# 通过膨胀范畴的中心极限定理

HenningBasold [*] Ois´ın Flynn-Connolly [†] Chase Ford [‡]
Hao Wang [§]

2026年3月10日

arXiv:2603.08266v1 [cs.LO] 9 Mar 2026

**摘要**

中心极限定理表明，足够大的独立同分布随机变量序列依概率收敛于正态分布。这使得中心极限定理成为统计推理的基本构件，并进而成为对基于统计推断的计算系统进行推理的基本构件，例如概率编程语言、带优化的程序以及机器学习组件。然而，目前尚无关于类中心极限定理结果的一般理论，这迫使实践者在未能很好把握中心极限定理型结果之关键要素的情况下重复证明。本文引入膨胀半范数富集范畴论，作为中心极限的统一框架，并在该框架内建立抽象中心极限定理。我们说明，经典中心极限定理的一个加强版本以及大数定律如何作为本框架的实例得到。此外，我们由该框架导出一个关于辛流形的新中心极限定理，即可观测量中心极限定理，它在统计力学中有应用。

## 1 引言

中心极限定理（CLT）是经典概率论的一项基础结果，它保证：对于一列规模足够大的独立同分布随机变量，只要其一阶和二阶矩有限，对其进行归一化后，该序列就依概率收敛到正态分布。自 Giry [22], 以来，研究者对概率的组合式视角日益关注。这种视角对于推理基于统计推断的计算系统的行为非常有用。由此产生的大量研究成果已足以刻画许多经典结构性结果的函子类比，例如德菲内蒂定理 [18]。现有文献中的一个根本空白，是缺乏对概率论经典极限结果（如中心极限定理 [26]）的范畴论描述。这源于范畴论中缺乏用于对迭代解析收敛进行**定量**推理的框架。本文旨在结合富化范畴论与赋范空间的不动点理论，发展这类方法，使其足以刻画中心极限定理。

本文的首要贡献是利用量化格理论和距离空间 [16], 对巴拿赫不动点定理（BFPT）（定理 3.6）进行公理化。我们将半范数范畴和膨胀范畴定义为对这类距离空间的两个相关 cosmoi 的富集。半范数范畴中的态射带有大小的概念。其优势在于，在这种富集存在的情况下，我们可以将 BFPT 提升到（富集的）范畴层面（定理 6.3），其形式隐约令人联想到 Lawvere不动点定理 [33, 34]。这个版本的 BFPT 似乎提供了一种方便的范畴化工具，能够以直接的方式推导极限结果

[*]LIACS，莱顿大学，h.basold@liacs.leidenuniv.nl
[†]LIACS，莱顿大学，flynncoo@tcd.ie
[‡]LIACS，莱顿大学，m.c.ford@liacs.leidenuniv.nl[§]LIACS，莱顿大学，h.wang@liacs.leidenuniv.nl

from 分析。正如我们将在后续章节中展示的那样，这至少
足以捕捉中心极限
定理。

人们普遍认识到，制定并证明中心极限定理的难点在于需要归一化和重缩放算子 [8, 4]。我们提出**膨胀范畴** 作为解决方案：在其中，态射可以用取值于量子幺半群的半范数来度量，并可由底层量子幺半群的元素进行重缩放，从而为系统地处理这一类问题提供了广泛的框架。作为主要示例，我们通过富集松幺半函子介绍了一种新颖的范畴概率论度量方法（命题 7.10）。我们证明，在逐点可加范畴上，卷积积可以通过幺半群膨胀函子公理化（命题 7.11）。

随后，我们在膨胀范畴中陈述并证明一个一般性的结构中心极限定理（定理 8.15）。具体而言，我们使用膨胀范畴之间的一个富集函子 $F$，其中定义域配备了加法运算。该加法经由函子 $F$ 传递到其像中的对象上。在已知的概率中心极限定理中，函子 $F$ 将向量空间映射到其上期望为 0 且方差有限的概率测度所构成的度量空间。我们利用这一代数结构以及对角映射，在对象的自同态上定义一个二元算子。在经典情形下，这对应于概率测度的自卷积。然而，对于任意给定对象 $F(X)$，此类算子通常不会在整体上成为压缩映射，因此无法直接应用 BFPT。为解决这一问题，我们引入第二个分次函子 $G$，它对应于正定矩阵空间的赋值，并假设存在一个自然变换 $p\colon F \Rightarrow G$，对应于方差。借助富集拉回，我们利用此变换将 $F(X)$分解为纤维。在每个纤维上，重缩放算子 $\vartheta$ 限制为一个压缩的自同态。根据范畴巴拿赫定理，该算子的反复迭代在每个纤维中都收敛到一个中心极限。在概率情形下，这就是方差矩阵固定的高斯分布。这给出了中心极限定理的一个强化版本（定理 8.18）：将正态分布 $\mathrm{N}(0,\ M)$赋给有限维向量空间 $V$ 中每个可能的方差值 $M$，可以将其提升为一个自然变换。最后，我们证明一个新颖的可观测量中心极限定理，展示了这一框架如何有助于从较简单的中心极限定理构造更复杂的中心极限定理，尤其是通过复合推理构造高阶中心极限定理。

我们的工作属于范畴概率论领域，该领域在关于概率过程的推理中发挥着日益重要的作用。我们尤其将本工作视为为随机微分方程设计逻辑推理技术的第一步。这些方程在例如优化中起着关键作用，并且具有由高斯分布给出的随机项。另一个动机是借助大数定律的类似物，对例如光滑流形上的采样过程进行推理。最后，我们想指出，取值于量子幺半群的半范数对于研究算法收敛速率也具有独立的意义，因为多步过程的半范数可估计其最坏情况下的收敛速率。因此，我们的框架或许可用于对极限过程进行定量 推理。

**相关工作**。 鉴于关于中心极限定理的文献浩如烟海，我们将综述限于与本文最为相关的近期进展。

**范畴概率论**。 已有若干尝试运用范畴论工具研究概率论，其早期思想早在Lawvere于20世纪60年代的一份未发表手稿中便已出现。尤其值得注意的是概率单子这一概念，它最早出现于 [22]。随后，这些概念已从可测空间**Meas** 推广到其他密切相关的范畴 [29, 20]。在主要例子中，我们也使用概率函子$\mathrm{P}_l$ ，但我们更关注其松幺半群结构，而非其单子性。

范畴概率论的第二种方法出现得较晚，也具有更强的一般性，即在 [17]中引入的马尔可夫范畴。马尔可夫范畴涵盖了先前的方法，因为概率单子的 Kleisli 范畴通常构成马尔可夫范畴。人们已在 [18] 中以综合方式研究马尔可夫范畴中的极限过程，并在 [39]中通过富集进行研究。据我们所知，有人尝试在马尔可夫范畴中通过充实范畴研究概率，即 [39], ，该文通过富集马尔可夫范畴来研究熵。

特别是，我们最近了解到 [19], ，它为大数定律提供了一种替代方法，其综合性比我们的方法更强。

我们强调，我们的框架与马尔可夫方法互为补充。马尔可夫范畴擅长捕捉概率的复合性和结构性方面，使人们能够以综合方式推理复制和边缘化；但它们并非为捕捉该理论的定量方面而设计，例如收敛速率。我们的富集框架提供了这些分析工具，使人们能够以范畴方式推理极限定理、迭代过程和收敛速率。我们认为，目前这两种视角在范畴概率论中彼此正交；不过，它们也指向了一条通往未来统一的膨胀马尔可夫范畴理论的道路。

其他近期方法包括效应范畴 [27, 11] ，它们最初是为研究量子逻辑而引入的。文献 [25] 引入了一个用于高阶范畴概率论的笛卡尔闭范畴。

**加权与赋范范畴论**。 与我们类似的富集结构也曾在其他语境中出现。加权范畴这一概念最早见于 [23]。这与我们用作富集基底的范畴非常接近，区别在于，我们的取值于量子幺半群，而非仅取值于扩展实数。 [13] 的工作与我们相关，因为他们的富集结构也足以支持巴拿赫不动点定理，不过其风格与我们的相当不同。余代数中也有范畴巴拿赫定理 [1]。该定理适用于完备度量富集范畴之间的压缩函子。因此，完备度量富集范畴这一范畴很可能具有半范数范畴结构。再说一个关联稍远的方面，我们的膨胀范畴似乎与 [40] 中出现的类型系统有些关联。进一步探究这一点将会很有意思。

**关于中心极限定理的不动点方法** 我们的论文直接受到关于中心极限定理的不动点方法的启发 [24], ，并深受其影响；该方法建立在 [43]所述方法的基础之上。

**概述** 在第 2 节简要回顾富化范畴论和量化幺半格的必要背景知识之后，我们在第 3 节为量化幺半格上的完备距离空间建立巴拿赫不动点定理的推广。在第 4 节，我们引入半范数空间范畴。在第 5 节，我们在该范畴上进行富化，并在第6节的富化设置中建立范畴化巴拿赫不动点定理。第 7 节介绍我们关于半范数范畴中卷积积的概念。接下来，在第 8 节，我们建立本文的主要结果——一种适用于膨胀范畴的中心极限定理，并说明如何通过特化得到经典中心极限定理和大数定律。最后，我们在第 9 节介绍一种新颖的中心极限定理，即可观测量中心极限定理；该定理受到辛流形上的统计力学启发。

# 2 预备知识

我们简要汇集富化范畴论 [30] 和量化幺半格 [16],所需的背景知识，并约定符号。我们假定读者熟悉范畴论的基本概念 [2, 36]，例如函子、自然变换、伴随和幺半范畴。

在本文中，我们始终采用**广义元素**的视角。若某个范畴$\mathscr{C}$ 具有终对象$\mathbf{1}$，则对象 $X$ 的一个**点** 定义为一个态射 $x\colon \mathbf{1} \to X$。这推广了集合论情形：其中元素 $x \in X$ 与函数 $\{*\} \to X$一一对应。

## 2.1 富化范畴论

我们首先回顾充实范畴 [30]。

幺半范畴 是一个范畴 $\mathscr{V}$，配备了一个**张量** 双函子 $\mathscr{V}\times\mathscr{V}\xrightarrow{\otimes}\mathscr{V}$，一个 **un对象**I，以及自然同构

$$\alpha\colon (A\otimes B)\otimes C\xrightarrow{\cong} A\otimes(B\otimes C),\quad \lambda\colon \mathrm{I}\otimes A\xrightarrow{\cong} A,\quad \text{and}\quad \varrho\colon A\otimes\mathrm{I}\xrightarrow{\cong} A$$

（分别称为**结合子**、**左单位子**和**右单位子**），并满足凝聚律。若还存在一个凝聚自然同构 $A\otimes B\cong B\otimes A$，则称 $\mathscr{V}$ **对称的**。若对每个 $B\in\mathscr{V}$，函子 $-\otimes B\colon \mathscr{V}\to\mathscr{V}$都有一个右伴随 $[B,-]\colon \mathscr{V}\to\mathscr{V}$，则称对称幺半范畴 $\mathscr{V}$ 是**闭的**。此时，我们有一个同态集的自然同构

$$\mathscr{V}(A\otimes B,C)\cong\mathscr{V}(A,[B,C]),$$

并且我们将 称 $[B,C]\in\mathscr{V}$为从 $B$出发的**内部 hom** 到 $C$。

**除非另有明确说明，均假设 $\mathscr{V}$ 是一个完备且余完备的闭对称幺半范畴**。例如，集合与映射构成的范畴**Set** ，以及由偏序集与单调映射构成、具有笛卡尔闭结构的范畴**Pos** 。一个张量并非笛卡尔积的例子是$\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$，即由实向量空间与线性映射构成、配备通常张量积的范畴。

一个 $\mathscr{V}$**-充实范畴** （或一个 $\mathscr{V}$**-范畴**） $\mathscr{A}$，它始终用下划线表示，由对象集 $\mathrm{ob}(\mathscr{A})$ 以及针对所有对象 $A,B,C\in\mathrm{ob}(\mathscr{A})$ 的下列数据组成：一个对象 $\mathscr{A}(A,B)\in\mathscr{V}$，即对所有 $A,B\in\mathrm{ob}(\mathscr{A})$ 而言**从** $A$ **到** $B$ 的态射，以及一个**复合态射**

$$\cdot\colon \underline{\mathscr{A}}(B,C)\otimes\underline{\mathscr{A}}(A,B)\to\underline{\mathscr{A}}(A,C),$$

以及一个**单位态射** $j_A\colon \mathrm{I}\to\mathscr{A}(A,A)$。这些数据须满足凝聚律（涉及 $\mathscr{V}$作为幺半范畴的结构），用以表明复合是结合的且含单位的。给定一个 $\mathscr{V}$-范畴 $\mathscr{A}$，我们将其**底层范畴** $\mathscr{A}$定义为与 $\mathscr{A}$具有相同对象、且hom集由 $\mathscr{A}(A,B):=\mathscr{V}(\mathrm{I},\mathscr{A}(A,B))$ 定义的范畴。一个**充实函子**$F\colon \mathscr{A}\to\mathscr{B}$，即 $\mathscr{V}$-范畴 $\mathscr{A}$与 $\mathscr{B}$之间的充实函子，由映射 $F\colon \mathrm{ob}(\mathscr{A})\to\mathrm{ob}(\mathscr{B})$ 以及对所有$A,B\in\mathscr{A}$的一个态射组成

$$\underline{F}_{A,B}\colon \underline{\mathscr{A}}(A,B)\to\underline{\mathscr{B}}(FA,FB)$$

在 $\mathscr{V}$中保持恒等态射与复合。若下标可由上下文清楚看出，我们通常会将其省略。给定充实函子 $F$，我们得到函子 $F\colon \mathscr{A}\to\mathscr{B}$，它在对象上按$F$作用，并在态射 $f\colon \mathrm{I}\to\mathscr{A}(A,B)$上通过 $Ff=f\cdot F_{A,B}$作用。一个**充实自然变换** $F\Rightarrow G$ 不过是自然变换$F\to G$。我们用 $\mathscr{V}$-**Cat** 表示由 $\mathscr{V}$-充实范畴、充实函子与自然变换构成的2-范畴。

**例 2.1.** 一个**Set**-范畴 $\mathscr{A}$ 是一个（普通的）局部小范畴。事实上， $\mathscr{A}$ 由一组对象的数据，以及对所有对象对指派一个态射**集合** $\mathscr{A}(A,B)$所构成。复合不过是对所有可复合对函数式地指派一个复合态射，而单位态射不过是对每个被视为广义点$\{*\}\to\mathscr{A}(A,A)$的对象指派一个态射$\mathrm{id}:=j_A(*)$。 $\mathscr{A}$的凝聚律表明复合是结合的，并且与单位态射的复合满足单位律。

## 2.2 量化幺半格与距离空间

Qu量化幺半格是有序代数结构，支持度量空间的一种广义概念 [16] ，
whi接下来我们将对此进行回顾。

我们总是将集合 $X$ 中的一个序列理解为映射 $x\colon \omega\to X$，其中 $\omega$ 表示按标准序排列的自然数偏序集。在方便时，我们使用逐点记法 $(x_n)_{n\in\omega}$，甚至简写为 $(x_n)$，来表示序列 $x$。

一个**完备格** 是一个集合 $V$，配备偏序 $\leq$，使得对每个 $A\subseteq V$，上确界（或**并**） $\bigvee A$ 都存在。于是 $V$ 也存在任意下确界（或 **交**），对每个 $A\subseteq V$，可由 $\bigwedge A=\bigvee A^{\uparrow}$，刻画，其中 $A^{\uparrow}$ 是 $A$ [9, 的上界集。定理 4.2]。对于指标集 $I$ 和点族 $x_i\in V\,(i\in I)$，我们记作 $\bigvee_{i\in I}x_i$ （或简称 $\bigvee x_i$）

$\bigvee\{x_i \mid i \in I\}$，我们用 $x \vee y$表示二元并，并分别用 $\bot$ 和 $\top$表示 $V$的底元和顶元。

一个**量子幺半群** $(\mathrm{V}, \cdot, e)$是一个完备格V，并带有交换幺半群结构，其张量为$\cdot$，单位元为 $e$，且对于每个 $x \in \mathrm{V}$，函子 $x \cdot -\colon \mathrm{V} \to \mathrm{V}$保持并：

$$r \cdot \left(\bigvee s_i\right) = \bigvee (r \cdot s_i).$$

由于并是V（视为一个范畴）中的余极限，根据伴随函子定理，每个 $x \cdot -$ 都有一个右伴随 $[x, -]\colon \mathrm{V} \to \mathrm{V}$，其特征是存在自然同构 $\mathrm{V}(r \cdot s, t) \cong \mathrm{V}(s, [r, t])$。这意味着

$$r \cdot s \leq t \text{ if and only if } s \leq [r, t].$$

若当 $q < e$ 和 $x \neq \top, \bot$时有 $q \cdot x < x$，则称V为**压缩的**。注意，对所有 $r \in \mathrm{V}$都有 $\bot \cdot r = \bot$，因为$\cdot$保持并且 $\bot = \bigvee \varnothing$；我们将这一性质称为**吸收性**。

**例2.2**。完备格 $\mathbf{2} = \bot \leq \top$ 具有量子幺半群结构，其中 $x \cdot y := x \wedge y$且 $e = \top$。那么 $[x, y] := (v_1 \to v_2)$。因此$(\mathbf{2}, \wedge, \top)$显然是压缩的。

**例 2.3.** 令 $[0, \infty]$ 表示由一个点 $\infty$扩充而成的非负实数集。我们将非负实数上的标准序、加法和乘法扩展到 $[0, \infty]$，定义如下：

$$r \leq \infty, \qquad r + \infty = \infty = \infty + r, \quad \text{and} \qquad r \cdot \infty = \infty = \infty \cdot r$$

对所有 $r \in [0, \infty]$均成立。该序使 $[0, \infty]$ 成为一个顶元为 $\infty$的完备格。此外，$[0, \infty]$ 具有量子幺半群 $[0, \infty]_\times$的结构，其中乘法作为张量，1 为单位元。于是，对于 $x$，$y \neq 0$，$\infty$，在 $[0, \infty]_\times$中有 $[x, y] = \frac{y}{x}$。赋予 $[0, \infty]$ 由相反序 $\geq$ 和扩展加法给出的完备格结构后，便得到所谓的 Lawvere量子格。注意，$[0, \infty]_\times$ 是压缩的；显然，Lawvere量子格也是如此。

**广义距离空间** 在本节余下部分中，固定一个量子幺半群 $(\mathrm{V}, \cdot, e)$。我们将通过公理描述广义距离空间这一概念，它涉及取值于 V 的距离值，并将其视为一类适当的 V-模糊关系 [44]。

**定义 2.4**。一个 **V-关系** 是一个集合 $X$，配备一个函数 $d\colon X \times X \to \mathrm{V}$, 该函数为每一对点 $x, y \in X$赋予一个**距离** $d(x, y) \in \mathrm{V}$。V-空间 $X$与 $Y$ 之间的映射 $f\colon X \to Y$是**非扩张** 的，当且仅当

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq d_X(x, y)$$

对所有 $x, y \in X$ 均成立。我们用 **VRel** 表示 V-关系与非扩张映射所构成的范畴。一个 **V-空间** 是一个 V-关系 $(X, d)$，满足

$$d(x, x) \leq \bot \quad \text{and} \quad d(x, y) = d(y, x)$$

对所有 $x, y \in X$ 均成立。我们将以 V-空间为对象、以非扩张映射为态射的范畴记作 $\mathbf{Sp}(\mathrm{V})$。

序列 $x$ 在 $X$ 中的一个**极限点** 是满足以下条件的点 $y \in X$：对于任意 $r > \bot \in \mathrm{V},$，都存在 $N_r \in \omega$，使得对所有 $n \geq N_r$，$d(y, x_n) \leq r$。若一个 V-空间中，序列 $x$ 的任意两个**(序列意义下)豪斯多夫** 极限点 $y, z \in X$ 都满足 $y = z$，则称该 V-空间为（序列意义下）豪斯多夫空间。在这种情况下，我们用 $\lim(x)$ 表示 $x$的唯一极限点。

我们注意到，我们对 V-空间的概念不同于 Flagg 的 V-范畴 [16]（关于度量空间的情形，另见 Lawvere [35]），因为我们所定义的距离要求具有对称性，但不要求满足三角不等式。当 V-空间是豪斯多夫空间时，便可得到度量空间通常所要求的点分离条件，如下所示。

**引理 2.5.** 若（$X, d$）是豪斯多夫的，则 $d$（$x, y$）$= \bot$ 当且仅当 $x = y$。

**引理 2.6.** 非扩张映射保持极限点。

我们从这一形式体系中重新得到熟悉的例子。

**命题 2.7.** 每个度量空间既是豪斯多夫 $[0,\infty]_{+}$-空间，也是豪斯多夫 $[0,\infty]_{\times}$-空间。

范畴 **Sp(V)** 具有对称幺半范畴的结构，其 V-距离空间的张量$A \otimes_{\mathbf{Sp}(\mathcal{V})} B$ $A$， $B$通过在笛卡尔积 $A \times B$上赋予**最大度量**来定义，即

$$d_{A\otimes B}\left((a_1,b_1),(a_2,b_2)\right) = d_A(a_1,a_2) \vee d_B(b_1,b_2).$$

**注 2.8.** 距离空间是基于通常加法的度量空间理论的量子化类比。在许多计算领域中，乘法是更自然的运算，例如统计学中的（对称）散度 [32, 14], 、神经网络[12] 以及定量代数 [37]。

# 3 距离空间中的不动点

本节介绍 V-空间的几何完备性概念，即每个几何序列都有唯一的极限点，并考察由这类空间张成的 **Sp(V)** 的全子范畴。在此框架下，我们建立巴拿赫不动点定理的一个推广，并先回顾该定理。

**定理 3.1 (**巴拿赫不动点定理)。 设$(X, d)$ 是一个非空完备度量空间，且 $f\colon X \to X$ 是一个映射，使得对于某个非负实数 $q < 1$，不等式

$$d(f(x), f(y)) \leq q \cdot d(x, y)$$

对所有 $x, y \in X$均成立。那么， $f$有唯一的不动点 fix( $f$)。此外，对于任意 $x \in X$，我们有 fix( $f$) = 极限 $f_x$，其中 $f_x$ 是由( $f_x)_0 = x$ 和( $f_x)_{n+1} = f((\ f_x)_n)$定义的序列。

为了将定理 3.1 推广到 V-空间，我们首先基于几何完备 V-空间的思想，定义一个合适的**完备** V-空间概念；在这类空间中，每个几何级数都有唯一的极限点。将 $[0,\infty]$替换为更一般的量子幺半群时，会出现一些细微问题，我们先来讨论这些问题。**在下文中，我们假设 V 是一个压缩量子化**。

## 距离空间中的完备性

在应用中，确保性质足够良好的序列存在极限非常重要。在完备度量空间理论中，所有柯西序列都收敛。在本文中，由于我们只需要巴拿赫不动点定理，因此仅关注几何序列。序列 $x\colon \omega \to X$ 是**几何的**，当且仅当存在 $r < e$ 和 $q < \top$，使得对所有 $i$， $j \in \mathbb{N}$

$$d(x_i, x_{i+1}) \leq r^i \cdot q \quad \text{and} \quad d(x_i, x_j) < \top\,.$$

在这种情况下，我们将值 $r$ 称为 $x$的**常数**。若 $(X,\ d)$ 中的每个几何序列在 $X$ 中都有唯一的极限点 $L$，且满足 $d(x_i,\ L) \leq \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \bigwedge_{j>n} d(x_i,\ x_j)$。，则称 $(X,\ d)$**几何完备**（或简称**完备**）。我们用**CSp(V)**（若上下文已明确 V，也简称**CSp**）表示由所有完备 V-空间构成的**Sp(V)** 的全子范畴。

**例 3.2.** 就我们的目的而言，几何序列的关键示例可概括如下。首先，将非扩张映射$f\colon X \to Y$ 的 **Lipschitz 常数** $|f|_{\mathsf{L}}$（或简称 $\|f\|$）定义为所有满足以下条件的 $c \in \mathrm{V}$ 的交：对所有 $x,\ y \in X$，

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y).$$

注意，由于 $f \in \mathbf{Sp}(X,\ )$ 是非扩张的，因此有 $|f|_{\mathsf{L}} \le e$。

现在，对于 V-空间（$X$，$d$）上的自同态 $g\colon\ X \to X$，令 $g_x\colon\ \mathbb{N} \to X$ 表示由（$g_x$）$_0 = x$ 和（$g_x$）$_{n+1} = g$（（$g_x$）$_n$），定义的 $g$ 在 $x \in X$ 上的迭代序列，即 $g_x =$（$g^n$（$x$））。那么，$g_x$ 产生一个常数为 $|g|_{\mathsf{L}}$ 的几何级数。

**例 3.3**。任何定义在 $[0,\infty]$ 上的柯西完备度量空间都是一个完备 $[0,\infty]_\times$-空间，因为在度量空间中，柯西收敛蕴含几何收敛。这是使用级数收敛的柯西判别法以及几何序列求和公式的标准论证。

**命题 3.4**。如果 $X$、$Y \in \mathbf{CSp}$，那么 $X_1 \otimes X_2 \in \mathbf{CSp}$。特别地，通过与 $X_2$ 进行张量积给出的函子（–） $\otimes X_2$ 限制为 **CSp**。

**例 3.5.** 度量空间中的每个收敛序列都有一个等比子序列；在此情形下，所有几何序列都是柯西序列。然而，若没有三角不等式，这一论证便不再成立。因此，下面的巴拿赫不动点定理严格涵盖了经典的巴拿赫不动点定理。

### 完备 V-空间中的不动点

在充分发展了完备性的这一概念后，我们的完备 V-空间不动点定理可表述如下。若 V-空间 $X$ 满足 $d(x,y) < \top$ 对所有$x, y \in X$.均成立，则称其为**度量小** 。

**定理 3.6.** 设 $X$ 是一个非空、度量小的完备$\mathcal{V}$-空间，且 $f\colon\ X \to X$ 是一个非扩张映射，满足 $|f|_{\mathsf{L}} < e$。则 $f$有唯一不动点fix( $f$)，即 $f$(fix( $f$)) =fix( $f$)。此外，对任意 $x \in X$，fix( $f$) 可由下式刻画

$$\mathrm{fix}(f) = \lim (f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}.$$

**例 3.7**。考虑布尔量子幺半群**2**，其张量由 $\wedge$ 给出，单位元为 $1 = \top$。定理 3.6 告诉我们，任何定义在具有 $|f|_{\mathsf{L}} = 0$ 的**2**-空间 $X$ 上的非扩张映射 $f\colon\ X \to X$ 都有唯一不动点 fix $f$ =lim $f_0$。因此，在此情形下，巴拿赫不动点定理说明，离散度量空间上所有 Lipschitz 半范数为 0 的映射都是常数。

## 4 半范数与膨胀空间

本节介绍量子幺半群 V 上的 V-半范数空间范畴，以及 Lipschitz连续映射；该范畴将作为后续发展的充实基。我们将通过后文会用到的半范数范畴核心示例，来说明这一套理论。

