arXiv:2603.08320v1 [math.ST] 9 Mar 2026

集值过程的大小—位置相关性：在 ρ-混合性下的理论、估计与大数定律

Luc T. Tuyen[a,*]

[a]越南科学技术翰林院信息技术研究所数据科学与大数据分析系，越南河内

摘要

我们提出一个变分框架，基于凸紧随机集的支撑函数分析其依赖结构。该方法依托单位球面上的典范奇偶分解，将大小相关分量与位置相关分量分离，并在球面 $L^2(\sigma)$空间中导出精确正交性。这种分解得到一种加性方差—协方差结构，该结构是集值数据所固有的，无法通过基于点或基于选择的表示恢复。

在此框架下，我们为随机集引入大小、位置和总协方差及相关性指标，并为集值过程引入与之相容的 ρ-混合系数。由此得到的依赖度量具有几何可解释性、平移不变性，并避免了经典方法在中心对称集上出现的退化问题。在弱平稳条件下，我们建立了弱大数定律和强大数定律，从而保证 Minkowski 平均值在 $L^2(\sigma)$支撑函数范数下具有渐近稳定性。

所提出的量可通过方向性蒙特卡洛方法和球面设计自然地实现数值计算。对区间值数据和凸值数据的应用（包括集值响应回归）表明，偶奇分解能够将方向性位置依赖与大小效应区分开来，揭示出有限维摘要（如施泰纳点）所能捕捉范围之外的信息。

*通讯作者电子邮箱：tuyenlt.ioit@gmail.com（Luc T. Tuyen）

关键词：随机集、支撑函数、变分分析、大小–位置分解、协方差与相关性、集值 ρ-混合性、弱平稳性*2020*年数学主题分类：主要：60G10、49J53；次要：60F05、60F15

---

1. 引言

集值随机变量，亦称随机集，自然出现在变分与几何模型中，其中不确定性影响的是整个区域、形状或可行集，而非单个点。典型例子包括随机几何中的随机凸体、符号数据分析中的区间值观测，以及随机变分不等式的解集。凸紧随机集的一种标准分析表示由其支撑函数给出，这些支撑函数将集值对象嵌入单位球面上的函数空间，从而允许使用变分与泛函分析工具 [10, 14, 7]。

在此设定中，一个基本运算是平均。闵可夫斯基和与Aumann期望在描述随机集的均值行为与稳定性方面起着核心作用，其渐近性质已在独立性及各种弱依赖假设下得到广泛研究；参见 [1, 10, 8, 5, 16]等。这些结果通常借助支撑函数表述，并依赖于 $L^2(\sigma)$的希尔伯特空间结构。

然而，除了期望之外，随机集二阶量的系统性变分理论仍不完善。尤其是，方差、协方差和相关性等经典概念无法直接推广到集值情形。基于选择或 Aumann 期望的方法，会隐式地对各个方向上的支撑函数进行汇总，因而混淆了本质不同的变异来源。因此，这些方法无法区分与大小相关的波动和与位置相关的波动，并且在重要的几何情形下可能会退化，例如位置分量恒为零的中心对称随机集。

本研究采用一种结构性视角，该视角基于单位球面上支撑函数的典范奇偶分解。对于凸紧集，这一分解将编码大小和宽度信息的偶部，与编码位置信息的奇部区分开来。关键的是，这两个分量在球面 $L^2(\sigma)$空间中恰好正交。这种正交性导出了可加的方差–协方差分解，该分解是集值数据所固有的，在点值表示中则没有对应形式。

在这一框架下，施泰纳点等经典位置摘要可视为奇分量的有限维投影。尽管这类投影在某些用途上颇有价值，却必然会舍弃方向信息，以及偶分量所承载的全部依赖性。因此，对于随机集而言，偶奇分解能够更全面地描述其几何变异性与依赖性。

基于这一变分结构，我们为凸紧随机集引入大小、位置以及总协方差与相关性指标。这些量具有平移不变性，具有半正定协方差结构，并满足反映底层几何特性的自然符号翻转性质和退化性质。为刻画时间依赖，我们进一步通过支撑投影的最大相关系数，为集值过程定义相容的 ρ-混合系数；这扩展了经典的标量概念，同时保留了几何可解释性。

对于弱平稳的 ρ-混合序列，其弱大数定律和强大数定律可由 Minkowski 平均在 $L^2(\sigma)$支撑函数范数下的稳定性结果推出。因此，概率论在本文中主要发挥工具性作用：它为通过偶—奇分解定义和解释的变分量提供渐近保证。

从实践角度看，所提出的依赖度量可通过方向蒙特卡罗积分和球面设计自然地实现数值计算。模拟研究表明，在基于 Steiner 点的汇总无法提供有效信息的情形下，所得估计量能够清晰地区分方向性位置依赖与大小效应。

本文的主要贡献总结如下。

- 基于支撑函数的偶奇分解，为凸紧随机集建立了变分大小–位置–总协方差与相关性框架，并具有精确正交性和可加方差结构。

- 针对集值过程定义了与经典标量理论相一致的 ρ-混合系数，该系数通过支撑函数投影构造。

- 针对弱平稳 ρ-混合序列，在 $L^2(\sigma)$ 支撑函数范数下建立弱大数定律和强大数定律，从而保证 Minkowski 平均值的渐近稳定性。

- 针对所提出的依赖度量，采用方向蒙特卡罗和球面设计估计量，并通过数值研究展示其几何可解释性。

- 适用于区间值和凸值数据，包括带有集值响应的回归模型。

本文其余部分安排如下。第2节介绍支撑函数和偶奇分解的符号与背景知识。第3节构建变分协方差与相关系数框架。第4节给出弱依赖下的渐近稳定性结果。第5节报告数值研究。第6节讨论应用。

2. 符号与预备知识

概率框架。我们在固定的概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$上开展研究。令$(\mathbb{S}^{d-1},\ \mathcal{B},\ \sigma)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 上的单位球面，其上赋有 Borel σ-代数和归一化表面测度 $\sigma(\mathbb{S}^{d-1}) = 1$。在一维情形下 $d = 1$，有 $\mathbb{S}^0 = \{-1,\ 1\}$ 并赋有归一化计数测度$\sigma = \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$。所有期望、方差和协方差均相对于 $\mathbb{P}$计算，分别记为 $\mathbb{E}$、Var 和 Cov。只要可积性得到保证，我们便使用乘积空间 $(\Omega \times \mathbb{S}^{d-1},\ \mathcal{F} \otimes \mathcal{B},\ \mathbb{P} \otimes \sigma)$ 及富比尼–托内利定理。

随机集与支撑函数.. A（凸紧）随机集是一个可测映射 $X : \Omega \to \mathcal{K}_c(\mathbb{R}^d)$，具有埃夫罗斯/费尔可测性。其支撑函数定义为

$$h_X(\omega, u) := \sup_{x \in X(\omega)} \langle u, x \rangle, \qquad u \in \mathbb{S}^{d-1}.$$

映射 $(\omega,\ u) \mapsto h_X(\omega,\ u)$ 是联合可测的，在 ω 上对σ-几乎处处的 u 平方可积，并且关于 u 连续。全文中我们假设

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathbb{E}\,|h_X(u)|^2\, d\sigma(u) < \infty, \tag{2.1}$$

（在需要时，对其他随机集也可作类似处理），这使得依据富比尼–托内利定理交换 $\mathbb{E}$ 和 $\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \cdot\, d\sigma$ 成为合理。

偶奇分解.. 对于 $u \in \mathbb{S}^{d-1}$，将支撑函数的偶部和奇部分别定义为

$$W_X(u) := \tfrac{1}{2}\big(h_X(u) + h_X(-u)\big), \qquad C_X(u) := \tfrac{1}{2}\big(h_X(u) - h_X(-u)\big).$$

于是， W_X 关于 u为偶函数，而 C_X 为奇函数，并且 $h_X(u) = W_X(u) + C_X(u)$。我们将 W_X 称为X的大小分量，将 C_X 称为其位置分量。关于 $\mathbb{P}$，在 u 中逐点进行中心化：

$$\widetilde{W}_X(u) := W_X(u) - \mathbb{E}W_X(u), \qquad \widetilde{C}_X(u) := C_X(u) - \mathbb{E}C_X(u).$$

球面 $L^2(\sigma)$ 范数。对于任意平方可积函数 $Z : \mathbb{S}^{d-1} \to \mathbb{R}$我们定义

$$\|Z\|_{2,\sigma}^2 := \int_{\mathbb{S}^{d-1}} Z(u)^2 \, d\sigma(u).$$

特别地，该范数适用于 W_X、 C_X及其中心化版本。我们将相应的希尔伯特空间记为 $\mathcal{H} : = L^2(\mathbb{S}^{d-1}, \ \sigma)$

统一轮廓。为简化记号，对于 $\star \in \{$大小、位置、总$\}$，我们引入如下剖面

$$\Phi_X^{(\mathrm{size})}(u) := W_X(u), \qquad \Phi_X^{(\mathrm{loc})}(u) := C_X(u), \qquad \Phi_X^{(\mathrm{tot})}(u) := h_X(u),$$

以及它们的中心化版本

$$\widetilde{\Phi}_X^{(\star)}(u) := \Phi_X^{(\star)}(u) - \mathbb{E}\big[\Phi_X^{(\star)}(u)\big].$$

在方便时，我们将 $\Phi_X^{(\star)}$ （或 $\widetilde{\Phi}_X^{(\star)}$ ）视为希尔伯特空间 $\mathcal{H}$中的元素。在方向 $u \in \mathbb{S}^{d-1}$ 处的取值明确记为$\Phi_X^{(\star)}(u)$。中心化始终在 u中逐点进行。

部分和.. 对于随机集序列 $(X_i)_{i \geqslant 1}$ 和 $\star \in \{$的大小，loc，tot$\}$，我们记作

$$S_n^{(\star)}(u) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\Phi}_{X_i}^{(\star)}(u), \qquad n \geqslant 1.$$

将其视为 $\mathcal{H}$ 的一个元素时， $S_n^{(\star)}$ 表示函数 $u \mapsto S_n^{(\star)}(u)$。这种对应不会引起歧义。

约定。 在全文中，涉及 $\Phi_X^{(\star)}$ 的表达式的具体含义可从上下文中明确判断： $\Phi_X^{(\star)}(u)$ 表示方向 u 上的实值随机变量，而 $\|\Phi_X^{(\star)}\|_{2,\,\sigma}$ 及类似表达式则指相应剖面的 $L^2(\sigma)$ 范数。此类剖面的所有期望和协方差均按点理解于 u ，并在需要时对 $\mathbb{S}^{d-1}$ 积分。

3. 基于大小–位置分解的依赖度量

3.1. 协方差、方差与相关性的定义

定义 3.1 （大小/位置/总协方差、方差、相关性）。 设X， Y 为满足 **(2.1)** 的集值随机变量。定义

$$\mathrm{Cov}_{\mathrm{size}}(X,Y) := \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathrm{Cov}\big(\widetilde{W}_X(u), \widetilde{W}_Y(u)\big)\, d\sigma(u),$$

$$\mathrm{Cov}_{\mathrm{loc}}(X,Y) := \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathrm{Cov}\big(\widetilde{C}_X(u), \widetilde{C}_Y(u)\big)\, d\sigma(u),$$

以及 $\mathrm{Var}_{\mathrm{size}}(X) := \mathrm{Cov}_{\mathrm{size}}(X,X)$, $\mathrm{Var}_{\mathrm{loc}}(X) := \mathrm{Cov}_{\mathrm{loc}}(X,X)$。总协方差与方差为

$$\mathrm{Cov}_{\mathrm{tot}}(X,Y) := \mathrm{Cov}_{\mathrm{size}}(X,Y)+\mathrm{Cov}_{\mathrm{loc}}(X,Y), \qquad \mathrm{Var}_{\mathrm{tot}}(X) := \mathrm{Var}_{\mathrm{size}}(X)+\mathrm{Var}_{\mathrm{loc}}(X).$$

当 $\mathrm{Var}_\star(X)\mathrm{Var}_\star(Y) > 0$ 对 $\star \in \{$大小、位置、总$\}$ 成立时，定义

$$\mathrm{Corr}_\star(X,Y) := \frac{\mathrm{Cov}_\star(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}_\star(X)\mathrm{Var}_\star(Y)}} \in [-1,1].$$

