程（13）和（12），至此完成第4项的证明。

对于第5项，我们考察方程（11）的虚部：

$$\left|\operatorname{Im}(\ln R^{(i,j)}_{G,u}(\vec{\lambda}))\right| \le \left|\operatorname{Im}\ln\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right| + d_u \max\Big\{ \max_{w_k\in A(i)\cap B(j)}\{|\operatorname{Im} f(a^{(i)}_{G_k,w_k}(\vec{\lambda}))|\}, \max_{w_k\in B(i)\cap A(j)}|\operatorname{Im} f(a^{(j)}_{G_k,w_k}(\vec{\lambda}))|, \max_{w_k\in A(i)\cap A(j)}\{|\operatorname{Im} f(a^{(i)}_{G_k,w_k}(\vec{\lambda})) - \operatorname{Im} f(a^{(j)}_{G_k,w_k}(\vec{\lambda}))|\}\Big\} \quad (19)$$

利用引理 2.38 的第 6 和第 7 项，我们可以将最大值的三项分别上界为 ε_I。注意，该引理要求颜色对于所讨论的顶点是好的；事实上，i 对于第一项中的 w_k 是好的（因为 $w_k \in A(i)$），j 对于第二项中的 w_k 是好的（因为$w_k \in A(j)$），而 i 和 j 对于第三项中的 w_k 都是好的（因为 $w_k \in A(i)\cap A(j)$）。

代入等式 (19)，可得

$$\left|\operatorname{Im}(\ln R^{(i,j)}_{G,u}(\vec{\lambda}))\right| \le \left|\operatorname{Im}\ln\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right| + d_u\varepsilon_I,$$

这就证明了第 5 项。

最后，注意第6 项由第1项推出，因为这意味着 $Z^{(j)}_{G\,u,}(\vec{\lambda}) \neq 0$，而根据定义，$Z^{(i)}_{G\,u,}(\vec{\lambda}) = 0$，因为 $i \notin \Gamma_u$。因此，在这种情况下，$R^{(i,j)}_{G\,u\,,}(\vec{\lambda}) = 0$。■

3. 局部中心极限定理

本节证明着色模型中颜色类大小的局部中心极限定理（LCLT）。证明结构如下。在小节 3.1 中，我们展示期望、协方差与 对数 Z的导数之间的关系，这一结果将在本节中发挥作用。在小节 3.2 中，我们给出协方差矩阵的特征值和行列式的渐近性，这既有助于稍后应用局部中心极限定理进行抽样，也有助于证明该定理。在小节 3.3 中，我们用特征函数 $\varphi := \mathbb{E}[e^{i\langle\vec{t},\vec{X}\rangle}]$ 的前两个累积量对其对数进行近似。请注意，这只能在 $\vec{t}$ 的较小范围内进行（因为我们需要利用零点自由区域来保证 对数 φ 的泰勒级数收敛）。为处理 $\vec{t}$的较大取值，我们在小节 3.4 中给出特征函数的一个上界。我们结合这两项结果，在小节 3.5中证明局部中心极限定理。

本节的记号：令 R 表示推论 2.6中的零点自由半径$_R := \{\vec{\lambda}\in\mathbb{C}^q : \|\vec{\lambda}-\vec{1}\|_\infty < R\}$。根据注 2.8，我们可以通过选取适当的对数 $Z(\vec{\lambda})$的对数分支，在零点自由半径$_R$内定义一个解析函数。我们将其记为 $F(\vec{\lambda})$：= 对数 $Z(\vec{\lambda})$。

对于固定的 $\vec{\lambda}\in\mathbb{R}^q\cap\mathcal{D}_R$，我们将$(X_1, \ldots, X_q)$定义为$\sigma \sim \mu_{G的\vec{\lambda}}$ 颜色类大小组成的随机向量（即着色模型的吉布斯分布）。注意，这些量满足线性关系$\sum_{i=1}^q X_i = n$，因此其协方差矩阵不是满秩的。因此，我们将使用随机向量$\vec{X} = (X_1, \ldots, X_{q-1})$，即略去最后一个坐标；这里稍微滥用了记号。我们将其期望值和协方差矩阵分别记为 $\mu := \mathbb{E}[\vec{X}]$ 和 $\Sigma := \mathrm{Cov}(\vec{X})$。

首先，我们将确定协方差矩阵，并给出 Σ的特征值和行列式的渐近性。

引理 1.17 (协方差行列式渐近)。令 $q \ge$最大值 $\{2\Delta,3\}$，$\Delta \ge 1$和 $\vec{\lambda}\in\mathbb{C}^q$ 满足 $|\vec{\lambda}-\vec{1}| \le R/2$，其中 R 是零点自由半径，

$$\det(\Sigma) = \Theta(n^{q-1}).$$

这有助于我们得出本节的主要结果：

定理 1.16 （局部中心极限定理）。设 $q \geq 2\Delta$、 $\Delta \geq 1$ 和 $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^q$ 满足$\|\vec{\lambda} - \vec{1}\|_\infty \leq R/2$，其中 R 是零点自由半径。令 $\vec{X} = (X_1, \ldots\ldots, X_{q-1})$ 为省略最后一种颜色后的颜色类大小随机向量。我们将其期望值和协方差矩阵分别记为 $\mu := \mathbb{E}[\vec{X}]$ 和 $\Sigma := $协方差$(\vec{X})$。那么，对于满足 $\sum n_i \leq n$的 $\vec{n} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{q-1}$，

$$\mathbb{P}_{\vec{\lambda}}(\vec{X} = \vec{n}) = (1 + o(1)) \frac{1}{(2\pi)^{(q-1)/2}\sqrt{\det \Sigma}} \exp\left(-\tfrac{1}{2}(\vec{n} - \vec{\mu})^\top \Sigma^{-1}(\vec{n} - \vec{\mu})\right) + o\left(n^{-(q-1)/2}\right).$$

3.1. 矩作为导数

首先，我们将介绍一个预备引理，说明期望值与配分函数之间的联系。

引理 3.1. 设 $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^q \cap D_R$。那么，对所有 $i \in [q]$

$$\lambda_i \frac{\partial \log(Z(\vec{\lambda}))}{\partial \lambda_i} = \mathbb{E}_{\vec{\lambda}}[X_i].$$

证明。 注意

$$\frac{\partial \log(Z(\vec{\lambda}))}{\partial \lambda_i} = \frac{\sum_{\substack{\sigma \in [q]^V \\ \sigma \text{ proper}}} |\sigma^{-1}(i)| \lambda_i^{|\sigma^{-1}(i)|-1} \prod_{j=1; j\neq i}^q \lambda_j^{|\sigma^{-1}(j)|}}{Z(\vec{\lambda})},$$

因此，

$$\lambda_i \frac{\partial \log(Z(\vec{\lambda}))}{\partial \lambda_i} = \frac{\sum_{\substack{\sigma \in [q]^V \\ \sigma \text{ proper}}} |\sigma^{-1}(i)| \prod_{j=1}^q \lambda_j^{|\sigma^{-1}(j)|}}{Z(\vec{\lambda})} = \sum_\sigma |\sigma^{-1}(i)| \mathbb{P}[\sigma] = \mathbb{E}_{\vec{\lambda}}[X_i],$$

其中， $\mathbb{P}[\sigma]$ 是抽样得到着色 σ 的概率；我们有时也会使用 $\mathbb{E}_{\vec{\lambda}}[X_i]$ 的下标来表示该概率分布取决于 $\vec{\lambda}$。■

引理 3.2. 设 $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^q \cap D_R$。那么，对于所有 i、 $j \in [q]$，有

$$\mathrm{Cov}_{\vec{\lambda}}(X_i, X_j) = \lambda_i \lambda_j \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \log Z(\vec{\lambda}) + \delta_{ij} \lambda_i \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \log Z(\vec{\lambda}),$$

其中 δ_{ij} 表示克罗内克δ。

证明。 根据 引理 3.1，

$$\mathbb{E}_{\vec{\lambda}}[X_i] = \lambda_i \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \log Z(\vec{\lambda}).$$

对两边关于 λ_j 求导，得到

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_j} \mathbb{E}_{\vec{\lambda}}[X_i] = \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \log Z(\vec{\lambda}) + \lambda_i \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \log Z(\vec{\lambda}) \tag{20}$$

另一方面，

$$\mathbb{E}_{\vec{\lambda}}[X_i] = \sum_\sigma X_i(\sigma) \mathbb{P}_{\vec{\lambda}}(\sigma), \qquad \mathbb{P}_{\vec{\lambda}}(\sigma) = \frac{1}{Z(\vec{\lambda})} \prod_{k=1}^q \lambda_k^{X_k(\sigma)}.$$

于是，

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_j} \mathbb{P}_{\vec{\lambda}}(\sigma) = \frac{1}{Z(\vec{\lambda})} \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \left(\prod_{k=1}^q \lambda_k^{X_k(\sigma)} \right) - \frac{1}{Z(\vec{\lambda})^2} \frac{\partial Z(\vec{\lambda})}{\partial \lambda_j} \prod_{k=1}^q \lambda_k^{X_k(\sigma)}.$$

由于

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_j} \left(\prod_{k=1}^q \lambda_k^{X_k(\sigma)} \right) = \frac{X_j(\sigma)}{\lambda_j} \prod_{k=1}^q \lambda_k^{X_k(\sigma)},$$

and

$$\frac{\partial Z(\vec{\lambda})}{\partial \lambda_j} = \frac{1}{\lambda_j} \sum_{\sigma'} X_j(\sigma') \prod_{k=1}^{q} \lambda_k^{X_k(\sigma')},$$