**定义 4.1**。**半范数空间** 是一个带有映射 $|–|\colon\ A \to$V 的完备 V-空间 ($A$，$d$)，该映射称为**半范数**。从半范数空间 ($A$，$|\cdot\ |_A$) 到 ($B$，$|\cdot\ |_B$) 的态射是满足 $|f(x)|_B \le |x|_A$ 的非扩张映射 $f\colon\ A \to B$。我们用 **sNorm** 表示半范数空间及其态射构成的范畴。该范畴是一个幺半范畴，见下文命题 4.10，其中 $A \otimes B$ 的载体是**CSp**中载体的积。半范数由下式给出

$$|(a,b)| = |a| \cdot |b|\,.$$

**例 4.2.** 对于任意量子幺半群 V，我们有单元素集合 {$x$}，它配备了距离空间结构 $d(x,\ x) = \bot$，其中 $|x| = e$。这是幺半群结构的单位元。

## 作用空间

我们将发展半范数空间理论，并使我们能够对态射进行恰当的重标度。这些空间将是我们的膨胀空间，接下来我们将发展这种富集的理论。

量子幺半群 V 的**单位区间幺半群** 是 $(\mathrm{V},\cdot, e)$ 上的子幺半群

$$\mathcal{V}_{\leq e} = \{x \in \mathcal{V} \mid x \leq e\}.$$

注意，$\mathrm{V}_{\leq e}$ 继承了 V 的并：给定点族 $x_i \in \mathrm{V}_{\leq e}$，我们有 $x_i \leq e$ 对所有 $i$成立，因此 $\bigvee x_i \leq e$ 也成立。此外，V 的乘法限制在 $\mathrm{V}_{\leq e}$ 上，其中 $e$ 为单位元，这使得 $\mathrm{V}_{\leq e}$ 成为一个量子幺半群。

**定义 4.3**。 完备 V-空间 $(A, d)$ 上的一个**作用** 是一个非扩张映射 $\star\colon \mathrm{V}_{\leq e}\times A \to A$，满足对所有 $a \in A$ 和 $x, y \in \mathrm{V}_{\leq e}$,

$$e \star a = a \qquad \text{and} \qquad x \star (y \star a) = (x \cdot y) \star x.$$

也就是说，$\star$是区间幺半群在 $A$上的左作用。一个**(V-作用空间** 是配备了作用的完备 V-空间。若作用空间 $(A, \star)$ 在 $a \in A$处是**锥形** 的，即映射$\bot \star -\colon A \to A$是取值为 $a$的常数映射，则称 $a$为**基点**。从 $(A, \star_A)$ 到 $(B, \star_B)$ 的**等变映射** 是一个非扩张映射 $f\colon A \to B$，它保持幺半群作用，即对所有 $x \in \mathrm{V}_{\leq e}$ 以及所有 $a \in A$，都有 $(x \star_A a) = x \star_B f(a)$。我们用 **VAct** 表示 V-作用空间及其等变映射构成的范畴。

注意，锥形作用空间之间的等变映射 $f\colon (A, a) \to (B, b)$ 保持基点：

$$f(a) = f(\bot \star_A a) = \bot \star_B f(a) = b.$$

因此，我们可以构造 **VAct•** 的全子范畴 **VAct** ，其对象由所有锥形作用空间构成，态射为保基点映射。

**定义 4.4**。 **膨胀空间** 是一个锥形作用空间，并配备映射 $|-|\colon A \to \mathrm{V}$（称为（**膨胀**）**半范数**），满足

$$|x \star a| = x \cdot |a|$$

对每个 $x \in V$ 和每个 $a \in A$ 都成立。从 $(X, |\cdot|_X)$ 到 $(Y|\cdot|_Y)$ 的锥形半范数空间态射，是满足 $|(f(x))|_Y \leq |x|_X$ 的非扩张映射 $f\colon X \to Y$。我们用 **dNorm** 表示由锥形半范数空间及其态射构成的范畴。

接下来，我们将说明如何在这个范畴上定义幺半群结构。这需要再做一个选择。

**定义 4.5.** 量子幺半群的单位区间幺半群 $\mathrm{V}_{\leq e}$ 上的带点半范数结构称为**单位区间膨胀空间**。我们假设 $\mathrm{V}_{\leq e}$ 配备了一个满足以下公理的 Quantale值度量$d_{\mathcal{V}_{\leq e}}$：

1. 量子化格乘法 $\cdot\colon \mathrm{V}_{\leq e} \times \mathrm{V}_{\leq e} \to \mathrm{V}_{\leq e}$ 关于该度量是非扩张的；2. 半范数是恒等态射 $|-| =$id$_{\mathcal{V}_{\leq e}}$，基点为 $\bot$；3. 空间 $(\mathrm{V}_{\leq e}, d_{\mathcal{V}_{\leq e}})$ 是几何完备的。

**例 4.6.** 在量子幺半群 $[0,\infty]_\times$中，单位区间 $[0, 1]$ 有两种距离空间结构。可以考虑欧几里得距离 $d(x, y) = |x - y|$，或者距离 $d(x, y) = 0$若$x = y$，否则为 $\infty$。

**命题 4.7.** 对于任意选定的单位区间膨胀空间，对称幺半范畴**dNorm** 等价于带基点半范数空间 **sNorm•** 上由 $T(X) = \mathcal{V}_{\leq e} \wedge X$定义的单子 $T$ 的 *Eilenberg-Moore*代数范畴。

**例 4.8.** 终对象**1** 上的唯一态射 $\star\colon \mathrm{V}_{\leq e} \times \mathbf{1} \to \mathbf{1}$ （它属于**CSp** ，并配备了半范数 $\perp$）赋予**1**一个作用结构。

对于任意量子幺半群 V，半范数空间中的终对象就是单元素集 $\{x\}$，配备距离空间结构 $d(x,\ x) = \perp$，以及平凡的幺半群作用。然而，这**并非** 幺半群结构的单位元；单位元是 $\mathrm{V}_{\leq e}$ 本身，并配备通过量化格乘法在自身上的典范作用。

## 闭幺半群结构

我们描述由**sNorm**上的积所诱导的**dNorm** 上的张量积。

**定义 4.9**。 锥形作用空间 $(A,\ a_0)$ 和 $(B,\ b_0)$ 的**张量** $(A,\ a_0) \otimes (B,\ b_0)$ 由集合 $\mathrm{V}_{\leq e} \times |A| \times |B| /\!\sim$ 承载，其中我们将元组 $(q,\ a,\ b)$

1. 我们将所有元组 $(\perp,\ a,\ b)$、$(q,\ a_0,\ b)$ 和 $(q,\ a,\ b_0)$ 视为相同；

2. we identify $(q \cdot r, a, b), (q, r \star a, b_2)$ and $(q, a, r \star b)$.

其配备如下量化格值距离空间结构。自由度量为

$$d_F\left((q_1, a_1, b_1), (q_2, a_2, b_2)\right) = d(q_1, q_2) \vee d_A(a_1, a_2) \vee d_B(b_1, b_2)$$

商度量定义为

$$d_{A\otimes B}\left((q_1, a_1, b_1), (q_2, a_2, b_2)\right) = \bigwedge d_F\left((q_1', a_1', b_1'), (q_2', a_2, b_2',)\right).$$

其中，交取遍 $(q_1, a_1, b_1)$ 和 $(q_2, a_2, b_2)$ 的所有等价类代表元。随后，我们对所得空间进行完备化，以确保所有几何序列都收敛。完备化步骤中添加的点的半范数均为 $\top$。所得结果是一个量化格值度量。作用定义为

$$\star\colon \mathcal{V}_{\leq e} \times A \otimes B \to A \otimes B$$
$$(q, (p, a, b)) \mapsto (q \cdot p, a, b)$$

最后，半范数定义为

$$|-|\colon A \otimes B \to \mathcal{V}, \qquad |(q, a, b)| := q \cdot |a|_A \cdot |b|_B$$

在 $A \otimes B$ 上给出了一个半范数。对象 $\mathrm{V}_{\leq e}$ 是这个幺半群结构的单位元。

**命题 4.10**。 赋值 $(A, B) \mapsto A \otimes B$ 是函子 $\otimes\colon \mathbf{sNorm} \times \mathbf{sNorm} \to \mathbf{sNorm}$ 和 $\otimes\colon \mathbf{dNorm} \times \mathbf{dNorm} \to \mathbf{dNorm}$的对象部分；对于后者，两个态射组成对的作用逐点给出。此外，$\otimes$ 赋予**sNorm**和**dNorm**对称幺半范畴结构，其单位元分别为 $\{x\}$ 和 $\mathcal{V}_{\leq e}$ 。

**sNorm** 和**dNorm** 都是方便的富集基底。

**定理 4.11. sNorm** 和 **dNorm**都是 *cosmoi*：即完备且余完备的闭对称幺半范畴。

证明。 **闭对称幺半结构**：为证明**sNorm**是闭对称幺半范畴，我们构造张量积的伴随。给定 $A,\ B,\ C \in \mathbf{sNorm}$，有

$$[B, C] = \{f\colon B \to C : \exists q \in \mathcal{V} \text{ such that } |f(b)|_C \leq q \cdot |b|_B\}$$

它配备了上确界度量

$$d_{[B,C]}(f, g) = \sup_{b \in B} d_C(f(b, g(b))$$

以及 Lipschitz 半范数

$$|f|_{[B,C]} = \bigwedge \{q \in \mathcal{V} | \forall b \in B. |f(b)|_C \leq q \cdot |b|_B\}$$

最后，我们必须验证伴随

$$\mathbf{sNorm}(A \otimes B, C) \cong \mathbf{sNorm}(A, [B, C]).$$

给定一个态射 $f\colon A \to [B, C]$，对于所有 $a \in A$，由 **sNorm** 中映射关于 Lipschitz 常数的非扩张性，有 $|f(a)|_{[B,C]} < |a|_A$。但是，根据 Lipschitz 半范数的定义，当且仅当对于所有 $b \in B$ 时，这一条件成立

$$|f(a)(b)|_C \leq |f(a)|_{[B,C]} \cdot |b|_B \leq |a|_A \cdot |b|_B$$

由此可知，由下式定义的映射

$$(a, b) \mapsto f(a)(b)$$

恰好满足来自定义 4.1 的非扩张性条件。因此，我们得出结论：它按要求定义了 $\mathbf{sNorm}(A \otimes B, C)$ 中的一个对象。

接下来，我们证明 **dNorm** 是闭幺半的。对于 $B, C \in \mathbf{dNorm}$，我们将 dNorm 中的内部hom $[B, C]$ 定义为 **sNorm** 中的 $[B, C]$ 的子空间，该子空间由关于 $\mathrm{V}_{\leq e}$ 的作用的等变态射组成。来自 **sNorm** 的内部半范数和度量随之限制到该子空间上。由于对于任意 $f \in [A, B]$，都有 $(\bot\star f)(a) = \bot \star f(a)$，而 $B$ 是锥形的，因此该值必为 $B$ 的基点，这使得 $\bot\star f$成为取基元素为值的常值映射，所以该对象自动是锥形的。伴随性则由 **sNorm** 中限制到等变映射上的伴随性推出。

**sNorm 是完备的：** 要证明**sNorm**是完备的，我们必须证明它有积an和等化子。

积：二元积已在定理 4.10 的证明中构造出来（不过，由于单位元的定义方式，幺半范畴结构的其余部分并非笛卡尔结构）。为了构造无限乘积，我们将这一构造推广。对于任意指标集 I，$\prod_{i\in \mathrm{I}} X_i$ 由 Set 中的底层积承载。两个元素$x$、$x' \in \prod_{i\in \mathrm{I}} X_i$ 之间的距离定义为 $\bigvee\{d_{X_i}(x, x') \mid i \in \mathrm{I}\}$。显然，这满足不可区分者的恒等性和对称性。这个空间是序列豪斯多夫的。假设一个序列 $x^{(n)}$有极限点 $y$ 和 $z$。对于任意 $r > \bot$，存在一个 $N_r$，使得对所有 $n \geq N_r$，都有 $d(y, x^{(n)}) \leq r$且 $d(z, x^{(n)}) \leq r$。根据上确界的定义，这意味着对每个坐标 $i \in \mathrm{I}$，都有 $d_{X_i}(y_i, x^{(n)}{}_i) \leq r$且 $d_{X_i}(z_i, x_i^{(n)}) \leq r$。因此，$y_i$和 $z_i$都是序列 $x_i^{(n)}$ 在 $X_i$中的极限点。由于每个 $X_i$ 都是 V-空间，因而是豪斯多夫的，极限唯一，所以对所有 $i$，都有$y_i = z_i$。因此，$y = z$。

最后，我们必须证明 $\prod_{i\in I} X_i$是几何完备的。设 $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$是乘积空间中的一个几何序列，这意味着存在 $r < e$和 $q < \top$，使得 $d(x^{(n)}, x^{(n+1)}) \leq r^n \cdot q$。根据上确界度量的定义，这意味着对于每个坐标 $i \in \mathrm{I}$，都有 $d_{X_i}(x^{(n)i}, x_i^{(n+1)}) \leq r^n \cdot q$。因此，每个投影序列 $(x_i^{(n)})$ 都是 $X_i$中的几何序列。

由于每个 $X_i$ 都是几何完备的，$(x_i^{(n)})$ 收敛到唯一的极限点 $L_i \in X_i$，满足

$$d_{X_i}(x_i^{(n)}, L_i) \leq \bigvee_{m\in\mathbb{N}} \bigwedge_{j>m} d_{X_i}(x_i^{(n)}, x_i^{(j)}).$$

由于坐标距离不超过乘积距离，$d_{X_i}(x^{(n)i}, x^{(j)i}) \leq d(x^{(n)}, x^{(j)})$。代入这个上界，并对所有 $i \in \mathrm{I}$ 取上确界，得到：

$$d(x^{(n)}, L) = \bigvee_{i\in I} d_{X_i}(x_i^{(n)}, L_i) \leq \bigvee_{m\in\mathbb{N}} \bigwedge_{j>m} d(x^{(n)}, x^{(j)}).$$

因此，$L = (L_i)_{i\in I}$ 是唯一的极限点。因此，无限乘积确实是几何完备的。

**等化子：** 因此，只需证明其具有等化子。我们可以显式构造它们：给定$f$，$g\colon A \to B$ 个 **sNorm** 中的态射，其等化子 $E$是 $A$的子空间，其底层集合为

$E = \{x \in A : f(x) = g(x)\}$。该子空间继承了由子空间度量给出的度量和半范数。最后，包含函子 $i : E \hookrightarrow A$ 显然在距离方面是非扩张的，并且也保持半范数（$|i(x)|_A = |x|_E$），这意味着它在半范数方面也是非扩张的。

我们还需要证明，相对于子空间度量，$E$ 是几何完备的。设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $E$中的一个几何序列。由于 $E \subseteq A$ 和 $A$ 是几何完备的，因此该序列收敛到 $A$中唯一的极限 $L$。我们必须证明 $L$ 是 $E$。回顾引理 2.6，**sNorm** 中的态射是非扩张的。由此可知，态射保持极限。因为对于所有 $n$，$f(x_n) = g(x_n)$，所以我们得出 $f(L) = \lim f(x_n) = \lim g(x_n) = g(L)$。因此$L \in E$，这就证明了 $E$ 是完备的。

**sNorm 是余完备的：**

接下来，我们必须证明**sNorm** 具有所有余积和余等化子。

**sNorm 具有余积：**底层集合是不交并，各份之间的距离为$\top$。每份内部的半范数和距离直接继承自原集合。显然，这满足积的泛性质，因为包含映射存在且是等距映射。它也是完备的，因为各份之间的距离为 $\top$，所以每个几何序列最终都必定落在某一份中。

**sNorm 有余等化子：**最后，我们证明**sNorm** 有余等化子。此构造较为复杂；下面概述主要步骤。设 $f, g\colon A \to B$ 是**sNorm**中的态射。我们分两步构造余等化子 $C$：首先构造一个商空间并使其成为豪斯多夫空间，然后应用类似于柯西完备化的构造。

设 $\sim$ 是集合 $B$ 上的等价关系，它将所有 $a \in A$对应的 $f(a)$和 $\sim g(a)$视为等同。令 $B_0 = B/\sim$为商。存在一个投影 $\pi_0 : B \to B_0$。我们通过取以下交，在 $B_0$ 上定义距离函数 $d_{B_0}$。对于$\mathbf{x},\mathbf{x} \in B_0$:

$$d_{B_0}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \bigwedge \{d_B(x_0, y_0) : x_0 \in x, y_0 \in y\}$$

其中，交是对 $x_0 \in \mathbf{x}$ 和 $y_0 \in \mathbf{x}$的所有可能代表元取的。我们通过对同一等价类取交，在 $B_0$ 上定义半范数

$$|x_{B_0}| = \bigwedge \{|x_0|_B : x_0 \in \mathbf{x}\}.$$

由于 $f$和 $g$ 具有 $|f(x)| \leq |x|$这一性质，$\pi_0$ 是半范数空间之间的态射。

接下来，我们必须讨论 $C$ 的完备化。需要提醒读者的是，这与度量空间中的完备化有很大不同。令 $\mathrm{G}(B_0)$ 表示$B_0$ 中常数小于 $e$的几何序列的集合。

**有极限点的序列：**如果几何序列 $(x_i)$ 有一个极限点 $L \in B_0$，我们就将该序列与 $L$等同，并令 $d([x_i], y) = d(L, y)$，且对所有 $y \in C$均有 $|[x_i]|_C = |L|_{B_0}$。

**没有极限点的序列：**考虑 $B_0$中剩余的没有极限点的几何序列的集合，记作 $\mathrm{M}(B_0)$。我们将其对最终相等关系 $\sim$ 取商，即若存在某个 $N > 0$ 使得对所有 $i > N$均有 $x_i = y_i$，则 $(x_i) \sim (y_i)$，从而得到集合 $\mathrm{M}(B_0)$。

我们将完备化 $C$ 定义为不交并 $C = B_0 \sqcup \mathrm{M}(B_0)$。$C$ 上的距离和半范数定义如下:

1. For $x, y \in B_0$: $d_C(x, y) = d_{B_0}(x, y)$ and $|x|_C = |x|_{B_0}$.
2. 对于不同的等价类 $\mathbf{x}$，$\mathbf{y} \in \mathrm{M}(B_0)$，其中 $\mathbf{x} = (x_i)$ 且 $\mathbf{y} = (y_i)$:

$$d_C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \top$$

and

$$|\mathbf{x}|_C = \top$$

3. 对于 $x \in B_0$ 和 $\mathbf{y} \in \mathrm{M}(B_0)$:

$$d_C(x, \mathbf{y}) = \bigwedge_{(y_i)\in\mathbf{y}} \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \bigwedge_{i>n} d(x, y_i)$$

其中，我们对所有等价类取交，这些等价类对应于 $(y_i) \in \mathbf{y}$，且满足 $x = y_1$。

**的几何完备性 $C$：**现在我们证明 $C$ 是几何完备的。考虑一列
列中 $C$，我们需要考虑三种情况：

情况 *1*：除有限多项外，所有项都在 $B_0$。如果（$z_n$）除有限多项外的所有项都在 $B_0$ 中，我们就在 M（$B_0$）中的最后一个点之后截断，然后它便是 $B_0$ 中的一个几何序列。如果它有一个极限 $L \in B_0$，问题就解决了。否则，[（$z_n$）] ∈ M（$B_0$）⊆ $C$ 就是它的极限点。

情况 *2*：有无限多项位于 M（$B_0$）。一旦序列进入 M（$B_0$），就无法转移到 M（$B_0$）中的另一个不同点，因为不同点之间的距离是无限的。因此，它必须留在那里。

情况 *3*：在 $B_0$ 和 M（$B_0$）之间无限次交替。序列（$z_n$）在 M（$B_0$）中不能有多于一个不同的项。这是因为对于 $z_i,\ z_i + k$ 这样的项，我们会有$d$（$z_i,\ z_i + k$）$= \top$，这与我们关于序列中距离始终小于 $\infty$ 的假设矛盾。由此可知，（$z_n$）必须无限多次包含 M（$B_0$）中的同一个点，这意味着它收敛到该值。

**泛性质：**最后，我们必须证明所定义的对象是余等化子。令 $q = i \circ \pi_0 \colon B \to C$，其中 $i \colon B_0 \hookrightarrow C$ 是我们刚刚定义的显然的包含函子。这是 **sNorm** 中的一个态射，并且根据构造，$q \circ f = q \circ g$。

设 $h \colon B \to Z$ 是 **sNorm** 中的一个态射，且 $h \circ f = h \circ g$。态射 $h$ 必须唯一地经由 $B_0$（即简单商）分解为一个非扩张映射 $h_0 \colon B_0 \to Z$。

对于任意 $\mathbf{x} \in \mathrm{M}(B_0)$，其中 $(x_n) \in \mathbf{x}$ 是 $B_0$ 中没有极限的几何序列的一个等价类，序列 $(h_0(x_n))$ 是

$$d_Z(h_0(x_i), h_0(x_{i+1})) \leq d_{B_0}(x_i, x_{i+1}) < r^i \cdot q.$$

我们还可以得到

$$d_Z(h_0(x_i), h_0(x_j))) \leq d_{B_0}(x_i, x_j) < \top$$

因此，序列 $(h(x_i))$ 是几何序列，并且有唯一的极限点 $L$。因此，我们可以通过定义 $h(\mathbf{x}) = L$ 来扩展函数。定义良好。设 $(y_n) \in \mathbf{x}$ 是另一个代表序列。根据 $\mathrm{M}(B_0)$ 的定义，存在 $N$，使得对所有$n > N$，都有 $x_n = y_n$。因此，对于所有 $n > N$，都有 $h_0(x_n) = h_0(y_n)$，所以它们在 $Z$ 中的极限必定相同。

我们现在必须验证$h$ 是$\overline{\mathbf{sNorm}}$中的态射。映射$h$ 按构造在范数上自动是非扩张的。对于半范数条件，若$\mathbf{x} \in \mathbb{M}(B_0)$，则 $|\mathbf{x}|_C = \top$。由此立即得到$|h(\mathbf{x})|_Z \leq \top = |\mathbf{x}|_C$。

接下来，我们必须验证$h$ 在距离上是非扩张的。这对 $B_0$ 与 $\mathrm{M}(B_0)$中的点对自动成立。因此，唯一非平凡的验证是证明 $x \in B_0$ 与$\mathbf{y} \in \mathrm{M}(B_0)$的不等式。

现在$h_0$ 在 $B_0$上是非扩张的，对所有 $k$，我们有：

$$d_Z(h_0(x), h_0(y_k)) \leq d_{B_0}(x, y_k).$$

由于量子幺半群 V 中的并运算与下确界运算是保序的，我们可以将运算 $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \bigwedge_{k>n}$ 应用于该不等式的两边：

$$\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \bigwedge_{k>n} d_Z(h_0(x), h_0(y_k)) \leq \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \bigwedge_{k>n} d_{B_0}(x, y_k).$$

对$\mathbf{y}$ 的$(y_i)$的所有代表元取交，我们注意到右端恰好是 $d_C(x, \mathbf{y})$的定义，左端亦然。

因此，有

$$d_Z(h_0(x), L) \leq d_C(x, \mathbf{y}).$$

我们得出结论，$h$ 是非扩张的，因此是**sNorm**中的一个态射。

$h$ 的唯一性源于$h$ 在 $B_0$ 上是固定的。于是，任意非扩张映射根据引理 2.6 都会将序列的极限映至极限。由此证明**sNorm**有余等化子。

**dNorm 是完备且余完备的：**如果底层范畴完备且完备，那么带基点对象范畴就是完备且余完备的，因为带基点对象构成一个逗号范畴，其中两个函子都是连续且余连续的。

因此，范畴 **dNorm** 是一个建立在完备范畴之上的 Eilenberg-Moore 范畴，并且遗忘函子创建极限。因此它是完备的。

为了证明它是余完备的，我们注意到，根据 [15, 引理 4.20]，由于范畴 **sNorm**有所有有限极限和余极限，作用单子 $\mathrm{V}_{\leq e} \wedge -$ 的底函子有一个右伴随 $[\mathrm{V}_{\leq e}, -]$；它是由保基点映射 $f\colon \mathrm{V}_{\leq e} \to X$组成的集合。该集合带有子距离空间结构。因此它保余极限。所以 Eilenberg-Moore 范畴有所有余极限。□

前述验证的大部分细节都是常规的。我们利用 **dNorm**在 **sNorm** 上的单子性，来确立关于它的余完备性（或完备性）结果。主要的困难在于证明 **sNorm** 有余等化子，因为这需要进行几何完备化；这是一个精细的过程，与度量情形有显著差异。

借助闭结构，我们可以计算恒等映射的半范数。

**命题 4.12**。 **sNorm**和**dNorm** 中的同构具有半范数 $e$。

# 5 半范数与膨胀范畴

本节中，我们引入膨胀范畴，作为抽象表述中心极限型定理的主要工具。

定义 5.1。半范数范畴（分别地，扩张范畴）$\mathscr{C}$ 是一个 sNorm 范畴（分别地，一个 dNorm 范畴）。由于 sNorm（分别地，dNorm）是一个具体范畴，底层范畴 $\mathscr{C}$中的态射$f\colon X \to Y$ 是 $\mathscr{C}(X,Y)$的一个元素。若半范数范畴 $\mathscr{C}$ 中的对象 $X$ 满足：对于所有 $Y \in \mathscr{C}$，空间 $\mathscr{C}(X,Y)$（分别地，$\mathscr{C}(Y,X)$）都是离散的，即，对于所有 $g_1$，$d(g_1,g_2) = \top$ $g_2 \in \mathscr{C}(X,Y)$（分别地，$g_1, g_2 \in \mathscr{C}(Y,X)$），只要 $g_1 \neq g_2$，则称其度量右平凡（分别地，左平凡）。否则称其度量右非平凡。

我们分别定义与 $f$ 的**左**复合和**右复合**，即 $f_*\colon \mathscr{C}(Z,X) \to \mathscr{C}(Z,Y)$，以及 $f^*\colon \mathscr{C}(Y,Z) \to \mathscr{C}(X,Z)$，定义为 $f_*(g) = f \circ g$ 和 $f^*(g) = g \circ f$。如果 $\mathscr{C}$是**左**（分别为**右**）**相容的**，那么对于所有满足 $d(g_1,g_2) < \top$ 的态射 $g_1$ 和 $g_2$，都有

$$d(f_*g_1, f_*g_2) \leq |f| \cdot d(g_1,g_2) \quad \text{resp.} \quad d(f^*g_1, f^*g_2) \leq |f| \cdot d(g_1,g_2).$$

展开充实范畴的定义可知，半范数范畴由一组对象构成，并且对所有 $X, Y \in \mathscr{C}$，都存在一个由态射构成的半范数空间 $\mathscr{C}(X,Y)$。此外，复合是**次乘性**的，也就是说，对于所有 $f\colon X \to Y$ 和 $g\colon Y \to Z$，都有 $|g \cdot f| \leq |g||f|$。还要注意，左相容性和右相容性并非冗余：尽管根据定义，我们有 $f_*g \leq |g||f|$，并且有 $d(f_*g_1, f_*g_2) \leq d(g_1,g_2)$，但度量与范数之间原则上并无关联。相容性可以理解为确保与一个 $g$ 复合是 $|g|$-Lipschitz连续的。在扩张范畴中，我们还可以用 $\mathrm{V}_{\leq e}$ 作用于态射，从而重缩放这些态射。

**例 5.2. 齐次巴拿赫空间**的范畴 **Lip** 以巴拿赫空间（在 R 上）为对象，所有齐次映射（即满足 $f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$ 的映射，其中对任意 $c \in [0,1]$ 和 $x \in \mathbb{R}^n$ 均成立）为它们之间的态射。这些映射不一定是压缩的、线性的或有界的。态射同态对象 $\mathbf{Lip}(A,B)$ 可通过以下公式赋予 $\mathbb{R}$ 的锥作用

$$(c \cdot f) = c \cdot_B f(x) \text{ for } f \in \mathbf{Lip}(A,B)$$

其中我们使用 $B$ 上的标量乘法。此外，这些空间在通常的函数空间上确界度量下构成（广义）度量空间。连续态射$f \in \mathbf{Lip}(V,W)$的半范数是其 Lipschitz 常数，

$$|f|_{\mathrm{L}} := \inf \left\{ c \in \mathbb{R}^{\infty}_{\geq 0} \colon d_W(f(v_1), f(v_2)) \leq c \cdot d_V(a_1,a_2) \forall v_1, v_2 \in V \right\}.$$