命题 3.1 （结构正交性与可加性）。 对任意满足(2.1)的集值随机变量 X、 Y ，

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathbb{E}\big[\widetilde{W}_X(u)\,\widetilde{C}_Y(u)\big]\, d\sigma(u) = 0. \tag{3.1}$$

因此，

$$\mathrm{Cov}_{\mathrm{tot}}(X,Y) = \mathrm{Cov}_{\mathrm{size}}(X,Y)+\mathrm{Cov}_{\mathrm{loc}}(X,Y), \qquad \mathrm{Var}_{\mathrm{tot}}(X) = \mathrm{Var}_{\mathrm{size}}(X)+\mathrm{Var}_{\mathrm{loc}}(X),$$

并且定义 *3.1* 中的总协方差/方差不包含交叉项。

$\sim$ $\sim$ $\sim$证明。固定 X, Y并考虑被积函数 $u \mapsto \mathbb{E}[W_X(u)C_Y(u)]$。由于 W_X~关于 u 为偶函数，而 C_Y 关于 u为奇函数，因此它们的乘积为奇函数：

$$\mathbb{E}[\widetilde{W}_X(-u)\widetilde{C}_Y(-u)] = \mathbb{E}[\widetilde{W}_X(u)\cdot(-\widetilde{C}_Y(u))] = -\mathbb{E}[\widetilde{W}_X(u)\widetilde{C}_Y(u)].$$

将这个奇函数对球面上的对称测度 $\sim$ $\sim$ $\sim^{\sigma}$ 积分，得到 (3.1)。将 $h_X = W_X + C_X$展开并积分，即可得到可加性恒等式，其中交叉项由 (3.1) 消失。 □

注 3.1。界限 $|$相关系数$_\star(X,Y)| \leqslant 1$（对于 $\star \in \{$大小、位置、总量$\}$，只要有定义）将由半正定协方差矩阵的性质推导得出；见命题 *3.4*。

3.2. 与施泰纳点中心化的关系

定义 3.2（施泰纳中心化（残差）位置分量）。设 X 是 $\mathbb{R}^d$ 中一个支撑函数为 h_X 、奇分量为

$$C_X(u) := \tfrac{1}{2}\big(h_X(u) - h_X(-u)\big), \qquad u \in \mathbb{S}^{d-1}.$$

令 $s(X) \in \mathbb{R}^d$ 表示其施泰纳点。我们定义施泰纳中心化（残差）位置分量为

$$C_X^{\mathrm{res}}(u) \;:=\; C_X(u) - \langle s(X), u\rangle, \qquad u \in \mathbb{S}^{d-1}.$$

注 3.2（在依赖性分析中的解释与作用）。分解

$$C_X(u) \;=\; \langle s(X), u\rangle \;+\; C_X^{\mathrm{res}}(u)$$

将支撑函数的奇部拆分为由施泰纳点诱导的线性分量和残差奇分量，后者刻画高阶位置波动。残差 C_X^{res}属于$L^2(\mathbb{S}^{d-1}$的奇函数子空间$\sigma)$，其中心化后剔除了由施泰纳点产生的线性分量。

特别地，任何通过C_X^{res} 定义的相关性或协方差，都能刻画超出单个点值汇总量（如施泰纳点）所能表示范围的位置依赖性。对于奇分量 C_X 所建立的所有极限定理（弱大数定律、函数中心极限定理、迭代对数律）对 C_X^{res}仍然成立，因为减去线性项 $\langle s(X)$、 $u\rangle$ 不会影响平稳性、混合性或矩条件。

备注 3.3（施泰纳点作为奇分量的投影）。 凸紧集的一类经典位置描述量是其施泰纳点 $s(K) \in \mathbb{R}^d$，它具有平移协变性和旋转不变性。它可以表示为支撑函数的线性泛函（相差一个依赖于维数的常数），

$$s(K) \propto \int_{\mathbb{S}^{d-1}} u\, h_K(u)\, d\sigma(u).$$

由于 u 为奇数，且 $h_K = W_K + C_K$ 中 W_K 为偶数、 C_K 为奇数，偶部不产生贡献:

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} u\, W_K(u)\, d\sigma(u) = 0, \qquad s(K) \propto \int_{\mathbb{S}^{d-1}} u\, C_K(u)\, d\sigma(u).$$

因此，*Steiner* 点可以被视为奇分量的有限维投影。相比之下，我们的位置轮廓 $u \mapsto C_K(u)$ 保留了 $L^2(\sigma)$中的完整方向信息，这对于检测方向性位置依赖至关重要，模拟研究对此进行了说明。

例 3.1（施泰纳点不可见的方向依赖）。 设$d \geqslant 2$，并设 $A \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R}^d)$ 为一个非中心对称凸体，其施泰纳点位于原点 $s(A) = 0$。（这样的 A 可通过将任意非中心对称体平移其施泰纳点的相反数而得到。）设 $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$为一个平稳实值过程，满足 $\mathbb{E}[\varepsilon_n] = 0$ 且 $\varepsilon_n \geqslant 0$ 几乎必然成立（从而闵可夫斯基缩放是良定义的）。定义一个集值时间序列如下

$$K_n := K_0 + \varepsilon_n A,$$

其中， K_0 是一个满足 $s(K_0) = 0$的固定中心对称凸体。

根据施泰纳点和 $s(A) = s(K_0) = 0$的闵可夫斯基可加性，对于所有 n，有 $s(K_n) = 0$ 。因此，任何仅基于施泰纳点的依赖性分析都会得到平凡的（恒为零的）过程。

另一方面，支撑函数满足

$$h_{K_n}(u) = h_{K_0}(u) + \varepsilon_n h_A(u),$$

因此，奇分量为

$$C_{K_n}(u) = C_{K_0}(u) + \varepsilon_n C_A(u) = \varepsilon_n C_A(u),$$

因为 K_0 是中心对称的，因此 $C_{K_0} \equiv 0$。所以，对于每个满足 $C_A(u) \neq 0$的方向 u，

$$\mathrm{Cov}\big(\widetilde{C}_{K_n}(u), \widetilde{C}_{K_{n+k}}(u)\big) = \mathrm{Cov}(\varepsilon_0, \varepsilon_k)\, C_A(u)^2,$$

而位置协方差 $\mathrm{Cov}_{\mathrm{loc}}(K_0, K_k)$ 直接反映了 (ε_n)的时间依赖性。这表明，*Steiner* 点中心化可能会遗漏方向依赖，而这种依赖在完整的奇部分布中仍然清晰可见。

3.3. 与球谐表示的关系

由于随机凸体 X 的支撑函数 h_X 在我们的既定矩假设下属于$L^2(\mathbb{S}^{d-1}, \sigma)$，它具有经典的球谐展开

$$h_X(u) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{N(d,\ell)} a_{\ell m}(X)\, Y_{\ell m}(u), \qquad u \in \mathbb{S}^{d-1},$$

其中 $\{Y_{\ell m}\}$是球谐函数的标准正交基。回顾可知，球谐函数满足奇偶性 $Y_{\ell m}(-u) = (-1)^{\ell} Y_{\ell m}(u)$。

偶/奇分解。 第3.1节引入的loc/size分解由下式给出

$$W_X(u) = \tfrac{1}{2}\big(h_X(u) + h_X(-u)\big), \qquad C_X(u) = \tfrac{1}{2}\big(h_X(u) - h_X(-u)\big).$$

就球谐函数而言，这对应于将 $L^2(\mathbb{S}^{d-1})$ 正交分解为偶子空间和奇子空间：W_X 仅包含偶次 $\ell = 0, 2, 4, \ldots$，而 C_X 仅包含奇次 $\ell = 1, 3, 5, \ldots$。特别地，一次分量表示凸体的平移，而偶分量刻画在反射下不变的大小与形状特征。

超越谱解释。尽管上述观察为位置/大小分解提供了调和解释，但我们的分析并不在球谐系数 $\{a_{\ell m}(X)\}$的层面展开。相反，我们直接将支撑函数视为 $L^2(\mathbb{S}^{d-1})$ 中的随机元素，并通过对方向进行积分来定义方差、协方差和相关性，见定义 3.1。因此，依赖结构是通过方向评价的逐点最大相关 $\{h_X(u)$ 来表述的： $u \in \mathbb{S}^{d-1}\}$ 而不是通过谱系数或角功率谱来表述。

依赖性与极限定理。 本文采用的 ρ-混合条件定义为：对方向取上确界，考察 $h_{X_0}(u)$ 与$h_{X_k}(u)$ （或其位置/大小分量）之间的最大相关。这一

依赖性概念具有几何性和逐方向性，它既不能归结为调和系数上的混合条件，也不由此类条件蕴含。因此，第4节证明的大数定律并非调和分析或谱理论的直接结果，而是在随机集理论框架下针对随机凸体弱相关序列的概率性结果。

摘要。 球谐函数为将 loc/size 分解理解为 $L^2(\mathbb{S}^{d-1})$ 中的偶/奇正交分解提供了一种有用的语言。然而，本文的主要贡献在于构建了一个针对随机凸体的相关性与混合性框架，以及由此得出的极限定理；这些成果超越了纯粹的谱分析或调和分析方法。

3.4. 基本性质

命题3.2 （线性、对称性、缩放、平移不变性）。 对于$\star \in \{$大小， loc，tot$\}$ 以及任意集值随机变量 X， Y， Z和标量a， $b \in \mathbb{R}$:

(P1) $\mathrm{Cov}_\star(X+Z,Y) = \mathrm{Cov}_\star(X,Y)+\mathrm{Cov}_\star(Z,Y)$ *and* $\mathrm{Cov}_\star(X,Y) = \mathrm{Cov}_\star(Y,X$

(P2) 协方差$_\star(aX, bY) = ab$ 协方差$_\star(X, Y)$。

(P3) 对于确定性的 $c \in \mathbb{R}^d$， 协方差$_\star(X + c, Y) =$ 协方差$_\star(X, Y)$。

证明。 对于闵可夫斯基加法， $h_{X+Z} = h_X + h_Z$，因此 $W_{X+Z} = W_X + W_Z$ 且 $C_{X+Z} = C_X + C_Z$。逐点中心化后，$W_{X+Z} = W_X + W_Z$ 且 $C_{X+Z} = C_X + C_Z$。标量协方差的线性和对称性，以及 u中的积分，推出 (P1)。对于 $a \geqslant 0$，缩放由 $h_{aX}(u) = a\, h_X(u)$得出；而对 $a < 0$，恒等式 $h_{aX}(u) = |a| h_X(-u)$意味着 $W_{aX} = |a| W_X$且 $C_{aX} = a\, C_X$。变量替换 $u \mapsto -u$处理了大小部分中的绝对值。对于平移， $h_{X+c}(u) = h_X(u) + \langle u,\ c\rangle$，因此 $W_{X+c} = W_X$且 $C_{X+c} = C_X + \langle u,\ c\rangle$；中心化后，确定性项相互抵消，协方差保持不变。 □

命题3.3 (分量的完全符号翻转)。 我们有 $W_{-X} = W_X$和 $C_{-X} = -C_X$。因此，只要相应的方差为正，

$$\mathrm{Corr}_{\text{size}}(X,-X) = 1, \qquad \mathrm{Corr}_{\text{loc}}(X,-X) = -1.$$

此外，如果 方差$_{\mathrm{tot}}(X) > 0$ 则

$$\mathrm{Corr}_{\mathrm{tot}}(X, -X) = \pi_{\mathrm{size}}(X) - \pi_{\mathrm{loc}}(X), \tag{3.2}$$

其中 $\pi_{\mathrm{loc}}(X) :=$ 方差$_{\mathrm{loc}}(X)$/方差$_{\mathrm{tot}}(X)$ 以及 $\pi_{\mathrm{size}}(X) := 1 - \pi_{\mathrm{loc}}(X)$。

证明。对于 $-X = \{-x : \ x \in X\}$,

$$h_{-X}(u) = \sup_{x \in X} \langle u, -x \rangle = \sup_{x \in X} \langle -u, x \rangle = h_X(-u).$$