我们得到

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_j} \mathbb{P}_{\vec{\lambda}}(\sigma) = \frac{1}{\lambda_j} (X_j(\sigma) - \mathbb{E}_{\vec{\lambda}}[X_j]) \mathbb{P}_{\vec{\lambda}}(\sigma).$$

因此，

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_j} \mathbb{E}_{\vec{\lambda}}[X_i] = \sum_{\sigma} X_i(\sigma) \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \mathbb{P}_{\vec{\lambda}}(\sigma) = \frac{1}{\lambda_j} \left(\mathbb{E}_{\vec{\lambda}}[X_i X_j] - \mathbb{E}_{\vec{\lambda}}[X_i] \mathbb{E}_{\vec{\lambda}}[X_j] \right) = \frac{1}{\lambda_j} \operatorname{Cov}_{\vec{\lambda}}(X_i, X_j).$$

两边乘以 λ_j 并与式（20）比较，我们得出

$$\operatorname{Cov}_{\vec{\lambda}}(X_i, X_j) = \lambda_i \lambda_j \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i \, \partial \lambda_j} \log Z(\vec{\lambda}) + \delta_{ij} \, \lambda_i \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \log Z(\vec{\lambda}).$$

■

3.2. 行列式渐近

在本小节中，我们将证明 引理 1.17。

首先，我们推导 $Y = \sum_{i=1}^{q-1} c_i X_i$ 方差的下界。关键思路是使用全方差公式：对一个顶点子集的颜色进行条件化，使其有效地将图的其余部分“分隔”为线性数量的连通分量，方法与 [16] 中类似。这需要以下简单引理：

引理 3.3（分离引理，（[16]中的引理 3.4））。在一个最大度为 $\Delta \geq 1$、含有 n 个顶点的图 G 中，存在一个大小为 $\Omega(n/\Delta^3)$ 的集合 S，使得其中任意一对顶点的距离至少为 4。

证明。注意，如果我们贪心地选取一个可用顶点，并将它以及所有距离不超过 3 的顶点一并移除（也就是说，移除至多$\mathcal{O}(\Delta^3)$个顶点），那么就能得到一个大小为 $|S| = \Omega(n/\Delta^3)$ 的顶点集合 S。■

接下来，我们将证明，从严格意义上说，$\sum_{i=1}^{q} X_i = n$ 是随机变量 X_i 之间唯一的线性依赖，而任何其他线性组合的方差都很大。

引理 3.4（· 的方差）。设 $q \geq 2\Delta$ 和 $\Delta \geq 1$。对于任意常数 c_1、……、$c_q \in \mathbb{R}$，满足最大值$_{i,j} |c_i - c_j| = \Omega_{q,\Delta}(1)$，定义 $Y := \sum_{i=1}^{q} c_i X_i$。那么，

$$\operatorname{Var}(Y) = \Omega_{\vec{\lambda},q,\Delta}(n).$$

证明。根据引理 3.3，我们可以找到一个集合 S，其大小为 $s = \Omega(n/\Delta^3)$，且其中每个顶点与其他顶点的距离至少为 4。令 T 为与距离至少为2 S的顶点集合。注意，$G[V \setminus T]$ 被划分为 s 连通分量 $V_j := \{v_j\} \cup N(v_j)$，其中 $v_j \in S$。

令 $\sigma \sim \mu_{G,\vec{\lambda}}$（为避免混淆，我们会省略下标中的 $\vec{\lambda}$）。我们可以将 σ 看作由一个两步过程生成：首先选取 $\sigma_T := \sigma|_T$（服从 $\mu_{G[T]}$），然后以条件方式为每个 V_j 选取 $\sigma_{V_j} := \sigma|_{V_j}$，使得总计有 $\sigma \sim \mu_G$。

根据全方差公式：

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}(Y) = \operatorname{Var}\left(\sum c_i X_i\right) &= \mathbb{E}\left[\operatorname{Var}\left(\sum c_i X_i \,\middle|\, \sigma_T\right)\right] + \operatorname{Var}\left(\mathbb{E}\left[\sum c_i X_i \,\middle|\, \sigma_T\right]\right) \\ &\geq \mathbb{E}\left[\operatorname{Var}\left(\sum c_i X_i \,\middle|\, \sigma_T\right)\right]. \end{aligned}$$

令 $Z = (Z_1, \ldots, Z_q)$ 表示 σ_T 的颜色类大小；对每个 $j \in [s]$，令 $Q^i = (Q_1^j, \ldots, Q_q^j)$ 表示 σ_{V_j} 的颜色类大小。关键在于，一旦我们以 σ_T 为条件，$\{Q^j\}_{j \in [s]}$ 就

是相互独立的，因为图中所有 V_j 两两之间都由 T 的顶点隔开。这使我们能够将方差拆分为仅取决于各个连通分量的项：

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{q} c_i X_i \;\middle|\; \sigma_T\right)\right] = \sum_{j=1}^{s} \mathbb{E}\left[\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{q} c_i Q_i^j \;\middle|\; \sigma_T\right)\right].$$

由于 $s = \Omega_\Delta(n)$，若我们证明求和中的每一项都是 $\Omega_{\vec{\lambda},\, q,\, \Delta}(1)$，则可推出 $\mathrm{Var}(Y) = \Omega_{\vec{\lambda},\, q,\, \Delta}(n)$。

断言 3.4.1. 对于任意 $j \in [s]$，$\mathbb{E}\left[\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{q} c_i Q_i^j \mid \sigma_T\right)\right] = \Omega_{\vec{\lambda},\, q,\, \Delta}(1)$。

▷ 令 s，$t \in [q]$ 为使 $|c_s - c_t|$ 最大的指标。给定 σ_T，考虑以下 V_j 的着色 τ：

- 对于每个 $w \in N(v_j)$，将 $\tau(w)$ 设为 $\sigma_T(N(w) \cap T)$ 中未出现、且不同于 s 和 t 的第一个颜色。
- 设 $\tau(v_j) = s$。

另一方面，考虑替代着色 $\tilde{\tau}$，其定义如下：

- 对于每个 $w \in N(v_j)$，设 $\tilde{\tau}(w) = \tau(w)$。
- 设 $\tilde{\tau}(v_j) = t$。

显然，$\mathbb{P}[\sigma_{V_j} = \tau \mid \sigma_T]$，$\mathbb{P}[\sigma_{V_j} = \tilde{\tau} \mid \sigma_T] = \Omega_{\vec{\lambda},\, q,\, \Delta}(1)$，因为 V_j 至多有 $q^{\Delta+1}$ 种不同的着色（固定 $\vec{\lambda}$ 的最小坐标和最大坐标时，它们的权重有上下界）。同时，注意到情形 $\sigma_{V_j} = \tau$ 与情形 $\sigma_{V_j} = \tilde{\tau}$ 下的 $\sum_i c_i Q_i^j$ 之差恰为 c_k，即 $\Omega_q(1)$，因此方差也至少为一个常数。

◀ ■

下面两个推论分别针对我们将应用该结果的两种情形。首先，我们将其应用于 $\vec{X} = (X_1, \ldots\ldots, X_{q-1})$ 的线性组合（这对应于在前一个引理中令 $c_q = 0$），其次，应用于与 $\vec{1}$ 正交的系数 $\vec{c}$。

推论 3.5. 设 $q \geq 2\Delta$ 和 $\Delta \geq 1$。对于任意满足 $\sum_{i=1}^{q-1} c_i^2 = 1$ 的 $\vec{c} \in \mathbb{R}^{q-1}$，定义 $Y := \sum_{i=1}^{q-1} c_i X_i$。那么，

$$\mathrm{Var}(Y) = \Omega_{\vec{\lambda},q,\Delta}(n).$$

证明。由于平方和为 1，因此存在一个 $i \in [q-1]$ 使得 $|c_i| \geq 1/\sqrt{q} = \Omega_q(1)$。因此，对于引理 3.4 中定义为满足 $\tilde{c} \in \mathbb{R}^q$ 的 $\tilde{c}_q := 0$ 以及 $\tilde{c}_j := c_j$ 的所有 $j \in [q-1]$，我们可以应用该引理。■

推论 3.6. 设 $q \geq 2\Delta$ 和 $\Delta \geq 1$。对于任意满足 $\sum_{i=1}^{q} c_i^2 = 1$ 且 $\sum_{i=1}^{q} c_i = 0$ 的 $\vec{c} \in \mathbb{R}^q$，定义 $Y := \sum_{i=1}^{q} c_i X_i$。那么，

$$\mathrm{Var}(Y) = \Omega_{\vec{\lambda},q,\Delta}(n).$$

证明。由于平方和为 1，因此存在一个 $s \in [q]$ 使得 $|c_s| \geq 1/\sqrt{q}$。另一方面，由于 $\sum c_i = 0$，必定存在一个 $t \in [q]$ 使得 c_t 与 c_s 符号相反。因此，最大值 $|c_i - c_j| \geq 1/\sqrt{q} = \Omega_q(1)$，所以我们可以应用 引理 3.4。■