特别地，如果 $f$ 在经典意义上不是 Lipschitz 的，那么它的半范数将为 $\infty$。

**命题 5.3**。 范畴 **Lip** 是一个扩张范畴。

**定义 5.4.** 设 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{D}$ 是半范数（分别为膨胀）范畴。半范数函子（分别为膨胀函子） $F$: $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$ 是底层具体范畴上的函子，满足对所有 $f \in \mathscr{C}(A, B)$，均有

$$|F(f)| \leq |f|$$

**例 5.5.** 在**Lip** 上的一个非常简单的膨胀函子示例是 $H : \mathbf{Lip} \to \mathbf{Lip}$，定义为$H(V) = V$，且 $H(f) = \frac{1}{2} \cdot f$。

最后指出，我们可以立即计算许多恒等映射的半范数。

**命题 5.6.** 设 $\mathscr{C}$ 是一个膨胀范畴或半范数范畴。那么，对于任意度量右（或左）非平凡的 $A \in \mathscr{C}$，恒等映射 $\mathrm{id}_A \in \mathscr{C}(A, A)$ 的半范数总是等于 $e$。

## 半范数与膨胀范畴的更多例子

我们通过讨论一些膨胀范畴的具体例子来结束本节。最广泛的一类例子是**Ban**充实范畴。

**命题 5.7.** 任何**Ban**充实范畴 $\mathscr{C}$ 都是膨胀范畴。

由此可知，许多著名的范畴都是膨胀范畴。

**例 5.8.** 巴拿赫空间范畴**Ban** 以自身为充实范畴，因此根据命题 5.7，它是一个膨胀范畴。希尔伯特空间范畴**Hilb** 也是**dNorm** 中的充实范畴，因为它是**Ban**的全子范畴。有限维向量空间范畴**FinVect**，配备 $l_\infty$-范数时，情况也相同。

还有许多例子并非**Ban**充实范畴。

**例 5.9**。 考虑完备扩展度量空间范畴 **CMet** 。由于 **CMet** 以自身为富集范畴，因此它是一个半范数范畴。映射 $f\colon A \to B$ 的半范数定义为利普希茨范数

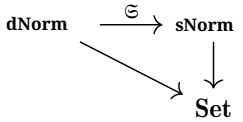
$$\inf\{c \in \mathbb{R}^+ : d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y) \forall x, y \in A\}$$

态射无法进行重缩放，因此它不是扩张范畴。单子 $[0,1] \wedge (-)$[1] 上的代数范畴$\mathbb{R}$**CMet** 是 **dNorm**-富集的。展开来说，在 $\mathbb{R}$**CMet** 中，对象是带点完备度量空间 $(M, m_0, d)$，并配备一个缩放算子 $\cdot : \mathbb{R}^+ \times M \to M$，满足； $d(c \cdot x, c \cdot y) = c \cdot d(x, y)$，对所有 $c \in \mathbb{R}^+$以及 $x, y \in M$成立；度量 $c \cdot f(x) = f(cx)$，且 $0 \cdot f$ 是取值为 $m_0$处常数的常值函数。于是，态射是满足恒等式 $d(c \cdot f(x), c \cdot f(y)) = c \cdot d(x, y)$ 的度量映射 $f\colon M \to N$，其中 $x, y \in M$和 $c \in \mathbb{R}^+$。对于标量$c \in \mathbb{R}^+$和态射 $f\colon A \to B$，映射 $(c \cdot f)$ 按逐点方式定义：$(c \cdot f)(x) := c \cdot f(x)$。

**Pr命题 5.10**。范畴 **CMet** 是一个半范数范畴，而 $\mathbb{R}$**CMet** 是一个扩张范畴 .

## 富集的基变换

最后，我们讨论三类范畴——半范数范畴、扩张范畴和通常范畴——之间的关系。简而言之，这种关系可由下列遗忘松幺半函子的交换图概括，它们可视为包含函子。




(5.1)

扩张范畴与半范数范畴之间存在基变换，扩张范畴（或半范数范畴）与**Set**之间也存在基变换。

[1]这里的单子结构是由乘法诱导出的显然结构。

**定理 5.11**。 每个扩张范畴 $\mathscr{C}$ 都典范地是一个半范数范畴 $\mathfrak{S}_*\mathscr{C}$。

我们将进行的另一项重要基变换是变为 **Set**，即我们从膨胀范畴和半范数范畴得到标准范畴。

**定理 5.12**。 每个膨胀范畴（或半范数范畴） $\mathscr{C}$ 都有一个底层范畴，记作 $\mathscr{C}$；取底层范畴与从膨胀范畴到半范数范畴的基变换相交换。

**注记 5.13**。 这些基变换公式将我们将在全文中使用的符号约定形式化。也就是说，我们可以操作膨胀范畴内部 hom 中的点，就像它们是某个范畴中的态射一样。当变换基到相应的底层半范数范畴时，不会产生歧义。为了使锥形图良定义，还需注意一个细节：所有态射的半范数都必须小于或等于 $e$，以保证存在一个映射 $I \to \mathscr{C}(X, Y)$，即从充实基的幺半单位到 $\mathscr{C}(X, Y)$。

# 6 无范畴 Banach 不动点定理

现在我们讨论膨胀范畴和半范数范畴中的不动点定理。

## 半范数 $\perp$ 的态射

带有半范数 $\perp$ 的态射将在我们的不动点定理中发挥重要作用，因此我们会进一步研究它们。

半范数范畴 $\mathscr{C}$ 中的**终对象** 是指满足 $\mathscr{C}(X, \mathbf{1}_{\mathscr{C}}) = \{y\}$。的对象 $\mathbf{1}_{\mathscr{C}} \in \mathscr{C}$，其中 $|y| = \perp$。由此可知，这样的对象在度量意义下是右平凡的。若对象 $X \in \mathscr{C}$ 满足 $\mathscr{C}(\mathbf{1}_{\mathscr{C}}, X)$ 在度量意义下是完备 V-空间中的度量小对象，则称其为**度量小**对象。

如果 $|\mathrm{id}_{\mathbf{1}_{\mathscr{C}}}| = \perp$。，我们就称 $\mathscr{C}$ 是一个**Lipschitz 范畴** 。

**命题 6.1**。 设 $\mathscr{C}$ 是一个 *Lipschitz* 范畴。那么，对于所有 $X \in \mathscr{C}$ 和广义点 $p \in \mathscr{C}(\mathbf{1}_{\mathscr{C}}, X)$，都有 $|f| = \perp$。

我们称态射 $f \in \mathscr{C}(X, Y)$ 为**常数**，如果它通过终对象分解，从而定义了 $Y$ 的一个广义元素：$\mathbf{1}_{\mathscr{C}} \xrightarrow{p} Y$

回想一下，**良点化范畴**是带有终对象**1** 的范畴，并且若该范畴中的两个态射 $f, g\colon A \to B$ 不相同，则必存在广义点$w\colon \mathbf{1} \to X$，使得 $f \circ w \neq g \circ w$。利普希茨范畴推广了良点化范畴。

**定理 6.2.** 设 $X \in \mathscr{C}$ 为利普希茨半范数范畴中的度量小对象，且 $\mathscr{C}$ 是良基点的。则对所有 $Y \in \mathscr{C}$，态射 $f\colon X \to Y$ 为常数当且仅当它具有半范数 $\perp$。

## 半范数范畴中的不动点

接下来，我们证明巴拿赫不动点定理的一个推广，该推广原生于扩张范畴与半范数范畴。

定理 *6.3.* 设 $J \in \mathscr{C}$ 是半范数（或膨胀）范畴中的度量小对象，且 $\mathscr{C}(\mathbf{1}_{\mathscr{C}}, J)$ 非空。考虑左复合算子 $f_*\colon \mathscr{C}(\mathbf{1}_{\mathscr{C}}, J) \to \mathscr{C}(\mathbf{1}_{\mathscr{C}}, J)$，其中 $f \in \mathscr{C}(J, J)$ 满足 $|f|_{\mathsf{L}} < e$。则 $f_*$ 有唯一不动点 $\mathit{fix}(f) \in \mathscr{C}(\mathbf{1}_{\mathscr{C}}, J)$，即 $f(\mathit{fix}(f)) = \mathit{fix}(f)$。此外，对于任意 $x \in \mathscr{C}(\mathbf{1}_{\mathscr{C}}, J)$，$\mathit{fix}(f)$ 的特征为

$$\mathsf{fix}(f) = \lim(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}.$$

证明。 根据定义 5.1， $\mathscr{C}(\mathbf{1}_{\mathscr{C}}, J)$ 是完备距离空间。我们将证明 $f_*$ 是完备度量空间 $(\mathscr{C}(\mathbf{1}_{\mathscr{C}}, J), d)$ 上的压缩映射。设 $x, y \in \mathscr{C}(\mathbf{1}_{\mathscr{C}}, J)$。由 $J$ 是度量小对象这一事实可得 $d(x, y) < \top$。因此根据定义 5.1，我们有

$$d(f_*x, f_*y) \leq |f|_{\mathsf{L}} \cdot d(x, y)$$

由此可得 $f_*\colon \mathscr{C}(\mathbf{1}_{\mathscr{C}}, J) \to \mathscr{C}(\mathbf{1}_{\mathscr{C}}, J)$ 在 **sNorm** 中具有半范数 $|f|_{\mathsf{L}}$。因此，我们可以应用定理 3.6，推得所需不动点的存在性和唯一性。□

# 7 概率分布与卷积

我们将从讨论富集本身转向探讨中心极限定理。作为贯穿全文的示例，我们引入**有限维向量空间上的概率函子**。我们还将从半范数的角度介绍卷积积。

## 向量空间上的概率函子

我们讨论有限维（f.d.）向量空间上概率测度的度量结构。在此情形下，我们固定量子幺半群 $[0,\infty]_\times$，其中 $[0,1]$ 配备欧几里得度量。

回忆一下，每个有限维向量空间都配备由开球给出的标准拓扑，因此也配备 Borel $\sigma$-代数。因此，我们可以考虑其上的概率测度集合。我们通过傅里叶 $l$-距离为这些测度赋予扩展度量空间的附加结构；关于选择这种度量的更多说明，请参见 [21, 24, 10]。

**定义 7.1**。设 $V$ 是一个配备 $l_\infty$-范数的有限维向量空间。对于 $l \geq 1$，傅里叶 $l$-距离 $d_l$ 是定义在 $V$ 上的概率分布之间的一种度量，其定义如下：

$$d_l(\mu,\tau) = \left( \sup_{t\in V^*, t\neq 0} \frac{\left\|\varphi_\mu(t) - \varphi_\tau(t)\right\|}{\|t\|^l} \right)^{1/l}$$

这里，$\|-\|$ 是 $V^*$ 上的 $l_1$ 范数，它与 $V$ 上的 $l_\infty$-范数互为对偶；$\varphi_\mu(t)$ 表示 $\int_V e^{-i\langle t,\ x\rangle} d\mu$，通常称为 $\mu$ 的**特征函数**。

定义中的常数 $l$ 非常重要。对于大数定律，它取值于区间 $(1,\ 2)$；对于中心极限定理，则取值于 $(2,\ 3)$。我们将使用这个范数，在向量空间上定义良好的概率测度上定义扩展度量结构。

**命题 7.2**。考虑定义在有限维空间 $V$ 上的概率测度集合 $\mathcal{P}_l(V)$，其满足

$$\int_V \|x\|^l d\mu < \infty.$$

那么 $(\mathcal{P}_l(V),\ d_l)$ 是一个扩展度量空间。此外，如果测度 $\mu$、$\tau$ 满足 $d(\mu,\ \tau) < \infty$

$$\int_V \|x\|^n d\mu = \int_V \|x\|^n d\tau$$

对所有整数 $n < l$ 均成立。

显然，当 $l < k$。时，集合 $\mathrm{P}_l(V) \hookrightarrow \mathrm{P}_k(V)$ 之间存在包含关系。

**命题 7.3**。若 $n$ 是整数，则空间 $\mathcal{P}_n(V)$ 是完备度量空间。此外，$\mathcal{P}_l(V)$ 的完备化是 $\mathcal{P}_{\lfloor l\rfloor}(V)$ 的一个子空间，其中 $\lfloor l\rfloor$ 是将 $l$ 向下取整到整数所得的值。

根据前面的结果，可以构造一对函子。

**命题7.4**。令 $\mathcal{P}_l(V)$ 为度量空间 $P_l(V)$ 在 $P_{\lfloor l\rfloor}(V)$ 中的完备化。这定义了函子 $\mathcal{P}_l$: **FinVect** $\to \mathbb{R}$**CMet** 和 $\mathcal{P}_l^0$: **FinVect** $\to \mathbb{R}$**CMet**。

**注7.5**。$\mathrm{P}_l(V)$ 上的膨胀作用由利用函子性提升标量乘法给出：

$$c \star \mu = \mathcal{P}_l(c \cdot -)(\mu)$$

检查这个函子的性质后，我们可以验证以下结论。

**命题7.6**。函子 $\mathcal{P}_l$: **FinVect** $\to \mathbb{R}$**CMet** 是一个膨胀函子。

## 半范畴中的卷积

向量空间上的概率测度有一种非常自然的运算 $\mu_1$, $\mu_2$ 称为**卷积积** $\mu_1 * \mu_2$。它给出了从 $\mu_1$ 和 $\mu_2$中抽取的两个独立随机变量之和的分布。具体来说，它由以下公式给出

$$(\mu_1 * \mu_2)(U) := \int_{V\times V} \chi_U(x+y) d\mu_1(x) d\mu_2(y) \tag{7.1}$$

其中， $\chi_U$ 是开集 $U \subset V$的示性函数，更多详情请参见 [6, 第 20] 节。我们接下来将注意力转向在半范畴的背景下，提炼这一卷积积的基本结构性质。

为了让阐述通俗易懂，我们以具体的方式介绍富集幺半范畴，只引入证明结果所需的最少工具。**幺半扩张范畴**（或**幺半半范畴**）$(\mathscr{C}, \oplus)$是带有张量积 $\oplus$ 的扩张范畴（或半范畴），其中所有结合子和单位子映射的半范数$e$ 均为$e$ ，因此都是非扩张的。对于以下所有例子，这一点都很容易证明，因为这些幺半群结构都是笛卡尔的，且结构映射在底层范畴中是等距映射，因此其半范数为 $e$。

如果幺半扩张范畴（或半范畴） $\mathscr{C}$ 中的每个对象 $X \in \mathrm{ob}(\mathscr{C})$在底层具体范畴中都配备了一个**逐点可加**的**加法态射** $+\colon X \oplus X \to X$，则称其为**逐点可加**。此态射不必满足任何关于富集的性质。

**例 7.7**。 在 **FinVect** 中，幺半结构是笛卡尔积。结合子和单位子映射全都是等距映射，因此其半范数为 $e$。逐点加法就是通常的向量加法。注意，这里的加法态射是扩张的： $+\colon X \oplus X \to X$ 的半范数为 2。

**例 7.8**。 在 **CMet** 中，幺半结构由 **CMet** 上通常的笛卡尔幺半结构诱导而来，也就是说，积赋予最大度量。由于所有结合子和单位子映射都是等距映射，它们的半范数均为 $e$ ，符合要求。范畴$\mathbb{R}$**CMet** 是具有余等化子的对称幺半范畴上的一个伴随单子的 Eilenberg-Moore范畴，因此根据 [28, 定理 2.1] ，它本身也是对称幺半的。

逐点可加半范数范畴中的**线性映射** ，恰好是关于加法态射等变的映射，即，若态射 $f \in \mathscr{C}(A, B)$ 满足下图交换，则它是**线性的**：

$$\begin{array}{ccc} A \oplus A & \xrightarrow{+} & A \\ {\scriptstyle f\oplus f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ B \oplus B & \xrightarrow{+} & B \end{array}$$

$\mathscr{C}$的**线性子范畴**记作 $\mathscr{C}_{\mathrm{lin}}$，它是一个半范数范畴，其对象与 $\mathscr{C}$ 相同，而其态射是 $\mathscr{C}$ 中的线性态射。注意， $\mathscr{C}_{\mathrm{lin}}$ 是存在的，因为它可以利用**dNorm**中的等化子构造出来。

**例 7.9**。子范畴$\mathbf{Lip}_{\mathrm{lin}}$ 的对象相同，但其态射是巴拿赫空间之间的加法映射。这些映射已假定为齐次映射，因此，$\mathbf{Lip}_{\mathrm{lin}}$ 是由巴拿赫空间及其之间的有界线性映射构成的范畴。

设 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{D}$ 是两个幺半范数范畴。一个**（松）幺半群膨胀函子**$\mathscr{C} \to \mathscr{D}$是一个三元组 $(F, \eta, \mu)$，其中 $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$是一个膨胀函子，而 $(F, \eta, \mu)$ 是一个松单函子 $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$，它作用于底层幺半范畴之间，并且对所有 $X, Y \in \mathscr{C}$，都有$|\mu_{X,Y}|_{\mathscr{D}} \le e$ 以及 $|\eta_V|_{\mathscr{D}} \le e$。

这个松幺半富集函子的定义是通常定义的一个特例。

**命题 7.10**。对于 $l \ge 1$，函子

$$(\mathcal{P}_l\colon \underline{\mathbf{FinVect}} \to \underline{\mathbb{R}\mathbf{CMet}}, \mathrm{ind}, u)$$

是一个幺半群膨胀函子，其中松弛幺半群映射由独立概率测度的积给出：

$$\begin{aligned}\mathrm{ind}\colon \mathcal{P}_l V \times \mathcal{P}_l W &\to \mathcal{P}_l(V\times W)\\ (\mu_1,\mu_2) &\mapsto [U\times V \mapsto \mu_1(U)\mu_2(V)],\end{aligned}$$

$an$单位映射 $u\colon\ 1\to\mathcal{P}_l(1)$ 由 $0\mapsto\delta_0$ 给出，其中 $\delta_0$ 是定义在 0上的狄拉克 $\delta$ 分布 .

给定一个松幺半群膨胀函子 $(F\colon \mathscr{C}\to\underline{\mathscr{D}},\underline{\eta},\underline{\mu})$，其中定义域 $\mathscr{C}$是逐点加法范畴，则**卷积积** $*_X$ 是将 $\mathscr{C}$ 上的加法推前，从而在 $\mathscr{D}$ 中 $F$ 的本质像上得到的积，具体为

$$*^{\underline{F}}_{X}\colon \underline{F}X\oplus\underline{F}X \xrightarrow{\mu_{\underline{F}X,\underline{F}X}} \underline{F}(X\oplus X) \xrightarrow{\underline{F}(+_X)} \underline{F}(X).$$

**命题 7.11**。 设$\mathcal{P}_l\colon$ **FinVect** $\to\underline{\mathbb{R}\mathbf{CMet}}$。给定一个有限维向量空间 $V$，上述卷积积

$$\mathcal{P}_l(V)\times\mathcal{P}_l(V)\to\mathcal{P}_l(V)$$

由以下公式给出

$$(\mu_1 * \mu_2)(U) = \int_{(x,y)\in V\times V} \chi_U(x+y)d\mu_1(x)d\mu_2(y).$$

对于每个 $X\in\underline{\mathscr{C}}$ 以及对**角映射** $\Delta_F\to\Delta_F\times\Delta_F$的某种选取，我们可以将$F$**-卷积算子** 定义为与对角映射复合。

对于扩张范畴 $\mathscr{C}$ 中的每个 $X$ 以及对**角映射** $\Delta_F\to\Delta_F\oplus\Delta_F$的某种选取，我们可以将 $\underline{F}$**-卷积算子** 记作 $\vartheta^F_{X,+}$ 并定义为与对角映射复合：

$$\vartheta^{\underline{F}}_X\colon \underline{F}X\xrightarrow{\Delta_{\underline{F}}}\underline{F}X\oplus\underline{F}X\xrightarrow{\mu_{\underline{F}X,\underline{F}X}}\underline{F}(X\oplus X)\xrightarrow{\underline{F}(+_X)}\underline{F}X.$$

若 $[|\vartheta^G_X|,e]\star\vartheta^G_X=\mathrm{id}_{GX}$，则称该 $G$-卷积算子是**可完美重缩放**的。为使符号约定看起来不那么繁杂，我们通常将平范数 $|\vartheta^G_X|=c\in\mathsf{V}$ 记作分次常数。不过请注意，它是 $G$ 的不变量，而非额外数据。

**例7.12.** 考虑 $\mathbb{R}$**CMet**上的笛卡尔对角映射，函子 $|-|$ 可完美重缩放，分次常数为 2。为此，注意卷积算子：

$$\vartheta^{|-|}_V : |V|\xrightarrow{\Delta}|V|\times|V|\xrightarrow{\Delta}|V\times V|\xrightarrow{|+|}|V|$$

只需取一个元素 $x\in|V|$并返回 $2x\in|V|$。因此，若按$\frac{1}{2}=[2,1]$重缩放，就得到恒等映射。同样，若考虑函子 $\Sigma^+$，类似的计算表明，矩阵 $M$ 会被映射到矩阵 $\sqrt{2}M$。 因此，它的分次常数为 $\sqrt{2}$。

## 期望

我们将描述概率分布的经典期望概念的一种范畴化。

令 $|-|\colon\underline{\mathbf{FinVect}}\to\underline{\mathbb{R}\mathbf{CMet}}$ 为遗忘函子， $|V|=V$。这是一个幺半富集膨胀函子，因为 **FinVect** 上所有幺半结构映射的载体都是$\mathbb{R}$**CMet**中的图表。

**例 7.13. FinVect** 上的加法被映射为加法的载体，并作为度量映射属于 $\mathbb{R}$**CMet**。

回顾一下，有限维向量空间 $V$ 上的每个概率测度 $\mu$ 都有期望值

$$\exp[\mu] = \int_V x d\mu(x) \in V.$$

如下结论的证明是直接的。

**命题 7.14.** 对于 $l \in (1, 2)$，将概率测度 $\mu$ 映到其期望所构造的映射 $\exp_V : \mathcal{P}_l V \to |V|$ 定义了从 $\mathcal{P}_l \to |-|$出发的一个自然变换。我们称之为期望自然变换。

### 方差

由基本概率论可知， $\mathbb{R}^n$上期望为 0 的概率测度的**方差矩阵**是矩阵 $\mathrm{Var}_V(\mu)$，其元素由下式给出

$$(\mathrm{Var}_V(\mu))_{ij} = \int_V x_i x_j d\mu.$$

这是一个**对称半正定矩阵**。 我们将据此定义 $\mathrm{P}_l^0$函子。它是 $\mathrm{P}_l$ 函子的一个限制，该函子将有限维向量空间 $V$对应到 $V$ 上期望为零并且

$$\int \|x\|^\lambda d\mu < \infty \text{ for some } \lambda > 2.$$

该函子在函子 $\Sigma^+$: **FinVect** $\to \mathbb{R}$**CMet** 上具有分次，后者将每个向量空间 $V$ 对应到其上的**对称半正定矩阵** $\Sigma^+(V)$ 的集合，并在线性映射上的作用为 $\Sigma^+(f) = f(-)f^T$。 $\Sigma^+(V)$ 上的度量是由如下公式给出的 Bures-Wasserstein 距离 [5]

$$d(A, B) = \left(\mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B) - 2\,\mathrm{tr}\left(A^{1/2} B A^{1/2}\right)^{1/2}\right)^{1/2}$$

其中， $A^{1/2}$ 是 $A$唯一的半正定平方根。例如，在一维情形下，它是 $d(x, y) = |\sqrt{x} - \sqrt{y}|$。集合 $\Sigma^+(V)$ 上有一个 $\mathbb{R}^+$ 的作用，由 $\overline{r} \star M = r^2 \cdot M$ 给出，其中 $\cdot$ 是矩阵上的通常数乘作用。它具有一个幺半群结构：将 $(M, N)$ 映射为一个左上角元素为 $M$ 、右下角元素为 $N$ 的矩阵。

**命题 7.15**。 按照上述定义， $\Sigma^+(V)$ 是 $\mathbb{R}$**CMet** 中的一个元素。

事实上，它定义了一个幺半群膨胀函子。

**命题 7.16**。 函子 $\Sigma^+$ : **FinVect** $\to \mathbb{R}$**CMet** 可扩张为一个松幺半群膨胀函子 $\Sigma^+(V)$ : **FinVect** $\to \mathbb{R}$**CMet**。

方差映射以函子的方式连接概率测度与其底层向量空间。

**定理 7.17**。 对于 $l \in (1, 2)$，方差映射 Var: $\mathcal{P}_l^0 \to \Sigma^+$ 定义了一个自然变换。

## 8 借助膨胀的中心极限定理

现在我们开始阐述本文的主要定理。

## 函子分级与预中心极限定理结构

相对于概率函子，期望和方差具有相同的分层结构。这可以用膨胀函子的更抽象语言来描述。固定一对松幺半膨胀函子

$$\underline{F}, \underline{G} \colon \underline{\mathscr{C}} \to \underline{\mathscr{D}}$$

在幺半膨胀范畴 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{D}$ 之间，除非另有明确说明。我们假设 $\mathscr{C}$ 具有逐点加法，并且 $\mathscr{D}$ 的底层范畴具有富集二元拉回和终对象 $\mathbf{1}_{\mathscr{D}}$。基于此，我们将发展中心极限的一般概念。

**定义 8.1**。 在带有 $|f| \le e$ 的 $\mathscr{D}$ 中，态射 $f\colon X \to Y$ 在广义点 $y\colon 1_{\mathscr{C}} \to Y$ 上的**（富集）纤维**记为 $X_y$，它是下列锥形图中的拉回。

$$\begin{array}{ccc} X_y & \longrightarrow & \mathbf{1}_{\underline{\mathscr{D}}} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle y} \\ X & \xrightarrow{\ f\ } & Y \end{array}$$

由于广义点具有半范数 $|p| = \bot$，这是一个定义良好的锥形极限。

我们简要指出，半范数范畴中的极限在等距映射意义下是唯一确定的，因为 **sNorm** 和 **dNorm** 中的映射都是非扩张的，并且满足 $|f(x)|_{\mathsf{L}} \le |x|_{\mathsf{L}}$。因此，纤维在等距映射意义下确定，而纤维之间映射的半范数则在乘以 $e$ 后确定，也就是说，是严格相等的。我们将此表述为一个命题。

**命题 8.2**。 令 $X_y$ 为 $f$ 上的富集纤维：$X \to Y$，那么

$$\underline{\mathscr{C}}(\mathbf{1}_{\underline{\mathscr{C}}}, X_y) \cong \{x \in \mathscr{C}(\mathbf{1}_{\underline{\mathscr{C}}}, X) \mid p(x) = y \ \mathit{in}\ \mathscr{C}(\mathbf{1}_{\underline{\mathscr{C}}}, Y)\},$$

其中后者配备了来自 $X$ 的子空间度量和子空间半范数。

**定义 8.3**。 相对于 $G$，$F$ 的**分次**是一个自然变换 $p\colon F \to G$，它与松幺半映射及求和交换，也就是说，以下两个图表交换，并且每个 $p_X$ 都是满态射，且满足 $|p_X| \le e$。

$$\begin{array}{ccc} \underline{F}_{lin}(X) \oplus \underline{F}_{lin}(Y) & \xrightarrow{p_X \oplus p_Y} & \underline{G}_{lin}(X) \oplus \underline{G}_{lin}(Y) \\ \downarrow{\scriptstyle \mu(F)_{X,Y}} & & \downarrow{\scriptstyle \mu(G)_{X,Y}} \\ \underline{F}_{lin}(X \oplus Y) & \xrightarrow{\ p_{X\oplus Y}\ } & \underline{G}_{lin}(X \oplus Y) \end{array}$$

and

$$\begin{array}{ccc} \underline{F}_{lin}(X \oplus X) & \xrightarrow{p_{X\oplus X}} & \underline{G}_{lin}(X \oplus X) \\ \downarrow{\scriptstyle \underline{F}(+)} & & \downarrow{\scriptstyle \underline{G}(+)} \\ \underline{F}_{lin}(X) & \xrightarrow{\ p_X\ } & \underline{G}_{lin}(X). \end{array}$$