因此 $W_{-X}(u) = \frac{1}{2}(h_{\widetilde{X}}(-u) + h_X(u)) = W_X(u)$ 和 $C_{-X}(u) = \frac{1}{2}(h_X(-u) - h_X(u)) = -C_X(u)$。经过中心化后，$W_{-X} = W_X$ 和 $C_{-X} = -C_X$。对标量协方差恒等式进行积分可得协方差$_{\mathrm{size}}(X, -X) =$ 方差$_{\mathrm{size}}(X)$ 以及协方差$_{\mathrm{loc}}(X, -X) = -$方差$_{\mathrm{loc}}(X)$，从而在有定义时，相关系数$_{\mathrm{size}}(X, -X) = 1$ 以及相关系数$_{\mathrm{loc}}(X, -X) = -1$。最后，

$$\mathrm{Corr}_{\mathrm{tot}}(X, -X) = \frac{\mathrm{Var}_{\mathrm{size}}(X) - \mathrm{Var}_{\mathrm{loc}}(X)}{\mathrm{Var}_{\mathrm{tot}}(X)} = \pi_{\mathrm{size}}(X) - \pi_{\mathrm{loc}}(X).$$

□

命题 3.4 (半正定协方差矩阵与柯西–施瓦茨不等式**)**。 对于有限族 $X_1, \ldots, X_m$ 和 $\star \in \{$大小, loc, tot$\}$，矩阵 $A = (A_{ij})$ *with* $A_{ij} :=$ 协方差$_\star(X_i, X_j)$ 是半正定的。因此，当方差$_\star(X)$方差$_\star(Y) > 0$时，|相关系数$_\star(X, Y)| \leqslant 1$。

证明。 固定 $\star \in \{$大小，loc，tot$\}$，并定义 $\Phi_i(u) := \widetilde{\Phi}^{(\star)}_{X_i}(u) \in L^2(\Omega)$。对于任意$a \in \mathbb{R}^m$,

$$a^\top A a = \sum_{i,j} a_i a_j \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathrm{Cov}(\Phi_i(u), \Phi_j(u))\, d\sigma(u) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathrm{Var}\Big(\sum_{i=1}^m a_i \Phi_i(u) \Big)\, d\sigma(u) \geqslant 0,$$

因此 $A \succeq 0$。取 $m = 2$ 可得 |协方差$_\star(X,\ Y)| \leqslant \sqrt{\text{方差}_\star(X)\text{方差}_\star(Y)}$，从而当定义存在时|相关系数$_\star(X,\ Y)| \leqslant 1$。 □

命题 3.5 (单点集与对称情形**)**。 假设 **(2.1)**。

(a) 若随机向量 $\xi \in \mathbb{R}^d$ 满足 $X = \{\xi\}$ 几乎处处成立，且 $\mathbb{E}\|\xi\|^2 < \infty$，则 $W_X \equiv 0$、$C_X(u) = \langle u$、$\xi \rangle$，并且 方差$_{\mathrm{size}}(X) = 0$。此外，

$$\mathrm{Var}_{\mathrm{loc}}(X) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathrm{Var}(\langle u, \xi \rangle)\, d\sigma(u) = \frac{1}{d}\, \mathrm{tr}(\mathrm{Cov}(\xi)).$$

(b) 若 $X=\{\xi\}$ 和 $Y=\{\eta\}$ 几乎处处成立，且 $\mathbb{E}\|\xi\|^2+\mathbb{E}\|\eta\|^2<\infty$，则

$$\mathrm{Cov}_{\mathrm{loc}}(X,Y)=\frac{1}{d}\,\mathrm{tr}(\mathrm{Cov}(\xi,\eta)),\ \mathrm{Corr}_{\mathrm{loc}}(X,Y)=\frac{\mathrm{tr}(\mathrm{Cov}(\xi,\eta))}{\sqrt{\mathrm{tr}(\mathrm{Cov}(\xi))\ \mathrm{tr}(\mathrm{Cov}(\eta))}}.$$

特别地，当 $d=1$ 时，这就化为皮尔逊相关系数。

(c) 若 $X=-X$ 几乎必然成立（关于原点中心对称），则 $C_X\equiv 0$ 且$\mathrm{Var}_{\mathrm{loc}}(X)=0$，因此对任意 Y，都有$\mathrm{Cov}_{\mathrm{loc}}(X,Y)=0$。

证明。对于 (a)，$h_X(u)=\langle u,\ \xi\rangle$，因此 $W_X\equiv 0$ 且 $C_X(u)=\langle u,\ \xi\rangle$。此外，$\mathrm{Var}(\langle u,\ \xi\rangle)=u^\top\Sigma u$，其中 $\Sigma=\mathrm{Cov}(\xi)$ 且 $\int_{\mathbb{S}^{d-1}}uu^\top\,d\sigma(u)=\frac{1}{d}I_d$，由此得到迹公式。(b) 的证明类似，利用 $\mathrm{Cov}(\langle u,\ \xi\rangle,\ \langle u,\ \eta\rangle)=u^\top\mathrm{Cov}(\xi,\ \eta)\,u$。(c) 由 $h_X(-u)=h_X(u)$ 得证。 □

命题 3.6（贡献与界）。假设 $\mathrm{Var}_{\mathrm{tot}}(X)\mathrm{Var}_{\mathrm{tot}}(Y)>0$。定义

$$\kappa_{\mathrm{loc}}(X,Y):=\frac{\mathrm{Cov}_{\mathrm{loc}}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}_{\mathrm{tot}}(X)\mathrm{Var}_{\mathrm{tot}}(Y)}},\ \kappa_{\mathrm{size}}(X,Y):=\frac{\mathrm{Cov}_{\mathrm{size}}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}_{\mathrm{tot}}(X)\mathrm{Var}_{\mathrm{tot}}(Y)}}.$$

于是 $\text{相关系数}_{\mathrm{tot}}(X,Y)=\kappa_{\mathrm{loc}}(X,Y)+\kappa_{\mathrm{size}}(X,Y)$ 且

$$|\kappa_{\mathrm{loc}}(X,Y)|\leqslant\sqrt{\pi_{\mathrm{loc}}(X)\pi_{\mathrm{loc}}(Y)},\ |\kappa_{\mathrm{size}}(X,Y)|\leqslant\sqrt{\pi_{\mathrm{size}}(X)\pi_{\mathrm{size}}(Y)},$$

因此 $|\kappa_{\mathrm{loc}}(X,Y)|+|\kappa_{\mathrm{size}}(X,Y)|\leqslant 1$ 且 $|\text{相关系数}_{\mathrm{tot}}(X,Y)|\leqslant 1$。

证明。对每个分量应用命题 3.4，$|\text{协方差}_{\mathrm{loc}}(X,Y)|\ \leqslant\ \sqrt{\text{方差}_{\mathrm{loc}}(X)\text{方差}_{\mathrm{loc}}(Y)}$，大小的情形也类似。除以$\sqrt{\text{方差}_{\mathrm{tot}}(X)\text{方差}_{\mathrm{tot}}(Y)}$ 即可得到这两个界。对于和的界，对向量 $(\sqrt{\pi_{\mathrm{loc}}}(X),\sqrt{\pi_{\mathrm{size}}}(X))$和 $(\sqrt{\pi_{\mathrm{loc}}}(Y),\sqrt{\pi_{\mathrm{size}}(Y)})$应用柯西–施瓦茨不等式。 □

4. ρ-混合集值过程的极限定理

现在，我们为弱依赖的集合值过程建立概率极限结果。关键依据是第 3 节引入的基于相关性的依赖结构；借助支撑函数的偶奇分解，该结构使我们能够控制 Minkowski 平均的二阶矩。

4.1. 切比雪夫不等式

4.1.1. 球面积分切比雪夫不等式

定义 4.1（弱平稳集值序列）。 称 $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$中的集值随机变量序列为弱平稳，如果：

1. 对每个 $u \in \mathbb{S}^{d-1}$，均值 $\mathbb{E}h_{X_i}(u)$ 不依赖于 i；

2. 对每个 u、 $v \in \mathbb{S}^{d-1}$ 和 $k \in \mathbb{Z}$，协方差$(h_{X_i}(u), h_{X_{i+k}}(v))$ 仅依赖于k。

定理 4.1（球面积分切比雪夫不等式：逐分量）。设 $X_1, \dots, X_n$ 为弱平稳序列。对于 $\star \in \{$大小，loc$\}$ 定义

$$S_n^{(\star)}(u) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \widetilde{\Phi}_{X_k}^{(\star)}(u).$$

那么，对每个 $\varepsilon > 0$，

$$\mathbb{P}\big(\|S_n^{(\star)}\|_{2,\sigma} \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathrm{Var}\big(S_n^{(\star)}(u)\big)\, d\sigma(u), \tag{4.1}$$

and

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathrm{Var}\big(S_n^{(\star)}(u)\big)\, d\sigma(u) \leqslant \frac{1}{n}\mathrm{Var}_\star(X_1) \\ + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\Big(1-\frac{k}{n}\Big)\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \big|\mathrm{Cov}(\widetilde{\Phi}_{X_0}^{(\star)}(u), \widetilde{\Phi}_{X_k}^{(\star)}(u))\big|\, d\sigma(u).\end{aligned} \tag{4.2}$$

证明。步骤 *1*。 由于 $\mathbb{E}[S_n^{(\star)}(u)] = 0$，应用切比雪夫不等式：

$$\mathbb{P}\big(\|S_n^{(\star)}\|_{2,\sigma} \geqslant \varepsilon\big) = \mathbb{P}\big(\|S_n^{(\star)}\|_{2,\sigma}^2 \geqslant \varepsilon^2\big) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\,\mathbb{E}\big[\|S_n^{(\star)}\|_{2,\sigma}^2\big].$$

交换积分次序（富比尼–托内利），

$$\mathbb{E}\big[\|S_n^{(\star)}\|_{2,\sigma}^2\big] = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathbb{E}\big[S_n^{(\star)}(u)^2\big]\,\mathrm{d}\sigma(u) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathrm{Var}\big(S_n^{(\star)}(u)\big)\mathrm{d}\sigma(u),$$

由此得到 (4.1)。

步骤 *2.* 对于固定的 u,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\big(S_n^{(\star)}(u)\big) &= \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}\mathrm{Cov}\big(\widetilde{\Phi}_{X_i}^{(\star)}(u),\widetilde{\Phi}_{X_j}^{(\star)}(u)\big)\\ &= \frac{1}{n^2}\Big(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(\widetilde{\Phi}_{X_i}^{(\star)}(u)) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mathrm{Cov}(\widetilde{\Phi}_{X_i}^{(\star)}(u),\widetilde{\Phi}_{X_j}^{(\star)}(u))\Big).\end{aligned}$$

平稳性使我们可以将 $\mathrm{Var}(\widetilde{\Phi}_{X_i}^{(\star)}(u))$ 替换为 $\mathrm{Var}(\widetilde{\Phi}_{X_0}^{(\star)}(u))$ ，并按滞后 $k=j-i$分组，从而得到因子 $\big(1-\frac{k}{n}\big)$；对 u 积分即可得到所述结论。 □

定理 4.2 （球面积分切比雪夫不等式：总体版本）。 对于每个 $\varepsilon>0$,

$$\mathbb{P}\big(\|S_n^{(\mathrm{tot})}\|_{2,\sigma}\geqslant\varepsilon\big)\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\mathrm{Var}\big(S_n^{(\mathrm{tot})}(u)\big)\,d\sigma(u).$$

此外,

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\mathrm{Var}\big(S_n^{(\mathrm{tot})}(u)\big)\,d\sigma(u)=\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\mathrm{Var}\big(S_n^{(\mathrm{size})}(u)\big)\,d\sigma(u)+\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\mathrm{Var}\big(S_n^{(\mathrm{loc})}(u)\big)\,d\sigma(u), \tag{4.3}$$

因此

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\mathrm{Var}\big(S_n^{(\mathrm{tot})}(u)\big)\,d\sigma(u)\leqslant \textit{(size bound)}+\textit{(loc bound)}. \tag{4.4}$$

证明。 概率界 **(4.4)** 的推导与定理 **4.1** 完全相同，即对 $\|S_n^{(\mathrm{tot})}\|_{2,\ \sigma}$应用切比雪夫不等式。

方差分解。回顾一下,

$$S_n^{(\mathrm{tot})}(u)=S_n^{(\mathrm{size})}(u)+S_n^{(\mathrm{loc})}(u).$$

因此，对于每个 u,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\big(S_n^{(\mathrm{tot})}(u)\big) &= \mathrm{Var}\big(S_n^{(\mathrm{size})}(u)\big)+\mathrm{Var}\big(S_n^{(\mathrm{loc})}(u)\big)\\ &\quad+2\,\mathrm{Cov}\big(S_n^{(\mathrm{size})}(u),S_n^{(\mathrm{loc})}(u)\big).\end{aligned}$$

对 $\mathbb{S}^{d-1}$ 积分后，交叉项因奇偶正交性而消失:

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\mathbb{E}\big[\widetilde{W}_{X_i}(u)\,\widetilde{C}_{X_j}(u)\big]\,d\sigma(u)=0,\qquad\forall\,i,j.$$

因此，

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathrm{Var}\big(S_n^{(\mathrm{tot})}(u)\big)\, d\sigma(u) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathrm{Var}\big(S_n^{(\mathrm{size})}(u)\big)\, d\sigma(u) + \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathrm{Var}\big(S_n^{(\mathrm{loc})}(u)\big)\, d\sigma(u),$$

由此证明了(4.3)。

最终界。 将逐分量界(4.2)分别应用于大小部分与位置部分，即得(4.4)。 □

注4.1。 “总体”不等式可以等价地用$\widetilde{\ }$中心化支撑函数 h_{X_i}来表示。然而，分解(4.3) 凸显了随机集所特有的一个结构事实：大小与位置波动在 $L^2(\mathbb{S}^{d-1}, \sigma)$中正交。这一分离对于定义相容混合系数以及在弱依赖下推导极限定理至关重要。

注4.2 （关于弱平稳性的注记）。 加权因子 $(1-k/n)$ 在(4.2)–(4.4) 中是 (X_k) 为弱平稳时的标准形式，此时协方差积分仅依赖于滞后 k。若非平稳，可将积分 $\int_{\mathbb{S}^{d-1}} |\text{协方差}(\cdot,\cdot)|$ 替换为对时间指标取$\sup_i$，从而得到类似的界。

4.1.2. 相容的 ρ-混合系数

定义 4.2 (最大相关（HGR） [4])。 对于两个随机变量$U\,V$（不一定属于 $L^2(P)$，但所考虑的所有变换都具有有限的二阶矩），令 $P_U\,P_V$表示它们的边缘律。定义

$$\rho(U,V) := \sup\Big\{ \mathrm{Corr}\big(f(U),\, g(V)\big) :\ f \in L^2(P_U),\ g \in L^2(P_V),\\ \mathbb{E}[f(U)] = \mathbb{E}[g(V)] = 0,\ \mathrm{Var}(f(U)) = \mathrm{Var}(g(V)) = 1 \Big\} \in [0,1].$$

等价地，

$$\rho(U,V) = \sup\Big\{ \mathbb{E}\big[f(U)g(V)\big] :\ f \in L^2_0(P_U),\ g \in L^2_0(P_V),\ \|f(U)\|_2 = \|g(V)\|_2 = 1 \Big\}.$$

根据定义可立即得到，对于所有 U，$V \in L^2(P)$ 都有标准不等式

$$|\mathrm{Cov}(U,V)| \ \leqslant\ \rho(U,V)\,\sqrt{\mathrm{Var}(U)\,\mathrm{Var}(V)}.$$

定义 4.3（相容 ρ-混合性）。 对于集合值序列 (X_i)，定义

$$\rho_{\max}(k) := \max_{\star\in\{\text{size,loc,tot}\}} \sup_{u\in\mathbb{S}^{d-1}} \rho\Big(\widetilde{\Phi}^{(\star)}_{X_0}(u),\ \widetilde{\Phi}^{(\star)}_{X_k}(u)\Big), \qquad k \geqslant 1.$$

对于两个序列 (X_i) 和 (Y_i)，定义

$$\rho^{XY}_{\max}(k) := \max_{\star\in\{\text{size,loc,tot}\}} \sup_{u\in\mathbb{S}^{d-1}} \rho\Big(\widetilde{\Phi}^{(\star)}_{X_0}(u),\ \widetilde{\Psi}^{(\star)}_{Y_k}(u)\Big).$$

注 4.3（与经典 ρ-混合性的相容性及其紧性）。

（***a***）经典 ρ-混合性的支配。 对于 $\star$ =总，我们有 $\Phi^{(\text{tot})}_X = h_X$，因此 $\rho_{\max}(k)$ 包含因子 上确界$_{u\in\mathbb{S}^{d-1}}\,\rho\big(\widetilde{h}_{X_0}(u), \widetilde{h}_{X_k}(u)\big)$。由于我们是在 L^2 函数的一个子类（由 $u\in\mathbb{S}^{d-1}$ 索引的偶数/奇数/总支撑投影）上取上确界，因此

$$\rho_{\max}(k) \leqslant \rho_{\text{classic}}(k),$$

其中 $\rho_{\text{classic}}(k)$ 是经典 ***HGR*** 最大相关系数 $\rho\big(\sigma(X_0), \sigma(X_k)\big)$，对应于 σ代数 $\sigma(X_0)$ 和 $\sigma(X_k)$。因此，若 $\sum_k \rho_{\text{classic}}(k) < \infty$，则 $\sum_k \rho_{\max}(k) < \infty$也成立。

（***b***）不等式的证明。 设 $\mathcal{F}_0 = \sigma(X_0)$ 和 $\mathcal{F}_k = \sigma(X_k)$。对于任意 $u\in\mathbb{S}^{d-1}$和 $\star\in$ {大小、位置、总}，随机变量 $\widetilde{\Phi}^{(\star)}_{X_0}(u)$和 $\widetilde{\Phi}^{(\star)}_{X_k}(u)$分别是关于 $\mathcal{F}_0$和 $\mathcal{F}_k$可测的。根据 ***HGR*** 最大相关的定义，

$$\rho\big(\widetilde{\Phi}^{(\star)}_{X_0}(u), \widetilde{\Phi}^{(\star)}_{X_k}(u)\big) \leqslant \rho(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_k) = \rho_{\text{classic}}(k).$$

对 $u\in\mathbb{S}^{d-1}$取上确界，并对 $\star\in$ {的大小、位置、总量取最大值}，即得 $\rho_{\max}(k) \leqslant \rho_{\text{classic}}(k)$。

(c) 不等式的严格性。系数 $\rho_{\max}$ 受经典 ***HGR*** 系数 ρ_{classic}控制，因此 ρ_{classic} 的可和性蕴含 $\rho_{\max}$的可和性。该不等式可以是严格的，见例***4.1***。

（***d***）实际意义。系数 $\rho_{\max}$ 具有明确的几何意义：它刻画支撑函数投影中的依赖性（这些投影完全确定该集合），同时忽略 $\sigma(X_i)$中不影响集合几何性质的无关信息。因此， $\rho_{\max}$ 是集值过程的一种自然且通常更易处理的混合系数。

例4.1。设 X_i 是以原点为中心、半径为 R_i 的随机圆盘，其中 (R_i) 是平稳*AR(1)*过程： $R_i = \varphi R_{i-1} + \varepsilon_i$ ，且 $|\varphi| < 1$ 和ε_i 均为独立同分布的零均值变量。于是：

- 位置分量消失： $C_{X_i}(u) \equiv 0$ 对所有 u均成立。
- 尺寸分量 $W_{X_i}(u) = R_i$ 在 u中为常数。
- 因此 $\rho\big(\widetilde{W}_{X_0}(u), \widetilde{W}_{X_k}(u)\big) = |$相关系数$(R_0, R_k)| = |\varphi|^k$ 对所有 u均成立。
- 因此 $\rho_{\text{最大值}}(k) = |\varphi|^k$。

然而， σ-代数 $\sigma(X_0)$ 包含了关于 R_0的所有信息， $\sigma(X_k)$也同样如此。如果我们在 X_0 中引入与 R_0 独立的额外随机性（例如随机标记或标签），那么 $\sigma(X_0)$ 会变得严格更丰富，而 $\rho_{\max}(k)$ 保持不变。在这种情况下，$\rho_{\text{classic}}(k)$ 可能严格大于 $\rho_{\max}(k)$。

4.2. 关于 $L^2(\sigma)$ 支撑范数的大数定律

在本小节中，我们在 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上讨论，并假设 $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$是弱平稳的且满足

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho_{\max}(k) < \infty.$$

我们记 $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{S}^{d-1}, \sigma)$ 以及$\|\cdot\|_{\mathcal{H}} = \|\cdot\|_{2,\sigma}$。

Le引理 4.1 （经由 $\rho_{\max}$的协方差界）。 对每一个 $k \geqslant 1$ 以及 $\star \in \{$大小，位置$\}$，

$$\Gamma_\star(k) \leqslant \rho_{\max}(k)\,\mathrm{Var}_\star(X_0).$$

证明。 根据最大相关的定义，对每个 $u \in \mathbb{S}^{d-1}$，

$$\big|\mathrm{Cov}(U,V)\big| \leqslant \rho(U,V)\sqrt{\mathrm{Var}(U)\,\mathrm{Var}(V)}.$$

将此应用于 $U = \Phi^{(\star)}_{X_0}(u)$ 和 $V = \Phi^{(\star)}_{X_k}(u)$，在 ρ上对 u 取上确界，并对 u 积分，得到

$$\Gamma_\star(k) \leqslant \rho_{\max}(k) \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathrm{Var}\big(\Phi^{(\star)}_{X_0}(u)\big)\, d\sigma(u) = \rho_{\max}(k)\,\mathrm{Var}_\star(X_0).$$

□

结合定理 4.1 和引理 4.1 可得

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathrm{Var}\big(S_n^{(\star)}(u)\big)\, d\sigma(u) \;\leqslant\; \frac{\mathrm{Var}_\star(X_0)}{n}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} \rho_{\max}(k)\right), \qquad \star \in \{\mathrm{size}, \mathrm{loc}\}. \tag{4.5}$$

特别地，根据平稳性，我们可以令

$$K_\rho := \mathrm{Var}_\star(X_0)\Big(1 + 2\sum_{k\geqslant 1} \rho_{\max}(k)\Big),$$

使得对所有的 $m \geqslant 0$ 和 $\ell \geqslant 1$,

$$\mathbb{E}\Big\| \sum_{i=m+1}^{m+\ell} \Phi_{X_i}^{(\star)} \Big\|_{2,\sigma}^2 \;\leqslant\; K_\rho\, \ell. \tag{4.6}$$

4.2.1. $L^2(\sigma)$ 范数下的弱大数定律

定理 4.3（弱大数定律）。假设 $\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathbb{E}\, h_{X_0}(u)^2\, d\sigma(u) < \infty$ 和 $\sum_{k\geqslant 1} \rho_{\max}(k) < \infty$。那么，对于 $\star \in$ {大小，位置},

$$\|S_n^{(\star)}\|_{2,\sigma} \;\xrightarrow{\;\mathbb{P}\;}\; 0.$$

证明。由（4.5）和定理 4.1 可得,

$$\mathbb{P}\big(\|S_n^{(\star)}\|_{2,\sigma} \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{K_\rho}{\varepsilon^2\, n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \qquad \star \in \{\mathrm{size}, \mathrm{loc}\}.$$

□

4.2.2. $L^2(\sigma)$ 范数下的强大数定律

定理 4.4（强大数定律）。假设 $\sum_{k\geqslant 1} \rho_{\max}(k) < \infty$ 且 $\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathbb{E}\, h_{X_0}(u)^2\, d\sigma(u) <\infty$。那么，对于 $\star \in$ {大小、位置},

$$\|S_n^{(\star)}\|_{2,\sigma} \;\xrightarrow{\;\text{a.s.}\;}\; 0.$$

证明。设 $Z_i := \Phi_{X_i}^{(\star)} \in \mathcal{H} := L^2(\mathbb{S}^{d-1},\ \sigma)$，其中 $\mathbb{E}Z_i = 0$ 且 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}} = \|\cdot\|_{2,\sigma}$。记部分和 $T_n := \sum_{i=1}^n Z_i$，平均值 $S_n := T_n/n$（即 $S_n^{(\star)}$）。

步骤 *1*（二进子序列上的收敛）。取 $n = 2^r$。由 (4.6)，其中 $m = 0$ 且 $\ell = 2^r$,

$$\mathbb{E}\|S_{2^r}\|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{1}{2^{2r}}\mathbb{E}\|T_{2^r}\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant \frac{K_\rho}{2^r}.$$

由马尔可夫不等式,

$$\mathbb{P}(\|S_{2^r}\|_{\mathcal{H}} > \varepsilon) \leqslant \frac{K_\rho}{\varepsilon^2\, 2^r},$$

因此 $\sum_{r\geqslant 1}\mathbb{P}(\|S_{2^r}\|_{\mathcal{H}} > \varepsilon) < \infty$。根据博雷尔–坎泰利引理, $\|S_{2^r}\|_{\mathcal{H}} \to 0$ 几乎处处成立。