这一结果给出了协方差矩阵特征值的一个下界，因此也给出了其行列式的下界。

引理 3.7 行列式的下界。设 $q \geq 2\Delta$ 和 $\Delta \geq 1$。设 $\{\nu_i\}_{i \in [q-1]}$ 为 Σ 的特征值。那么，$\nu_i = \Omega(n)$ $\forall i \in [q-1]$，因此

$$\det(\Sigma) = \Omega(n^{q-1}).$$

证明。 反设对于 Σ的某个特征值 ν，有 $\nu = o(n)$；回顾一下， Σ是半正定的。设 h是对应于特征值 ν 的单位特征向量。那么，

$$\nu = h^T \Sigma h = \sum_{1 \le i,j \le q-1} \mathrm{Cov}(h_i X_i, h_j X_j) = \mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{q-1} h_i X_i).$$

因此，方差$(\sum_{i=1}^{q-1} h_i X_i) = o(n)$，这与推论 3.5相矛盾。 ■

为了证明协方差矩阵行列式的上界，我们将证明一个一般性结果，该结果利用零点自由性说明配分函数对数的导数为 $O(n)$。首先，我们将证明配分函数对数的一个简单线性上界。

引理 3.8. 对于所有 $\lambda \in \mathcal{D}_R$，我们有

$$\left|\log Z(\vec{\lambda})\right| = O_{\vec{\lambda},q,\Delta}(n)$$

证明。 如果 $\lambda \in \mathcal{D}_R$，那么

$$\left|Z(\vec{\lambda})\right| \le q^n (1+R)^n,$$

同时，我们也有下界

$$\left|Z(\vec{\lambda})\right| \ge 0.99^n \left(\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}\right)^{n\Delta},$$

由推论 2.9给出。因此， $\left|\log\left(|Z(\vec{\lambda})|\right)\right| = O_{\vec{\lambda},\ q,\ \Delta}(n)$，从而 $\left|\log Z(\vec{\lambda})\right|$ 也有界（因为它们只相差一个依赖于辐角的常数因子）。■

引理 3.9 （关于导数的线性上界，适用于 $\log Z$）。 设 $\vec{\zeta} \in \mathbb{C}^q$ 满足 $\|\vec{\zeta} - \vec{1}\|_\infty \le \frac{3R}{4}$。那么，对于每个整数 $k \ge 1$ 以及任意一组指标 $i_1, \dots, i_k \in [q]$， F的偏导数满足

$$|\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} F(\vec{\zeta})| \le \left(\frac{4}{R}\right)^k \sup_{\|\vec{\xi} - \vec{1}\|_\infty < R} |F(\vec{\xi})|.$$

这也意味着 （利用引理 3.8） $|\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} F(\vec{\zeta})| = O_{\vec{\lambda},\ q,\ \Delta}(n)$。

证明。 我们将证明，对于任意 $\rho < R/4$，

$$|\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} F(\vec{\zeta})| \le \frac{1}{\rho^k} \sup_{\|\vec{\xi} - \vec{1}\|_\infty < R} |F(\vec{\xi})|,$$

由此取极限即可得到所声称的结果。

回忆一下， F 在$\mathcal{D}_R$上是解析的。还要注意，闭多圆盘

$$\mathcal{P}(\zeta, \rho) := \{\xi \in \mathbb{C}^q : \|\xi - \zeta\|_\infty \le \rho\}$$

包含于$\mathcal{D}_R$中。定义 $\xi^{(i_1,\dots,i_k)} \in \mathcal{P}(\zeta,\ \rho)$，使得只有坐标 $\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}$变化，而所有其他坐标都等于 ζ。

根据多元柯西积分公式，我们有

$$\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} F(\zeta) = \frac{1}{(2\pi i)^k} \int_{|\xi_{i_1} - \zeta_{i_1}| = \rho} \cdots \int_{|\xi_{i_k} - \zeta_{i_k}| = \rho} \frac{F(\xi^{(i_1,\dots,i_k)})}{\prod_{m=1}^k (\xi_{i_m} - \zeta_{i_m})^2} \, d\xi_{i_k} \cdots d\xi_{i_1}.$$

取绝对值并使用 $|\xi_{i_m} - \zeta_{i_m}| = \rho$，

$$|\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} F(\zeta)| \le \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{|\xi_{i_1} - \zeta_{i_1}| = \rho} \cdots \int_{|\xi_{i_k} - \zeta_{i_k}| = \rho} \frac{|F(\xi^{(i_1,\dots,i_k)})|}{\rho^{2k}} \, |d\xi_{i_k}| \cdots |d\xi_{i_1}|.$$

每条围道的长度为 $2\pi\rho$，因此

$$|\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_k}F(\zeta)| \le \frac{(2\pi\rho)^k}{(2\pi)^k}\cdot\frac{1}{\rho^{2k}}\sup_{\xi\in\mathcal{P}(\zeta,\rho)}|F(\xi)| = \frac{1}{\rho^k}\sup_{\xi\in\mathcal{P}(\zeta,\rho)}|F(\xi)|.$$

由于 $\mathcal{P}(\zeta,\rho)\subset\mathcal{D}_R$，

$$\sup_{\xi\in\mathcal{P}(\zeta,\rho)}|F(\xi)| \le \sup_{\|\xi-\vec{1}\|_\infty<R}|F(\xi)|.$$

结合上述界，证明得证。 ■

作为一个简单的推论，我们得到期望和协方差也至多呈线性增长。

推论 3.10. 对于 $\lambda\in\mathcal{D}_R$，

$$\mathbb{E}_{\vec{\lambda}}[X_i] = O_{\vec{\lambda},q,\Delta}(n), \quad \mathrm{Cov}_{\vec{\lambda}}(X_i,X_j) = O_{\vec{\lambda},q,\Delta}(n)$$

证明。 根据引理 3.1

$$\mathbb{E}_{\vec{\lambda}}[X_i] = \lambda_i\frac{\partial F(\vec{\lambda})}{\partial\lambda_i}$$

并且根据 引理 3.2

$$\mathrm{Cov}_{\vec{\lambda}}(X_i,X_j) = \lambda_i\lambda_j\,\partial_{ij}F(\vec{\lambda}) + \delta_{ij}\lambda_i\,\partial_i F(\vec{\lambda}),$$

因此我们得到线性上界。 ■

已知协方差矩阵各元素的上界后，很容易给出其行列式的上界。

推论 3.11 （协方差矩阵行列式的上界）。 固定一个 $\vec{\lambda}\in\mathcal{D}_R$，并令 ν_{max}为 Σ的最大特征值。则，

$$\nu_{max} = O_{\vec{\lambda},q,\Delta}(n),$$

因此

$$\det(\Sigma) = O_{\vec{\lambda},q,\Delta}(n^{q-1}).$$

证明。 由 推论 3.10，我们知道存在一个常数 $C=C(\vec{\lambda},\ q,\ \Delta)$ 使得 $|\Sigma_{ij}|\le Cn$对所有 $i,\ j\in[q-1]$。由于 Σ 是半正定的，其特征值满足

$$0\le\nu_i\le\mathrm{tr}\,\Sigma\le(q-1)Cn.$$

这也意味着

$$0\le\det\Sigma\le((q-1)Cn)^{q-1}$$

■

结合 引理 3.7 和 推论 3.11，可得 $\det(\Sigma)=\Theta(n^{q-1})$。

3.3. 特征函数的泰勒展开

在本小节中，我们分析 $\vec{X}$ 的特征函数的对数（即 $\varphi(t):=\mathbb{E}[e^{i\langle t,\vec{X}\rangle}]$），并证明当 t 较小时，前两个累积量占主导地位。注意，$\varphi:\mathbb{R}^{q-1}\longrightarrow\mathbb{C}$，因为我们采用了记号 $\vec{X}=(X_1,\ .....,\ X_{q-1})$。我们将用记号 $\tilde{\varphi}$ 表示完整向量 $(X_1,\ .....,\ X_q)$ 的特征函数，其输入现在为 $t\in\mathbb{R}^q$。

首先注意，我们可以用配分函数重写特征函数：

观察 3.12. 对于 $t\in\mathbb{R}^q$

$$\tilde{\varphi}(t) = \frac{Z_G(\lambda_1e^{it_1},\ldots,\lambda_qe^{it_q})}{Z_G(\vec{\lambda})}$$

接下来，我们证明：若 λ 不接近零点自由区域的边界，且 t 足够小，则点 $(\lambda_1 e^{it_1},\dots,\lambda_q e^{it_q})$ 仍位于零点自由区域内，因此 $Z_G(\lambda_1 e^{it_1},\dots,\lambda_q e^{it_q}) \neq 0$，从而 $\log\ \tilde{\varphi}(t)$ 将是解析的。

引理 3.13. 给定常数 $C>0$，设 $\vec{\lambda}\in\mathbb{C}^q$ 满足 $\|\vec{\lambda}-\vec{1}\|_\infty < \frac{C}{2}$。那么，对于每个满足 $|t|\le \frac{C}{4+2C}$ 的 $t\in\mathbb{C}$，我们有

$$|\lambda_j e^{it}-1| < \frac{3C}{4} \qquad \text{for all } j\in[q].$$

证明。注意到

$$|\lambda_j e^{it}-1| \le |\lambda_j-1| + |\lambda_j|\,|e^{it}-1|.$$

将 $|\lambda_j|\le|\lambda_j-1|+1$ 与不等式 $|e^{iu}-1|\le|u|$ 结合起来，该不等式对任意 $u\in\mathbb{R}$ 均成立，我们得到

$$|\lambda_j e^{it}-1| < \frac{C}{2} + \Big(1+\frac{C}{2}\Big)|t|.$$

若 $|t|\le\frac{C}{4+2C}$，则

$$|\lambda_j e^{it}-1| < \frac{3C}{4}.$$

■

引理 3.14 (关于 $\log Z$ 的三阶泰勒余项界)。设 $\vec{\lambda}$、$\vec{\lambda}'\in\mathbb{C}^q$ 满足 $\|\vec{\lambda}-\vec{1}\|_\infty < \frac{3R}{4}$ 和 $\|\vec{\lambda}'-\vec{1}\|_\infty < \frac{3R}{4}$。那么 F 可展开为泰勒级数

$$F(\vec{\lambda}') = F(\vec{\lambda}) + \sum_{j=1}^{q}\partial_j F(\vec{\lambda})\,(\lambda'_j-\lambda_j) + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{q}\partial_{jk}F(\vec{\lambda})(\lambda'_j-\lambda_j)(\lambda'_k-\lambda_k) + R_3,$$