这里，$\mu(F)$ 和 $\mu(G)$ 是松幺半函子 $F$ 和 $G$ 的相干映射。**分次对角映射** 是一对自然变换 $\Delta_F\colon F \to F \oplus F$ 和 $\Delta_G\colon G \to G \oplus G$，以及一个修正 $\mu\colon \Delta_F \to \Delta_G$。

**例 8.4**。 概率函子有两个分次。

1. 对于 $l \in (1, 2)$，函子 $\mathrm{P}_l$ 关于 $|-|$ 进行分次。分次由映射 $\exp_V\colon \mathrm{P}_l(V) \to |V|$ 给出，该映射将每个 $\mathrm{P}_l(V)$ 中的概率测度映射为其期望。2. 对于 $l \in (2, 3)$，函子 $\mathrm{P}_l$ 关于 $\Sigma^+$ 进行分次。分次由映射 $\mathrm{Var}_V : \mathrm{P}_l(V) \to \Sigma^+(V)$ 给出，该映射将每个 $\mathrm{P}_l(V)$ 中的概率测度映射为其方差矩阵。

在这两种情况下，被推前的运算都是向量空间上的加法。

**注 8.5.** +的半范数不要求小于 $e$，通常也不会小于它。例如，**Lip** 中加法的半范数为 2。这正是中心极限定理和大数定律中重缩放因子的由来。

下面给出主要的结构性定义。

**定义 8.6.** 一个 **pre-CLT 系统**$(F, G, \Delta_F, \Delta_G, p, \mu)$由以下数据组成

1. $F$ 关于可完美重缩放的 $G$的 $p$ 分次。
2. 一个分次对角映射 $(\Delta_F, \Delta_G, \mu)$，使得对所有 $X \in \mathscr{C}$，下图交换

$$\begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{\Delta_F} & FX \oplus FX \\ \downarrow{\scriptstyle p_X} & & {\scriptstyle p_X \oplus p_X}\downarrow \\ GX & \xrightarrow{\Delta_G} & GX \oplus GX. \end{array}$$

若 $(F, G, p)$ 是一个**笛卡尔预中心极限定理系统**，则称之为笛卡尔预中心极限定理系统；此时 $(F, G, \Delta_E, \Delta_G, \mu)$ 是一个 pre-CLT 系统，并且$\Delta_F, \Delta_G, \mu$ 由 $\mathscr{D}$ 上的笛卡尔对角映射诱导。

我们的主要例子是 pre-CLT 系统，证明相当冗长，但本质上只是图表追逐。

**命题 8.7.** 这两者都是笛卡尔 *pre-CLT* 系统：

*1.* 元组 $(\mathcal{P}_l, |-|, \exp)$。*2.*
元组 $(\mathcal{P}_l^0, \Sigma^+, \mathsf{Var})$。

膨胀范畴中的态射往往没有足够多的点，因而难以用于实际应用。一旦我们对态射进行了重缩放，就不再需要重缩放机制，因此我们将其舍弃，并在定理 5.11 中进行基变换，从膨胀的 $\mathscr{C}$ 转到底层的半范数范畴 $\mathfrak{S}_*\mathscr{C}$，后者拥有更多的点。

**定理 8.8.** 给定一个 *pre-CLT* 系统 $(F, G, p, \Delta_E, \Delta_G, \mu)$，图表

$$\begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{[c,e]\bigstar \vartheta_X^F} & FX \\ & {\scriptstyle p_X}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p_X} & \\ & GX & \end{array}$$

交换。

此外，在 $\mathfrak{S}_*\mathscr{D}$ 中取的、$GX$ 的每个广义点 $\mathbf{1}_{\mathscr{D}} \xrightarrow{p} GX$ 在 $p_X$ 上的纤维 $F(X)_p$ 使得 $\mathscr{D}(\mathbf{1}_{\mathscr{D}}, F(X)_p)$ 非空。态射 $[c, e]\bigstar \vartheta_X^F$ 诱导一个自同态

$$\vartheta_p \in \mathfrak{S}_*\mathscr{D}\left(F(X)_p, F(X)_p\right).$$

其中 $c$ 是$G$的分次常数。

**例 8.9.** 对于笛卡尔预中心极限定理系统 $(\mathrm{P}_l^0, \Sigma^+, \mathsf{Var})$ 与向量空间 $V$，某个特定选择矩阵 $M \in \Sigma^+(V)$ 上的纤维将是度量空间 $\mathrm{P}_l^0(V)_M$，它恰好由 $\mathrm{P}_l^0(V)$ 中方差为 $M$ 的概率测度组成。对于 $(\mathrm{P}_l, |-|, \exp)$，它是由 $\mathrm{P}_l(V)$ 中期望为 $x$ 的概率测度构成的度量空间。在这两种情形中，我们从 $\mathbb{R}$**CMet** 转到**CMet** 以进行进一步的计算。

验证完结构条件后，我们可以继续检查纤维上的解析条件。

**定义 8.10**。 给定一个 pre-CLT 系统 $(F,\ G,\ p,\ \Delta_F,\ \Delta_G,\ \mu)$。 **$p$-限制卷积算子** 记作 $(\vartheta_p)_*$，其定义首先是考虑限制 $[c,e]\star\vartheta_X^F$到一个元素 $\vartheta_p\in\mathfrak{S}_*\mathscr{C}\left(F(X)_p,\ F(X)_p\right)$。然后

$$(\vartheta_p)_*:\mathfrak{S}_*\mathscr{D}\left(\mathbf{1}_{\mathscr{D}},F(X)_p\right)\to\mathfrak{S}_*\mathscr{D}\left(\mathbf{1}_{\mathscr{D}},F(X)_p\right)$$

是 **sNorm** 中的态射，通过与 $\vartheta_p$ 进行后复合定义。

**示例 8.11**。 1. 在大数定律示例中， $x$-限制卷积算子是将 $\mu\mapsto\frac{1}{2}\mu*\mu$ 限制在期望为 $x$ 的概率测度上的映射。

2. 在中心极限定理示例中， $M$-限制卷积算子是将 $\mu\mapsto\frac{1}{\sqrt{2}}\mu*\mu$ 限制在方差矩阵为$M$ 的概率测度上的映射。

受限的 $p$-卷积还可以利用将 $G$-卷积算子分解为 $G(+)\circ\mu(G)\circ\Delta_G$ 的分解进一步拆解。

**Pr命题 8.12**。 $p$-限制卷积算子 $\vartheta_p$ 在纤维 $F(X)_p$ 上允许进行因子 $tor$-分解

$$\vartheta_p=\alpha_p\circ m_p\circ\delta_p$$

经过由分次结构所诱导的中间纤维。若 $\alpha_p$的半范数小于 $e$，则 $|\vartheta_p|<e$。

定义 8.13 中的第二个条件也可以用半范数 $|\alpha_p|$来表述。不过，我们发现，在实际例子中，计算它比计算 $|\vartheta_p|$ 更困难，因此选择了后者。

## 通过 CLT 系统得到的范畴中心极限定理

简而言之，范畴中心极限定理从根本上说，是关于这个$p$限制算子在每个纤维中收敛到一个中心极限。为确保解析收敛，我们必须施加解析条件。

**定义 8.13**。 若一个 pre-CLT 系统 $(F,G,p,\Delta_F,\Delta_G,\mu)$ 对每个广义点 $\mathbf{1}_{\mathscr{D}}\xrightarrow{p}G(X)$ 均满足以下条件，则称其为一个 **CLT 系统**：

1. 纤维 $F(X)_p$ 在度量意义下是小的。
2. $p$ 限制的卷积算子 $\vartheta_p$ 是严格压缩的，即 $|\vartheta_p|<e$。

如果它作为 pre-CLT 系统是笛卡尔的，我们就称其为 **笛卡尔 CLT 系统** 。

对于我们一直讨论的例子，这个条件都成立。

**定理 8.14.** 以下两者都是笛卡尔 *CLT* 系统：

*1.* 元组 $(\mathcal{P}_b,|-|,\exp)$。

*2.* 元组 $(\mathcal{P}_l^0,\Sigma^+,\mathsf{Var})$。

证明思路。 首先验证，对于每个 $x\in|V|$（分别对于 $M\in\mathrm{P}_l^0(V)$），$\mathbf{CMet}(1,\mathrm{P}_l(V)_x)$（分别为 $\mathbf{CMet}(1,\mathrm{P}_l^0(V)_M)$ 是度量空间，而非扩展度量空间。然后必须针对每个 $x$，明确计算算子 $\mu\mapsto\frac{1}{\sqrt{2}}\mu*\mu$ 在$\mathbf{CMet}(1,\mathrm{P}_l(V)_x)$ 中的 Lipschitz 界。□

一旦有了 CLT 系统，通过检查定理 6.3 的条件，我们便可推导出每个纤维中都存在一个**中心极限**。

定理 *8.15*（范畴中心极限定理）。假设 $(F, G, p, \Delta_F, \Delta_G, \mu)$ 是一个 CLT 系统。那么对于每个广义点 $p: 1 \to G(X)$ *in* $\mathfrak{S}_*\mathscr{D}$，纤维 $F(X)_p$ 上的卷积算子 $\vartheta_p$ 都有唯一不动点 $N_p \in \mathscr{D}(1, F(X)_p)$，我们称之为中心极限。对于任意初始点 $x_0 \in \mathscr{D}(1, F(X)_p)$，这个不动点由以下极限给出：

$$\mathcal{N}_p = \lim_{n\to\infty} (\vartheta_p)^{\circ n}(x_0).$$

将此定理应用于我们的主要示例，我们可以立即得到大数定律和中心极限定理的若干版本作为推论。

**推论 8.16**（概率极限定理）。

*1.* 设 $\mu$ 是有限维向量空间 $V$ 上的概率测度，且对某个 $\lambda > 1$ 有 $\int \|x\|^\lambda d\mu < \infty$。那么，当 $n \to \infty$ 时，$\frac{1}{2^n}\mu^{*2^n}$ 收敛，其极限仅取决于 $\mu$ 的期望。*2.* 设 $\mu$ 是有限维向量空间 $V$ 上的概率测度，其期望值为 $0$，且对某个 $\lambda > 2$ 有 $\int \|x\|^\lambda d\mu < \infty$。那么，当 $n \to \infty$ 时，$\frac{1}{\sqrt{2^n}}\mu^{*2^n}$ 收敛，其极限唯一地由 $\mu$ 的方差矩阵决定。

**例 8.17.** 对于笛卡尔 CLT 系统 $(\mathrm{P}_l^0, \Sigma^+, \mathrm{Var})$，中心极限是狄拉克 δ 测度；对于笛卡尔 CLT 系统 $(\mathrm{P}_l^0, \Sigma^+, \mathrm{Var})$，中心极限是高斯分布。通过证明它是 $p$ 限制算子的不动点即可验证这一点，进而可由中心极限的唯一性得出结论。

中心极限具有良好的函子性。

**定理 8.18**（中心极限的函子性）。在 *Lipschitz* 范畴 $\mathscr{D}$ 中，映射

$$\eta_X : \mathscr{D}_{lin}\left(\mathbf{1}_{\mathscr{D}}, \underline{G}(X)\right) \to \mathscr{D}_{lin}\left(\mathbf{1}_{\mathscr{D}}, \underline{F}(X)\right) \quad p \mapsto i_p \circ \mathcal{N}_p$$

其中 $i_p : F(X)_p \to F(X)$ 是典范包含，定义了一个取值于 **Set** 的自然变换

$$\eta : \mathscr{D}_{lin}\left(\mathbf{1}_{\mathscr{D}}, \underline{G}(-)\right) \to \mathscr{D}_{lin}\left(\mathbf{1}_{\mathscr{D}}, \underline{F}(-)\right)$$

我们称之为 取值于 **Set** 的中心极限自然变换。

证明略述。结论基本上由不动点的唯一性得出。通过图表追逐可以证明，给定映射 $f: X \to Y$，存在一个诱导映射 $F(X)_p \to F(Y)_{f(p)}$，且该映射相对于 $p$-限制卷积 $\vartheta_p$ 是等变的。特别地，这种等变性意味着它将不动点映到不动点，因此必将每个纤维中的中心极限映到另一个纤维中的中心极限。结论由此得证。□

**例 8.19**。范畴**CMet** 是 Lipschitz 范畴，因此在大数定律的情形下，该定理立即给出一个相当显然的结果：给定线性映射 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，沿 $\mathrm{P}_l(f) : \mathrm{P}_l(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{P}_l(\mathbb{R}^n)$ 推前狄拉克 δ 分布 $\delta_x$，所得将是狄拉克 δ 分布 $\delta_{f(x)}$。对于中心极限定理，该定理说明，沿线性映射将高斯分布 $\mathrm{N}(0, M)$ 沿 $\mathrm{P}_l(f) : \mathrm{P}_l(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{P}_l(\mathbb{R}^n)$ 映射，其像将是高斯分布 $\mathrm{N}(0, fMf^T)$。

# 9 观测量中心极限定理

最后，我们通过提出并证明一种新颖的观测量中心极限定理（CLTO）来结束这些示例。这说明了如何由较简单的中心极限定理构造出更复杂的中心极限定理。

## 可观测量范畴

下面这个定义背后的直觉是：可测空间 $M$ 充当一个黑箱，而函数 $H\colon M \to \mathbb{R}$ 则代表可读取的输出。

一个**内扩张范畴** 是一个有序对 $(\mathscr{C}, \mathscr{D})$，满足 $\mathscr{D}$ 是一个幺半扩张范畴，且 $\mathscr{D}$ 是 $\mathscr{C}$ 的幺半子范畴。一个**内扩张函子** 是一个有序对 $(F, G) : (\mathscr{C}, \mathscr{D}) \to (\mathscr{A}, \mathscr{B})$，满足底函子 $G$ 是 $F$ 到 $\mathscr{D}$ 的限制。

**定义 9.1.** 设 $(\mathscr{C}, \mathscr{D})$ 是一个内扩张范畴。$\mathbf{Obs}(M, \mathscr{D})$**可观测量范畴** 自 $M \in \mathscr{C}$ 是逗号范畴 $M/\mathscr{D}$。具体而言，$\mathbf{Obs}(M, \mathscr{D})$ 的对象是形如 $(V, H)$ 的有序对，其中 $V \in \mathscr{D}$，且 $H \in \mathscr{C}(H, V)$ 是一个态射，我们称之为**可观测量**。从 $(V, H_1)$ 到 $(W, H_2)$ 的态射是一个态射 $\beta \in \mathscr{D}(V, W)$

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{H_1} & V \\ & \searrow^{H_2} & \downarrow{\scriptstyle \beta} \\ & & W \end{array} \tag{9.1}$$

这是一个扩张范畴。两个态射 $(\alpha_1, \beta_1)$,$(\alpha_2, \beta_2)$ 之间的距离为

$$d_{\mathbf{Obs}(\mathscr{C}, \mathscr{D})}\left((\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)\right) = d_{\mathscr{D}}(\beta_1, \beta_2)$$

半范数是该映射的 Lipschitz 常数 $|\beta|$。

**命题 9.2。** 范畴 $\mathbf{Obs}(M, \mathscr{D})$ 是一个对称幺半扩张范畴，其加法按点进行。此外，若 $(F, G) : (\mathscr{C}, \mathscr{D}) \to (\mathscr{A}, \mathscr{B})$ 是一个 *i.d.* 膨胀函子，则可诱导出一个幺半膨胀函子

$$\mathbf{Obs}(F, G)\colon \mathbf{Obs}(M, \mathscr{D}) \to \mathbf{Obs}(FM, \mathscr{E}).$$

存在一个强幺半扩张函子 $\mathbf{Obs}(M, \mathscr{D})$ 到 $\mathscr{D}$。

**定义 9.3。** 该**观测函子** 是一个函子

$$O(M, \mathscr{D})\colon \mathbf{Obs}(M, \mathscr{D}) \to \mathscr{D}, \qquad (H, V) \mapsto H.$$

这个函子只是逗号范畴中的一个投影。

**命题 9.4。** 观测函子是强幺半的，保持半范数，并且与 $\mathscr{C}$-膨胀函子交换。

现在我们证明主要结果：

**定理 9.5.** 设 $M \in \mathscr{A}$ 为一个对象，并设 $(F, G) : (\mathscr{A}, \mathscr{C}) \to (\mathscr{B}, \mathscr{D})$ 是内扩张函子，使得对于某个 $U$，$(G, U, p)$ 构成一个笛卡尔 *CLT* 系统。假设包含函子 $\mathscr{D} \to \mathscr{B}$ 是连续且余连续的。那么元组

$$(\mathbf{Obs}(FM, G), p_{O(-)} \circ \mathbf{Obs}(M, G), \mathbf{Obs}(M, p))$$

也是一个笛卡尔 *CLT* 系统。

作为一个具体示例，我们使用如下定义的范畴 $\mathbf{Meas}_b$ ： 有限维向量空间 **FinVect** 与其他可测空间 **Meas**′ 的并集，其中到**FinVect**的态射被限制为**有界的**可测函数。范畴$\mathbf{Meas}_b^0$ 将是这类带点空间所构成的范畴，其中 **FinVect** 的成员取其原点作为规范基点。这定义了一对 i.d. 范畴（$\mathbf{Meas}_b$,**FinVect**）和（$\mathbf{Meas}_b^0$,**FinVect**）。于是存在 i.d. 函子（$\mathrm{P}, \mathrm{P}_l$）和（$\mathrm{P}^0, \mathrm{P}_l^0$），它们由一般可测空间上的 Giry 单子给出，但在**FinVect**上分别限制为 $\mathrm{P}_l$ 和 $\mathrm{P}_l^0$。下面的结论是直接的。

**推论 9.6**。 令 $M \in \mathbf{Meas}_b$。元组

$$(\mathbf{Obs}(\mathcal{P}M, \mathcal{P}_l), \exp_{O(-)} \circ \mathbf{Obs}(\mathcal{P}M, \mathcal{P}_l^0), \mathbf{Obs}(\mathcal{P}M, \exp))$$

$$(\mathbf{Obs}(\mathcal{P}^0M, \mathcal{P}_l^0), \mathsf{Var}_{O(-)} \circ \mathbf{Obs}(\mathcal{P}^0M, \mathcal{P}_l^0), \mathbf{Obs}(\mathcal{P}^0M, \mathsf{Var}))$$

二者都是笛卡尔 *CLT* 系统。

**例 9.7**。 在辛流形 [3, 38], a 上的统计力学背景下，**经典哈密顿系统** 是一个三元组 $(M,\ \lambda_\omega,\ H)$，其中 $M$ 是一个带有刘维尔测度 $\lambda_\omega$（期望为 $m \in M$）的紧致辛流形，而 $H\colon\ M \to \mathbb{R}$ 是哈密顿量。考虑一组 $2^N$ 互不相互作用且完全相同的系统。系综的总能量由各个系统的能量相加得到，即 $H_{tot}(x_1,\ \ldots\ldots,\ x_{2^N}) = \sum_{i=1}^{2^N} H(x_i)$。由于流形是可测空间，我们有 $(H,\ \mathbb{R}) \in \mathbf{Obs}(M,$ **FinVect)**。 假设初始能量分布的推前均值为零且方差有限，根据推论 9.6，随着系综中流形的数量趋于无穷，总能量的归一化将收敛到 CLT 系统的不动点。

# 10 结论

本文介绍了膨胀／半范数范畴，将其作为关于收敛进行定量推理的统一框架。我们建立了范畴化巴拿赫不动点定理，并将其应用于证明结构中心极限定理。我们展示了这一抽象定理能够恢复经典中心极限定理和大数定律，并且可以系统地推导出诸如可观测量中心极限定理等新结果。

未来的工作有几个很有前景的方向。首先，该框架自然地指向与马尔可夫范畴的统一，进而发展出一种结合结构化推理与定量推理的膨胀马尔可夫范畴理论。富集与类型论之间的联系也值得研究。最后，当然，我们也希望看到一些与这一理论相关的实际发展，例如用于概率编程中形式化验证的实现。

# 参考文献

[1] J. Ad´amek 和 J. Reiterman。以巴拿赫不动点定理作为数据类型方程的基础。《应用范畴结构》，2(1):77–90，1994。doi:10.1007/BF00878504。[2] Jiˇri Ad´amek、Horst Herrlich 和 George Strecker。《抽象范畴与具体范畴：范畴之乐》。约翰·威立父子公司，1990。[3]Frederic Barbaresco。Souriau 的量子力学几何原理。载于《几何信息科学。第二部分》，第 14072 卷《计算机科学讲义》，第 372–381 页。施普林格，Cham， [2023] ©2023。网址：https://doi.org/10.1007/ 978-3-031-38299-4_39, doi:10.1007/978-3-031-38299-4_39。[4] Timoth´ee B´enard 和 Emmanuel Breuillard。幂零李群上的中心极限定理。《概率年刊》，53(2):668–719，2025。doi:10.1214/24-aop1719。[5] Rajendra Bhatia、Tanvi Jain 和 Yongdo Lim。正定矩阵之间的 Bures-Wasserstein 距离。《数学博览》，37(2):165–191，2019。doi:10.1016/j.exmath. 2018.01.002。[6] Patrick Billingsley。《概率与测度》。威立概率与统计丛书。约翰·威立父子公司，新泽西州霍博肯，周年纪念版，2012。附 Steve Lalley 撰写的序言，以及 Steve Koppes 撰写的 Billingsley 简介。[7] Martin Brandenburg。代数几何的张量范畴基础，2014。网址：https://arxiv.org/abs/1410.1716，arXiv:1410.1716。

[8]Emmanuel F. Breuillard。幂零李群及齐性空间上随机游走的等分布。ProQuest LLC, 安娜堡，MI，2004。博士论文——耶鲁大学。网址：
http://gateway.proquest.com/openurl?url_ver=Z39.88-2004&rft_val_fmt=
info:ofi/fmt:kev:mtx:dissertation&res_dat=xri:pqdiss&rft_dat=xri: pqdiss:3125164。[9] Stanley Burris 和 Hanamantagouda P. Sankappanavar。《泛代数教程》，数学研究生教材第 78 卷。施普林格，1981。[10] J. A. Carrillo 和 G. Toscani。压缩概率度量与耗散动力学方程的渐近行为。《帕尔马大学数学杂志》(7)，6:75–198，2007。[11] Kenta Cho、Bart Jacobs、Bas Westerbaan 和 Abraham Westerbaan。effectus理论导论，2015。预印本可见 ArXiV 电子版 1512.05813。doi:10.48550/ arXiv.1512.05813。[12]Moustapha Ciss´e、Piotr Bojanowski、Edouard Grave、Yann N. Dauphin 和 Nicolas Usunier。Parseval网络：提升对对抗样本的鲁棒性。载于 Doina Precup 和 Yee Whye Teh（编），第 34 届国际机器学习会议论文集（ICML 2017），澳大利亚新南威尔士州悉尼，2017 年 8 月 6–11 日，《机器学习研究论文集》第 70 卷，第 854–863 页。PMLR，2017。网址：
http://proceedings.mlr.press/v70/cisse17a.html。[13] Maria Manuel Clementino、Dirk Hofmann 和 Walter Tholen。V-赋范范畴中的柯西收敛。《数学进展》，470:110247，2025。doi:10.1016/j.aim.2025.110247。[14] I. Csisz´ar。概率分布之差的信息型度量与间接观测。《匈牙利数学科学研究》，2:299–318，1967。[15] A. D. Elmendorf 和 M. A. Mandell。置换范畴、多重范畴与代数$K$-理论。《代数与几何拓扑》，9(4):2391–2441，2009。doi:10.2140/agt.2009.9.2391。[16] Robert Flagg。量化幺半格与连续性空间。《代数普遍性》，37(3):257–276，1997。doi:10.1007/s000120050018。[17] Tobias Fritz。马尔可夫核、条件独立与充分统计量定理的综合方法。《数学进展》，370:107239，2020。doi:10.1016/j.aim.2020. 107239。[18] Tobias Fritz、Tom´aˇs Gonda 和 Paolo Perrone。范畴概率中的德菲内蒂定理。《随机分析杂志》，2(4)，2021。doi:10.31390/josa.2.4.06。[19] Tobias Fritz、Tom´aˇs Gonda、Antonio Lorenzin、Paolo Perrone 和 Areeb Shah Mohammed。范畴概率中的经验测度与强大数定律，2025。网址：
https://arxiv.org/abs/2503.21576，arXiv:2503.21576。[20] Tobias Fritz 和 Paolo Perrone。度量空间上的随机序与有序 Kantorovich 单子。《数学进展》，366:107081，2020。doi:10.1016/j.aim.2020.107081。[21] G. Gabetta、G. Toscani 和 B. Wennberg。概率分布的度量以及玻尔兹曼方程解趋于平衡的趋势。《统计物理学杂志》，81(5-6):901–934，1995。doi:10.1007/BF02179298。[22] Mich`ele Giry。概率论的范畴方法。载于 Bernhard Banaschewski（编），《拓扑与分析的范畴方面》，LNM 第 915 卷，第 68–85 页。施普林格，1982。[23] Marco Grandis。范畴、范数与权重。《同伦与相关结构杂志》，2(2):171–186，2007。

[24] Gholamhossein Hamedani 和 Gilbert Walter。一个不动点定理及其在中心极限定理中的应用。《数学档案》，43(3):258–264，1984。doi:10.1007/BF01247572。[25] Chris Heunen、Ohad Kammar、Sam Staton 和 Hongseok Yang。一个适用于高阶概率论的便利范畴。载于第*32*届 *ACM/IEEE*计算机科学逻辑研讨会年会论文集，第1–12页。IEEE，2017。doi:10.5555/3329995.3330072。[26] Seewoo Lee (https://mathoverflow.net/users/95471/seewoo lee)。中心极限定理是否有范畴论版本? MathOverflow。URL:https://mathoverflow.net/q/462019（版本：2024-01-12）。URL: https://mathoverflow.net/q/462019，arXiv:https:// mathoverflow.net/q/462019。[27] Bart Jacobs。从概率单子到交换效应体。*J. Log. Algebr. Meth-ods Program.*，94:2–38，2018。doi:10.1016/j.jlamp.2016.11.006。[28] William F. Keigher。由交换伴随单子生成的对称幺半闭范畴。*Cahiers Topologie G´eom. Diff´erentielle*，19(3):269–293，1978。[29] Klaus Keimel。紧有序空间上的概率测度单子及其 Eilenberg-Moore代数。《拓扑学及其应用》，155(15):1615–1628，2008。doi: 10.1016/j.topol.2008.07.002。[30] G. Max Kelly。富化范畴论基本概念，《数学讲义》第64卷。剑桥大学出版社，1982。[31] Anders Kock。由交换单子生成的闭范畴。*J. Austral. Math. Soc.*，12:405–424，1971。[32] S. Kullback 和 R. A. Leibler。论信息与充分性。《数学与统计年刊》，22:79–86，1951。doi:10.1214/aoms/1177729694。[33] F. William Lawvere。对角论证与笛卡尔闭范畴。载于范畴论、同调论及其应用 *II*（巴特尔研究所会议，西雅图，华盛顿州，*1968*年，第二卷），《数学讲义》第92卷，第134–145页。施普林格，柏林—纽约，1969。[34] F. William Lawvere。对角论证与笛卡尔闭范畴。*Repr. TheoryAppl. Categ.*，(15):1–13，2006。转载自范畴论、同调论及其应用 *II*（巴特尔研究所会议，西雅图，华盛顿州，*1968*年，第二卷）第134–145 [MR0242748]页。[35]William Lawvere。度量空间、广义逻辑与闭范畴。*Se mi-nario Mat. e. Fis. di Milano*，43:135–166，1973。doi:10.1007/BF02924844。[36] Saunders MacLane。工作数学家的范畴论。施普林格，1998。doi: 10.1007/978-1-4757-4721-8。[37] Radu Mardare、Prakash Panangaden 和 Gordon D. Plotkin。定量代数推理。载于 Martin Grohe、Eric Koskinen 和 Natarajan Shankar 编，第*31*届 *ACM/IEEE*计算机科学逻辑研讨会（*LICS '16*）年会论文集，美国纽约，*2016*年*7*月*5*日至*8*日，第700–709页。ACM，2016。doi:10.1145/2933575.2934518。[38] Charles-Michel Marle。从辛几何与泊松几何工具到 J.-M. Souriau 的统计力学和热力学理论。熵，18(10):370，2016。doi: 10.3390/e18100370。[39] Paolo Perrone。马尔可夫范畴与熵。*IEEE Trans. Inf. Theor.*，70(3):1671–1692，2024。doi:10.1109/TIT.2023.3328825。