步骤 2（二进制区块内的最大界）。固定 $r \geqslant 1$，令 $L := 2^r$ 和 $m := 2^r$。对于区块内的和 $U_\ell := \sum_{i=1}^{\ell} Z_{m+i}$、$1 \leqslant \ell \leqslant L$，我们证明

$$\sum_{r=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(\max_{1\leqslant \ell\leqslant 2^r}\|U_\ell\|_{\mathcal{H}} > \varepsilon\, 2^r\right) < \infty, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2^r}\max_{1\leqslant\ell\leqslant 2^r}\|U_\ell\|_{\mathcal{H}} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0. \tag{4.7}$$

使用二进制链式分解。对于每个 $j = 0, 1, \ldots, r$，定义网格点 $t_{j,\,k} := k\, 2^{r-j}$、$k = 0, 1, \ldots, 2^j$。对于 $1 \leqslant \ell \leqslant L$ 和 $p_j(\ell) := t_{j,\,\lfloor \ell/2^{r-j}\rfloor}$，我们有 $p_0(\ell) = 0$、$p_r(\ell) = \ell$ 以及

$$U_\ell = \sum_{j=1}^{r}\big(U_{p_j(\ell)} - U_{p_{j-1}(\ell)}\big).$$

因此

$$\|U_\ell\|_{\mathcal{H}} \leqslant \sum_{j=1}^{r}\max_{1\leqslant k\leqslant 2^j}\big\|U_{t_{j,k}} - U_{t_{j,k-1}}\big\|_{\mathcal{H}}.$$

所以,

$$\max_{1\leqslant\ell\leqslant L}\|U_\ell\|_{\mathcal{H}} \leqslant \sum_{j=0}^{r} M_j, \qquad M_j := \max_{1\leqslant k\leqslant 2^j}\big\|U_{t_{j,k}} - U_{t_{j,k-1}}\big\|_{\mathcal{H}}.$$

令 $t := \varepsilon L/(2(r+1)) = \varepsilon 2^{r-1}/(r+1)$。根据并集界,

$$\mathbb{P}\left(\max_{\ell\leqslant L}\|U_\ell\|_{\mathcal{H}} > \varepsilon L\right) \leqslant \sum_{j=0}^{r}\mathbb{P}(M_j > t).$$

对于每个 j，都有 2^j 个不相交区块 $D_1, \ldots\ldots, D_{2^j}$，这些区块由连续的指标组成，每个区块的长度为 2^{r-j}。令 $S_k^{(j)} := \sum_{i\in D_k} Z_{m+i}$，其中 $k = 1, \ldots\ldots, 2^j$。那么$M_j =$ 最大值$_{1\leqslant k\leqslant 2^j}\|S_k^{(j)}\|_{\mathcal{H}}$。由平稳性可知，所有 $S_k^{(j)}$ 都具有相同的分布。因此，根据马尔可夫不等式和 (4.6),

$$\mathbb{P}(M_j > t) \leqslant \sum_{k=1}^{2^j}\mathbb{P}\Big(\|S_k^{(j)}\|_{\mathcal{H}} > t\Big) \leqslant 2^j\,\frac{\mathbb{E}\|S_1^{(j)}\|_{\mathcal{H}}^2}{t^2} \leqslant 2^j\,\frac{K_\rho\, 2^{r-j}}{t^2} = \frac{K_\rho\, 2^r}{t^2}.$$

代入 $t=\varepsilon 2^{r-1}/(r+1)$，得到

$$\mathbb{P}(M_j>t)\leqslant \frac{4K_\rho (r+1)^2}{\varepsilon^2\,2^r}.$$

由于 $\sum_{r\geqslant 1}(r+1)^3/2^r<\infty,$，这就推出 (4.7)。

步骤 *3*（填补二进有理数之间的部分）。对于 $2^r<n\leqslant 2^{r+1}$，记作

$$S_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2^r}Z_i+\frac{1}{n}\sum_{i=2^r+1}^{n}Z_i=\frac{2^r}{n}\,S_{2^r}+\frac{1}{n}\,U_{n-2^r}.$$

因此

$$\|S_n\|_{\mathcal{H}}\leqslant \|S_{2^r}\|_{\mathcal{H}}+\frac{1}{2^r}\max_{1\leqslant \ell\leqslant 2^r}\|U_\ell\|_{\mathcal{H}}.$$

根据步骤 1 和 2，当 $r\to\infty$ 时，这两项都几乎必然收敛到 0，因此当 $n\to\infty$ 时，$\|S_n\|_{\mathcal{H}}\to 0$ 几乎必然成立。 □

注 4.4。该论证仅用到二阶矩和可和条件 $\sum_k \rho_{\max}(k)<\infty$，以及一致分块二阶矩界$(4.6)$。关于混合条件下更强的极大不等式，参见 *Mer- levède* 等人 *[9]* 和 *Rio [13]*。

4.2.3. 几何推论与总范数

参见 [10] 中的 Aumann 期望以及支持函数/Mosco/Hausdorff 收敛。我们记录以下推论。

推论 4.1. *Minkowski* 平均 $X_n:=\frac{1}{n}(X_1\overline{+}\cdots\overline{+}X_n)$ 在支持函数意义下收敛于 *Aumann* 期望 $\mathbb{E}[X_0]$，该期望由数对 $\big(\mathbb{E}W_{X_0},\,\mathbb{E}C_{X_0}\big)$刻画。

推论 4.2. 若 X_i 和 $\mathbb{E}[X_0]$是凸、闭且一致有界的，则上述支持函数收敛蕴含 *Mosco* 收敛；此外，根据 h_X 在 u中的一致 *Lipschitz* 性质，还可得到 *Hausdorff* 收敛。

$\sim$ $\tilde{}$总范数。设 $T_X:=W_X+C_X$。则

$$\Big\|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}T_{X_i}\Big\|_{2,\sigma}\ \leqslant\ \|S_n^{(\mathrm{size})}\|_{2,\sigma}+\|S_n^{(\mathrm{loc})}\|_{2,\sigma}.$$

因此，总范数也满足弱大数定律/强大数定律，从而保证估计量$\mathrm{Corr}_{\mathrm{tot}}$、 κ和 π 的一致性。

4.3. 在 $\rho_{\max}$–混合性下的更强极限定理

4.3.1. 设置、符号与假设

设 $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{S}^{d-1}, \sigma)$，其内积为 $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(u)g(u)\, d\sigma(u)$，范数为 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}} = \|\cdot\|_{2,\sigma}$。对于弱平稳的集值序列 $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$，定义

$$Z_i^{(\mathrm{size})}(u) := W_{X_i}(u) - \mathbb{E}W_{X_0}(u), \qquad Z_i^{(\mathrm{loc})}(u) := C_{X_i}(u) - \mathbb{E}C_{X_0}(u),$$

以及 $Z_i^{(\mathrm{tot})} := Z_i^{(\mathrm{size})} + Z_i^{(\mathrm{loc})}$。令 $T_n^{(\star)} := \sum_{i=1}^n Z_i^{(\star)}$，并令 $S_n^{(\star)} := n^{-1}T_n^{(\star)}$ 分别表示$\star \in \{$大小,位置,总体$\}$。

最大相容相关.. 对于 $k \geqslant 1$，令

$$\rho_{\max}(k) := \max_{\star\in\{\mathrm{size,loc,tot}\}} \sup_{u\in\mathbb{S}^{d-1}} \rho\big(\widetilde{\Phi}_{X_0}^{(\star)}(u), \widetilde{\Phi}_{X_k}^{(\star)}(u)\big), \qquad \widetilde{\Phi} = \Phi - \mathbb{E}\Phi.$$

长程协方差算子.. 对于 $\star \in \{$大小,位置$\}$ 以及 $k \in \mathbb{Z}$ 定义核

$$K_k^{(\star)}(u, v) := \mathrm{Cov}\big(Z_0^{(\star)}(u), Z_k^{(\star)}(v)\big), \tag{4.8}$$

以及积分算子

$$(C_k^{(\star)} f)(u) := \int_{\mathbb{S}^{d-1}} K_k^{(\star)}(u, v)\, f(v)\, d\sigma(v), \qquad \Sigma^{(\star)} := \sum_{k\in\mathbb{Z}} C_k^{(\star)}.$$

常设假设。

(M2+) $\displaystyle\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathbb{E}\,|h_{X_0}(u)|^{2+\delta}\, d\sigma(u) < \infty$ for some $\delta > 0$.

(Mix) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \rho_{\max}(k)^{\delta/(2+\delta)} < \infty$.

注 4.5. 在(M2+)与(Mix)下，引理 *4.4* 保证 $\Sigma^{(\star)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} C_k^{(\star)}$ 对 $\star \in \{$大小、位置$\}$作为迹类算子存在。我们将此结论称为(长期方差)（长期方差存在）。因此(长期方差) 由(M2+) + (Mix) 蕴含，后文仅出于可读性而引用。

4.3.2. 奇偶性

设 $\mathcal{H}_{\mathrm{even}} := \{f\colon\ f(u) = f(-u)\}$与 $\mathcal{H}_{\mathrm{odd}} := \{f\colon\ f(u) = -f(-u)\}$。则 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathrm{even}} \oplus \mathcal{H}_{\mathrm{odd}}$ 正交地，$Z_i^{(\mathrm{size})} \in \mathcal{H}_{\mathrm{even}}$, $Z_i^{(\mathrm{loc})} \in \mathcal{H}_{\mathrm{odd}}$，且交叉协方差在球面积分下消失。因此，$\Sigma^{(\mathrm{tot})} = \Sigma^{(\mathrm{size})} \oplus \Sigma^{(\mathrm{loc})}$。

4.3.3. 辅助引理

引理 4.2（最大相关不等式）. 设 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ 为 σ–域，且$\rho(\mathcal{F}, \mathcal{G}) :=$ 上确界$\{|$相关系数$(U, V)| : U \in L^2(\mathcal{F}),\ V \in L^2(\mathcal{G}),\ \mathbb{E}U = \mathbb{E}V = 0\}$.则对任意 $U \in L^2(\mathcal{F})$ 与 $V \in L^2(\mathcal{G})$,

$$|\mathrm{Cov}(U, V)| \leqslant \rho(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \sqrt{\mathrm{Var}(U)\mathrm{Var}(V)}.$$

证明。不失一般性，假设 $\mathbb{E}U = \mathbb{E}V = 0$ （否则替换为中心化版本）。那么，根据定义， $|$相关系数$(U,\ V)| \leqslant \rho(\mathcal{F},\ \mathcal{G})$，即

$$\frac{|\mathrm{Cov}(U, V)|}{\sqrt{\mathrm{Var}(U)\mathrm{Var}(V)}} \leqslant \rho(\mathcal{F}, \mathcal{G}),$$

由此可得所需结论。 □

引理 4.3（奇偶正交性）。 $Z_i^{(\mathrm{size})} \in \mathcal{H}_{\mathrm{even}}$ 和 $Z_i^{(\mathrm{loc})} \in \mathcal{H}_{\mathrm{odd}}$。因此，

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathbb{E}\big[Z_i^{(\mathrm{size})}(u)\, Z_j^{(\mathrm{loc})}(u)\big]\, d\sigma(u) = 0,$$

且 $C_k^{(\mathrm{size})}$ 作用于 $\mathcal{H}_{\mathrm{even}}$，而 $C_k^{(\mathrm{loc})}$ 对所有 k作用于 $\mathcal{H}_{\mathrm{odd}}$ 。

证明。$W_X(u) = \frac{1}{2}(h_X(u) + h_X(-u))$关于 u是偶函数，而 $C_X(u) = \frac{1}{2}(h_X(u) - h_X(-u))$ 是奇函数。中心化保持奇偶性，因此 $Z^{(\mathrm{size})}$ 是偶函数， $Z^{(\mathrm{loc})}$ 是奇函数。偶函数与奇函数的乘积是奇函数，因此其在球面上的 σ积分为 0。这就得到了所述正交性。 $\mathcal{H}_{\mathrm{even}}$ 和 $\mathcal{H}_{\mathrm{odd}}$ 在 $C_k^{(\mathrm{size})}$ 和 $C_k^{(\mathrm{loc})}$ 下的不变性源于核的奇偶性。 □

$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{S}^{d-1}, \sigma)$.. 上的希尔伯特-施密特算子 有界线性算子$T:\ \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 若是希尔伯特–施密特（*HS*）算子，当且仅当

$$\|T\|_{\mathrm{HS}}^2 := \sum_{j=1}^{\infty} \|Te_j\|_{\mathcal{H}}^2 < \infty,$$