其中余项满足

$$|R_3| \le C\,n\sum_{j,k,\ell=1}^{q}|\lambda'_j-\lambda_j|\,|\lambda'_k-\lambda_k|\,|\lambda'_\ell-\lambda_\ell|,$$

对某个常数 $C=C(R,q,\Delta)$。

证明。令 $\vec{h}:=\vec{\lambda}'-\vec{\lambda}$。根据带积分余项的泰勒定理，得到所述展开式，其余项为

$$R_3 = \sum_{j,k,\ell} h_j h_k h_\ell \int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2}\,\partial_{jk\ell}F(\vec{\lambda}+s\vec{h})\,ds.$$

对于 $s\in[0,1]$，ℓ_∞ 球的凸性意味着 $\|\vec{\lambda}+s\vec{h}\|_\infty < \frac{3R}{4}$。因此，根据 引理 3.9，存在一个 $C'(R,q,\Delta)$ 使得

$$|R_3| \le \sum_{j,k,\ell}|h_j h_k h_\ell|\int_0^1\frac{(1-s)^2}{2}C'n\,ds = \frac{1}{6}C'n\sum_{j,k,\ell}|\lambda'_j-\lambda_j|\,|\lambda'_k-\lambda_k|\,|\lambda'_\ell-\lambda_\ell|.$$

■

引理 3.15（特征函数展开）。设 $\vec{\lambda},\vec{t}\in\mathbb{R}^q$ 满足 $\|\vec{\lambda}-\vec{1}\|_\infty < \frac{R}{2}$ 且 $\|t\|_\infty\le\frac{R}{4+2R}$。那么，

$$\log\tilde{\varphi}(t) = i\langle t,\mathbb{E}_{\vec{\lambda}}\vec{X}\rangle - \frac{1}{2}\,t^{\top}\mathrm{Cov}_{\vec{\lambda}}(\vec{X})\,t + R_3(t),$$

其中 $\vec{X}=(X_1,\dots,X_q)$ 并且

$$|R_3(t)| \le C\,n\,\|t\|_\infty^3,$$

对于某个常数 $C=C(R,q,\Delta)$。

证明。 设 $\vec{\lambda}' := (\lambda_1 e^{it_1}, \dots, \lambda_q e^{it_q})$。回顾 观察 3.12 可知

$$\log \tilde{\varphi}(t) = F(\vec{\lambda}') - F(\vec{\lambda}),$$

根据引理 3.13， $\|\vec{\lambda}' - \vec{1}\|_\infty < \frac{3R}{4}$。因此，引理 3.14 蕴含

$$F(\vec{\lambda}') = F(\vec{\lambda}) + \sum_{j=1}^{q} \partial_j F(\vec{\lambda})\,(\lambda_j e^{it_j} - \lambda_j) + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{q} \partial_{jk} F(\vec{\lambda})(\lambda_j e^{it_j} - \lambda_j)(\lambda_k e^{it_k} - \lambda_k) + R_3,$$

其中

$$|R_3| \le C\, n \sum_{j,k,\ell=1}^{q} |\lambda_j (e^{it_j} - 1)||\lambda_k (e^{it_k} - 1)||\lambda_\ell (e^{it_\ell} - 1)|.$$

对于每个 $j \in [q]$，存在 $z_{j,\,1}$，$z_{j,\,2}$，$z_{j,\,3} \in \mathbb{C}$，满足 $|z_{j,\,m}| \le |t_j|^m$，使得

$$e^{it_j} - 1 = z_{j,1} = it_j + z_{j,2} = it_j - \frac{1}{2}t_j^2 + z_{j,3}.$$

将其代入上面的表达式，我们可以发现其中一些项是期望和协方差。例如，回顾引理 3.1，可得

$$\sum_j \partial_j F(\vec{\lambda})\,(\lambda_j e^{it_j} - \lambda_j) = \mathbb{E}_{\vec{\lambda}}[X_j]\left(it_j - \frac{1}{2}t_j^2 + z_{j,3}\right).$$

利用引理 3.2中的协方差恒等式：

$$\lambda_j \lambda_k \partial_{jk} F(\vec{\lambda}) = \begin{cases} \mathrm{Cov}_{\vec{\lambda}}(X_j, X_k), & \text{if } j \ne k \\ \mathrm{Var}_{\vec{\lambda}}(X_j) - \mathbb{E}_{\vec{\lambda}}[X_j], & \text{if } j = k \end{cases}$$

我们得到

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\sum_{j,k} \partial_{jk} F(\vec{\lambda})(\lambda_j e^{it_j} - \lambda_j)(\lambda_k e^{it_k} - \lambda_k) \\ &\quad = \frac{1}{2}\sum_{j,k} \mathrm{Cov}_{\vec{\lambda}}(X_j, X_k)(it_j + z_{j,2})(it_k + z_{k,2}) - \frac{1}{2}\sum_j \mathbb{E}_{\vec{\lambda}}[X_j](it_j + z_{j,2})^2 \\ &\quad = -\frac{1}{2}\sum_{j,k} t_j t_k \,\mathrm{Cov}_{\vec{\lambda}}(X_j, X_k) + \frac{1}{2}\sum_j t_j^2\, \mathbb{E}_{\vec{\lambda}}[X_j] + O(n\|t\|_\infty^3), \end{aligned}$$

其中我们使用了以下结果中关于期望值和协方差的线性界：推论 3.10。最后，泰勒余项满足

$$|R_3| \le C\, n \sum_{j,k,\ell} \left(1 + \frac{R}{2}\right)^3 |z_{j,1} z_{k,1} z_{\ell,1}| = O(n\|t\|_\infty^3).$$

合并所有项，

$$\log \tilde{\varphi}(t) = i\langle t, \mathbb{E}_{\vec{\lambda}} \vec{X}\rangle - \frac{1}{2}\, t^\top \mathrm{Cov}_{\vec{\lambda}}(\vec{X})\, t + O(n\|t\|_\infty^3).$$

■

上述引理可以直接推广到具有 $q-1$坐标的特征函数：

推论 3。 **16.** 设 $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^q$ 和 $\vec{t} \in \mathbb{R}^{q-1}$ 满足 $\|\vec{\lambda} - \vec{1}\|_\infty < \frac{R}{2}$ 和 $\|t\|_\infty \le \frac{R}{4+2R}$。则

$$\log \varphi(t) = i\langle t, \mathbb{E}_{\vec{\lambda}} \vec{X} \rangle - \frac{1}{2} t^\top \mathrm{Cov}_{\vec{\lambda}}(\vec{X})\, t + R_3(t),$$

其中 $\vec{X} = (X_1, \ldots\ldots, X_{q-1})$ 以及

$$|R_3(t)| \le C\, n\, \|t\|_\infty^3,$$

对于某个常数 $C = C(R, q, \Delta)$。

*Pr*证明。 应用 引理 3.15 于 $\tilde{t} = (t_1, \ldots\ldots, t_{q-1}, 0) \in \mathbb{R}^q$，注意到 $\varphi(t) = \tilde{\varphi}(\tilde{t})$。 ■

3.4. 特征函数的上界

在本小节中，我们将采用 Jain、Perkins、Sah 和 Sawhney 的方法 [16] 来给出特征函数的上界。我们沿用他们的结构，以便读者在需要时能够看出其中的差异。请注意，在我们的情形中，需要处理的是一个多维对象。

引理 3.17。 对于任意 $q \ge$最大值$\{2\Delta, 3\}$，$\Delta \ge 1$ 都存在一个常数 $c = c(\Delta, q, \vec{\lambda})$，使其满足以下性质。对于所有 $t \in [-\pi, \pi]^{q-1}$，以下结论成立：

$$|\mathbb{E}[e^{i\langle t, \vec{X}\rangle}]| \le \exp(-cn\|t\|^2)$$

证明。 我们采用与引理 3.4中相同的条件化策略。根据引理 3.3，我们可以找到一个 S大小为 $s = \Omega(n/\Delta^3)$ 的集合，其中任意两个顶点之间的距离至少为 4。定义 T为与 S之间距离至少为 2 的顶点集合。注意， $G[V \setminus T]$ 被划分为 s 个连通分量 $V_j := \{v_j\} \cup N(v_j)$，其中 $v_j \in S$。

我们可以将 $\sigma \sim \mu_G$ 视为通过两个步骤生成：首先选取 $\sigma_T := \sigma|_T$（服从 $\mu_{G[T]}$ 的分布），然后以条件方式为每个 V_j 选取 $\sigma_{V_j} := \sigma|_{V_j}$，使得总共有 $\sigma \sim \mu_G$。