[40] Jason Reed 和 Benjamin C. Pierce。距离使类型更强大：一种差分隐私演算。载于 Paul Hudak 和 Stephanie Weirich 编，第*15*届 *ACM SIGPLAN* 函数式编程国际会议论文集，*ICFP 2010*，美国马里兰州巴尔的摩，*2010*年*9*月*27*日至*29*日，第157–168页。ACM，2010。doi: 10.1145/1863543.1863568。[41] Jacques Simon。巴拿赫空间、弗雷歇空间、希尔伯特空间和诺依曼空间，《偏微分方程分析丛书》第1卷。威立，第1版，2017。doi:10.1002/9781119426516。[42] tommy1996q (https://mathoverflow.net/users/109382/tommy1996q)。推前测度的 Wasserstein 距离。MathOverflow。URL:https://mathoverflow.net/q/478401（版本：2024-09-08）。URL: https://mathoverflow.net/q/478401，arXiv:https:// mathoverflow.net/q/478401。[43] H. F. Trotter。中心极限定理的一个初等证明。《数学档案》，10:226–234，1959。doi:10.1007/BF01240790。[44] Lotfi Zadeh。相似关系与模糊序关系。《信息科学》，3(2):177–200，1971。doi:10.1016/S0020-0255(71)80005-1。

# 仅供审阅的附录

## A 符号约定

$\underline{\mathscr{C}}$, $\underline{\mathscr{A}}$, $\underline{\mathbf{Ban}}$ 充实范畴（带下划线）$\mathscr{C}$, $\mathscr{C}$ 底层范畴/普通范畴的元变量 $\mathbf{Ban}$ 定范畴（粗体）$\otimes$ 富集基底的张量积（$\mathscr{V}$、sNorm 或 dNorm） $I$ $\otimes$ 的单位元（在 sNorm 中为 $\{x\}$，在 dNorm 中为 $\mathrm{V}_{\leq e}$ ） $\oplus$ 半范数富集范畴上的张量$\mathscr{C}_{\mathrm{lin}}$ $\mathscr{C}$的线性子范畴 V 距离/半范数取值的量子幺半群 Sp(V) V-空间与非扩张映射范畴 CSp 完备 V-空间范畴 VAct V-作用空间范畴 sNorm 半范数空间范畴 dNorm 膨胀空间范畴$\mathfrak{S}$ 换基函子 dNorm → sNorm Lip 齐次巴拿赫空间范畴（膨胀） $\mathbf{Ban}$ 巴拿赫空间范畴（膨胀）CMet 完备扩展度量空间范畴（半范数） $\mathbb{R}$CMet 重缩放度量空间范畴（膨胀）FinVect 有限维向量空间范畴（膨胀）$\mathrm{Meas}_b$ 有界可测空间范畴（定范畴）Obs($M$,$\mathscr{D}$) $M$上的可观测量范畴$\mathscr{C}(1,-)$ 取值于 sNorm/dNorm 的点函子$\mathscr{C}(1,-)$ 取值于 Set 的点函子 $\mathrm{P}_l$ 概率测度函子：有限 $l$ 阶矩 $\mathrm{P}_l^0$概率测度函子：有限 $l$ 阶矩，指数为 $\underline{0\Sigma^+}$ 半正定矩阵函子$|-|$ 从 FinVect 到 $\mathbb{R}$CMet$\vartheta_X^F$ 的遗忘函子 $F\mathrm{N}_p$ $p$纤维中的中心极限

$*$ 卷积积$\star$ $\mathrm{V}_{\leq e}$ （膨胀）$|-|$ 作用 半范数应用于态射$\mathbf{1}$， $\mathbf{1}_{\mathscr{C}}$ 终对象

## B 第 2 节详情

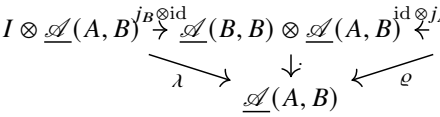
**幺半范畴的相干律** 幺半范畴的凝聚律通过下面的交换图表示，其中为便于阅读省略了自然变换的分量：

$$\begin{array}{ccccc} & & A\otimes B & & \\ & {\scriptstyle \varrho\otimes\mathrm{id}}\nearrow & & \nwarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes\lambda} & \\ (A\otimes 1)\otimes B & & \xrightarrow{\quad\alpha\quad} & & A\otimes(1\otimes B) \end{array} \tag{B.1}$$

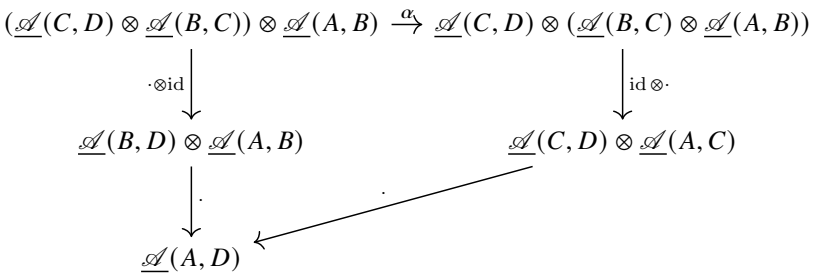
$$\begin{array}{ccccc} ((A\otimes B)\otimes C)\otimes D & \overset{\alpha}{\leftarrow} & (A\otimes B)\otimes(C\otimes D) & \overset{\alpha}{\leftarrow} & A\otimes(B\otimes(C\otimes D)) \\ {\scriptstyle \alpha\otimes\mathrm{id}}\downarrow & & & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes\alpha} \\ (A\otimes(B\otimes C))\otimes D & & \xrightarrow{\qquad\qquad\alpha\qquad\qquad} & & A\otimes((B\otimes C)\otimes D) \end{array} \tag{B.2}$$

这些图表分别称为**恒等态射**律和**五边形**律。

**富化范畴的相干律** $\mathscr{V}$-范畴 $\mathscr{A}$ 的凝聚律由下列交换图表示。与前文一样，为了便于阅读，我们省略了自然变换的分量。




(B.3)




(B.4)

We 分别将这些图表称为 $\mathscr{A}$ 中复合的**单位元** 律和**结合律** .

# C 第 2 节的证明细节

第 5 页引理 2.5 的证明。 考虑由 $x_n = x$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 定义的常值序列。那么，如果 $d(x,y) = \bot$，则对所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $d(x_n,x) = d(x_n,y)$。特别地，对所有 $r \in \mathbb{V}$， $d(x_n,x)$， $d(x_n,y) \leq r$。由于 $X$ 是豪斯多夫的，因此可得 $x = y$，证毕。□

第 6 页引理 2.6 的证明。 设 $x$ 是 $X$ 中一个以 $y$ 为极限点的序列。设 $f\colon X \to Y$ 是一个非扩张映射。那么，对于 $\mathbb{V}$ 中任意 $r > \bot$，存在 $N_y \in \omega$ 使得对所有 $n \geq N_r$， $d(y,x_n) \leq r$。由此可得

$$d(f(y),f(x_n)) \leq d(y,x_n) \leq r.$$

我们得出结论： $f(x)$ 收敛到 $y$。 □

第 6 页命题 2.7 的证明。度量空间的自反公理意味着距离空间的自反公理，因为 $\bot$ in $[0,\infty]$ is 为 0。度量空间中的距离是对称函数。最后，为证明豪斯多夫条件，反设度量空间中的一个序列 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 有两个极限 $L$， $M$。那么，对所有 $\varepsilon \in [0,\infty]_+$，都存在一个 $N > 0$，使得 $i > N$ 蕴含 $d(L,\ a_i)$， $d(a_i,\ M) < \varepsilon/2$。于是，根据三角不等式， $d(L,\ M) \leq d(L,\ a_i) + d(a_i,\ M))$ $\varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$。因此

$$d(L,M) < \varepsilon$$

对所有 $y' \in [0,\infty]_+$ 都成立。我们可以得出结论： $L = M$。

完全相同的论证表明，每个度量空间都是豪斯多夫 $[0,\infty]_\times$-空间

□

# D 第 3 节的证明细节

第 7 页命题 3.4 的证明。假设有一个几何序列 $z\colon\ \mathbb{N} \to X_1 \otimes X_2$，令 $z^i := \pi_i \cdot z\colon \mathbb{N} \to X_i$ 表示分量 $i \in \{1,\ 2\}$ 中的诱导序列。那么每个$c_n = (a_n,\ b_n)$，并且我们有

$$d_A(a_n,a_{n+1}), d_B(b_n,b_{n+1}) \leq \vee\,(d_A(a_n,a_{n+1}), d_B(b_n,b_{n+1}))$$
$$= d_{A\otimes B}(c_n,\ c_{n+1})。$$

特别地，这表明序列$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 与$\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 都是几何的。由假设，它们分别对 $a \in A$ 与 $b \in B$收敛到 $a$ 与 $b$ 。因此，对V中任意 $r > \bot$，存在 $N_y$， $M_y \in \omega$，使得对所有 $n \geq N_r$有 $d(a,\ a_n) \leq r$，且对所有 $n \geq M_r$有 $d(b,\ b_n) \leq r$。选取 $K_r = \max(N_y,\ M_y)$，则对 $n > K_r$有

$$d_{A\otimes B}((a,b),c_n) = \vee(d_A(a,a_n), d_B(b,b_n)) \leq r$$

这意味着 $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到 $(a,\ b)$。 □

定理 *3.6* 在第 *7* 页的证明。 令 $x \in X$，并考虑序列 $f_x$，满足 $(f_x)_n = f^n(x)$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都成立。我们首先证明 $f_x$ 是几何的。为此，我们对 $n \in \mathbb{N}$ 使用归纳法，证明

$$d(f^n(x), f^{n+1}(x)) < |f|_{\mathbb{L}}{}^n \cdot d(x, f(a)) \tag{D.1}$$

根据归纳法，我们有

$$d(f^n(a), f^{n+1}(a)) < q^{\cdot n} \cdot d(a, f(a)).$$

根据假设，对于所有 $x_i,\ x_j \in X,\ d(x_i,\ x_j) < \top$。由此可知，该序列是几何的，因此根据完备性，它收敛到某个 $a$。

接下来，我们证明 $a$ 是 $f$ 的不动点。为此，请注意，由于对每个 $y < \bot$，$\lim(f^i(a)),\ a =$，存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$d(\overline{a}, f^i(a)) < y.$$

对于所有 $i > N$ 都成立。由于 $|f|_{\mathbb{L}} \leq q$，现在可得

$$d(f(\overline{a}), f^{i+1}(a)) < q \cdot d(\overline{a}, f^i(a)) < q \cdot y.$$

因此， $f(\overline{a})$ 是（$f^n(a)$）的极限点。我们得出 $f(a) = a$，因为根据距离空间的豪斯多夫性质，序列的极限点是唯一的。

接下来要证明 $a$ 是唯一的。为此，假设 $b \in A$ 是一个不动点 of $f$。那么

$$d(a,b) = d(f(\overline{a}), f(b)) \leq q \cdot d(a,b) < d(a,b),$$

其中，不等式由量子幺半群的压缩性得出。这是一个矛盾。□

# E 第 4 节的证明细节

第 *8* 页命题 *4.7* 的证明。首先我们指出，根据 [15, 引理 4.20]，由于范畴 **sNorm** 具有有限极限和余极限（将在定理 4.11 的证明中证明），**sNorm** 上的闭对称幺半结构可提升为闭对称幺半结构$\mathbf{sNorm}_\bullet$。幺半积可提升为楔和积 $\wedge$。

为确保完备性，我们明确描述作用单子结构。令 $X_+$ 表示带有基点的空间$X \sqcup \{*\}$。函子 $T$ 由楔和积 $T(X) = \mathrm{V}_{\leq e} \wedge X_+$定义，它是积 $\mathrm{V}_{\leq e} \times X_+$ 对其子空间 $(\{\bot\} \times X_+) \cup (\mathrm{V}_{\leq e} \times \{*\})$取商所得。换言之，它是以下余等化子

$$(\{\bot\} \times X_+) \sqcup (\mathcal{V}_{\leq e} \times \{*\}) \rightrightarrows \mathcal{V}_{\leq e} \times X_+$$

其中，第一个映射是到 $(\bot, *)$ 的常值映射，第二个映射是包含映射。因此，根据定理 4.11，该商在 **sNorm** 中存在。

单位元 $\eta_X\colon X \to T(X)$ 由映射 $x \mapsto (e,x)$ 导出，而乘法 $\mu_X\colon T(T(X)) \to T(X)$ 由 $\mathrm{V}_{\leq e}$ 中的幺半群乘法导出。

该单子的代数是一个对象 $A \in \mathbf{sNorm}_\bullet$，配备一个态射 $\xi\colon T(A) \to A$，并满足单位元公理和结合律公理。映射 $\xi$ 等价于映射 $\star\colon \mathrm{V}_{\leq e} \times A \to A$（其中 $q \star a = \xi(q,a)$），且满足商条件： $\xi$ 在被识别的

子空间上为常数。具体而言，$\{\bot\} \times A$ 的识别意味着，对于所有 $a \in A$，$\bot \star a$ 都为常数。令 $a_0 = \xi(\bot, a)$。由此可得到膨胀空间的锥形条件。

单位公理 $\xi \circ \eta_A = \mathrm{id}_A$ 蕴含 $e \star a = a$，这就是幺元公理。结合律公理 $\xi \circ T(\xi) = \xi \circ \mu_A$ 蕴含，对于所有 $p, q \in \mathrm{V}_{\leq e}$，都有 $p \star (q \star a) = (p \cdot q) \star a$，由此恢复结合律公理。

最后，代数态射 $f : (A, \xi_A) \to (B, \xi_B)$ 是 $\mathbf{sNorm}_\bullet$ 中的一个态射，满足 $f \circ \xi_A = \xi_B \circ T(f)$。这个条件可转化为 $f(q \star a) = q \star f(a)$，这恰好是 $\mathbf{dNorm}$ 中等变映射的定义。因此，无论 $\mathrm{V}_{\leq e}$ 上的幺半群结构如何，代数范畴总是与 $\mathbf{dNorm}$ 同构。

最后，为确保 $\mathbf{sNorm}$ 上的幺半群结构能够提升到 $\mathbf{dNorm}$, ，我们将应用 [31,定理 2.2]。对象 $\mathrm{V}_{\leq e}$ 是一个交换幺半群，因为它是 $\mathrm{V}$ 的子幺半群，并且结构映射 $\mathrm{V}_{\leq e} \wedge \mathrm{V}_{\leq e} \to \mathrm{V}_{\leq e}$ 是非扩张的。幺半群 $\mathrm{V}_{\leq e}$ 是交换的，因为量子化格乘法被假定为交换的。在范畴 $\mathbf{sNorm}_\bullet$ 上，$\mathrm{V}_{\leq e} \wedge -$ 是这个交换幺半群的作用单子。由 [7, 例 6.3.12)], 可知，它是一个交换单子，因此我们可以应用 [31, 定理 2.2]。□

*Pro*第*9*页命题 *4.10*的。我们明确检验张量积的所有性质
在
**范数**。
容易看出 $A \otimes B$ 是完备距离空间。自反性与对称
pro性由积的定义得到满足，它们是Quantale值度量的相应性质。

唯一非平凡的验证是 $A \otimes B$ 是几何完备的。设 $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为 $A \otimes B$中的几何序列。则每个 $c_n = (a_n, b_n)$，并且我们有

$$d_A(a_n, a_{n+1}),\ d_B(b_n, b_{n+1}) \leq \vee\,(d_A(a_n, a_{n+1}), d_B(b_n, b_{n+1})) = d_{A\otimes B}(c_n, c_{n+1}).$$

特别是，这意味着序列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 都是几何的。根据假设，它们分别对 $a \in A$ 和 $b \in B$收敛到 $a$ 和 $b$，这意味着 $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到 $(a, b)$。

接下来，我们证明对于态射 $f\colon A \to C$和 $g\colon B \to D$，映射 $f \otimes g\colon A \otimes B \to C \otimes D$
defi适用于 $(a, b) \in A \times B$，作者为

$$(f \otimes g)(a, b) := (f(a), g(b))$$

是半范数空间之间的态射。它是非扩张的，因为

$$\begin{aligned} d_{C\otimes D}\,((f(a_1), g(b_1)), (f(a_2), g(b_2))) &= \vee\,(d_C(f(a_1), f(a_2)), d_D(g(b_1), g(b_2))) \\ &\leq \vee\,(d_A(a_1, a_2), d_B(b_1, b_2)) \\ &= d_{A\otimes B}\,((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \end{aligned}$$

接下来，我们需要证明 $\otimes$ 是一个双函子。只需证明 $\otimes$ 保持复合和恒等态射。对于恒等态射，$(\mathrm{id}_A \otimes \mathrm{id}_B)(a, b) = (a, b) = \mathrm{id}_{A\otimes B}(a, b)$。对于复合，设 $f\prime\colon C \to E$且 $g'\colon D \to F$。那么

$$\begin{aligned} ((f' \otimes g') \circ (f \otimes g))(a, b) &= (f' \otimes g')(f(a), g(b)) \\ &= (f'(f(a)), g'(g(b))) = ((f' \circ f)(a), (g' \circ g)(b)) \\ &= ((f' \circ f) \otimes (g' \circ g))(a, b). \end{aligned}$$

对于对称性，映射 $\sigma_{A,\,B}\colon\ A \otimes B \to B \otimes A$ 由 $\sigma(a,\ b) = (b,\ a)$ 定义，显然是保持半范数的等距同构。结合律和五边形律的情形类似，因为所涉及的所有映射都是半范数 $e$ 的等距同构。

我们定义左单位子 $\varrho_A\colon\ I \otimes A \to A$（其中 $I = \{x\}$ 是单位对象）如下：

$$\varrho_A(x, a) = a.$$

这是 **sNorm** 中半范数 $e$ 的一个态射，并且它是非扩张的，因为

$$d_A(\varrho_A(c_1),\varrho_A(c_2)) = d_A(a_1,a_2) = \vee(\bot, d_A(a_1,a_2)) = d_{I\otimes A}(c_1,c_2).$$

其中 $c_i = (x,\ a_i)$。逆映射 $\varrho_A^{-1}\colon A \to I\otimes A$ 由 $a \mapsto (x,\ a)$给出。这是一个等距映射，因为

$$\begin{aligned} d_{I\otimes A}((x,a_1),(x,a_2)) &= \vee(d_I(x,x), d_A(a_1,a_2)) \\ &= \vee(\bot, d_A(a_1,a_2)) = d_A(a_1,a_2). \end{aligned}$$

左单位元公理完全相同。

要证明**dNorm**是一个对称幺半范畴，只需注意**sNorm$_\bullet$**是对称幺半范畴且具有余等化子。这是因为，如果底层范畴完备且余完备，带基点对象范畴也完备且余完备；我们将在定理 4.11 中证明这一点确实成立。它配备了楔和幺半乘积，从而成为一个对称幺半范畴。于是可以立即应用 [28, 定理 2.1] ，推得它是对称幺半的。

定义 4.9 中张量积的描述源自[28, 定理 2.1],中的显式定义：**dNorm** 中的张量积是以下两个映射的余等化子

$$A \otimes_{\mathbf{sNorm}_\bullet} \mathcal{V}_{\le e} \otimes_{\mathbf{sNorm}_\bullet} B \underset{r}{\overset{l}{\rightrightarrows}} A \otimes_{\mathbf{sNorm}} B$$

其中一个映射作用于左侧 $l(a,v,b) = (a\star v, b)$，另一个作用于右侧 $r(a,v,b) = (a, v\star b)$。□

第 *13* 页命题 *4.12* 的证明。恒等映射的半范数是量子格 $e$ 的单位元。这由其定义可得：

$$|\,\mathrm{id}_A\,|_{[A,A]} = \bigwedge\{q\in\mathcal{V} \mid \forall b\in B.|f(b)|_A = |b| \le q\cdot|b|_A\}$$

显然， $e$属于所取上述并的集合，因为根据半单调性，任意 $q<e$ 均有 $e\cdot|b|_A = |b|_A \ge |b|_A$ 和 $|b| > q\cdot|b|_A$。由相同的论证以及 **sNorm** 中映射在半范数意义下的非扩张性可知，对于所有映射 $f$，都有 $|f|\le e$。

假设 $f$ 有逆 $f^{-1}$。那么

$$f^{-1}\circ f = \mathrm{id}_A\,.$$

我们计算两边的半范数。利用半范数的次乘性，可得：

$$e = |\mathrm{id}_A| = |f^{-1}\circ f| \le |f^{-1}|\cdot|f|.$$

总之，假设 $|f|<e$。那么，乘以 $|f^{-1}|$后，我们得到 $|f|\cdot|f^{-1}| < |f^{-1}| \le e$，这里用到了半单调性。这就产生了矛盾，结论得证。□

# F 第 5 节证明细节

第 *14* 页命题 *5.3* 的证明。我们已在例 5.2 的正文中说明了富结构。接下来只需验证次乘性和左/右相容性。

次乘性公理：根据定义，对于所有 $a_1,a_2\in A$和 $b_1,b_2\in B$，有 $d_B(f(a_1), f(a_2)) \le |f|_{\mathsf{L}}\cdot d_A(a_1,a_2)$，且$d_C(g(b_1), g(b_2)) \le |g|_{\mathsf{L}}\cdot d_B(b_1,b_2)$。由此特别可得，对于所有 $a_1,a_2\in A$，$d_C(g\circ f(a_1), g\circ f(a_2)) \le |f|_{\mathsf{L}}|g|_{\mathsf{L}}\cdot d_A(a_1,a_2)$。因此，$|f|_{\mathsf{L}}|g|_{\mathsf{L}}\ge|g\circ f|_{\mathsf{L}}$，因为 $|g\circ f|_{\mathsf{L}}$ 是满足以下性质的常数 $c$的下界：对于所有 $a_1,a_2\in A$，$d_C(g\circ f(a_1), g\circ f(a_2)) \le c\cdot d_A(a_1,a_2)$

左/右相容性：不失一般性，只需验证左复合度量公理。 $g_1,g_2\in\mathbf{Lip}(A,B)$ 之间的距离定义为 $\sup_{a\in A} d(g_1(a), g_2(a))$。有 $d(f\circ g_1(a),\ f\circ g_2(a)) \le |f|_{\mathsf{L}}\cdot d(g_1(a),\ g_2(a))$。由此可得 $d(f\circ g_1, f\circ g_2) = \sup_{a\in A} d(f\circ$

$g_1(a),\ f\circ\ g_2(a))\ \le\sup_{a\in A}|f|_{\mathsf{L}}\cdot\ d(g_1(a),\ g_2(a))\ =|f|_{\mathsf{L}}\cdot\sup_{a\in A}d(g_1(a),\ g_2(a))\ =|f|_{\mathsf{L}}\cdot\ d(g_1,\ g_2)$。复合性质 我们需要证明复合是压缩的，并且保持乘法结构。这很直接：

$$f\circ(c\cdot g)=f(c\cdot-)\circ g=c(f\circ g)$$

由齐次性可得。 □

第 *14* 页命题 *5.6* 的证明。 恒等态射是半范数范畴中半范数空间 $\{x\}\ \to\mathscr{C}(\ A,A)$ 的态射，也是膨胀范畴中 $\mathsf{V}_{\le e}\to\mathscr{C}(A,A)$ 的态射。在这两种情况下，由于映射都是非扩张的，我们得到 $|\mathrm{id}_A|\le e$。

恒等映射具有如下性质：对于任意 $B$ 和 $A\ d(g_1,g_2),\ \le|\mathrm{id}_A|\cdot d(g_1,g_2)$。因此，由量子幺半群的压缩性可知，若存在任何不同的 $\bot<d(g_1,g_2)\ <\top$，则 $e\le|\mathrm{id}_A|$。我们得出结论，若 □，则 $|\mathrm{id}_A|=e$

第 *14* 页命题 *5.7* 的证明。 距离空间取值于量子幺半群 $(\mathbb{R}^\infty,\cdot,1)$。巴拿赫空间 $V$ 总是赋有范数 $|-|_V$，我们将元素 $v\in V$ 的半范数定义为该范数。按定义，巴拿赫空间相对于诱导度量 $d(u,v)=|u-v|$ 是完备度量空间，其中 $u,v\in V$。

任意向量空间 $V$ 都自然地带有一个由向量空间结构诱导的 $\mathbb{R}$ 典范作用。该作用是锥形的，因为对于所有 $v\in V$，都有 $0\cdot v=0_V$，其中 $0_V$ 是 $V$的原点。

次乘性公理可直接由巴拿赫富集的定义得出。巴拿赫空间范畴中的态射关于范数是压缩的。因此，我们要求

$$\underline{\mathscr{C}}(A,B)\otimes\underline{\mathscr{C}}(B,C)\to\underline{\mathscr{C}}(A,C)$$
$$(v,w)\mapsto w\circ v$$

是压缩的。更确切地说，有

$$|v|\cdot|w|=|(v,w)|\ge|w\circ v|$$

由此便得到所需的次乘性公理。

最后，我们验证富集的左相容性和右相容性。不失一般性，我们只验证左相容性。有

$$d(v\circ w_1,v\circ w_2)=|v\circ w_1-v\circ w_2|$$

由双线性可得

$$|v\circ w_1-v\circ w_2|=|v\circ(w_1-w_2)|$$

最后，由巴拿赫空间中态射的压缩性可知

$$|v\circ(w_1-w_2)|\le|v|\cdot|w_1-w_2|=|v|\cdot d(w_1,w_2)$$

最后，我们需要验证膨胀性质。给定 $c\in[0,1]$，我们通过 $(c\cdot\ f)$ 作用于一个态射。如果同态集是柯西完备的，那么它就是几何完备的。因此，该范畴中的同态对象是完备的。

要成为 **dNorm** 中的态射，复合必须与张量积$\otimes_{\mathbf{dNorm}}$相容；张量积将 $\mathbb{V}_{int}$ 的作用等同起来。具体而言，我们要求对任意 $c\in[0,1]$，$(c\cdot\ g)\ \circ\ f=c\cdot(g\ \circ\ f)$ 且 $g\ \circ\ (c\cdot\ f)\ =c\cdot(g\ \circ\ f)$。这直接由巴拿赫空间中复合的双线性（标量乘法的结合律）得出。因此，复合映射可下降到定义张量积的商空间上。

证明完毕。 □

第 *14* 页上命题 *5.10* 的证明。 我们已经描述了富集，因此现在来检验这些公理。

次乘性公理：如果我们有映射 $f\colon A \to B$ 以及 $g\colon B \to C$，则对任意 $x,\ y \in A$，我们有

$$d_C(g(f(x)), g(f(y))) \le |g|_{\mathsf{L}} d_B(f(x), f(y)) \le |g|_{\mathsf{L}} |f|_{\mathsf{L}} d_A(x, y).$$

Tak对满足 Lipschitz条件的常数取下确界可得 $|g \circ f|_{\mathsf{L}} \le |g|_{\mathsf{L}} |f|_{\mathsf{L}}$。