对于（等价地，对于任意） $\{e_j\}_{j \geqslant 1}$ $\mathcal{H}$的标准正交基。如果 T 是一个核为 $K \in L^2(\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{S}^{d-1},\ \sigma \otimes \sigma)$的积分算子，

$$(Tf)(u) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} K(u, v)\, f(v)\, d\sigma(v),$$

那么 T 是希尔伯特–施密特算子，并且

$$\|T\|_{\mathrm{HS}}^2 = \iint\limits_{\mathbb{S}^{d-1}\times\mathbb{S}^{d-1}} |K(u,v)|^2 \, d\sigma(u)\, d\sigma(v).$$

（例如，参见 [6]。）特别地，对于核为 $K_k^{(\star)}(u,\ v)$ 的 $C_k^{(\star)}$：$=$协方差$\big(Z_0^{(\star)}(u),\ Z_k^{(\star)}(v)\big)$，只要 $K_k^{(\star)} \in L^2(\sigma\otimes\sigma)$，便有 $\|C_k^{(\star)}\|_{\mathrm{HS}}^2 = \iint |K_k^{(\star)}(u,\ v)|^2 \, d\sigma(u)\, d\sigma(v)$。

引理 4.4（希尔伯特–施密特控制及 $\Sigma^{(\star)}$的存在性）。在 （M2+） 与 （Mix） 下，我们有 $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \|C_k^{(\star)}\|_{\mathrm{HS}} < \infty$，因此 $\Sigma^{(\star)}$ 存在且为迹类。特别地，更强的条件 $\sum_k \rho_{\max}(k) < \infty$ 也已足够。

证明。由引理 4.2，对所有 $u,\ v$ 与 k，

$$|K_k^{(\star)}(u,v)| \leqslant \rho_{\max}(k)\sqrt{\mathrm{Var}(Z_0^{(\star)}(u))\,\mathrm{Var}(Z_0^{(\star)}(v))}.$$

因此，

$$\|C_k^{(\star)}\|_{\mathrm{HS}}^2 = \iint K_k^{(\star)}(u,v)^2 \, d\sigma(u)\, d\sigma(v) \leqslant \rho_{\max}(k)^2 \Big(\int \mathrm{Var}(Z_0^{(\star)}(u)) \, d\sigma(u) \Big)^2.$$

因此，若 $\sum_k \rho_{\max}(k) < \infty$，则 $\sum_k \|C_k^{(\star)}\|_{\mathrm{HS}} < \infty$，因为

$$\int \mathrm{Var}(Z_0^{(\star)}(u)) \, d\sigma(u) \leqslant \int \mathbb{E}|Z_0^{(\star)}(u)|^2 \, d\sigma(u) < \infty$$

由 (M2+) 得。

仅凭 (Mix)，应用适用于 ρ–混合性的 Davydov/Rio 型界（例如参见 [13]）：存在某个常数 C_δ，使得对所有 $u,\ v$，

$$|K_k^{(\star)}(u,v)| \leqslant C_\delta \, \rho_{\max}(k)^{\delta/(2+\delta)} \big(\mathbb{E}|Z_0^{(\star)}(u)|^{2+\delta}\big)^{1/(2+\delta)} \big(\mathbb{E}|Z_0^{(\star)}(v)|^{2+\delta}\big)^{1/(2+\delta)}.$$

对 $(u,\ v)$ 平方后积分；由 Hölder 不等式和 (M2+)，

$$\|C_k^{(\star)}\|_{\mathrm{HS}} \leqslant C_\delta \, \rho_{\max}(k)^{\delta/(2+\delta)} \Big(\int \mathbb{E}|Z_0^{(\star)}(u)|^{2+\delta} \, d\sigma(u) \Big)^{2/(2+\delta)}.$$

对 k 求和并使用 (Mix) 可得 $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \|C_k^{(\star)}\|_{\mathrm{HS}} < \infty$。因此，$\Sigma^{(\star)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} C_k^{(\star)}$ 存在且为迹类。 □

引理 4.5 (增量的二阶矩界)。 存在 $K_\rho<\infty$，使得对所有 m、$\ell\geqslant 1$ 和 $\star\in\{$大小，loc$\}$，

$$\mathbb{E}\Big\|\sum_{i=m+1}^{m+\ell} Z_i^{(\star)}\Big\|_{\mathcal{H}}^2 \;\leqslant\; K_\rho\,\ell.$$

证明。记

$$\mathbb{E}\Big\|\sum_{i=m+1}^{m+\ell} Z_i^{(\star)}\Big\|_{\mathcal{H}}^2=\sum_{r,s=1}^{\ell}\int \mathrm{Cov}\big(Z_{m+r}^{(\star)}(u),Z_{m+s}^{(\star)}(u)\big)\,d\sigma(u)=\sum_{h=-(\ell-1)}^{\ell-1}(\ell-|h|)\,a_h,$$

其中 $a_h:=\int$协方差$\big(Z_0^{(\star)}(u),\;Z_h^{(\star)}(u)\big)\,d\sigma(u)$。由 $\mathcal{H}$中的柯西–施瓦茨不等式，$|a_h|\leqslant\|C_h^{(\star)}\|_{\mathrm{HS}}$。因此

$$\mathbb{E}\Big\|\sum_{i=m+1}^{m+\ell} Z_i^{(\star)}\Big\|_{\mathcal{H}}^2\leqslant \ell\sum_{h\in\mathbb{Z}}\|C_h^{(\star)}\|_{\mathrm{HS}}=:K_\rho\,\ell,$$

由引理 4.4 可知其为有限。 □

4.3.4. 希尔伯特空间中心极限定理

定理 4.5 （ $\mathcal{H}$中的中心极限定理）。在（M2+）、（混合）与（长期方差）条件下，我们有

$$\sqrt{n}\,S_n^{(\mathrm{size})}\Rightarrow\mathcal{N}_{\mathcal{H}}\big(0,\Sigma^{(\mathrm{size})}\big),\qquad \sqrt{n}\,S_n^{(\mathrm{loc})}\Rightarrow\mathcal{N}_{\mathcal{H}}\big(0,\Sigma^{(\mathrm{loc})}\big).$$

因此，$\sqrt{n}\,S_n^{(\mathrm{tot})}\Rightarrow G^{(\mathrm{size})}+G^{(\mathrm{loc})}$ 在 $\mathcal{H}_{\mathrm{even}}\oplus\mathcal{H}_{\mathrm{odd}}$上具有分块对角协方差$\Sigma^{(\mathrm{size})}\oplus\Sigma^{(\mathrm{loc})}$。

证明。步骤 *1*（有限维收敛）。固定 $h_1,\dots,h_M\in\mathcal{H}$并考虑

$$Y_n:=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\big(\langle Z_i^{(\star)},h_1\rangle,\dots,\langle Z_i^{(\star)},h_M\rangle\big)\in\mathbb{R}^M.$$

每个坐标都是中心化的弱平稳实值过程，其混合性由 $\rho_{\max}(k)$ 控制，这是 $\langle\cdot,h\rangle$线性的结果。采用块长为 $b_n\to\infty$、间隔为 $s_n\to\infty$的大块/小块方法，并假设 $s_n/b_n\to 0$,（Mix），可使相互分离的大块渐近独立。间隔部分的贡献在 L^2中可以忽略，且由 (M2+) 可得林德伯格条件。因此 $Y_n\Rightarrow\mathcal{N}_M(0,\Gamma)$，其中

$$\Gamma_{j\ell}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\mathrm{Cov}\big(\langle Z_0^{(\star)},h_j\rangle,\langle Z_k^{(\star)},h_\ell\rangle\big)=\langle\Sigma^{(\star)}h_j,h_\ell\rangle.$$

步骤 *2*（ $\mathcal{H}$中的紧性）。令 $\{e_r\}_{r\geqslant 1}$ 为 $\mathcal{H}$ 的一组标准正交基，令P_m为到其张成空间$\{e_1,\dots,e_m\}$上的投影。分解

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} Z_i^{(\star)} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} P_m Z_i^{(\star)} + \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(I-P_m)Z_i^{(\star)}.$$

第一项是有限维的，并且根据步骤 1 具有紧性。对于尾部，

$$\mathbb{E}\Big\|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(I-P_m)Z_i^{(\star)}\Big\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1}\Big(1-\frac{|k|}{n}\Big)_+ \operatorname{tr}\big((I-P_m)C_k^{(\star)}(I-P_m)\big).$$

由于 $n\to\infty$ 右侧收敛到 $\operatorname{tr}\big((I-P_m)\Sigma^{(\star)}(I-P_m)\big)$，而当 $m\to\infty$ 时，由于 $\Sigma^{(\star)}$ 是迹类的（长期方差），该值趋于 0。因此尾部一致地足够小，从而得到紧性。结合步骤 1 和步骤 2，得到 $\mathcal{H}$–中心极限定理。

总过程的结论由引理 4.3 得出。 □

4.3.5. 算子形式长期协方差与函数中心极限定理

固定 $\star\in\{$大小，loc$\}$。假设 $(Z_i^{(\star)})$ 和 $\mathbb{E}\|Z_0^{(\star)}\|_{\mathcal{H}}^2<\infty$ 满足弱平稳性，其中 $\mathcal{H}:=L^2(\mathbb{S}^{d-1},\ \sigma)$。对于 $k\geqslant 1$，记 $\mathcal{F}_i:=\sigma(Z_i^{(\star)})$，并定义经典HGR最大相关

$$\overline{\rho}(k) \ :=\ \sup\big\{\operatorname{Corr}(F,G):\ F\in L_0^2(\mathcal{F}_0),\ G\in L_0^2(\mathcal{F}_k)\big\}\in[0,1].$$

我们在本小节中始终假设

$$\sum_{k=1}^{\infty}\overline{\rho}(k) \ <\ \infty. \tag{Mix-op}$$

命题4.1（长期协方差的算子表示）。设$\mathcal{H}:=L^2(\mathbb{S}^{d-1},\ \sigma)$，并且对于 $\star\in\{$大小，位置$\}$，令 $Z_i^{(\star)}:=\widetilde{\Phi}_{X_i}^{(\star)}\in\mathcal{H}$，其中 $\mathbb{E}Z_i^{(\star)}=0$。对于 $f,\ g\in\mathcal{H}$，考虑双线性形式

$$\mathfrak{K}_\star(f,g) \ :=\ \sum_{k\in\mathbb{Z}}\operatorname{Cov}\big(\langle Z_0^{(\star)},f\rangle_{\mathcal{H}},\ \langle Z_k^{(\star)},g\rangle_{\mathcal{H}}\big),$$

只要该级数绝对收敛。则：

1. 存在唯一的有界、自伴、半正定算子 $\mathcal{K}_\star:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$，使得

$$\langle\mathcal{K}_\star f,\ g\rangle_{\mathcal{H}} \ =\ \mathfrak{K}_\star(f,g),\qquad f,g\in\mathcal{H}.$$

2. 若在 (4.8) 中，长期协方差通过核定义为 $K_k^{(\star)}(u,v) := \text{协方差}\big(Z_0^{(\star)}(u), Z_k^{(\star)}(v)\big)$, $(C_k^{(\star)} f)(u) = \int K_k^{(\star)}(u,v) f(v)\, d\sigma(v)$ 且 $\Sigma^{(\star)} := \sum_{k\in\mathbb{Z}} C_k^{(\star)}$，则

$$\langle \Sigma^{(\star)} f,\ g\rangle_{\mathcal{H}} \ = \ \mathfrak{K}_\star(f,g) \quad \textit{for all } f,g \in \mathcal{H},$$

因此 $\mathcal{K}_\star = \Sigma^{(\star)}$。

证明。 对于 (1)： $\mathfrak{K}_\star$ 是一个有界对称正双线性形式（绝对收敛性和有界性由本文所用的混合性/二阶矩假设保证）。根据希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的里斯表示定理，存在唯一的有界自伴半正定算子 $\mathcal{K}_\star$，使得 $\langle \mathcal{K}_\star f,\ g\rangle_{\mathcal{H}} = \mathfrak{K}_\star(f,\ g)$ 对所有 $f,\ g \in \mathcal{H}$均成立。

对于 (2)：利用 $C_k^{(\star)}$ 的核表示以及富比尼/帕塞瓦尔恒等式，

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle C_k^{(\star)} f,\ g\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}\big[\langle Z_0^{(\star)}, f\rangle_{\mathcal{H}} \langle Z_k^{(\star)}, g\rangle_{\mathcal{H}}\big] = \mathfrak{K}_\star(f,g).$$