$Z = (Z_1, \ldots\ldots, Z_q)$ 是 σ_T 的颜色类大小；对于每个 $j \in [s]$，令 $Q^j = (Q_1^j, \ldots\ldots, Q_{q-1}^j)$ 表示 σ_{V_j} 的前 $q-1$ 个颜色类大小。定义 $R^j = (R_1^j, \ldots\ldots, R_{q-1}^j)$ 为 Q^j 的独立副本（在给定相同的 σ_T 的条件下）。

注意，由于 Q^j 和 R^j 独立，有 $|\mathbb{E}[e^{-i\langle t, Q^j\rangle}]|^2 = \mathbb{E}[e^{-i\langle t, Q^j - R^j\rangle}]$。对于固定的 t，注意到 $\langle t, Q^j - R^j\rangle$ 作为一个随机变量关于 0 对称。因此，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{-i\langle t, Q^j - R^j\rangle}] &= \mathbb{E}[\cos(\langle t, Q^j - R^j\rangle)] \\ &\le 1 - \sum_{k=1}^{q-1} \mathbb{P}[\langle t, Q^j - R^j\rangle = t_k](1 - \cos(t_k))\end{aligned}$$

对于最后一个不等式，我们需要 t_k 两两不同；但通过对向量 t 施加足够小的扰动，总能保证这一点。

现在我们来给概率 $\mathbb{P}[\langle t, Q^j - R^j\rangle = t_k]$ 求一个下界。我们希望证明它至少为一个常数（该常数可能依赖于 Δ、q 和 $\vec{\lambda}$）。

命题 3.17.1。

$$\mathbb{P}[\langle t, Q^j - R^j\rangle = t_k] = \Omega_{\Delta, q, \vec{\lambda}}(1) \quad \forall k \in [q-1]$$

▷ 不妨假设 $k = 1$，因为对其他任意坐标的证明都相同。将 v_j 的邻居任意标记为 $N(v_j) = \{w_1, \ldots\ldots, w_d\}$，其中 $d := \deg(v_j)$。令 σ^Q 为 V_j 的着色，其颜色类大小向量为 Q^j。类似地，令 σ^R 为与 R^j 关联的着色。

注意， σ^Q 或 σ^R 取某个特定着色作为取值的概率至少为 $\lambda_{\min}^{\Delta+1}/(q^{\Delta+1}\lambda_{\max}^{\Delta+1}) = \Omega_{\Delta, q, \vec{\lambda}}(1)$，因此只需证明存在这样一对着色，使得 $\langle t, Q^j - R^j\rangle = t_1$。取 $\sigma^Q(v_j) = 1$、$\sigma^R(v_j) = q$，并令 $\sigma^Q(w_i) = \sigma^R(w_i) = c_i$ 对所有 $i \in [d]$成立，即可得到这一点；其中，c_i 是一种未出现在 $N(w_i) \cap T$中且不同于 1 和 q的着色。这样的颜色必定存在

对每个 $i \in [d]$ 都成立，因为 $q \geq \max(2\Delta,\ 3) \geq \Delta + 2$。注意，我们得到的常数不依赖于对 T着色进行条件化。◀

对所有的 $t \in [-\pi, \pi]$，根据泰勒展开，$\frac{1}{8}t_k^2 \leq 1 - \cos(t_k)$。因此，我们可以得出

$$\mathbb{E}[e^{-i\langle t, Q^j - R^j\rangle}] \leq 1 - \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{q-1} \mathbb{P}[\langle t, Q^j - R^j\rangle = t_k] t_k^2 \leq 1 - C\|t\|^2,$$

对于某个 $C = \Omega_{\Delta,\ q,\ \vec{\lambda}}(1)$。如前所述，这个常数与我们所条件化的 σ_T取值无关。因此，

$$\left|\mathbb{E}[e^{-i\langle t, \vec{X}\rangle}]\right| \leq \max_{\sigma_T} \left|\mathbb{E}[e^{-i\langle t, \vec{X}\rangle} \mid \sigma_T]\right| = \max_{\sigma_T} \prod_{j=1}^{s} \left|\mathbb{E}[e^{-i\langle t, Q^j\rangle}]\right| \leq \left(1 - C\|t\|^2\right)^{s/2} \leq \exp(-Cs\|t\|^2/2)$$

最后，由于 $s = \Omega(n)$，所述界限便得证。 ■

3.5. 定理1.16 的证明

在将前几节的内容汇总之前，我们先提醒读者标准的反演公式。

引理 3.18（整数随机向量的反演公式）。对于一个取值为整数的 d 维随机向量 X，其概率质量函数 $f_X(x)$ 由下式给出

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} e^{-i\langle t, x\rangle} \varphi_X(t) dt.$$

现在我们将证明本节的主要结果。

定理 1.16（局部中心极限定理）。令 $q \geq 2\Delta$、$\Delta \geq 1$ 和 $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^q$ 满足 $\|\vec{\lambda} - \vec{1}\|_\infty \leq R/2$，其中 R 是零点自由半径。令 $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_{q-1})$ 为省略最后一种颜色后的颜色类大小随机向量。我们将其期望值和协方差矩阵分别记为 $\mu := \mathbb{E}[\vec{X}]$ 和 $\Sigma := \text{协方差}(\vec{X})$。那么，对于满足 $\sum n_i \leq n$ 的 $\vec{n} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{q-1}$，

$$\mathbb{P}_{\vec{\lambda}}(\vec{X} = \vec{n}) = (1 + o(1)) \frac{1}{(2\pi)^{(q-1)/2}\sqrt{\det \Sigma}} \exp\left(-\tfrac{1}{2}(\vec{n} - \vec{\mu})^\top \Sigma^{-1} (\vec{n} - \vec{\mu})\right) + o\left(n^{-(q-1)/2}\right).$$

证明。根据傅里叶反演（引理 3.18），

$$\mathbb{P}(\vec{X} = \vec{n}) = \frac{1}{(2\pi)^{q-1}} \int_{[-\pi,\pi]^{q-1}} e^{-i\langle t, \vec{n}\rangle} \varphi(t)\, dt.$$

令 $A = \frac{R}{4+2R}$ 并固定一个 $\varepsilon \in (0,\ 1/6)$。我们将分解

$$[-\pi, \pi]^{q-1} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$$

其中

$$\mathcal{R}_1 := \{t \in [-\pi, \pi]^{q-1} \ :\ \|t\| \leq An^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\} \quad \text{and} \quad \mathcal{R}_2 := [-\pi, \pi]^{q-1} \setminus \mathcal{R}_1.$$

根据引理 3.17，对于 $t \in \mathcal{R}_2$，

$$|\varphi(t)| \leq \exp(-cn\|t\|^2) \leq \exp(-c'n^{2\varepsilon}).$$

由于 $\text{vol}([-\pi, \pi]^{q-1}) = O(1)$，因此

$$\int_{\mathcal{R}_2} |\varphi(t)|\, dt \leq C \exp(-cn^{2\varepsilon}) = o\left(n^{-(q-1)/2}\right).$$

因此，

$$\int_{[-\pi,\pi]^{q-1}} \varphi(t) e^{-i\langle t, \vec{n} - \vec{\mu}\rangle}\, dt = \int_{\mathcal{R}_1} \varphi(t) e^{-i\langle t, \vec{n} - \vec{\mu}\rangle}\, dt + o\left(n^{-(q-1)/2}\right).$$

对于 $t \in \mathcal{R}_1,$，由于 $\|t\|_\infty \le \|t\| \le A$，使用 推论 3.16，我们有

$$\log \varphi(t) = i\langle t, \vec{\mu}\rangle - \frac{1}{2} t^\top \Sigma\, t + O(n\|t\|^3),$$

因此，对于任意 $\|t\| \le An^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}$

$$\varphi(t) = \exp\Big(it^\top \vec{\mu} - \tfrac{1}{2} t^\top \Sigma t\Big)\,(1 + o(1)).$$

因此，

$$\int_{\mathcal{R}_1} e^{-i\langle t,\vec{n}\rangle} \varphi(t)\, dt = (1 + o(1)) \int_{\mathcal{R}_1} e^{-\frac{1}{2} t^\top \Sigma t - i\langle t, \vec{n}-\vec{\mu}\rangle}\, dt$$

此外，我们知道 $t^\top \Sigma t \ge \nu \|t\|^2$，其中 ν 是 Σ的最小特征值，而根据 引理 3.7 的证明，我们知道 $\nu = \Omega(n)$。因此，

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^{q-1} \setminus \mathcal{R}_1} e^{-\frac{1}{2} t^\top \Sigma t - i\langle t, \vec{n}-\vec{\mu}\rangle}\, dt \Big| = o\Big(n^{-(q-1)/2}\Big),$$

因此，我们可以将积分域扩展到 $\mathbb{R}^{q-1}$ （在那里积分会更容易）。接下来，

$$\int_{\mathcal{R}_1} e^{-i\langle t,\vec{n}\rangle} \varphi(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}^{q-1}} e^{-\frac{1}{2} t^\top \Sigma t - i\langle t, \vec{n}-\vec{\mu}\rangle}\, dt + o\Big(n^{-(q-1)/2}\Big).$$

计算高斯积分可得

$$\int_{\mathbb{R}^{q-1}} e^{-\frac{1}{2} t^\top \Sigma t - i\langle t, \vec{n}-\vec{\mu}\rangle}\, dt = (2\pi)^{-(q-1)/2} (\det \Sigma)^{-1/2} \exp\Big(-\tfrac{1}{2}(\vec{n}-\vec{\mu})^\top \Sigma^{-1} (\vec{n}-\vec{\mu})\Big),$$