左/右相容性：对于左相容性，令 $h \in \mathbf{CMet}(B, C)$ 和 $f, g \in \mathbf{CMet}(A, B)$。则

$$\begin{aligned} d(h \circ f, h \circ g) &= \sup_{a \in A} d_C(h(f(a)), h(g(a))) \\ &\le \sup_{a \in A} |h|_{\mathsf{L}} d_B(f(a), g(a)) = |h|_{\mathsf{L}} d(f, g). \end{aligned}$$

右相容性可由完全对称的论证得到

上述关于 $\mathbb{R}\mathbf{CMet}$ 的两个性质的证明在作相应修改后是相同的。

对于 $\mathbb{R}\mathbf{CMet}$，富集位于 **dNorm** 中，因为对象是配备了 $\mathbb{R}^+$缩放作用的度量空间。同态对象继承了**CMet**中的度量和半范数结构，但还配备了由 $(c \cdot f)(x) := c \cdot_B f(x)$ 给出的 $\mathbb{R}^+$ 锥作用。

膨胀：我们必须验证 $|c \cdot f|_{\mathsf{L}} = c \cdot |f|_{\mathsf{L}}$。利用对象上的作用会缩放距离这一性质，$d_B(c \cdot y_1, c \cdot y_2) = c \cdot d_B(y_1, y_2)$，我们得到：

$$d_B((c \cdot f)(x), (c \cdot f)(y)) = c \cdot d_B(f(x), f(y)) \le c \cdot |f|_{\mathsf{L}} d_A(x, y).$$

这意味着 $|c \cdot f|_{\mathsf{L}} \le c \cdot |f|_{\mathsf{L}}$。等号成立的情形由 $|f|_{\mathsf{L}}$ 的极小性推出。

复合：既然我们已经验证了同态对象是富化的，就必须检查复合是富化范畴中的一个态射。具体而言，对于$c \in \mathbb{R}^+$, $f \in \mathbb{R}\mathbf{CMet}(A,\ B)$ 和 $g \in \mathbb{R}\mathbf{CMet}(B,\ C)$，我们要求 $g \circ (c \cdot f) = c \cdot (g \circ f)$。在点 $x \in A$ 处取值：

$$(g \circ (c \cdot f))(x) = g((c \cdot f)(x)) = g(c \cdot f(x)).$$

回忆一下，$\mathbb{R}\mathbf{CMet}$ 中的对象是缩放单子的代数，而态射是代数态射，这意味着 $g$ 关于该作用是等变的。因此：

$$g(c \cdot f(x)) = c \cdot g(f(x)) = (c \cdot (g \circ f))(x).$$

与左作用的相容性，即 $(c \cdot g) \circ f = c \cdot (g \circ f)$，直接由同态对象上的作用的定义得出。因此，复合映射可下降到定义张量积的商空间。□

第15页定理 5.11 的证明。只需证明遗忘函子 $\mathfrak{S}\colon \mathbf{dNorm} \to \mathbf{sNorm}$ 是一个松单函子。设 $U\colon \mathfrak{S}$。我们定义结构映射并验证公理。

令 $I_{\mathbf{sNorm}} = \{x\}$ 为 **sNorm** 中的单位对象（其中 $|x| = e$），并令 $I_{\mathbf{dNorm}} = \mathrm{V}_{\le e}$ 为 **dNorm** 中的单位元。定义态射 $\psi\colon \{x\} \to U(\mathrm{V}_{\le e})$，令 $\psi(x) = e$。这是 **sNorm** 中的有效态射，因为它保持半范数，即 $|\psi(x)| = |e| = e \le |x|$；而且显然是非扩张的，因为 $d_{\mathcal{V}_{\le e}}(e, e) = \bot$。

给定任意 $A, B \in \mathrm{dNorm}$，我们需要一个态射 $\varphi_{A,B}\colon U(A) \otimes_{\mathbf{sNorm}} U(B) \to U(A \otimes_{\mathbf{dNorm}} B)$。定义域的载体是 $A \times B$，而陪域是 $\mathrm{V}_{\le e} \times A \times B$ 的一个商。我们定义映射为 $\varphi_{A,B}(a, b) = [(e, a, b)]$。下面验证它是 sNorm 中的态射。对于半范数，注意到 $|\varphi(a, b)| = |[(e, a, b)]| = e \cdot |a|_A \cdot |b|_B = |a|_A \cdot |b|_B$，这与定义域中的半范数相符。对于度量，令 $(a_1, b_1)$ 和 $(a_2, b_2)$ 为两对元素。由于 $((e, a_1, b_1), (e, a_2, b_2))$ 是商前空间中的一个有效代表元，并且 $d(e, e) = \bot$，商空间中的距离不超过 $\bigvee(d_A(a_1, a_2), d_B(b_1, b_2))$，这恰好是定义域中的距离。因此，$\varphi$ 是非扩张的，故为 sNorm 中的一个态射。

结合律和单位性的验证是直接的。 □

第15页上定理 5.12 的证明。 存在一个从 **sNorm** 到 **Set** 的强幺半函子，以及一个松幺半 **dNorm** $\to$**Set**。 二者均通过将每个范畴中的幺半积送到其在**Set**中的载体来给出。结构映射

$$\varphi_{X,Y}\colon |a| \times |b| \to |A \otimes_{\mathbf{sNorm}} B|$$

在 **sNorm** 上是一个同构。在 **dNorm**上，它通过将

$$(a, b) \mapsto (e, a, b)$$

对于**sNorm**，单位映射 $\{*\} \to \{x\}$ 是**Set**中的唯一态射。对于**dNorm**，该映射定义为

$$\{*\} \to \mathcal{V}_{\leq e} \qquad * \mapsto e.$$

Th对于**sNorm** $\to$ **Set** 的函子，强幺半结构图表交换这一点显而易见。

到**Set** 的遗忘函子根据（5.1）经由 $\Subset$ 分解。由于松单函子的复合仍是松单函子，因此它是松单函子。

根据（5.1）中的分解，取底层范畴与从膨胀范畴到半范数范畴的基变换交换。□

# G 第6节证明细节

第*15*页命题 *6.1* 的证明。根据半范数的次乘性，我们有：

$$|p| = |p \circ \mathrm{id}_{\mathbf{1}_{\underline{\mathscr{C}}}}| \leq |p| \cdot |\mathrm{id}_{\mathbf{1}_{\underline{\mathscr{C}}}}|.$$

由于 $\underline{\mathscr{C}}$ 是一个 Lipschitz 范畴，根据定义，我们有 $|\mathrm{id}_{\mathbf{1}_{\mathscr{C}}}| = \underline{\perp}$。利用量子幺半群的吸收性质，我们知道对于任意 $x$，$x \cdot \perp = \perp$。因此：

$$|p| \leq |p| \cdot \perp = \perp.$$

□

第*15*页定理 *6.2* 的证明。如果 $f$ 可分解为经由广义元素 $p$ 的 $p \circ g$，那么$g\colon X \to \mathbf{1}_{\mathscr{C}}$ 是到常值对象的唯一映射。$\perp \cdot |g| = |f| \cdot |g| \geq |f|$。根据量化幺半格上的吸收假设可知，$f$ 的半范数为 $\perp$。

我们必须证明，如果 $f$ 的半范数为 $\perp$，那么它可经由终对象分解。考虑任意一对广义点 $x, y\colon 1 \to X$。根据度量小假设，$d(x, y) < \top$，因此由右相容公理可得

$$d(f \circ x, f \circ y) \leq |f| \cdot d(x, y) = \perp \cdot d(x, y) = \perp.$$

根据距离空间的豪斯多夫性质，$d(f \circ x, f \circ y) = \perp$ 蕴含 $f \circ x = f \circ y$。由于这对所有 $x, y$ 都成立，因此 $f$ 在广义点上为常值。令 $y\colon 1 \to Y$ 为这个常值（即对所有 $u$，$f \circ u = y$）。

现在考虑分解 $h = y \circ t_X$，其中 $t_X\colon X \to 1$ 是到终对象的唯一态射。最后，我们使用良点条件。如果 $h$ 与 $f$ 不同，则它们必须由广义点 $w\colon 1 \to X$区分。然而，

$$h \circ w = y \circ t_X \circ w = y \circ \mathrm{id}_1 = y = f \circ w.$$

因此 $h$ 与 $f$ 在所有点上一致，故 $h = f$。于是 $f$ 通过终对象分解，从而是常数。

□

# H 第7节的证明细节

第 *16* 页命题 *7.2* 的证明。为简化计算，我们验证傅里叶距离的 $l$ 次幂所满足的不等式。这是将 [24, 命题 1] 中的证明从$\mathbb{R}$ 推广到有限维向量空间一般情形的扩展。在进行严格验证之前，我们指出，这个证明所用的几乎所有工具——泰勒展开、L´évy 连续性定理和法图引理——在 $\mathbb{R}^n$ 中仍然成立，因此该结果在这一更广泛的背景下也成立。

设 $\varphi_\mu$ 和 $\varphi_\tau$ 分别表示 $\mu$ 和 $\tau$的特征函数。由绝对值和上确界范数的性质可直接推出 $d_l$ 的非负性和对称性。三角不等式显然成立：对任意 $\nu$,

$$\frac{\|\varphi_\mu(t)-\varphi_\tau(t)\|}{\|t\|^l} \le \frac{\|\varphi_\mu(t)-\varphi_\nu(t)\|}{\|t\|^l} + \frac{\|\varphi_\nu(t)-\varphi_\tau(t)\|}{\|t\|^l}.$$

对 $t \neq 0$ 取上确界，得到 $d_l(\mu, \tau) \le d_l(\mu, \nu) + d_l(\nu, \tau)$。对于不可区分者恒等公理，若 $d_l(\mu, \tau) = 0$，则对所有 $t \neq 0$，都有 $\varphi_\mu(t) = \varphi_\tau(t)$。由特征函数在原点处的连续性可知，$\varphi_\mu(0) = \varphi_\tau(0) = 1$，这意味着 $\varphi_\mu = \varphi_\tau$ 处处成立。由于特征函数唯一确定原测度，因此可以立即得出 $\mu = \tau$。

证明中的难点在于证明，在矩条件下，$d_l(\mu, \tau) < \infty$。令$n = \lfloor l \rfloor$。由于 $\mu$ 和 $\tau$ 的 $l$ 阶矩有限，因此它们的特征函数是 $n$ 次可微的。

对所有整数 $p < l$，矩相等这一条件意味着特征函数在原点处的偏导数相等。因此，以 0 为中心的 $\varphi_\mu$ 和 $\varphi_\tau$ 的 $n$ 次泰勒多项式 $Q_n(t)$ 相同。利用特征函数的泰勒余项定理，我们有：

$$|\varphi_\mu(t) - Q_n(t)| \le C\|t\|^l \int_V \|x\|^l d\mu$$

对于某个依赖于 $l$ 的常数 $C$。对于 $\tau$ 也有类似的界。将其代入度量的定义：

$$\begin{aligned}\frac{|\varphi_\mu(t)-\varphi_\tau(t)|}{\|t\|^l} &= \frac{|(\varphi_\mu(t)-Q_n(t)) - (\varphi_\tau(t)-Q_n(t))|}{\|t\|^l} \\ &\le \frac{|\varphi_\mu(t)-Q_n(t)|}{\|t\|^l} + \frac{|\varphi_\tau(t)-Q_n(t)|}{\|t\|^l} \\ &\le C\left(\int_V \|x\|^l d\mu + \int_V \|x\|^l d\tau\right).\end{aligned}$$

Sin由于根据假设，$l$ 阶矩有限，因此该比值关于 $t$一致有界。因此 $d_l(\mu, \tau) < \infty$。

如果不满足矩条件，那么泰勒展开会在某个阶数 $k < l$ 处不同，导致当 $t \to 0$ 时该比值发散，从而距离为无穷大。因此，$(P_l(V), d_l)$ 是所需的扩展度量空间。□

第 16 页命题 7.3 的证明。我们沿用 [24, 命题 2]的证明。

首先，假设 $n$ 是整数。令 $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 为 $(P_n(V), d_n)$ 中的一个柯西序列。令 $\varphi_k$ 表示 $\mu_k$ 的特征函数。对于任意固定的 $\varepsilon > 0$，存在 $K$，使得对于$k, m \ge K$,

$$\frac{|\varphi_k(t)-\varphi_m(t)|}{\|t\|^n} < \varepsilon$$

对所有 $t \neq 0$ 均成立。这意味着，对于每个 $t$，$\{\varphi_k(t)\}$ 都是一个复数柯西序列，因此逐点收敛到函数 $\varphi(t)$

由于 $d_n(\mu_k, \mu_m) < \infty$，这些测度的矩在 $n$ 阶以内相同（参见命题 7.2 的证明）。令 $Q(t)$ 为与这些矩对应的 $n$ 次泰勒多项式。注意，$Q(0) = 1$，而高阶项则对应于零点处的导数。定义 $t \neq 0$ 的余项函数：

$$h_k(t) = \frac{\varphi_k(t) - Q(t)}{\|t\|^n}.$$

由 $d_n$ 上的柯西条件，序列 $\{h_k\}$ 在 $V \setminus \{0\}$ 上一致满足柯西条件。因此，它一致收敛到连续函数 $h(t)$。我们可以将极限特征函数写为：

$$\varphi(t) = Q(t) + \|t\|^n h(t).$$

由于 $Q(t)$ 是多项式，且当 $t \to 0$ 时 $\|t\|^n h(t) \to 0$，因此 $\varphi(t)$ 在原点连续，且 $\varphi(0) = 1$。根据有限维向量空间上的 Lévy 连续性定理，$\varphi$ 是某个概率测度 $\mu$ 的特征函数。由于 $\mu_k \to \mu$ 弱收敛，由法图引理可得：

$$\int_V \|x\|^n d\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int_V \|x\|^n d\mu_k < \infty.$$

因此 $\mu \in P_n(V)$。$d_n(\mu_k, \mu) \to 0$ 的收敛由 $h_k \to h$ 的一致收敛得出。因此 $P_n(V)$ 是完备的。

第二个陈述是直接的，因为 $P_l$ 中的柯西序列在 $P_{\lfloor l \rfloor}$ 中也是柯西的。□

**第 16 页上命题 7.4 的证明。** 给定有限维向量空间之间的函数 $f\colon V \to W$ 以及 $l \ge 1$，将 $\mathrm{P}_l(f)\colon \mathrm{P}_l(V) \to \mathrm{P}_l(W)$ 定义为函数 $\mathrm{P}_l(f)(\mu) = [U \mapsto \mu(f^{-1}U)]$，对所有 $\mu \in \mathrm{P}_l(V)$. 只需验证具有有限 $l$ 阶矩的测度在 $\mathrm{P}_l(f)$ 下的像仍落在其中且也具有有限 $l$ 阶矩。然后我们可以将度量空间完备化，且 $\mathrm{P}_l(f)$ 将延拓到完备化上。

设 $f\colon V \to W$ 为 **FinVect** 中的态射，并设 $L = |f|_{\mathrm{L}}$ 表示其 Lipschitz 半范数。由半范数的定义，对任意 $x \in V$，我们有 $|f(x)|_W \le L|x|_V$。将其升至 $l \ge 1$ 次幂，我们得到 $|f(x)|_W^l \le L^l |x|_V^l$。关于 $\mu \in \mathrm{P}_l(V)$ 积分得到：

$$\int_W |y|_W^l \, d(f_*\mu)(y) \quad = \quad \int_V |f(x)|_W^l d\mu(x) \quad \le \quad L^l \int_V |x|_V^l d\mu(x)$$

由于根据 $\mu \in \mathrm{P}_l(V)$ 的假设，$\int_V |x|_V^l \, d\mu(x)$ 有限，因此 $f_*\mu$ 具有有限的 $l$ 阶矩。因此，函子 $\mathrm{P}_l$ 在该范畴的对象上定义良好。

这个度量空间 $\mathrm{P}_l$ 通过映射 $\star$ 配备了一个重缩放算子：$(c, \mu) \mapsto \mathrm{P}_l(x \mapsto c \cdot x)(\mu)$，其中 $\cdot$ 是由向量空间结构诱导的 $x$ 上通常的数乘作用。我们必须验证，选取傅里叶 $l$-距离（$d_l$）时，此运算与度量相容。重缩放测度 $S_c(\mu)$ 的特征函数为 $\varphi_{S_c(\mu)}(t) = \varphi_\mu(ct)$。因此，距离的变换为：

$$\begin{aligned} d_l(c \star \mu, c \star \tau) &= \left( \sup_{t \neq 0} \frac{|\varphi_\mu(c^{-l/l}t) - \varphi_\tau(c^{-l/l}t)|}{|t|^l} \right)^{1/l} \\ &= \left( \sup_{u \neq 0} \frac{|\varphi_\mu(u) - \varphi_\tau(u)|}{|c^{-1/l}t|^l} \right)^{1/l} \quad (\text{letting } u = c^{-1/l}t) \\ &= \left( c^l \sup_{u \neq 0} \frac{|\varphi_\mu(u) - \varphi_\tau(u)|}{|u|} \right)^l = c \cdot d_l(\mu, \tau) \end{aligned}$$

因此，度量空间 $\mathrm{P}_l(V)$ 满足 $\mathbb{R}$**CMet** 中态射所要求的条件 $d(c \star x,\ c \star y) = c \star d(x,\ y)$。□

---

**第 16 页命题 7.6 的证明。** 设 $f\colon V \to W$ 是有限维向量空间之间的线性映射，其 Lipschitz 半范数为 $|f|$。对于任意两个概率测度 $\mu,\ \nu \in \mathrm{P}_l(V)$，我们有

$$d_l(\mathcal{P}_l(f)(\mu), \mathcal{P}_l(f)(\nu)) = \sup_{t \in W \setminus \{0\}} \frac{|\varphi_{\mathcal{P}_l(f)(\mu)}(t) - \varphi_{\mathcal{P}_l(f)(\nu)}(t)|}{\|t\|^l}$$

我们有 $\varphi_{\mathcal{P}_l(f)(\mu)}(t) = \varphi_\mu(f(t))$，并将其代入距离公式：

$$d_l(\mathcal{P}_l(f)(\mu), \mathcal{P}_l(f)(\nu)) = \left( \sup_{t \neq 0} \frac{|\varphi_\mu(f(t)) - \varphi_\nu(f(t))|}{\|t\|^l} \right)^{1/l}$$

令 $u = f(t)$。根据半范数的定义，我们有 $\|u\| = \|f(t)\| \le |f|\|t\|$。对于 $u \neq 0$，这意味着 $\|t\| \ge \frac{\|u\|}{|f|}$。由于 $l \ge 1$，取 $-l$ 次幂会反转不等号：

$$\frac{1}{\|t\|^l} \le \frac{|f|^l}{\|u\|^l}$$

将此界代入上确界中，得到：

$$d_l(\mathcal{P}_l(f)(\mu),\mathcal{P}_l(f)(\nu)) \le \left(\sup_{u\neq 0}\left(|f|^l\frac{|\varphi_\mu(u)-\varphi_\nu(u)|}{\|u\|^l}\right)\right)^{1/l} = |f|\cdot d_l(\mu,\nu)$$

这个不等式表明映射 $\mathrm{P}_l(f)$ 是 Lipschitz连续的，且其半范数有界于 $|f|$：

$$|\mathcal{P}_l(f)| \le |f|$$

由此可得 $|\mathrm{P}_l(f)| \le |f|$，从而验证 $\mathrm{P}_l$ 是一个膨胀函子。 □

第 17 页上的命题 7.10 的证明。为证明 $(\mathrm{P}_l, \mathrm{ind}, u)$ 是一个松幺半群膨胀函子，我们必须验证松散结构满足结合律和单位性公理，并证明结构态射是非扩张的。

我们先证明乘法 ind 满足结合律。这相当于证明对于任意 $U,V,W \in \mathbf{FinVect}$，下图交换

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{P}_l(U)\times\mathcal{P}_l(V)\times\mathcal{P}_l(W) & \xrightarrow{\mathrm{ind}_{U,V}\times\mathrm{id}} & \mathcal{P}_l(U\times V)\times\mathcal{P}_l(W) \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\times\mathrm{ind}_{V,W}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ind}_{U\times V,W}} \\
\mathcal{P}_l(U)\times\mathcal{P}_l(V\times W) & \xrightarrow{\mathrm{ind}_{U,V\times W}} & \mathcal{P}_l(U\times V\times W)
\end{array}$$

为方便起见，我们省略了笛卡尔积的结合子。

设 $(\mu_U,\mu_V,\mu_W)$ 分别是定义在 $U,V,W$ 上的概率测度。沿上方路径，我们先在 $U\times V$ 上构造乘积测度 $\mu_U\otimes\mu_V$，然后在 $(U\times V)\times W$ 上构造 $(\mu_U\otimes\mu_V)\otimes\mu_W$。沿下方路径，我们得到 $\mu_U\otimes(\mu_V\otimes\mu_W)$。根据乘积测度构造的结合律，即 $[0,1]$ 上的乘法，这两种方式定义了乘积空间 $U\times V\times W$ 上的同一个测度。因此该图表交换。

令 $1=\{0\}$ 为零向量空间，它是 **FinVect** 上笛卡尔幺半结构的单位元。单位映射 $u\colon 1\to \mathrm{P}_l(1)$ 定义为 $0\mapsto\delta_0$。我们必须证明它与左单位子 $\lambda\colon 1\times V\to V$ 相容。所需的图表为：

$$\begin{array}{ccccc}
1\times\mathcal{P}_l(V) & \xrightarrow{u\times\mathrm{id}} & \mathcal{P}_l(1)\times\mathcal{P}_l(V) & \xrightarrow{\mathrm{ind}_{1,V}} & \mathcal{P}_l(1\times V) \\
& {\scriptstyle\lambda_{\mathcal{P}_l(V)}}\searrow & & & \downarrow{\scriptstyle\mathcal{P}_l(\lambda_V)} \\
& & \mathcal{P}_l(V) & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathcal{P}_l(V)
\end{array}$$

令 $\mu\in\mathrm{P}_l(V)$。上方路径将 $(0,\mu)$ 映射到 $\delta_0\otimes\mu$。沿同构 $\lambda_V\colon\{0\}\times V\cong V$ 推前该乘积测度，恰好得到 $\mu$，因为对于任意可测集 $A\subseteq V$：

$$(\mathcal{P}_l(\lambda_V)(\delta_0\otimes\mu))(A) = (\delta_0\otimes\mu)(\{0\}\times A) = \delta_0(\{0\})\cdot\mu(A) = \mu(A).$$

其中我们使用 $\delta_0(\{0\})=1$。右单位子的验证完全相同。

最后，我们需要证明松弛幺半群映射 ind 的半范数有界于 1。设 $(\mu_1,\nu_1)$ 和 $(\mu_2,\nu_2)$ 分别是 $\mathrm{P}_l(U)$ 和 $\times\mathrm{P}_l(V)$ 中的元素。回忆一下，乘积空间上的度量是最大度量

$$D := d_{\mathcal{P}_l(U)\times\mathcal{P}_l(V)}((\mu_1,\nu_1),(\mu_2,\nu_2)) = \max\left(d_l(\mu_1,\mu_2),\, d_l(\nu_1,\nu_2)\right).$$

我们可以对陪域中的傅里叶 $l$-距离进行界定：

$$d_l(\mu_1\otimes\nu_1,\mu_2\otimes\nu_2) = \left(\sup_{(u,v)\neq 0}\frac{\left|\varphi_{\mu_1}(u)\varphi_{\nu_1}(v)-\varphi_{\mu_2}(u)\varphi_{\nu_2}(v)\right|}{|(u,v)|^l}.\right)^{1/l} \tag{H.1}$$

这里，我们隐式地使用富比尼定理来分离积分。具体来说，对于 $V\times W$ 上的乘积测度 $\mu_1\otimes\nu_1$，特征函数为：

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mu_1\otimes\nu_1}(u,v) &= \int_{V\times W} e^{-i(\langle U,Z\rangle)}d(\mu_1\otimes\nu_1)(Z) \\
&= \int_{V\times W} e^{-i(\langle u,x\rangle+\langle v,y\rangle)}d(\mu_1\otimes\nu_1)(x,y)
\end{aligned}$$

这里，我们按如下方式分解内积 $U, Z \ V \times W$。首先，我们将 $U = u + v$ 拆分为 $u \in V \times 0_W$ 和 $v = 0_V \times W$ 然后，我们也可以用同样的方式拆分 $Z = x + y$。展开后，注意到正交内积为零，我们得到 $u, x \ + v, y) \ = U, Z$。根据富比尼定理，我们可以拆分这个二重积分：

$$\begin{aligned}\varphi_{\mu_1 \otimes \nu_1}(u, v) &= \int_V \int_W e^{-i\langle u,x\rangle} e^{-i\langle v,y\rangle} \, d\nu_1(y) \, d\mu_1(x) \\ &= \int_V e^{-i\langle u,x\rangle} d\mu_1(x) \cdot \int_W e^{-i\langle v,y\rangle} d\nu_1(y) \\ &= \varphi_{\mu_1}(u) \cdot \varphi_{\nu_1}(v).\end{aligned}$$

我们对 (H.1) 右端的分子应用三角不等式，并使用界 $|\varphi| \leq 1$ （特征函数的常用界，但已在定理 I.3 的证明中得到证明）：

$$\begin{aligned}&\left|\varphi_{\mu_1}\varphi_{\nu_1} - \varphi_{\mu_2}\varphi_{\nu_2}\right| \\ &\qquad \leq |\varphi_{\mu_1}(u)| \cdot |\varphi_{\nu_1}(v) - \varphi_{\nu_2}(v)| + |\varphi_{\nu_2}(v)| \cdot |\varphi_{\mu_1}(u) - \varphi_{\mu_2}(u)| \\ &\qquad\qquad \leq 1 \cdot d_l(\nu_1, \nu_2)^l |v|^l + 1 \cdot d_l(\mu_1, \mu_2)^l |u|^l \\ &\qquad\qquad\qquad \leq D^l \left(|u|^l + |v|^l\right)。\end{aligned}$$

从第二行过渡到第三行时，我们使用了不等式

$$|\varphi_{\nu_1}(v) - \varphi_{\nu_2}(v)| \leq d_l(\nu_1, \nu_2)^l |v|^l$$

该不等式是通过将傅里叶距离升至 $l$ 次幂，并注意到任一取值都小于上确界而得到的。

将此计算代入方程 (H.1)，我们可以计算出左侧的上确界为（**此处我们利用了我们具有 $l_1$-范数（在对偶空间上）这一事实**）：

$$\frac{d_l(\mu_1 \otimes \nu_1, \mu_2 \otimes \nu_2)}{D} \leq \left( \sup_{(u,v) \neq 0} \frac{|u|^l + |v|^l}{(|u|^l + |v|^l)} \right)^{1/l}$$

因此可得 $|\mathrm{ind}| \leq 1$。 □

第 *18* 页命题 *7.11* 的证明。**Lip** 中的张量积为 $\times$。根据定义，函子

$$\mathcal{P}_l(V) \times \mathcal{P}_l(V) \to \mathcal{P}_l(V \times V)$$

的公式为

$$(\mu_1, \mu_2) \mapsto \left[ U \mapsto \int_{(x,y) \in V \times V} \chi_U(x, y) \mu_1(x) \mu_2(y) \right]$$

对于 $U \subseteq V \times V$。类似地，

$$\mathcal{P}_l(V \times V) \xrightarrow{\mathcal{P}_l(V)(+_V)} \mathcal{P}_l(V).$$

的公式为

$$\mu \mapsto \left[ U \mapsto \int_{(x,y) \in V \times V} \chi_U(x + y) d\mu_1(x, y) d\mu \right]$$