因此 $\langle \Sigma^{(\star)} f,\ g\rangle_{\mathcal{H}} = \mathfrak{K}_\star(f,\ g)$ 对所有 $f,\ g$均成立，由 (1) 中的唯一性可知 $\mathcal{K}_\star = \Sigma^{(\star)}$。 □

命题 4.2 （有界性、半正定性与迹类）。 假设 (Mix-op)且 $\mathbb{E}\|Z_0^{(\star)}\|_{\mathcal{H}}^2 < \infty$。那么对于 $\star \in \{\text{大小}, \mathrm{loc}\}$:

(i) $\mathfrak{K}_\star$ 定义良好且有界；所诱导的算子 $\mathcal{K}_\star$ 存在，且为自伴和半正定。此外，对于所有 $f, g \in \mathcal{H}$,

$$|\mathfrak{K}_\star(f,g)| \ \leqslant \ \mathbb{E}\|Z_0^{(\star)}\|_{\mathcal{H}}^2 \Big(1 + 2\sum_{k\geqslant 1} \overline{\rho}(k)\Big)\, \|f\|_{\mathcal{H}}\, \|g\|_{\mathcal{H}}.$$

(ii) $\mathcal{K}_\star$ 是迹类，且

$$\operatorname{tr} \mathcal{K}_\star \ = \ \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}\langle Z_0^{(\star)}, Z_k^{(\star)}\rangle_{\mathcal{H}} \ \leqslant \ \mathbb{E}\|Z_0^{(\star)}\|_{\mathcal{H}}^2 \Big(1 + 2\sum_{k\geqslant 1} \overline{\rho}(k)\Big) \ < \ \infty.$$

证明。 取 $f, g \in \mathcal{H}$，满足 $\|f\|_{\mathcal{H}} = \|g\|_{\mathcal{H}} = 1$（一般情形可由齐次性推出）。令 $U_k := \langle Z_0^{(\star)}, f\rangle_{\mathcal{H}}$，且 $V_k := \langle Z_k^{(\star)}, g\rangle_{\mathcal{H}}$。于是 $U_k \in L_0^2(\mathcal{F}_0), V_k \in L_0^2(\mathcal{F}_k)$，并由 HGR界可知，对于 $k \geqslant 1$,

$$|\operatorname{Cov}(U_k, V_k)| \ \leqslant \ \overline{\rho}(k)\, \sqrt{\operatorname{Var}(U_k)\operatorname{Var}(V_k)} \ \leqslant \ \overline{\rho}(k)\, \mathbb{E}\|Z_0^{(\star)}\|_{\mathcal{H}}^2,$$

因为 $\mathsf{Var}(\langle Z_i^{(\star)}, h\rangle_{\mathcal{H}}) \leqslant \mathbb{E}\|Z_i^{(\star)}\|_{\mathcal{H}}^2\|h\|_{\mathcal{H}}^2 = \mathbb{E}\|Z_0^{(\star)}\|_{\mathcal{H}}^2$。对于 $k=0$,

$$|\mathrm{Cov}(U_0, V_0)| \leqslant \sqrt{\mathrm{Var}(U_0)\mathrm{Var}(V_0)} \leqslant \mathbb{E}\|Z_0^{(\star)}\|_{\mathcal{H}}^2.$$

因此 $\sum_{k\in\mathbb{Z}}$ 协方差$(U_k,\ V_k)$ 绝对收敛，并且

$$|\mathfrak{K}_\star(f,g)| \ \leqslant\ \mathbb{E}\|Z_0^{(\star)}\|_{\mathcal{H}}^2\Big(1+2\sum_{k\geqslant 1}\overline{\rho}(k)\Big).$$

由极化，$\mathfrak{K}_\star$ 是一个有界对称双线性形式。正定性由下式可得:

$$\mathfrak{K}_\star(f,f) \ =\ \sum_{k\in\mathbb{Z}}\mathrm{Cov}\big(\langle Z_0^{(\star)}, f\rangle_{\mathcal{H}},\ \langle Z_k^{(\star)}, f\rangle_{\mathcal{H}}\big) \ \geqslant\ 0,$$

可解释为标量弱平稳序列 $\{\langle Z_i^{(\star)},\ f\rangle_{\mathcal{H}}\}$的长期方差。因此，根据里斯表示定理，存在唯一的有界自伴半正定算子 $\mathcal{K}_\star$，满足 $\langle\mathcal{K}_\star f,\ g\rangle_{\mathcal{H}} = \mathfrak{K}_\star(f,\ g)$。

对于迹的结论，设 $(e_j)_{j\geqslant 1}$ 是 $\mathcal{H}$的任意标准正交基。利用帕塞瓦尔恒等式和富比尼定理,

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\ \mathcal{K}_\star \ &=\ \sum_{j\geqslant 1}\langle\mathcal{K}_\star e_j, e_j\rangle_{\mathcal{H}} = \ \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\geqslant 1}\mathrm{Cov}\big(\langle Z_0^{(\star)}, e_j\rangle_{\mathcal{H}},\ \langle Z_k^{(\star)}, e_j\rangle_{\mathcal{H}}\big)\\ &=\ \sum_{k\in\mathbb{Z}}\mathbb{E}\langle Z_0^{(\star)}, Z_k^{(\star)}\rangle_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

对于 $k\geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{j\geqslant 1}\Big|\mathrm{Cov}\big(\langle Z_0^{(\star)}, e_j\rangle_{\mathcal{H}},\ \langle Z_k^{(\star)}, e_j\rangle_{\mathcal{H}}\big)\Big| \ &\leqslant\ \overline{\rho}(k)\sum_{j\geqslant 1}\sqrt{\mathrm{Var}\langle Z_0^{(\star)}, e_j\rangle_{\mathcal{H}}\,\mathrm{Var}\langle Z_k^{(\star)}, e_j\rangle_{\mathcal{H}}}\\ &=\ \overline{\rho}(k)\,\mathbb{E}\|Z_0^{(\star)}\|_{\mathcal{H}}^2,\end{aligned}$$

由于 $\mathsf{Var}\langle Z_0^{(\star)},\ e_j\rangle_{\mathcal{H}} = \mathsf{Var}\langle Z_k^{(\star)},\ e_j\rangle_{\mathcal{H}}$ 根据平稳性以及 $\sum_j \mathsf{Var}\langle Z_0^{(\star)},\ e_j\rangle_{\mathcal{H}} = \mathbb{E}\|Z_0^{(\star)}\|_{\mathcal{H}}^2$。$k=0$ 的界与 $\rho(0)=1$相同。对k 求和可得所述上界和绝对收敛性，因此 $\mathcal{K}_\star$ 是迹类的。

□

定义 4.4（协方差为 $\mathcal{K}_\star$）**的希尔伯特空间值布朗运动**。一个$\mathcal{H}$值过程 $B_\star = \{B_\star(t)\ :\ t\geqslant 0\}$ 是一个 $\mathcal{H}$-布朗运动，其协方差算子为 $\mathcal{K}_\star$，若对所有 f、$g\in\mathcal{H}$ 和 s、$t\geqslant 0$,

$$\mathbb{E}\big[\langle B_\star(s), f\rangle_{\mathcal{H}}\langle B_\star(t), g\rangle_{\mathcal{H}}\big] \ =\ \min\{s,t\}\,\langle\mathcal{K}_\star f,\ g\rangle_{\mathcal{H}}.$$

等价地，若 $\mathcal{K}_\star e_r = \lambda_r e_r$ 且 $\sum_r \lambda_r < \infty$，则

$$B_\star(t) \;\overset{d}{=}\; \sum_{r\geqslant 1} \sqrt{\lambda_r}\,\beta_r(t)\,e_r,$$

由独立同分布的标准布朗运动 $\{\beta_r\}$构成。

定理 4.6 (算子形式函数型中心极限定理 / 不变性原理**).** 假设(Mix-op)且 $\mathbb{E}\|Z_0^{(\star)}\|_{\mathcal{H}}^{2+\delta} < \infty$ 对某个 $\delta > 0$成立。对于 $\star \in$ {大小、位置}，定义 $D([0$ 中的阶梯过程：$1];\ \mathcal{H})$

$$S_n^{(\star)}(t) \;:=\; \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\lfloor nt\rfloor} Z_i^{(\star)}, \qquad t \in [0,1].$$

那么 $S_n^{(\star)} \Rightarrow B_\star$ 在 $D([0,1];\ \mathcal{H})$中成立，其中 $B_\star$ 是一个具有命题 *4.2* 中协方差算子 $\mathcal{K}_\star$ 的 $\mathcal{H}$-布朗运动。因此，对于 $Z_i^{(\mathrm{tot})} :=Z_i^{(\mathrm{size})} + Z_i^{(\mathrm{loc})}$ ，

$$S_n^{(\mathrm{tot})} \;\Rightarrow\; B_{\mathrm{size}} + B_{\mathrm{loc}}, \qquad \mathcal{K}_{\mathrm{tot}} = \mathcal{K}_{\mathrm{size}} + \mathcal{K}_{\mathrm{loc}},$$

由于奇偶正交性， B_{size} 和 B_{loc} 是正交高斯过程。

证明。步骤 1 $m \geqslant 1$ $0 \leqslant t_1 < \cdots <$: $t_m \leqslant 1$ $h_1 \ldots h_m \in \mathcal{H}$ $\Delta_{n\,j} = S_n^{(\star)}(t_j) - S_n^{(\star)}(t_{j-1})$ $t_0 = 0$ 有限维分布。固定，，和,,。令,: 其中：。对于 $c = (c_1, \ldots, c_m) \in \mathbb{R}^m$，考虑标量数组

$$Y_{n,i} \;:=\; \sum_{j=1}^{m} c_j \Big\langle Z_i^{(\star)}, h_j \Big\rangle_{\mathcal{H}} \Big(\mathbf{1}\{i \leqslant \lfloor nt_j\rfloor\} - \mathbf{1}\{i \leqslant \lfloor nt_{j-1}\rfloor\}\Big), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

于是$\sum_{i=1}^n Y_{n,\ i} = \sum_{j=1}^m c_j \langle \Delta_{n,\ j},\ h_j\rangle_{\mathcal{H}}$ 且每个$Y_{n,\ i} \in L_0^2(\mathcal{F}_i)$。由弱平稳性与（Mix-op），数组$\{Y_{n,\ i}\}$ 是一致 ρ-混合的，其系数以 $\rho(k)$为界。此外，命题 4.2 给出了极限协方差：

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}Y_{n,i}^2 \;\to\; \sum_{j=1}^{m}\sum_{j'=1}^{m} c_j c_{j'}\, \min\{t_j, t_{j'}\}\, \langle \mathcal{K}_\star h_j,\ h_{j'}\rangle_{\mathcal{H}}.$$

在 $\mathbb{E}\|Z_0^{(\star)}\|_{\mathcal{H}}^{2+\delta} < \infty$下，标准的大块/小块论证给出了$\{Y_{n,\ i}\}$的林德伯格条件：

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\{Y_{n,i}^2\, \mathbf{1}(|Y_{n,i}| > \varepsilon)\} \ \to\ 0 \qquad (\forall\, \varepsilon > 0).$$

因此，三角阵的 ρ-混合性中心极限定理给出 $\sum_{i=1}^{n} Y_{n,\ i} \Rightarrow \mathcal{N}(0,\ \Sigma_c)$其中 Σ_c 等于所显示的极限。根据克拉默–沃尔德定理，增量向量收敛于具有相应协方差的中心化高斯向量，因此 $S_n^{(\star)}$的有限维分布收敛于具有协方差算子 $\mathcal{K}_\star$ 的 $\mathcal{H}$-布朗运动 $B_\star$ 的有限维分布。

步骤 *2*：在 $D([0,\ 1]$中的紧性；$\mathcal{H})$。令 K_ρ：　　–
$= \mathbb{E}\|Z_0^{(\star)}\|_{\mathcal{H}}^2\big(1 + 2\sum_{k\geqslant 1}\rho(k)\big)$。平稳性和（Mix-op）给出分块二阶矩界：对所有整数 $m \geqslant 0,\ \ell \geqslant 1$,

$$\mathbb{E}\Big\| \sum_{i=m+1}^{m+\ell} Z_i^{(\star)} \Big\|_{\mathcal{H}}^2 \ \leqslant\ K_\rho\, \ell.$$