因此，综合以上结果，我们得到

$$\mathbb{P}(\vec{X} = \vec{n}) = (1 + o(1)) \frac{1}{(2\pi)^{(q-1)/2}\sqrt{\det \Sigma}} \exp\Big(-\tfrac{1}{2}(\vec{n}-\vec{\mu})^\top \Sigma^{-1} (\vec{n}-\vec{\mu})\Big) + o\Big(n^{-(q-1)/2}\Big).$$

■

局部中心极限定理的结果足以让我们得出拒绝采样算法的运行时间。我们使用 Vigoda [38],的一项经典结果，该结果提供了一种算法，可在 $O(n\log\, n)$ 步内近似抽样得到含有 $q \ge 11\Delta/6$ 种颜色的均匀着色。局部中心极限定理，加上对协方差矩阵的行列式及其特征值的界（引理 1.17），意味着对于 $\vec{x} \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^{q-1}$ 且 $|x_i - n/q| \le c\sqrt{n}$ （其中 $c > 0$ 为常数）， $\mathbb{P}(\vec{X} = \vec{x}) = \Theta\Big(n^{-(q-1)/2}\Big)$。容易证明，经过 $O(n^{(q-1)/2}\log(1/\varepsilon))$ 次拒绝采样迭代后，算法失败的概率至多为 $1-\varepsilon$。因此，算法的运行时间为 $O\Big(n^{(q+1)/2}\log(n)\,\log(\frac{1}{\varepsilon})^2\Big)$。

请注意，在本节中，我们假设已知 $\vec{\lambda}$，使得 $\mathbb{E}_{\vec{\lambda}}[\vec{X}] = \vec{n}$。对于公平着色（以及接近公平的着色）的抽样，我们只需取 $\vec{\lambda} = \vec{1}$ 即可。在下一节中，我们将展示如何对颜色类大小偏斜得多的着色进行抽样。

4. 偏斜着色采样

回顾一下，我们用 R 表示由 推论 2.6 给出的零点自由半径，并定义区域$\mathcal{D}_R := \{\vec{\lambda} \in \mathbb{C} : \|\vec{\lambda} - \vec{1}\|_\infty < R\}$。根据 注 2.8，我们知道 $F(\vec{\lambda}) := \log\, Z(\vec{\lambda})$ 可以在 $\mathcal{D}_R$ 中解析地定义。

第3 节的结果表明，要对给定颜色类大小向量的着色进行采样 $\vec{n}$只需在无零区域中找到一个 λD $\mathcal{D}_R$ 使得

$$\|\mathbb{E}_{\vec{\lambda}}[\vec{X}] - \vec{n}\| = O(\sqrt{n}).$$

由于对任意 $\vec{n}$ 寻找这样的 λ 并非易事，我们将搜索空间离散化，并考虑所有形如 $\lambda_q = 1$的候选向量，

$$\lambda_i = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} k_i, \quad \text{where } k_i \in \{-\lfloor R\sqrt{n} \rfloor, \ldots, \lfloor R\sqrt{n} \rfloor\},\ i \in [q-1]$$

并对每个候选 λ独立运行 $O\left(n^{(q+1)/2} \log(n)\, \log(\frac{1}{\varepsilon})^2\right)$ 拒绝采样过程。我们将在第 4.1 小节证明，由于离散化足够精细，至少有一个 $\vec{\lambda}$ 值会使 $\mathbb{E}_{\vec{\lambda}}[\vec{X}]$ 与目标着色的距离不超过 $\sqrt{n}$ 。候选项共有 $\Theta(n^{(q-1)/2})$个，因此总运行时间为 $O\left(n^q \log(n)\, \log(\frac{1}{\varepsilon})^2\right)$。我们在第 4.2 小节证明，在给定的零点自由区域上，期望值具有满射性，这说明对于目标着色集合中的每个 $\vec{n}$ ，都存在一个 λ ，使其期望为 $\vec{n}$ 。这有助于我们确定可以抽样得到哪些着色。最后，在第 4.3 小节中，我们利用路径耦合技术证明，给定来自零点自由区域的 λ 时，Glauber 动力学会快速混合。

4.1. 期望映射的利普希茨性

本节证明的主要结论是，存在一个常数 $C > 0$ ，使得对于任意$\vec{\lambda}$， $\vec{\lambda}' \in \mathcal{D}_R$,

$$\|\mathbb{E}_{\vec{\lambda}}[\vec{X}] - \mathbb{E}_{\vec{\lambda}'}[\vec{X}]\| \le Cn\|\vec{\lambda} - \vec{\lambda}'\|.$$

我们先引入一些记号。将向量 λ 乘以一个正因子不会影响概率模型，因此我们采用记号 $\lambda := (\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_{q-1})$，并假设存在一个隐含的额外坐标 $\lambda_q = 1$。令 $\Psi\colon \mathbb{R}^{q-1} \longrightarrow \mathbb{R}^{q-1}$ 为一个自同态，它将每个λ映射为其所诱导的期望颜色类大小向量：

$$\Psi(\vec{\lambda}) := (\mathbb{E}_{\vec{\lambda}}[X_1], \ldots, \mathbb{E}_{\vec{\lambda}}[X_{q-1}]).$$

我们用 $\|\cdot\|$ 表示二范数；对于矩阵，则表示相应的算子范数。

引理 4.1. 雅可比矩阵 $J(\vec{\lambda}) := D\Psi(\vec{\lambda})$ 满足

$$J(\vec{\lambda}) = \mathrm{Cov}_{\vec{\lambda}}(\vec{X}) \cdot D(\vec{\lambda})^{-1},$$

其中 $D(\vec{\lambda})$:=diag($\vec{\lambda}$)。

证明。 根据 引理 3.1， $\mathbb{E}_{\vec{\lambda}}[X_i] = \lambda_i \partial_i F(\vec{\lambda})$因此我们可以将雅可比矩阵的各项写为

$$J_{ij}(\vec{\lambda}) = \partial_j \mathbb{E}_{\vec{\lambda}}[X_i] = \lambda_i \partial_{ij} F(\vec{\lambda}) + \delta_{ij} \partial_i F(\vec{\lambda}).$$

与 引理 3.2比较可得

$$\lambda_j J_{ij}(\vec{\lambda}) = \mathrm{Cov}_{\vec{\lambda}}(X_i, X_j),$$

这等价于

$$J(\vec{\lambda}) D(\vec{\lambda}) = \mathrm{Cov}_{\vec{\lambda}}(\vec{X})$$

■

引理 4.1 中的公式 给出了雅可比矩阵范数的一个上界：

引理 4.2。 存在一个常数 $C = C(R, q, \Delta) > 0$ ，使得对于所有 $\vec{\lambda} \in D_R$,

$$\|J(\vec{\lambda})\| \le Cn$$

证明。 根据 引理 4.1， $J(\vec{\lambda}) = \text{协方差}\lambda(\vec{X}) \cdot D(\vec{\lambda})^{-1}$，它们都是对称的。利用算子范数的次乘性，以及实对称矩阵的范数等于其最大特征值这一事实，可得

$$\|J(\vec{\lambda})\| \le \|\operatorname{Cov}_{\vec{\lambda}}(\vec{X})\| \cdot \|D(\vec{\lambda})^{-1}\| \le \frac{\tilde{C}n}{1-R}$$

˜其中常数 C 是推论 3.11所给出的那个，且 $1-R$ 是最小¯坐标的一个下界，该坐标属于 λ。 ■

引理 4.3. 存在常数 $C = C(R, q, \Delta) > 0$，使得对所有 $\vec{\lambda}, \vec{\lambda}' \in D_R$，

$$\|\Psi(\vec{\lambda}) - \Psi(\vec{\lambda}')\| \le Cn\|\vec{\lambda} - \vec{\lambda}'\|$$

证明。 固定 $\vec{\lambda}$， $\vec{\lambda}' \in \mathcal{D}$并令 $J_t := J(\vec{\lambda}' + t(\vec{\lambda} - \vec{\lambda}'))$ 对于 $t \in [0,1]$。由微积分基本定理，

$$\Psi(\vec{\lambda}) - \Psi(\vec{\lambda}') = \int_0^1 J_t \cdot (\vec{\lambda} - \vec{\lambda}')\, dt.$$

因此，

$$\|\Psi(\vec{\lambda}) - \Psi(\vec{\lambda}')\| \le \int_0^1 \|J_t \cdot (\vec{\lambda} - \vec{\lambda}')\|\, dt \le \int_0^1 \|J_t\| \cdot \|\vec{\lambda} - \vec{\lambda}'\|\, dt \le Cn\|\vec{\lambda} - \vec{\lambda}'\|$$

其中 C 是由引理 4.2给出的常数。 ■

4.2. 期望映射的满射性

我们希望证明以下结果：

引理 4.4。 存在一个常数 $c = c(R, q, \Delta) > 0$，使得对于任意满足以下条件的 $\vec{n}$

$$\left\| \vec{n} - \frac{n}{q}\vec{1} \right\|_\infty \le cn,$$

存在一个 $\vec{\lambda} \in D_R$，使得 $\mathbb{E}_{\vec{\lambda}}[\vec{X}] = \vec{n}$。

为便于分析，我们将用 $\vec{\theta} \in \mathbb{R}^{q-1}$重新参数化该模型，其中 $\theta_i := \log \lambda_i$。与上一节一样，最后一个逸度参数固定为 $\lambda_q = 1$。然后，在无零区域 $\mathcal{D} := \{\vec{\theta} \in \mathbb{R}^{q-1} : \ |e^{\theta_i} - 1| < R, \ \forall i \in [q-1]\}$内，我们得到以下与 引理 3.1和引理 3.2类似的结论：

$$\nabla \log Z(\vec{\theta}) = \Psi(\vec{\theta})$$

$$\nabla^2 \log Z(\vec{\theta}) = \operatorname{Cov}_{\vec{\theta}}(\vec{X})$$

现在，我们将证明关于期望映射 $\Psi : \mathbb{R}^{q-1} \longrightarrow \mathbb{R}^{q-1}$的一些解析性质，该映射由 $\Psi(\vec{\theta}) := \mathbb{E}_{\vec{\theta}}[\vec{X}]$定义，并将用于证明 引理 4.4。