对于 $U \subseteq V$。结合二者，我们得到卷积积的所需公式 . □

第 *18* 页命题 *7.11* 的证明。只需验证

$$d(c \star A, c \star B) = c \cdot d(A, B)$$

由此可得一般公式 $c\mathrm{tr}(M) \ = \mathrm{tr}(c \cdot \ M)$。因此

$$\begin{aligned}d(c \star A, c \star B) &= \left( c^2 \operatorname{tr}(A) + c^2 \operatorname{tr}(B) - 2c^2 \operatorname{tr}\left( A^{1/2} B A^{1/2})^{1/2} \right) \right)^{1/2} \\ &= c \left( \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B) - 2 \operatorname{tr}\left( A^{1/2} B A^{1/2})^{1/2} \right) \right)^{1/2}\end{aligned}$$

如所需。 □

第 19 页命题 7.16 的证明。为证明这一点，我们首先说明 $\Sigma^+$ 是一个膨胀函子，然后说明它具有松弛幺半群膨胀结构。

我们必须验证不等式 $|\Sigma^+(f)| \leq |f|$。令 $M$, $N \in \Sigma^+(V)$。Bures-Wasserstein 距离满足

$$d(fMf^T, fNf^T) \leq |f| \cdot d(M,N)$$

其中 $|f|$ 是 $f$的 Lipschitz 半范数。这是因为（见 [5]），它等同于方差矩阵分别为 $M$ 和 $N$ 的正态分布之间的 Wasserstein 距离。最后，注意（或参见 [42]），Wasserstein 距离满足不等式

$$W_p(f_*\mu, f_*\nu) \leq |f|_{op} \cdot W_p(f_*\mu, f_*\nu).$$

for 所有 $p$，并注意，高斯分布沿线性映射的推前会变换其方差
ma阵为 $fMF^T$。因此，我们有：

$$|\Sigma^+(f)| \leq |f|.$$

因此，$\Sigma^+$ 是一个膨胀函子。

我们还没有定义 $\Sigma^+$ 的松弛幺半群结构映射，所以下面来定义它们。**FinVect** 中的单位元是零向量空间 $\{0\}$。空间 $\Sigma^+(\{0\})$ 是平凡单点度量空间。因此存在唯一的映射 $w\colon \mathbf{1}_{\mathbb{R}\mathbf{CMet}} \to \Sigma^+(\{0\})$，我们将其取作单位元。

幺半群映射 $\mu_{V,W}\colon \Sigma^+(V) \times \Sigma^+(W) \to \overline{\Sigma^+(V \times W)}$是分块对角嵌入：

$$(M,N) \mapsto \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$$

分块对角矩阵之间的距离可按如下方式拆分，因为我们可以分别分解左上角和右下角：

$$d\left(\begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & N_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} M_2 & 0 \\ 0 & N_2 \end{pmatrix}\right)^2 = d(M_1,M_2)^2 + d(N_1,N_2)^2$$

这意味着，当

$$d(M_1,M_2)^2 + d(N_1,N_2)^2 \leq 2\max(d(M_1,M_2)^2, d(N_1,N_2)^2)$$

我们有该映射有界于 $\sqrt{2}$。 □

定理 7.17 的证明（第 19 页）。现在我们验证 $\mathrm{Var}_V\colon \mathrm{P}_l^0(V) \to \Sigma^+(V)$ 是 $\mathbb{R}\mathbf{CMet}$ 和 $|\mathrm{Var}_V| \leq e$ 中的一个态射，并将自然性的证明留到命题 I.2。我们需要验证等变性和非扩张性。

等变性显然成立，因为对于任意概率测度 $\mu \in \mathrm{P}_l^0(V)$，测度 $c\star\mu$ 根据方差的标准性质有：

$$\mathrm{Var}_V(c \star \mu) = \mathrm{Var}(cX) = c^2\mathrm{Var}(X) = c^2\mathrm{Var}_V(\mu) = c \star \mathrm{Var}_V(\mu).$$

因此，该映射是等变的。

其次，我们验证非扩张性。考虑用于中心极限定理的情形 $l > 2$。回顾命题 7.2，若要使傅里叶 $l$-距离 $d_l(\mu, \nu)$ 有限，测度 $\mu$ 和 $\nu$ 必须具有相同的矩，直到 $\lfloor l \rfloor$ 阶。因此，它们会被映射到同一个矩阵。若 $d_l(\mu, \nu) = \infty$，则非扩张性条件平凡成立。因此，$\mathrm{Var}_V$ 是 $\mathbb{R}$**CMet** 中的一个态射。

为了计算 $|\mathrm{Var}_V|$，我们注意到，它会将所有彼此间距离有限的对象映射为距离 0。因此，它的半范数为 0。
□

# I 第 8 节的证明细节

命题 *8.2*（第 *20* 页）的证明。函子 $\mathscr{C}(\mathbf{1}_{\mathscr{C}}, -)\colon \mathscr{C} \to \mathbf{sNorm}$（或 **dNorm**）保留所有富集极限。回顾一下，富集纤维 $X_y$ 被定义为图表 $\mathbf{1}_{\mathscr{C}} \xrightarrow{y} Y \xleftarrow{p} X$ 的富集拉回。将函子 $\mathscr{C}(\mathbf{1}_{\mathscr{C}}, -)$ 应用于该图表，会在基范畴**sNorm**中得到一个极限图表：

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathscr{C}}(\mathbf{1}_{\underline{\mathscr{C}}}, X_y) & \longrightarrow & \underline{\mathscr{C}}(\mathbf{1}_{\underline{\mathscr{C}}}, X) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_*} \\ \underline{\mathscr{C}}(\mathbf{1}_{\underline{\mathscr{C}}}, \mathbf{1}_{\underline{\mathscr{C}}}) & \xrightarrow{y_*} & \underline{\mathscr{C}}(\mathbf{1}_{\underline{\mathscr{C}}}, Y) \end{array}$$

我们在 **sNorm** 中计算这个极限。由于 $\mathbf{1}_{\mathscr{C}}$ 是终对象，$\mathscr{C}(\mathbf{1}_{\mathscr{C}}, \mathbf{1}_{\mathscr{C}}) \cong \{x\}$，其中$|x| = \bot$。态射 $y_*\colon \{x\} \to \mathscr{C}(\mathbf{1}_{\mathscr{C}}, Y)$ 选出点 $y$。在 **sNorm** 这一范畴中，余跨图 $I \xrightarrow{y} B \xleftarrow{p} A$ 的极限是集合论意义下的纤维 $\{a \in A \mid p(a) = y\}$，并赋予由 $A$ 诱导的子空间度量和子空间半范数。

因此，$\mathscr{C}(\mathbf{1}_{\underline{\mathscr{C}}}, X_y)$ 在 **sNorm** 中同构于子空间 $\{x \in \mathscr{C}(\mathbf{1}_{\mathscr{C}}, X) \mid p(x) = y$，它属于 $\mathscr{C}(\mathbf{1}_{\mathscr{C}}, Y)\}$。由于 **sNorm**（以及 **dNorm**）中的同构都是等距映射，这就证明了所要求的等距意义下的等式。□

第 *21* 页命题 *8.7* 的证明。（1）参见命题 I.1 的证明，（2）参见命题 I.2 的证明。

**命题 I.1**。元组 $(\mathcal{P}_l, |-|, \exp)$ 是一个笛卡尔预中心极限定理系统。

**命题 I.2**。元组 $(\mathcal{P}_l^0, \Sigma^+, \mathsf{Var})$ 是一个笛卡尔预中心极限定理系统。

□

第 *21* 页定理 *8.8* 的证明。将 $F$ 和 $G$ 卷积算子映射写成分量形式，即可看出该图表的交换性。

$$\begin{array}{ccccccc} \underline{F}X & \xrightarrow{\Delta_{\underline{F}}} & \underline{F}X \oplus \underline{F}X & \xrightarrow{\mu_{\underline{F}X,\underline{F}X}} & \underline{F}(X \oplus X) & \xrightarrow{\underline{F}(-+-)} & \underline{F}X \\ {\scriptstyle p_X}\downarrow & & {\scriptstyle p_X \oplus p_X}\downarrow & & {\scriptstyle p_{X\oplus X}}\downarrow & & {\scriptstyle p_X}\downarrow \\ \underline{G}X & \xrightarrow[\Delta_{\underline{G}}]{} & \underline{G}X \oplus \underline{G}X & \xrightarrow[\mu(\underline{G})_{\underline{G}X,\underline{G}X}]{} & \underline{G}(X \oplus X) & \xrightarrow[\underline{G}(-+-)]{} & \underline{G}X \end{array}$$

左侧第一个方块的交换性由分次对角映射的定义保证。第二个和第三个方块的交换性则来自定义函子分次的两个交换图。然后，根据完全可重缩放假设，底行上的复合等于 $c \star$恒等态射$_{GX}$。因此，根据 $c \otimes [c, e] = e$ 的假设，用 $[c, e]$ 重缩放该图会使底行上的复合成为恒等态射，从而得到陈述中的交换方块。

接下来我们注意到，我们取其纤维的图表中所有态射的半范数都小于 $e$。为验证这一点，只需注意到广义点的半范数为 $\bot$，对角映射的半范数为 $e$，松幺半变换的单位元也是如此。因此 $|\vartheta^F| \le |\triangle_F||\mu||F(+)| = |F(+)| = |+| \le c$。所以 $||[c, e]\vartheta^F| \le e$。因此，这是 $\mathscr{C}$ 中的一个定义良好的锥形图。

为证明关于纤维上诱导映射的这一论断，请注意：我们的假设保证了下列图表的交换性。底行箭头的标记可由一次简单的追图得出。

$$\begin{array}{ccccccc} \underline{F}X & \xrightarrow{\Delta_{\underline{F}}} & \underline{F}X \oplus \underline{F}X & \xrightarrow{\mu_{\underline{F}X,\underline{F}X}} & \underline{F}(X \oplus X) & \xrightarrow{[c,e]\star\underline{F}(-+-)} & \underline{F}X \\ {\scriptstyle p_X}\downarrow & & {\scriptstyle p_X \oplus p_X}\downarrow & & {\scriptstyle p_{X\oplus X}}\downarrow & & {\scriptstyle p_X}\downarrow \\ \underline{G}X & \xrightarrow[\Delta_{\underline{G}}]{} & \underline{G}X \oplus \underline{G}X & \xrightarrow[\mu(\underline{G})_{\underline{G}X,\underline{G}X}]{} & \underline{G}(X \oplus X) & \xrightarrow[[c,e]\star\underline{G}(-+-)]{} & \underline{G}X \\ {\scriptstyle p}\uparrow & & {\scriptstyle \Delta_G \circ p}\uparrow & & {\scriptstyle \mu(\underline{G})_{\underline{G}X,\underline{G}X} \circ \Delta_G \circ p}\uparrow & & {\scriptstyle p}\uparrow \\ \mathbf{1}_{\underline{\mathscr{D}}} & \longrightarrow & \mathbf{1}_{\underline{\mathscr{D}}} & \longrightarrow & \mathbf{1}_{\underline{\mathscr{D}}} & \longrightarrow & \mathbf{1}_{\underline{\mathscr{D}}} \end{array} \tag{I.1}$$

从左到右的完整复合是一个余跨图态射，因而在其极限（即 $p$ 处的纤维）上诱导出相应的映射。

我们注意到，我们正在证明的定理陈述下方所声称的分解可由上方的图表轻易推出。每一对相邻的列及其间的箭头都会产生一个极限中的态射，$\vartheta_p$ 可经由该态射分解。

由于 $p_X$ 是满态射，纤维非空。在范畴 **sNorm** （以及**dNorm**）中，满态射都是满射。由假设，$p_X$ 是满态射，因此任意点上的严格纤维都是非空的；根据命题 8.2，对于富集纤维而言，该严格纤维是 **Set** 中的一个载体。□

第 *22* 页上命题 *8.12* 的证明。 考虑定理 8.8 的证明中余跨图的交换图：

$$\begin{array}{ccccccc}
\underline{F}X & \xrightarrow{\Delta_F} & \underline{F}X \oplus \underline{F}X & \xrightarrow{\mu_{\underline{F}X,\underline{F}X}} & \underline{F}(X \oplus X) & \xrightarrow{[c,e]\star\underline{F}(-+-)} & \underline{F}X \\
{\scriptstyle p_X}\downarrow & & {\scriptstyle p_X \oplus p_X}\downarrow & & {\scriptstyle p_{X\oplus X}}\downarrow & & {\scriptstyle p_X}\downarrow \\
\underline{G}X & \xrightarrow[\Delta_{\underline{G}}]{} & \underline{G}X \oplus \underline{G}X & \xrightarrow[\mu(\underline{G})_{\underline{G}X,\underline{G}X}]{} & \underline{G}(X \oplus X) & \xrightarrow[[c,e]\star\underline{G}(-+-)]{} & \underline{G}X \\
{\scriptstyle p}\uparrow & & {\scriptstyle \Delta_G\circ p}\uparrow & {\scriptstyle \mu(\underline{G})_{\underline{G}X,\underline{G}X}\circ\Delta_G\circ p}\uparrow & & & {\scriptstyle p}\uparrow \\
\mathbf{1}_{\underline{\mathscr{D}}} & \longrightarrow & \mathbf{1}_{\underline{\mathscr{D}}} & \longrightarrow & \mathbf{1}_{\underline{\mathscr{D}}} & \longrightarrow & \mathbf{1}_{\underline{\mathscr{D}}}
\end{array} \tag{I.2}$$

By 根据纤维的定义，由于它是一个极限，因而具有函子性，这些列的 dia图表通过拉回定义了三个不同的纤维：

1. $p$ 上的纤维 $\underline{F}(X)_p$；2. $\Delta_G \circ p$ 在 $FX \oplus FX$ 中的纤维 $(FX \oplus FX)_{\Delta_G\circ p}$；3. $\mu(G) \circ \Delta_G \circ p$ 在 $F(X \oplus X)$ 中的纤维 $F(X \oplus X)_{\mu(G)\circ\Delta_G\circ p}$。

具体而言，我们得到 $\delta_p\colon \underline{F}(X)_p \to (\underline{F}X \oplus \underline{F}X)_{\Delta_G\circ p}$，由 $\Delta_F$ 诱导；$m_p\colon (\underline{F}X \oplus \underline{F}X)_{\Delta_G\circ p} \to \underline{F}(X\oplus X)_{\mu(G)\circ\Delta_G\circ p}$，由 $\mu_F$ 诱导；以及 $\alpha_p\colon \underline{F}(X\oplus X)_{\mu(G)\circ\Delta_G\circ p} \to \underline{F}(X)_p$，由重标度加法 $[c,e]\bigstar F(+)$ 诱导。这些映射的复合恰好是诱导的自同态 $\vartheta_p = \alpha_p \circ m_p \circ \delta_p$。由于纤维之间的态射是 $F$ 中态射的限制，它们满足 $|\delta_p| \le |\Delta_F| \le e$, $|m_p| \le |\mu_F| = e$ 以及 $|\alpha_p| \le |[c,e]\bigstar F(+)|$。利用半范数的次乘性，我们有：

$$|\vartheta_p| \le |\alpha_p| \cdot |m_p| \cdot |\delta_p|.$$

如果 $|\alpha_p|$ 的半范数严格小于 $e$，则量子幺半群的压缩性意味着总积严格小于 $e$，因为另外两个量均被 $e$所有界。□

第 *22* 页定理 *8.14* 的证明。 对于 (1)，请参见下述定理 I.3 的证明；对于 (2)，请参见定理 I.4 的证明。

**定理 I.3**。 元组 $(\mathcal{P}_l, |-|, \exp)$ 是一个笛卡尔 *CLT* 系统。

**定理 I.4**。 元组 $(\mathcal{P}_l^0, \Sigma^+, \mathsf{Var})$ 是一个笛卡尔 *CLT* 系统。

□

第 *23* 页定理 *8.15* 的证明。 我们需要证明，对于每个广义点 $p$，$\mathfrak{S}_*\mathscr{D}$ 中都存在 $\mathrm{N}_p\colon \mathbf{1}_{\mathscr{D}} \to G(X)$。

根据定义 8.13，在 $\mathfrak{S}_*(\mathscr{D})_{\preceq e}$ 中取的纤维 $\underline{F}(X)_p$ 是度量小的，并且算子 $\vartheta_p$ 满足 $|\vartheta_p| \prec e$。最后，由定理 8.8，$\mathscr{D}(\mathbf{1}_{\mathscr{D}}, \underline{\ })$ 非空

此外，根据定理 8.8 中的构造，$\vartheta_p$ 是半范数范畴 $\mathfrak{S}_*(\mathscr{D})_{\preceq e}$中的一个自同态。底层距离空间 $\mathscr{D}(1, \underline{F}(X)_p)$继承了 $\underline{F}(X)_p$的完备 V-空间结构。

因此，我们可以将定理 6.3 应用于算子

$$(\vartheta_p)_*\colon \underline{\mathscr{D}}(\mathbf{1}_{\underline{\mathscr{D}}}, \underline{F}(X)_p) \to \underline{\mathscr{D}}(\mathbf{1}_{\underline{\mathscr{D}}}, \underline{F}(X)_p)$$

由 $(\vartheta_p)_*(\varphi) = \vartheta_p \circ \varphi$ 对 $\varphi$ 定义：$\mathbf{1}_{\mathscr{D}} \to F(\underline{X})_p$，从而可得它有唯一不动点 $\mathrm{N}_p \in \mathscr{D}(\mathbf{1}_{\mathscr{D}}, F(X)_p)$，其特征为

$$\mathcal{N}_p = \lim_{n\to\infty} (\vartheta_p)^{\circ n}(\varphi_0)$$

对于任意初始点 $\varphi_0$：$\mathbf{1}_{\mathscr{D}} \to F(\underline{X})_p$。由定理 6.3，这个极限存在，且可计算为 $\lim_{n\to\infty} (\vartheta_p)^{\circ n}(x_0)$。至此，定理的第一部分得证。□

第 *23* 页推论 *8.16* 的证明。完整陈述如下，证明见 E节。

**推论I.5** (大数定律)。设 $\mu$ 是有限维向量空间 $V$ 上的概率测度，且

$$\int x^{\lambda} d\mu < \infty \ for\ some\ \lambda > 1$$

则当 $n \to \infty$ 时，$\frac{1}{2^n}\mu^{*2^n}$ 收敛。

**Co推论 I.6** ( 概率中心极限定理)。设 $\mu$ 是有限维向量空间 $V$上的概率测度 $with$ 期望值0 且

$$\int \|x\|^{\lambda} d\mu < \infty \ for\ some\ \lambda > 2$$

则 $\frac{1}{\sqrt{2}^n}\mu^{*2^n}$ 随 $n \to \infty$ 收敛，且该极限唯一地取决于 $\mu$的方差矩阵。

为证明这些结果，我们首先有如下简单引理

**引理 I.7.** 设 $\mu$ 为空间 $V$上的概率测度。则对所有 $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2^n}(-)^{*2^n} = \left(\frac{1}{2}(-)^{*2}\right)^{\circ n};$$

因此，第一个结论由将定理 8.15 应用于 CLT 系统 $(\mathrm{P}_l, |-|, \exp$（对 $l > 1$）得出，而定理 8.14 已证明它是一个中心极限系统。根据命题 7.11，卷积算子具有正确的形式。

第二个定理则由同一论证应用于 CLT 系统 $(\mathrm{P}_l^0, \Sigma^+, \mathrm{Var})$（对 $l > 1$）得出。

□

第 *23* 页推论 *8.16* 的证明。 因此，将定理 8.15 的陈述应用于 $l > 1$ □
的 CLT 系统 $(\mathrm{P}_l, |-|, \exp, 2^l)$ 即可得出该定理。

第 *23* 页定理 *8.18* 的证明。 根据命题 6.1，Lipschitz 范畴条件保证 **Set** 中 $\mathbf{1}_{\mathbf{Set}} \to \mathscr{C}\left(1, F(X)_p\right)$ 的每个点都对应于**sNorm**中的一个点 $\mathbf{1}_{\mathbf{sNorm}} \to \mathfrak{S}_*\mathscr{D}\left(\mathbf{1}_{\mathscr{D}}, F(X)_p\right)$。这保证了映射

$$\eta_X\colon \mathscr{D}_{lin}\left(\mathbf{1}_{\underline{\mathscr{D}}}, \underline{G}(X)\right) \to \mathscr{D}_{lin}\left(\mathbf{1}_{\underline{\mathscr{D}}}, \underline{F}(X)\right)$$

$$p \mapsto i_p \circ \mathcal{N}_p$$

是良定义的。

**步骤 1：关于 $F_{lin}$ 和 $G_{lin}$ 的自然性**首先，我们证明 $\vartheta^F$ 和 $\vartheta^G$ 分别定义了 $F_{lin}$ 和 $G_{lin}$ 的自同态。这是一个常规验证；不失一般性，只需考虑 $F$ 的情形。这意味着，对于给定的态射 $f\colon X \to Y$，需要证明等式 $F_{lin}(f) \circ \vartheta^F_X = \vartheta^F_Y \circ F_{lin}(f)$ 成立。我们通过将 $\vartheta^F_X$ 和 $\vartheta^G_X$ 分解为各个分量来验证这一点。

对角映射 $\Delta$ 是自然变换 $F_{lin} \to F_{lin} \oplus F_{lin}$。因此，我们有 $\Delta_Y \circ F_{lin}(f) = (F_{lin}(f) \oplus F_{lin}(f)) \circ \Delta_X$。

现在我们可以改写该复合：

$$\begin{aligned}\vartheta^F_Y \circ \underline{F}_{lin}(f) &= [c,e] \star \underline{F}_{lin}(+_Y) \circ \mu_{Y,Y} \circ \Delta_Y \circ \underline{F}_{lin}(f) \\ &= [c,e] \star \underline{F}_{lin}(+_Y) \circ \mu_{Y,Y} \circ (\underline{F}_{lin}(f) \oplus \underline{F}_{lin}(f)) \circ \Delta_X\end{aligned}$$

由于 $\underline{F}_{lin}$ 是一个松单函子，其乘法 $\mu$ 是一个自然变换。关于态射 $f\colon X \to Y$， $\mu$ 的自然性方块为 $\mu_{Y,\,Y} \circ (F_{lin}(f) \oplus F_{lin}(f)) = F_{lin}(f \oplus f) \circ \mu_{X,\,X}$。

此外，线性子范畴仅由 $\mathscr{C}$ 中与逐点加法相容的那些态射组成，即 $f \circ \pm_X = +_Y \circ (f \oplus f)$。应用函子 $F_{lin}$ 可得 $F_{lin}(f) \circ F_{lin}(+_X) = F_{lin}(+_Y) \circ F_{lin}(f \oplus f)$。将其代入等式：

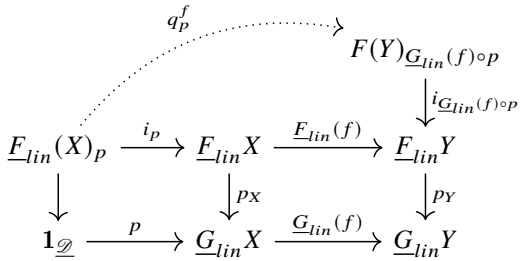
$$\begin{aligned}\vartheta^F_Y \circ \underline{F}_{lin}(f) &= [c,e] \star \underline{F}_{lin}(f) \circ \underline{F}_{lin}(+_X) \circ \mu_{X,X} \circ \Delta_X \\ &= \underline{F}_{lin}(f) \circ \big([c,e] \star \underline{F}_{lin}(+_X) \circ \mu_{X,X} \circ \Delta_X\big) \\ &= \underline{F}_{lin}(f) \circ \vartheta^F_X\end{aligned}$$

这证实 $F_{lin}(f) \circ \vartheta^F_X = \vartheta^F_Y \circ F_{lin}(f)$，因此 $\vartheta$ 是从 $F_{lin}$ 到其自身的自然变换。

对称的论证可确立 $\vartheta^G$ 关于 $G_{lin}$ 的自然性。

**步骤 2：自然性下降到纤维**

纤维的构造具有函子性，因此我们在下图中得到一个分解




具体而言，态射 $q_p^f$ 可以通过取下列余跨图态射的极限来显式构造

$$\begin{array}{ccccc}\mathbf{1}_{\underline{\mathscr{D}}} & \xrightarrow{p} & \underline{G}_{lin}X & \xleftarrow{p_X} & \underline{F}_{lin}X \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \underline{G}_{lin}(f)} & & \downarrow{\scriptstyle \underline{F}_{lin}(f)} \\ \mathbf{1}_{\underline{\mathscr{D}}} & \xrightarrow[\underline{G}_{lin}(f)\circ p]{} & \underline{G}_{lin}Y & \xleftarrow[p_Y]{} & \underline{F}_{lin}Y\end{array} \tag{I.3}$$

设 $\mathrm{N}_x$ 为 $\vartheta^F_X$ 在纤维 $\mathscr{D}(\mathbf{1}_{\mathscr{D}}, F_{lin}(X)p)$ 中的唯一不动点，然后应用推前

$$(q_p^f)_*\colon \underline{\mathscr{D}}(\mathbf{1}_{\underline{\mathscr{D}}}, \underline{F}_{lin}(X)_p) \to \underline{\mathscr{D}}(\mathbf{1}_{\underline{\mathscr{D}}}, F_{\underline{G}_{lin}(f)\circ p}).$$

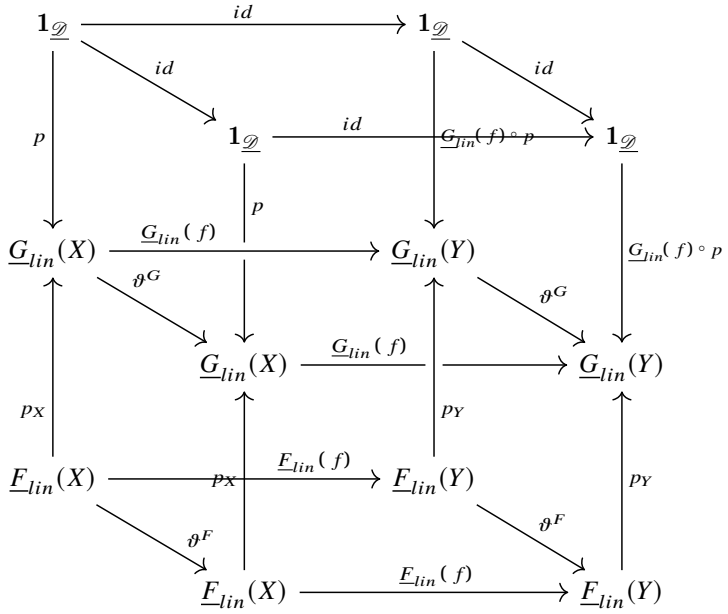
由此得到 $F_{G_{lin}(f)\circ p}$. 的一个广义点。如果我们能证明它是 $\vartheta_{G_{lin}(f)\circ p}$ 的不动点，那么根据定理 8.15 关于此类点唯一性的结论，即可得到所需结果。为此，接下来我们要证明纤维上的等变性。

**步骤 3：纤维上的等变性**

在这一步中，我们将证明以下图表交换。

$$\begin{array}{ccc}\underline{F}_{lin}(X)_p & \xrightarrow{\vartheta_p} & \underline{F}_{lin}(X)_p \\ \downarrow{\scriptstyle q_p^f} & & \downarrow{\scriptstyle q_p^f} \\ \underline{F}_{lin}(Y)_{\underline{G}_{lin}(f)\circ p} & \xrightarrow{\vartheta_{\underline{G}_{lin}(f)\circ p}} & \underline{F}_{lin}(Y)_{\underline{G}_{lin}(f)\circ p}\end{array}$$

这很容易看出，因为上面的图表是以下图表的极限，而且我们在步骤 1 中已经证明，该图表中的所有箭头都交换。




由此可知，它们在纤维层面诱导出映射，因为该层面是这些图表的极限。**步骤 4：不动点上的诱导映射**。

现在，我们可以将问题归结为具体范畴 **Set** 中关于不动点的论证。在前一步中，我们证明了映射 V 是自然的。

由此可知，$q_*\colon \mathscr{D}(\underline{\mathbf{1}}_{\mathscr{D}}, \underline{F}_{lin}(X)p) \to \mathscr{D}(\underline{\mathbf{1}}_{\mathscr{D}}, \underline{F}_{G_{lin}(f)\circ p})$ 在$\vartheta$的作用下是等变的。因此，它将不动点映射到不动点，因为根据定理 8.15，这些不动点是唯一的。结论得证。

**步骤 5：得出自然性的结论**

回顾一下，我们通过 $\eta_X(p) := \mathrm{N}_p$ 定义了变换 $\eta$ 在 **Set** 中的分量，其中 $\mathrm{N}_p$ 是纤维 $F(X)_p$ 中算子 $\vartheta_p$ 的唯一不动点。我们已经证明

$$p \to \mathcal{N}_p$$

与任意线性映射 $f\colon X \to Y$交换，也就是说 。

$$f(p) \to \mathcal{N}_{f(p)}$$

这就完成了如下证明：在 **Set** 中，该映射

$$\eta\colon \mathscr{D}_{lin}\left(\underline{\mathbf{1}}_{\mathscr{D}}, \underline{G}(-)\right) \to \mathscr{D}_{lin}\left(\underline{\mathbf{1}}_{\mathscr{D}}, \underline{F}(-)\right)$$

是一个自然变换。 □

# J 第9节的证明细节

第 *24* 页上命题 *9.2* 的证明。 张量积是利用 $\mathscr{C}$ 中的幺半群积以及 $\mathscr{D}$中的张量积按分量定义的。给定两个对象 $X = (V, H_1)$ 和$Y = (W, H_2)$:

$$X \otimes Y := (V \times W, H_1 \times (H_2 \circ) \triangle_M)$$

其中 $\triangle_M\colon M \to M \times M$ 是对角映射，它始终位于 $\mathscr{C}$中，因为假定 $\mathscr{C}$是笛卡尔的。

单位对象是终端态射 $M \to 1_{\mathscr{D}}$ 各种幺半结构映射
co我由后复合 $\mathscr{D}$ 得到。

逐点加法是由以下态射定义的运算：

$$+_{\underline{\mathscr{D}}} : M \xrightarrow{\triangle_M} M \times M \xrightarrow{H\times H} V \times V \xrightarrow{+} V$$

存在一个集合函子

$$O : \underline{\mathbf{Obs}(M, \underline{\mathscr{D}})}((H_1, V), (H_2, W)) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathscr{D}}(V, W)$$

$$(H, V) \mapsto H.$$

它与复合相容，并且我们为 $\mathbf{Obs}(M, \mathscr{D})$ 配备结构（在下一个定义中，我们将称此函子为富化函子），由此得到诱导的**dNorm** 结构。

函子性的断言可由观察到 O 诱导出一个交换图得出

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Obs}(M, \underline{\mathscr{D}}) & \xrightarrow{O(M,\underline{\mathscr{D}})} & \underline{\mathscr{D}} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathbf{Obs}(F,"\underline{G})} & & \downarrow{\scriptstyle \underline{G}} \\ \mathbf{Obs}(FM, \underline{\mathscr{B}}) & \xrightarrow{O(FM,"\underline{\mathscr{B}})} & \underline{\mathscr{B}} \end{array}$$

因为函子 O 仅取决于陪域，而不直接取决于 $M$ 或 $H$ 。 □

第 *24* 页命题 *9.2* 的证明。我们依次明确验证这些性质。该函子在对象上诱导出**dNorm**-恒等态射

$$O : \underline{\mathbf{Obs}(M, \underline{\mathscr{D}})}((H_1, V), (H_2, W)) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathscr{D}}(V, W)$$

根据扩张范畴结构的构造，它与复合相容。为证明 O 是扩张的，令

$$(\alpha, \beta) \in \mathbf{Obs}(\mathscr{C}, \underline{\mathscr{D}})((V, H_1), (N, W, H_2))$$

be 一个态射。根据定义，半范数 $|(\alpha, \beta)|_{\mathbf{Obs}(\mathscr{C},\mathscr{D})}$ 是底层对象的半范数 map $\beta \in \mathscr{D}$。因此，该函子是膨胀的，并且保留半范数。

显然，它是强幺半的，因为它在 $\mathbf{Obs}(M,\mathscr{D})$ 上诱导出该结构。

最后，根据定义可直接得出我们有如下图表

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Obs}(M, \underline{\mathscr{D}}) & \xrightarrow{O(M,\underline{\mathscr{D}})} & \underline{\mathscr{D}} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathbf{Obs}(F,"\underline{G})} & & \downarrow{\scriptstyle \underline{G}} \\ \mathbf{Obs}(FM, \underline{\mathscr{B}}) & \xrightarrow{O(FM,"\underline{\mathscr{B}})} & \underline{\mathscr{B}} \end{array}$$

因为函子 O 仅取决于陪域，而不取决于 $M$ 或 $H$。 □

第 *24* 页上的定理 *9.5* 的证明。 我们按照通常的两个步骤进行：首先验证它是一个 pre-CLT 系统，然后检查它是否是一个 CLT 系统。

大部分内容都可通过图表追逐得出；一般而言，我们只需检查应用 O 后图表的交换性。唯一需要比这更谨慎处理的地方，是在 CLT 验证过程中计算纤维本身。极限将在逗号范畴 $\mathbf{Obs}(M, \mathscr{D})$ 中计算，该范畴的底层范畴为 $M/\mathscr{D}$。注意，根据假设，包含函子 $\mathscr{D} \to \mathscr{B}$ 保持极限。因此，O 保持这个极限。

接下来，我们对 pre-CLT 图表交换性进行形式化验证 s.

首先，我们注意到 $\mathbf{Obs}(FM, p)$ 的类型正确。此变换在 $\mathbf{Obs}(M, \mathscr{D})$ 中对象 $X = (V, H)$ 处的分量定义为态射

$$FM \xrightarrow{FH} \underline{G}V \xrightarrow{p_V} \underline{U}V$$

在范畴 $\mathbf{Obs}(FM, \mathscr{E})$。

自然性意味着我们需要验证下图交换：

$$\begin{array}{ccccc} FM & \xrightarrow{FH_1} & FV & \xrightarrow{p_V} & UV \\ & \searrow^{FH_2} & \downarrow{\scriptstyle F\beta} & & \downarrow{\scriptstyle U\beta} \\ & & FW & \xrightarrow{p_W} & UW \end{array} \tag{J.1}$$

这源于顶行恰好是 $p_{O(-)} \circ \mathbf{Obs}(M,U)(H_1,V)$，而整个图表的交换性则源于 $p$ 本身相对于 $\beta \in \mathscr{D}(V,W)$ 中映射的自然性。

接下来，我们检验分次是否与松幺半映射及加法运算交换。

$\mathbf{Obs}(M,\mathscr{D})$ 中的张量积是在陪域上逐分量定义的，而根据命题 9.4，观测函子 O 是强幺半的。因此，描述分次与 $\mathbf{Obs}(M,\mathscr{D})$ 中松幺半群结构兼容性的图表，经 O 映射后恰好成为 $\mathscr{D}$ 中相应的图表：

$$\begin{array}{ccc} O(\underline{G}X \oplus \underline{G}Y) & \xrightarrow{p\oplus p} & O(\underline{U}X \oplus \underline{U}Y) \\ \downarrow{\scriptstyle O(\mu^F)} & & \downarrow{\scriptstyle O(\mu^G)} \\ O(\underline{G}(X \oplus Y)) & \xrightarrow{p} & O(\underline{U}(X \oplus Y)) \end{array}$$

由于 $(G,U,p)$ 是基范畴中的一个 pre-CLT 系统，这个投影后的图表是交换的。因此，$\mathbf{Obs}(M,\mathscr{D})$ 中原来的图表也是交换的。

类似地，$\mathbf{Obs}(M,\mathscr{D})$ 中的加法态射 $+_X$ 是如此定义的，使得 $\mathsf{O}(+_X) = +_{O(X)}$。分次与加法交换这一要求经 O 投影后得到如下条件：

$$p_{O(X)} \circ \underline{G}(+_{O(X)}) = \underline{U}(+_{O(X)}) \circ p_{O(X\oplus X)}$$

这由基系统是一个 pre-CLT 系统这一假设可知。

最后一个条件，即底卷积可完美重缩放，很容易得出，因为其在 O 下的像也具有相同性质。因此，提升的分次满足 pre-CLT 系统的所有条件。

接下来，我们验证 CLT 条件。我们有如下结论

$$O\left(\underline{\mathbf{Obs}(M,\underline{G})}(X)_y\right) = \underline{G}(V)_{O(y)}.$$

我们已经证明 O 是一个等距映射。因此，这是一个等距同构。根据原系统是 CLT 系统这一假设，基纤维 $G(V)_{O(y)}$ 在度量意义下很小；由于点集由 $\mathscr{D}$ 确定，提升纤维 $\mathbf{Obs}(M,G)(X)_y$ 在度量意义下也必定很小。

考虑纤维 $\mathbf{Obs}(M,G)(X)_y$ 上的卷积算子 $\vartheta_y$。如 pre-CLT 验证中所证，$\vartheta_y$ 在 O 下的像恰为 $\vartheta_{O(y)}$。$\mathbf{Obs}(M,\mathscr{D})$ 中的半范数定义为底层态射的半范数；又由于 $(G,U)$ 是一个 CLT 系统，算子 $|\vartheta_{O(y)}|_{\mathscr{D}} < e$。因此，所需纤维立即小于 $e$。由此，该系统满足所有所需的 CLT 条件。

因此该元组

$$(\underline{\mathbf{Obs}(M,\underline{G})}, p_{O(-)} \circ \underline{\mathbf{Obs}(M,\underline{G})}, \underline{\mathbf{Obs}(FM,p)})$$

是所要求的笛卡尔 CLT 系统。 □

第 25 页推论 9.6 的证明。唯一需要验证的是，对于（$\mathbf{Meas}_b$，$\mathbf{FinVect}$）和（$\mathbf{Meas}_b^0$，$\mathbf{FinVect}$），从 $M \in \mathbf{Meas}_b$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的测度推前保持矩假设。这是自动成立的，因为映入其中的函数都是有界的，因此推前测度也必然具有有界支撑，这意味着所有矩都是有限的。

于是，将定理 9.5 应用于定理 8.14，再结合有限维向量空间到可测空间的包含函子保持有限极限这一事实（显然，它保持有限乘积以及线性映射的等化子），即可立即得到该推论。□

第 *25* 页推论 *9.6* 的证明。 由于 $M$ 是紧流形，哈密顿函数$H:\ M \to \mathbb{R}$ 在紧定义域上连续，因此在 $\mathbb{R}$上的像有界。因此， $M$ 是$\mathbf{Meas}_b^0$ 中的一个对象（其中基点由 $m$给出）；于是，忽略辛结构后，数对 $(\mathbb{R}, H)$ 构成可观测量范畴$\mathbf{Obs}(\mathbf{Meas}_b^0, \mathrm{P}_l^0)$中的一个对象。初始能量分布 $\lambda_\omega$ 沿 $H$ 的推前是 $\mathbb{R}$上的一个紧支撑概率测度，因此具有所有阶的有限阶矩。由于 $\lambda_\omega$ 的期望为 $m$，这个推前的均值为零，因此满足推论 9.6 的条件。于是，定理保证该能量分布的归一化 $n$ 重卷积收敛于一个正态分布，其方差由$H_*(\lambda_\omega)$的方差决定。□

第 *42* 页命题 *I.1* 的证明。 函子 $|-|$ 是幺半群富集的。幺半群公理由$\mathbf{FinLip}$的幺半群结构推出。该映射度量保持，因此是富集的。

接下来，我们证明 $(\mathrm{P}_l, |-|)$ 是一个分次对。为此，必须验证期望映射 exp 关于 $\mathbf{FinVect}_{\mathrm{lin}}$ 的线性子范畴是自然变换。

首先，我们需要证明期望映射的自然性。映射 $\exp\colon \mathrm{P}_l \to U$ 是一个自然变换，当且仅当对于该范畴中的每个态射 $f\colon V \to W$，下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_l(V) & \xrightarrow{\exp_V} & |V| \\ {\scriptstyle \mathcal{P}_l(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathcal{P}_l(W) & \xrightarrow{\exp_W} & |W| \end{array}$$

变换在对象 $V$ 处的分量记作 $\exp_V$，它将概率测度 $\mu \in \mathrm{P}_l(V)$ 映射到其期望值 $E[\mu] \in V$。函子 $\mathrm{P}_l$ 对态射 $f$ 的作用是推前映射，因此 $\mathrm{P}_l(f)(\mu) = f_*\mu$。

要使图表交换，必须满足

$$f(\exp_V(\mu)) = \exp_W(\mathcal{P}_l(f)(\mu))$$

对于任意测度 $\mu$。我们分别计算等式两边。左边为 $f(\exp_V(\mu)) = f\left(\int_V x\, d\mu(x)\right)$。右边为 $\exp_W(\mathrm{P}_l(f)(\mu)) = \int_W y\, d(f_*\mu)(y) = \int_V f(x)\, d\mu(x)$。因此，自然性条件为以下等式：

$$f\left(\int_V x\, d\mu(x)\right) = \int_V f(x)\, d\mu(x)$$

这正是詹森不等式的等号成立条件，即当 $f$ 同时为凹函数和凸函数时成立。特别地，当函数 $f$ 是线性映射时，这一条件成立。

接下来，我们验证分次函子公理。

第一个图表要求空间的乘积满足交换性。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_l(V) \times \mathcal{P}_l(W) & \xrightarrow{\exp_V \times \exp_W} & |V \times W| \\ {\scriptstyle \mu_{V,W}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ \mathcal{P}_l(V \times W) & \xrightarrow{\exp_{V\times W}} & |V \times W| \end{array}$$

从 $(\mu_1, \mu_2) \in \mathrm{P}_l(V) \times \mathrm{P}_l(W)$开始，沿上方路径得到期望值对 $(\exp_V[\mu_1], \exp_W[\mu_2])$。下方路径先将两个独立变量相乘 $\mu_1 \otimes \mu_2$，然后取其期望，得到 $\exp_{V\times W}[\mu_1 \otimes \mu_2]$。两个独立变量之积的期望等于它们期望的积。因此，该图表交换。

第二个图表涉及加法映射 $+\colon V \times V \to V$，它诱导出卷积。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_l(V \times V) & \xrightarrow{\exp_{V\times V}} & |V \times V| \\ {\scriptstyle \mathcal{P}_l(+)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle +} \\ \mathcal{P}_l(V) & \xrightarrow{\exp_V} & |V| \end{array}$$

概率测度之和的期望总是等于期望值之和。因此该图表也交换。

最后，我们需要证明期望映射的半范数小于或等于
1. 回顾一下，我们使用的是 Lipschitz 半范数，因此只需证明

$$d_V(\exp(\mu), \exp(\nu)) \le d_l(\mu, \nu)$$

然而，这成立是因为，如果 $l > 1$、$d_V(\exp(\mu), \exp(\nu)) > 0$ 蕴含 $d_l(\mu, \nu) = \infty$。

由于在线性映射的限制下所有条件均得到满足，我们得出结论：$(\mathrm{P}_l, |-|)$ 是该子范畴上的一个分次函子对。注意，映射

$$|V| \xrightarrow{\triangle_{|V|}} |V| \times |V| \xrightarrow{|+|} |V|$$

恰好是按 2 进行重缩放。因此我们得出结论，$|-|$ 的分次常数为 2。 □

第 *42* 页命题 *I.2* 的证明。 我们必须证明，函子对 $(\mathrm{P}_l^0, \Sigma^+)$ 相对于 Var 构成一个分次对，符合定义 8.3。因此，我们必须证明方差映射（记作 $\mathrm{Var} : \mathrm{P}_l^0 \to \Sigma^+$）是一个与松幺半群结构交换的自然变换。

令 $V \in \underline{\mathbf{FinVect}}$。函子 $\mathrm{P}_l^0$将 $V$ 映射到其上零期望且方差有限、非零的概率测度空间。函子 $\Sigma^+$ 将 $V$ 映射到其上的对称半正定矩阵空间。对于测度 $\mu \in \mathrm{P}_l^0(V)$，分次映射 $\mathrm{Var}_V\colon \mathrm{P}_l^0(V) \to \Sigma^+(V)$ 定义为二阶矩矩阵：

$$(\mathsf{Var}_V(\mu))_{ij} = \int_V x_i x_j \, d\mu$$

这个矩阵就是方差矩阵，因为期望为零，因此我们无需重新归一化。

**1. Var 的自然性：** 我们必须证明 Var 是一个自然变换。令 $f\colon V \to W$ 为一个线性映射。我们需要证明下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_l^0(V) & \xrightarrow{\mathsf{Var}_V} & \Sigma^+(V) \\ {\scriptstyle \mathcal{P}_l^0(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Sigma^+(f)} \\ \mathcal{P}_l^0(W) & \xrightarrow[\mathsf{Var}_W]{} & \Sigma^+(W) \end{array}$$

这里，$\mathrm{P}_l^0(f)$ 是推前映射 $f_*$，因此 $\mathrm{P}_l^0(f)(\mu) = f_*\mu$。映射 $\Sigma^+(f)$ 将矩阵 $M \in \Sigma^+(V)$ 变换为 $fMf^T \in \Sigma^+(W)$。

设 $\mu \in \mathrm{P}_l^0(V)$。我们计算图表中的两条路径。

$$(\Sigma^+(f) \circ \mathsf{Var}_V)(\mu) = f(\mathsf{Var}_V(\mu))f^T =$$

$$\mathsf{Var}_W(f_*\mu) = (\mathsf{Var}_W \circ \mathcal{P}_l^0(f))(\mu)$$

To 检查上面的第二个等式，我们计算 $\mathrm{Var}(f_*\mu)$ 的矩阵的第 $(i, j)$ 个条目 .

设 $y \in W$ 的坐标为 $y_k$，并设 $y = f(x)$。

$$\begin{aligned}
(\mathsf{Var}_W(f_*\mu))_{ij} &= \int_W y_i y_j \, d(f_*\mu)(y) \\
&= \int_V (f(x))_i (f(x))_j \, d\mu(x) \\
&= \int_V \left( \sum_k f_{ik} x_k \right) \left( \sum_l f_{jl} x_l \right) d\mu(x) \\
&= \sum_{k,l} f_{ik} f_{jl} \int_V x_k x_l \, d\mu(x) \\
&= \sum_{k,l} f_{ik} (\mathsf{Var}_V(\mu))_{kl} f_{jl} \\
&= (f(\mathsf{Var}_V(\mu)) f^T)_{ij}
\end{aligned}$$

由于这对所有条目（$i$, $j$）都成立，因此我们有 $\mathrm{Var}_W(f_*\mu) = f(\mathrm{Var}_V(\mu))\, f^T$。图表是交换的，所以 Var 是一个自然变换。

**2. 与松幺半映射的交换性：** 我们必须验证定义 5.6 中的两个图表是交换的。**FinVect** 上的幺半积是笛卡尔积 $\times$。首先注意，$\mathrm{P}_l^0$ 的松弛幺半群映射是测度的乘积，

$$\mu_{V,W} : \mathcal{P}_l^0(V) \times \mathcal{P}_l^0(W) \to \mathcal{P}_l^0(V \times W)$$

$\Sigma^+(\mathbb{R})$ 上的卷积积对应于方差的加法。对于一般情形 $\Sigma^+(V)$，分次空间上的积是加法。若 $\Sigma_1$ 和 $\Sigma_2$ 是独立随机向量的方差矩阵，则它们的和的方差为 $\Sigma_1 + \Sigma_2$。定义 5.6 中的第一个图表要求，对于 $\mu_1 \in \mathrm{P}_l^0(V)$ 和 $\mu_2 \in \mathrm{P}_l^0(W)$，乘积测度 $\mu_1 \otimes \mu_2$ 在 $V \times W$ 上的方差对应于各个方差组成的分块对角矩阵。

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{P}_l^0(V) \times \mathcal{P}_l^0(W) & \xrightarrow{\mathsf{Var}_V \times \mathsf{Var}_W} & \Sigma^+(V) \times \Sigma^+(W) \\
\downarrow{\scriptstyle \mu_{\mathcal{P}_l^0}} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_{\Sigma^+}} \\
\mathcal{P}_l^0(V \times W) & \xrightarrow[\mathsf{Var}_{V \times W}]{} & \Sigma^+(V \times W)
\end{array}$$

乘积测度 $\mu_1 \otimes \mu_2$ 的方差矩阵恰好是分块对角矩阵

$$\begin{pmatrix} \mathsf{Var}(\mu_1) & 0 \\ 0 & \mathsf{Var}(\mu_2). \end{pmatrix}$$

Th映射 $\mu_{V,\,W}$ 因此对应于这一分块对角构造。由此我们得出，
dia图表交换。

第二个图表涉及卷积积。映射 $+\colon V \times V \to V$ 是向量加法。令 $\mu \in \mathrm{P}_l^0(V)$。卷积 $\mu * \mu$ 对应于 $Z = X_1 + X_2$的分布，其中 $X_1$, $X_2$ 是服从分布 $\mu$的独立随机变量。$Z$ 的方差为 $\mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) = 2 \cdot \mathrm{Var}(\mu)$。映射 $\mathrm{P}_l^0(+)$ 将 $V \times V$ 上的乘积测度映射为 $V$上的卷积。因此，第二个图表的交换性恰好体现了这样一个事实：独立随机变量之和的方差等于它们方差之和。这是由构造保证的。

由于 Var 是自然变换，且所需的图表均交换，因此，$(\mathrm{P}_l^0,\ \Sigma^+)$ 是关于 Var 的分次对。□

第 *43* 页定理 *I.3* 的证明。 首先，我们需要计算每个点处的纤维。对于 $x \in |V|$，通过直接检查可知，半范数范畴 **CMet** 中的纤维为

$$P_x(V) = \{\mu \in \mathcal{P}_l(V) : \exp(\mu) = x\}.$$

由命题 7.2 可知，它是扩展度量空间且度量小。

根据前面的命题，常数 $c$ 为 2。我们证明算子 $\vartheta_x$ 在每个纤维上都是严格压缩。该算子为 $\vartheta\colon\ P_x(V) \to P_x(V)$，定义为 $\vartheta(\mu) = \frac{1}{2}(\mu * \mu)$。

设 $A := \int_V e^{-i\langle t,\ y\rangle} d\mu$ 和 $C := \int_V e^{-i\langle t,\ y\rangle} d\nu$ 是两个测度 $\mu,\ \nu \in P_x$ 的特征函数。众所周知，卷积 $\mu * \mu$ 的特征函数为 $A^2$，参见 [6,第 26] 节。利用代数恒等式 $A^2 - C^2 = (A - C)(A + C)$，以及特征函数的绝对值不超过 1（这意味着 $\|A + C\| \le 2$），我们直接应用傅里叶距离的定义，得到紧确界：

$$\begin{aligned} d_l(\mu * \mu, \nu * \nu) &= \left(\sup_{t\neq 0} \frac{\left\|A^2 - C^2\right\|}{\|t\|^l}\right)^{1/l} \\ &\le \left(\sup_{t\neq 0} \frac{2\,\|A - C\|}{\|t\|^l}\right)^{1/l} \\ &= 2^{1/l} d_l(\mu, \nu). \end{aligned}$$

根据 $\star$ 的定义，映射 $\mathrm{P}_l(\ _{12}\cdot\ -) : \mathrm{P}_l(V) \to \mathrm{P}_l(V)$ 等于 $\ _{12}\star\ - : \mathrm{P}_l(V) \to \mathrm{P}_l(V)$。因此：

$$d_l(\vartheta(\mu), \vartheta(\nu)) = \frac{1}{2} d_l(\mu * \mu, \nu * \nu) \le \frac{1}{2} \cdot 2^{1/l} \cdot d_l(\mu, \nu) = 2^{l/1-1} d_l(\mu, \nu).$$

由于 $l \in (0, 1]$，指数 $2^{1/l-1}$ 严格为负。因此，$|\vartheta_x| < 1$ 如所需。 □

第 *43* 页定理 *I.4* 的证明。分次常数 $c$ 为 $\sqrt{2}$ 这一事实，源于两个方差矩阵为 $M$ 的独立变量之和，其方差为 $2M$。将该和乘以 $\sqrt{2}$，会使方差矩阵乘以 2。

纤维与命题I.3的证明中相同。对于 $M \in \Sigma^+(V)$，直接观察可知，半范数范畴 **CMet** 中的纤维为

$$P_x(V) = \{\mu \in \mathcal{P}_l(V) : \mathsf{Var}(\mu) = M\}.$$

我们先前已经证明这是一个度量空间，因此对于 $l \in [2, 3)$ o，它是度量小的。为了证明该定理，我们必须证明中心极限算子在此纤维中是压缩映射

令 $P_M$ 为 $\mathrm{P}_l^0(V)$ 中具有给定方差矩阵 $<$ 的测度纤维。中心极限算子为 $\vartheta\colon \mathrm{P}_l^0(V)_M \to \mathrm{P}_l^0(V)_M$，定义为 $\vartheta(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mu * \mu)$。记作

$$A := \int_V e^{-i\langle t,x\rangle} d\mu \quad \text{and} \quad C := \int_V e^{-i\langle t,x\rangle} d\nu.$$

$\mu * \mu$ 的特征函数为 $A^2$，这是因为傅里叶变换将卷积映射为乘法。利用代数恒等式 $A^2 - C^2 = (A - C)(A + C)$以及特征函数的绝对值有界于 1 这一事实，我们得到距离 $d_l(\mu * \mu, \nu * \nu)$的紧确上界：

$$\left(\sup_{t\neq 0} \frac{\|A^2 - C^2\|}{\|t\|^l}\right)^{1/l} \le \left(\sup_{t\neq 0} \frac{\|A - C\| \cdot 2}{\|t\|^l}\right)^{1/l} = 2^{1/l} d_l(\mu, \nu).$$

现在我们研究算子 $\vartheta$。我们证明了傅里叶 $l$-距离随测度呈线性缩放，即 $d_l(c\mu, c\nu) = c \cdot d_l(\mu, \nu)$。因此，

$$d_l(\vartheta(\mu), \vartheta(\nu)) = d_l\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\mu * \mu), \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu * \nu)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} d_l(\mu * \mu, \nu * \nu).$$

结合这些结果，我们得到

$$d_l(\vartheta(\mu), \vartheta(\nu)) \le \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2^{1/l} d_l(\mu, \nu) = 2^{\frac{1}{l} - \frac{1}{2}} d_l(\mu, \nu).$$

由于我们选择了 $l > 2$，项 $1/l$ 严格小于 $1/2$。因此，指数 $\frac{1}{l} - \frac{1}{2}$ 严格为负，这意味着系数 $k = 2^{\frac{1}{l}-\frac{1}{2}}$ 严格小于 1。因此，$\vartheta$ 是严格压缩，满足定理 8.15 的压缩条件。□

第 *44* 页引理 *I.7* 的证明。我们通过对 $n$ 使用归纳法来证明这一陈述。**基础情形**（$n = 1$）：

$$\left(\frac{1}{2}\mu^{*2}\right)^{\circ 1} = \frac{1}{2}\mu^{*2}$$

因此命题 I.7 成立。

**归纳步骤**：假设结果对某个 $n \in \mathbb{N}$ 成立。那么，

$$\left(\frac{1}{2}\mu^{*2}\right)^{\circ(n+1)} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\mu^{*2}\right)^{\circ n}\right)^{*2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n}\mu^{*2^n}\right)^{*2} = \frac{1}{2^{n+1}}\mu^{*2^{n+1}},$$

其中最后一个恒等式证明了 $n$ 的命题 I.7。因此，通过归纳法，第一个结果对所有 $n$ 均成立。□