断言 4.4.1. 存在一个常数 $c_1 = c_1(R, q, \Delta)$，使得对于每个 $\vec{\theta}$， $\vec{\theta}' \in \mathcal{D}$，

$$\|\Psi(\vec{\theta}) - \Psi(\vec{\theta}')\| \ge c_1 n\|\vec{\theta} - \vec{\theta}'\|.$$

因此， Ψ 在$\mathcal{D}$内是单射。

证明。 根据 引理 3.7， $D\Psi(\vec{\theta}) = \operatorname{Cov}_{\vec{\theta}}(\vec{X})$ 的最小特征值为 $\Omega(n)$。由于它是对称的，这意味着存在一个常数 c_1 使得

$$\langle D\Psi(\vec{\theta}) \cdot v, v\rangle \ge c_1 n\|v\|^2.$$

因此，根据微积分基本定理，

$$\langle \Psi(\vec{\theta}) - \Psi(\vec{\theta}'), \vec{\theta} - \vec{\theta}'\rangle = \langle \int_0^1 D\Psi\left(\vec{\theta}' + t(\vec{\theta} - \vec{\theta}')\right) \cdot (\vec{\theta} - \vec{\theta}')\, dt, \vec{\theta} - \vec{\theta}'\rangle$$

$$= \int_0^1 \langle D\Psi\left(\vec{\theta}' + t(\vec{\theta} - \vec{\theta}')\right) \cdot (\vec{\theta} - \vec{\theta}'), \vec{\theta} - \vec{\theta}' \rangle \, dt$$
$$\geq c_1 n \|\vec{\theta} - \vec{\theta}'\|^2$$

By C柯西-施瓦茨，$\langle \Psi(\vec{\theta}) - \Psi(\vec{\theta}') \ \vec{\theta} - \vec{\theta}' \rangle \leq \|\Psi(\vec{\theta}) - \Psi(\vec{\theta}')\| \cdot \|\vec{\theta} - \vec{\theta}'\|$，所以我们得到

$$\|\Psi(\vec{\theta}) - \Psi(\vec{\theta}')\| \geq c_1 n \|\vec{\theta} - \vec{\theta}'\|,$$

这就意味着 Ψ 是单射，正如所需。 ■

断言 4.4.2。 Ψ是开映射。

证明。 根据 引理 3.7， $D\Psi(\vec{\theta})$ 的特征值均为正，因此对于任意 $D\Psi(\vec{\theta})$ 都是可逆的，$\vec{\theta} \in \mathcal{D}$。因此，根据逆函数定理[1]， Ψ 在 $\mathcal{D}$上是局部微分同胚。特别地，[2], 这意味着，对于任意开集 $\Psi(U)$ 都是开集， $U \subseteq \mathcal{D}$。 ■

引理 *4.4* 的证明。 注意，取 $r := \log(1+R)$后，球 $B(\vec{0}, r) := \{\vec{\theta} \in \mathbb{R}^{q-1} : \|\vec{\theta}\| < r\}$包含于 $\mathcal{D}$中，因为 $\log(1-R) < -\log(1+R)$。

考虑该球在期望映射下的像。根据 断言 4.4.2， $\Psi(B(\vec{0}, r))$ 是一个开集，并且我们知道它包含 $\Psi(\vec{0}) = \frac{n}{q}\vec{1}$。另一方面，根据 断言 4.4.1，对于任意 $\vec{\theta} \in \partial B(\vec{0}, r)$，有

$$\|\Psi(\vec{\theta}) - \Psi(\vec{0})\| \geq c_1 n \|\vec{\theta}\| = c_1 n r,$$

因此， $\Psi(\partial B(\vec{0}, r))$ 位于 $B(\Psi(\vec{0}) \ c_1 n r)$ 之外。再结合 $\Psi(B(\vec{0}, r))$ 是开集且$\Psi(B(\vec{0}, r)) \cap B(\Psi(\vec{0}) \ c_1 n r) \neq \emptyset$这一事实，可得 $B(\Psi(\vec{0}) \ c_1 n r) \subseteq \Psi(B(\vec{0}, r))$。

这意味着，任何 $\vec{n}$ 满足 $\|\vec{n} - \frac{n}{q}\vec{1}\| < c_1 n r$ 的对象都包含于 $\Psi(\mathcal{D})$ 中。最后，取 $c := c_1 r / \sqrt{q}$， 我们有：若 $\|\vec{n} - \frac{n}{q}\vec{1}\|_\infty \leq cn$，则

$$\left\|\vec{n} - \frac{n}{q}\vec{1}\right\| \leq \sqrt{q-1} \left\|\vec{n} - \frac{n}{q}\vec{1}\right\|_\infty < c_1 n r$$

因此 $\vec{n} \in \Psi(\mathcal{D})$，如所需。 ■

4.3. Glauber 动力学

我们需要证明，在 $\vec{\lambda}$位于零点自由区域内的条件下，Glauber 动力学经过 $O(n \log \ n \log(\frac{1}{\varepsilon}))$ 步即可混合。我们使用标准的路径耦合论证来证明这一点（参考文献见 [39]）。

我们首先为给定的 λ 定义 Glauber 动力学。

定义 4.5 （Glauber 动力学）。 给定一个图 G ，其有 n 个顶点，最大度为 Δ，颜色数为 $q \in \mathbb{Z}^+$，每种颜色 $c \in [q]$对应一组权重 $\lambda_c > 0$ ，以及一个初始着色$x \in [q]^{V(G)}$，我们在图 G 的顶点的（不一定是正常的） q-着色空间上定义一个马尔可夫链 $\{X_t\}_{t \geq 0}$ ，其中 $X_0 := x$ ，转移过程如下：

(1) 均匀随机选择一个顶点 v 。(2) 从可用颜色列表 $L_v := [q] \setminus X_t(N(v))$ 中随机选择一种颜色 c ，使得选择颜色 i 的概率为 $\frac{\lambda_i}{\sum_{j \in L_v} \lambda_j}$。(3) 令 $X_{t+1}(v) \leftarrow c$，并对所有其他 $w \neq v$，令 $X_{t+1}(w) \leftarrow X_t(w)$。

引理 4.6. 设 $0 < R < 1/10$ 为常数。则对任意满足 $\|\vec{\lambda} - \vec{1}\|_\infty < R$的 $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^q$ ，参数为 $\vec{\lambda}$的 *Glauber* 动力学具有 $t_{mix}(\varepsilon) = O(n \log n \log(\frac{1}{\varepsilon}))$。

[1]例如，我们可以使用定理 9.24 中关于 [35]的版本。[2]正如 [22]所示，局部同胚已经足够。

证明. 给定两个仅在一个顶点 v_0上不同的着色 X_0 与 Y_0 ，我们需要定义 X_1 与 Y_1的一个耦合，其中每个边缘分布的行为与 Glauber 动力学相同，即 $X_1 \sim P(X_0, \cdot)$ 与 $Y_1 \sim P(Y_0, \cdot)$。令 $c_X := X_0(v_0)$ 且 $c_Y := Y_0(v_0)$。

我们采用的耦合方式如下:

(1) 均匀随机选取一个顶点 v （两条链选取的顶点相同）。

(2) 如果 $v \notin N(v_0)$，那么我们知道 $L_{v,\ X_0} = L_{v,\ Y_0}$。因此，我们可以对这两条链进行耦合，使它们始终选取相同的颜色。

(3) 对于 $v \in N(v_0)$ 和 $c \notin \{c_X,\ c_Y\}$，我们耦合两条链，使它们都选取颜色 c，其概率为 y

$$p_c := \frac{\lambda_c}{\max\left\{\sum_{i \in L_{v,X_0}} \lambda_i,\ \sum_{i \in L_{v,Y_0}} \lambda_i\right\}}$$

请注意，在其中一条链中，选取颜色 c 的概率仍可能有剩余。

（4）最后，我们将仍有剩余概率的各链中的选择任意耦合起来，其中也包括 $c \in \{c_X, c_Y\}$ 的情况。

注意，所有满足 $v \notin N(v) \cup \{v_0\}$ 的移动都会使 X 与 Y 之间的距离保持不变。选择 $v = v_0$ 的移动是“好”的，因为它们会使 X 与 Y 之间的距离减少 1（注意，$L_{v,X_0} = L_{v,Y_0}$，所以 v 的颜色总会改变）。选择顶点 $v \in N(v_0)$ 的移动是“坏”的，因为 X 与 Y 之间的距离可能增加 1，其概率至多为 $1 - \sum_{c \notin \{c_X}$

$$_{,x_Y\}} p_c.$$

好步的概率为 $1/n$，而坏步的概率可上界为

$$\frac{\Delta}{n}\left(1 - \sum_{c \notin \{c_X, c_Y\}} p_c\right) = \frac{\Delta}{n} \frac{\lambda_{c_Y} \cdot \mathbf{1}_{c_Y \in L_{v,X_0}}}{\sum_{i \in L_{v,X_0}} \lambda_i} \leq \frac{\Delta}{n} \frac{1+R}{(q-\Delta)(1-R)},$$

其中我们不失一般性地假设 $\sum_{i \in L_v}$ $\lambda_i \geq \sum_{i \in L_{v,Y_0}}$ λ_i.

$_{,X_0}$

因此，经过一次耦合后，汉明距离的期望变化至多为

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[d(X_1, Y_1)] &\leq \mathbb{E}[d(X_0, Y_0)] - \frac{1}{n} + \frac{\Delta}{n} \frac{1+R}{(q-\Delta)(1-R)} \\
&\leq 1 - \frac{1}{n} + \frac{1-c}{n} \\
&= 1 - \frac{c}{n},
\end{aligned}$$

其中 $c := 1/10$。对于最后一个不等式，我们使用了 q 的下界，并利用了以下事实：当 $c = 1/10$ 时，有 $\frac{2R+c-Rc}{(1-R)(1-c)} < 1$。这意味着

$$q \geq 2\Delta + 1 \geq \left(2 + \frac{2R + c - Rc}{(1-R)(1-c)}\right)\Delta = \left(1 + \frac{(1+R)}{(1-R)(1-c)}\right)\Delta$$

so

$$\frac{(q-\Delta)(1-R)}{\Delta(1+R)} \geq \frac{1}{1-c},$$

这正是该不等式所需的结论。

最后，根据 $1 - c/n \leq e^{-c/n}$，我们将 [39] 中的推论 14.8 应用于 $\alpha := c/n$，从而得到$t_{\text{mix}}(1/4) = O(n \log n)$。■

致谢

AK 部分获得了佐治亚理工学院 ARC-ACO 学生奖学金的支持。WP 部分获得了美国国家科学基金会（NSF）资助项目 CCF-2309708 的支持。XP 部分获得了 MSCA-RISE-2020 项目 RandNET（编号 101007705）提供的差旅奖学金，以及由 MI-CIU/AEI/10.13039/501100011033 资助的项目 PID2023-147202NB-I00 的支持。

参考文献

[1] A. Barvinok. 配分函数的组合学与复杂性，第30卷。施普林格，2016。 [2] A. Blanca, P. Caputo, Z. Chen, D. Parisi, D. Štefankovič, and E. Vigoda. 关于马尔可夫链的混合：耦合、谱独立性与熵分解。载于2022年ACM-SIAM离散算法年会（SODA）论文集，第3670–3692页。工业与应用数学学会，2022。 [3] C. Carlson, E. Davies, A. Kolla, and W. Perkins. 固定磁化强度伊辛模型的计算阈值。载于第54届ACM SIGACT计算理论研讨会论文集，第1472–1459页，2022。[4] C. Carlson and E. Vigoda. 用于着色采样的翻转动力学：利用简单度量改进(11/6—ε)。载于2025年ACM-SIAM离散算法年会（SODA）论文集，第2194–2212页。工业与应用数学学会，2025。[5] S. Chen, M. Delcourt, A. Moitra, G. Perarnau, and L. Postle. 通过线性规划改进随机着色采样的界。载于第三十届ACM-SIAM离散算法年会论文集，第2216–2234页。工业与应用数学学会，2019。 [6] Z. Chen, K. Liu, N. Mani, and A. Moitra. 树上着色的强空间混合及其算法应用。载于2023年IEEE第64届计算机科学基础年会（FOCS）论文集，第810–845页。IEEE，2023。[7] Z. Chen, K. Liu, and E. Vigoda. 通过稳定性实现谱独立性及其在Holant类问题中的应用。TheoretiCS，3，2024。[8] E. Davies and W. Perkins. 对有界度图中指定大小独立集的近似计数。《工业与应用数学学会计算杂志》，52(2):618–640，2023。[9] M. Dyer and A. Frieze. 对围长和最大度有下界的图进行随机着色。《随机结构与算法》，23(2):167–179，2003。[10] C. Efthymiou, T. P. Hayes, D. Štefankovič, and E. Vigoda. 稀疏随机图的随机着色采样。载于第二十九届ACM-SIAM离散算法年会论文集，第1759–1771页。工业与应用数学学会，2018。[11] A. Hajnal and E. Szemerédi. P. Erdős猜想的证明。《Colloq Math Soc János Bolyai》，4，1970年1月。[12] T. P. Hayes and A. Sinclair. 图上单点动力学混合时间的一般下界。载于第46届IEEE计算机科学基础年会（FOCS'05）论文集，第511–520页。IEEE，2005。[13] T. P. Hayes and E. Vigoda. 用于随机着色采样的非马尔可夫耦合。载于第44届IEEE计算机科学基础年会论文集，第618–627页。IEEE，2003。[14] O. J. Heilmann and E. H. Lieb. 单体-二聚体系统理论。《数学物理通讯》，25(3):190–232，1972。[15] V. Jain, M. Michelen, H. T. Pham, and T.-D. Vuong. 对指定大小独立集上的下上游走实现最优混合。载于2023年IEEE第64届计算机科学基础年会（FOCS）论文集，第1665–1681页。IEEE，2023。[16] V. Jain, W. Perkins, A. Sah, and M. Sawhney. 通过局部中心极限定理实现近似计数与抽样。载于第54届ACM SIGACT计算理论研讨会论文集，第1473–1486页，2022。[17] M. Jerrum. 一种用于估计低度图中k着色数量的极简算法。《随机结构与算法》，7(2):157–165，1995。[18] M. Jerrum and A. Sinclair. 伊辛模型的多项式时间近似算法。《工业与应用数学学会计算杂志》，22(5):1087–1116，1993。[19] M. R. Jerrum, L. G. Valiant, and V. V. Vazirani. 从均匀分布中随机生成组合结构。《理论计算机科学》，43:169–188，1986。[20] H. A. Kierstead and A. V. Kostochka. 海纳尔–塞梅雷迪均衡着色定理的简短证明。《组合学、概率与计算》，17(2):265–270，2008。[21] A. Kuchukova, M. Pappik, W. Perkins, and C. Yap. 有界度图上川崎动力学的快速与缓慢混合。《随机结构与算法》，67(4):e70038，2025。[22] J. M. Lee. 拓扑流形导论。施普林格，2000。[23] J. Liu, A. Sinclair, and P. Srivastava. 相关性衰减与配分函数零点：算法与相变。《工业与应用数学学会计算杂志》，54(4):FOCS19–200，2025。

[24] K. Liu. 从耦合到谱独立性，以及与下上游走的黑盒比较。载于M. Wootters和L. Sanità编，《近似、随机化与组合优化：算法与技术》（APPROX/RANDOM 2021），莱布尼茨国际信息学论文集（LIPIcs）第207卷，第32:1–32:21页，德国达格施图尔，2021。Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik。[25] F. Martinelli, A. Sinclair, and D. Weitz. 树上独立集、着色及其他模型的快速混合。《随机结构与算法》，31(2):134–172，2007。[26] M. Mézard and G. Parisi. 有限连通度随机受挫系统的平均场理论。EPL（欧洲物理快报），3(10):1067–1074，1987。[27] M. Michelen and J. Sahasrabudhe. 中心极限定理与多项式几何。《欧洲数学会杂志》，2024。[28] M. Molloy. 高围长且最大度图的着色Glauber动力学。载于第三十四届ACM计算理论研讨会论文集，第91–98页，2002。[29] E. Mossel and A. Sly. Gibbs对 $G(n, d/n)$的着色进行快速采样。《概率论及相关领域》，148(1):37–69，2010。[30] V. Patel, G. Regts, and A. Stam. 伊辛模型的近最优无零圆盘。《组合理论》，4(2)，2024。[31] H. Peters and G. Regts. 关于Sokal有关独立集多项式根的猜想。《密歇根数学杂志》，68(1):33–55，2019。[32] H. Peters and G. Regts. 有界度图上伊辛模型配分函数零点的位置。《伦敦数学会杂志》，101(2):765–785，2020。[33] D. Randall and D. Wilson. 伊辛系统自旋构型的抽样。载于离散算法研讨会：第十届ACM-SIAM离散算法研讨会论文集，第17卷，第959–960页，1999。[34] G. Regts. 无零点意味着强空间混合。《概率论及相关领域》，186(1):621–641，2023。[35] W. Rudin. 数学分析原理。第3版，1976。[36] A. D. Scott and A. D. Sokal. 排斥格气、独立集多项式与Lovász局部引理。《统计物理学杂志》，118(5):1151–1261，2005。[37] A. Sly and Y. Zhang. 在非重构区域内，树上着色的Glauber动力学始终快速混合。《应用概率年刊》，27(5):2646–2674，2017。[38] E. Vigoda. 改进着色采样的界。载于第40届计算机科学基础年会（目录号99CB37039）论文集，第51–59页。IEEE，1999。[39] E. L. Wilmer, D. A. Levin, and Y. Peres. 马尔可夫链与混合时间。美国数学学会，普罗维登斯，第107卷，2009。[40] C.-N. Yang and T.-D. Lee. 状态方程与相变的统计理论。一、凝聚理论。《物理评论》，87(3):404，1952。[41] P. Yao, Y. Yin, and X. Zhang. 无零点配分函数的多项式时间近似。载于第49届自动机、语言与编程国际研讨会（ICALP 2022）论文集，第108–1页。Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum für Informatik，2022。