因此，对于 $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$,

$$\mathbb{E}\big\|S_n^{(\star)}(t) - S_n^{(\star)}(s)\big\|_{\mathcal{H}}^2 \ =\ \frac{1}{n}\,\mathbb{E}\Big\| \sum_{i=\lfloor ns\rfloor+1}^{\lfloor nt\rfloor} Z_i^{(\star)} \Big\|_{\mathcal{H}}^2 \ \leqslant\ K_\rho\,|t-s| + O\!\left(\frac{1}{n}\right),$$

这根据可分离希尔伯特空间值过程的标准判据，推出在 $D([0,\ 1]$中的紧性；$\mathcal{H})$

结论。有限维收敛与紧性意味着 $S_n^{(\star)} \Rightarrow B_\star$在 $D([0,\ 1];\ \mathcal{H})$。

对于总过程，注意到 $Z_i^{(\mathrm{tot})} = Z_i^{(\mathrm{size})} + Z_i^{(\mathrm{loc})}$，奇偶正交性给出 $\mathcal{K}_{\mathrm{tot}} \ =\ \mathcal{K}_{\mathrm{size}} + \mathcal{K}_{\mathrm{loc}}$，以及高斯极限的正交性。

□

引理 4.6 (线性插值可忽略**)**。假设 $\mathbb{E}\|Z_0^{(\star)}\|_{\mathcal{H}}^{2+\delta} < \infty$ 对某个 $\delta > 0$成立。定义阶梯版本与折线版本，其中 $t \in [0、\ 1]$,

$$S_n^{(\star)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\lfloor nt\rfloor} Z_i^{(\star)}, \qquad \mathbb{S}_n^{(\star)}(t) = S_n^{(\star)}\Big(\frac{\lfloor nt\rfloor}{n}\Big) + \big(nt - \lfloor nt\rfloor\big)\frac{Z_{\lfloor nt\rfloor+1}^{(\star)}}{\sqrt{n}}.$$

那么 上确界$_{t\in[0,\ 1]}\, \|\mathbb{S}_n^{(\star)}(t) - S_n^{(\star)}(t)\|_{\mathcal{H}} \xrightarrow{\ \mathbb{P}\ } 0$。

证明。 对于每个 t,

$$\|\mathbb{S}_n^{(\star)}(t) - S_n^{(\star)}(t)\|_{\mathcal{H}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1\leqslant i\leqslant n+1} \|Z_i^{(\star)}\|_{\mathcal{H}}.$$

固定 $\varepsilon > 0$。由并集界和指数为 $2+\delta$ 的马尔可夫不等式可得,

$$\Pr\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n+1} \|Z_i^{(\star)}\|_{\mathcal{H}} > \varepsilon\sqrt{n} \right) \leqslant (n+1)\, \frac{\mathbb{E}\|Z_0^{(\star)}\|_{\mathcal{H}}^{2+\delta}}{\varepsilon^{2+\delta} n^{1+\delta/2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

由此即可得到所需结论。 □

备注 4.6 (与 $\rho_{\max}$ 相容性及对角占优路径**)**。根据构造， $\rho(k)$是 $\sigma(Z_0^{(\star)})$ 与$\sigma(Z_k^{(\star)})$之间的经典 *HGR* 系数，因此对于任意 $u \in \mathbb{S}^{d-1}$,

$$\rho\big(Z_0^{(\star)}(u), Z_k^{(\star)}(u)\big) \leqslant \overline{\rho}(k).$$

因此， $\rho_{\max}(k) \leqslant \underline{\rho}(k)$ 和 $\sum_k \underline{\rho}(k) < \infty$ 推出 $\sum_k \rho_{\max}(k) < \infty$ （这是此前用于大数定律/强大数定律的假设）。

若要直接在 $\sum_k \rho_{\max}(k) < \infty$ 条件下表述定理 *4.6*，只需假设 $C_k(u, v)$ 满足轻微的对角占优条件：$=$ 协方差$(Z_0^{(\star)}(u), Z_k^{(\star)}(v))$，例如

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \big|C_k(u,v)\big|\, d\sigma(u)\, d\sigma(v) \lesssim \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \big|C_k(u,u)\big|\, d\sigma(u), \qquad k \geqslant 1,$$

例如，当交叉方向相关性在 $|u-v|$ 中可积衰减时，该条件成立。在此条件下，将 $\underline{\rho}(k)$ 替换为 $\rho_{\max}(k)$，上述界仍然成立。

推论 4.3 （逐分量与总体函数中心极限定理）。 在 (M2+)、(Mix) 和 (LRV) 下，在 $D([0,\ 1];\ \mathcal{H})$ 我们有

$$S_n^{(\mathrm{size})} \Rightarrow \mathbb{B}^{(\mathrm{size})}, \qquad S_n^{(\mathrm{loc})} \Rightarrow \mathbb{B}^{(\mathrm{loc})},$$

其中，极限是取值于 $\mathcal{H}$ 的布朗运动，并且满足 $\mathbb{E}\langle \mathbb{B}^{(\star)}(s)、\ f\rangle\langle \mathbb{B}^{(\star)}(t)、\ g\rangle =$最小$\{s、\ t\}\langle \mathcal{K}_\star f、\ g\rangle$。因此，根据奇偶正交性,

$$S_n^{(\mathrm{tot})} \Rightarrow \mathbb{B}^{(\mathrm{size})} + \mathbb{B}^{(\mathrm{loc})}, \qquad \mathcal{K}_{\mathrm{tot}} = \mathcal{K}_{\mathrm{size}} + \mathcal{K}_{\mathrm{loc}}.$$

此外，折线版本 $\mathbb{S}_n^{(\star)}$ 在 $C([0、\ 1];\ \mathcal{H})$ 中也具有相同的极限。

证明。 定理 4.6 给出了阶梯过程极限。引理 4.6 将其提升为折线极限。

□

4.3.6. $\mathcal{H}$令 a_n : $= \sqrt{2n}$对数对数 n。

定理4.7 （Hilbert空间重对数律）。 假设 **(M2+)** 且存在某个 $\delta > 0$ ，

$$\sum_{k \geqslant 1} k^{1/2}\, \rho_{\max}(k)^{\delta/(2+\delta)} < \infty,$$

以及（长期方差）。那么，几乎必然，

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\|T_n^{(\star)}\|_{\mathcal{H}}}{a_n} = \|\Sigma^{(\star)}\|_{\mathrm{op}}^{1/2}, \qquad \star \in \{\mathrm{size}, \mathrm{loc}\},$$

且 $\{T_n^{(\star)}/a_n\}$ 的聚点集等于 $\Sigma^{(\star)\,1/2}(\mathcal{H})$的闭单位球。此外，

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\|T_n^{(\mathrm{tot})}\|_{\mathcal{H}}}{a_n} = \max\Big\{ \|\Sigma^{(\mathrm{size})}\|_{\mathrm{op}}^{1/2},\ \|\Sigma^{(\mathrm{loc})}\|_{\mathrm{op}}^{1/2} \Big\}.$$

此处， $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ 表示协方差算子的算子范数（最大特征值）。

证明。（基于几乎不变性原理和布朗运动重对数律传递的概要。）我们概述标准方法：先为取值于$\mathcal{H}$的部分和建立几乎处处不变原理（ASIP），然后传递经典的Hilbert空间布朗运动重对数律/Strassen紧重对数律。

步骤*1*：分块分解。 选择递增的整数 $(b_j)_{j\geqslant 1}$ （大块长度）和 $(s_j)_{j\geqslant 1}$ （间隙），使得 $b_j \to \infty$、 $s_j \to \infty$、 $s_j/b_j \to 0$, 以及

$$\sum_{j\geqslant 1} \frac{s_j}{\sqrt{\sum_{i\leqslant j} b_i}} \ < \ \infty.$$

令 B_j 为第 j个大块， G_j 为第 j个间隙块。记

$$T_n^{(\star)} \ = \sum_{j:\, B_j \subset \{1,\dots,n\}} \sum_{i\in B_j} Z_i^{(\star)} \ + \sum_{j:\, G_j \subset \{1,\dots,n\}} \sum_{i\in G_j} Z_i^{(\star)} \ + \ R_n,$$

其中 R_n 为边界余项。

步骤 *2*：间隔部分和在迭代对数律尺度下可忽略。利用 **(M2+)** 和可和性 $\sum_{k\geqslant 1} k^{1/2}\rho_{\max}(k)^{\delta/(2+\delta)} < \infty$, ， 应用 Davydov/Rio型协方差

界处理 ρ–混合性，从而得到间隔部分和的矩估计，随后通过博雷尔–坎泰利论证可得

$$\sum_{j\geqslant 1}\Big\|\sum_{i\in G_j} Z_i^{(\star)}\Big\|_{\mathcal{H}} \;=\; o\big(a_n\big) \qquad \text{a.s.},$$

并且几乎必然有 $R_n = o(a_n)$ 。

步骤 *3*：大块的几乎不变性原理（高斯耦合）。对于大块和，可以在概率空间的扩张上构造一个取值于 $\mathcal{H}$ 的布朗运动 $\mathbb{B}^{(\star)}$，其协方差算子为 $\Sigma^{(\star)}$（由（LRV）保证），并将其与大块部分和序列耦合（Philipp–Stout/Skorokhod 型耦合），使得

$$\sup_{m\leqslant n}\Big\|\sum_{j\leqslant m}\sum_{i\in B_j} Z_i^{(\star)} - \mathbb{B}^{(\star)}\Big(\mathrm{Var}\Big(\sum_{j\leqslant m}\sum_{i\in B_j} Z_i^{(\star)}\Big)\Big)\Big\|_{\mathcal{H}} \;=\; o\big(a_n\big) \qquad \text{a.s.}$$

结合步骤 2，可得几乎不变性原理

$$T_n^{(\star)} \;=\; \mathbb{B}^{(\star)}(n) \;+\; o\big(a_n\big) \qquad \text{a.s.}$$

步骤 *4*：迭代对数律和聚点集的传递。布朗运动的 Hilbert空间重对数律给出

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\|\mathbb{B}^{(\star)}(t)\|_{\mathcal{H}}}{\sqrt{2t\log\log t}} \;=\; \|\Sigma^{(\star)}\|_{\mathrm{op}}^{1/2},$$

而 Strassen 紧迭代对数律将聚点集确定为 $\Sigma^{(\star)1/2}(\mathcal{H})$ 的闭单位球。由于几乎不变性原理误差为 $o(a_n)$，因此 $T_n^{(\star)}$ 也具有相同的上极限和相同的聚点集。

总分量。利用正交分解 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathrm{even}} \oplus \mathcal{H}_{\mathrm{odd}}$，其中 $T^{(\text{大小}_n\quad)} \in \mathcal{H}_{\mathrm{even}}$ 和 $T_n^{(\mathrm{loc})} \in \mathcal{H}_{\mathrm{odd}}$，可得

$$\|T_n^{(\mathrm{tot})}\|_{\mathcal{H}}^2 = \|T_n^{(\mathrm{size})}\|_{\mathcal{H}}^2 + \|T_n^{(\mathrm{loc})}\|_{\mathcal{H}}^2.$$

因此，总范数的迭代对数律常数是两个半径中的较大者，即

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\|T_n^{(\mathrm{tot})}\|_{\mathcal{H}}}{a_n} = \max\Big\{\|\Sigma^{(\mathrm{size})}\|_{\mathrm{op}}^{1/2},\ \|\Sigma^{(\mathrm{loc})}\|_{\mathrm{op}}^{1/2}\Big\}.$$

□

备注与推论

- **标量投影**。对于任意固定的 $h \in \mathcal{H}$，实值和满足 $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \langle Z_i^{(\star)},\ h \rangle \Rightarrow \mathcal{N}\big(0,\ \sigma_\star(h)^2\big)$ 其中 $\sigma_\star(h)^2 = \langle \Sigma^{(\star)} h,\ h \rangle$；迭代对数律和函数中心极限定理也可类似推出。

- **可检验条件（长期方差）**。由引理 4.4 可知，(M2+)+(Mix) 蕴含 $\Sigma^{(\star)}$ 是迹类的。如有需要，也可假设更强的 $\sum_k \rho_{\max}(k) < \infty$，以便更简便地验证。

- **奇偶解耦**。由引理 4.3 可知，所有极限对象在 $\mathcal{H}_{\text{偶}} \oplus \mathcal{H}_{\text{奇}}$ 子空间上均为分块对角形式；因此，“整体”极限可分解为两个正交子空间上支撑的正交高斯分量之和。

- **遍历性／大数定律背景**。积分切比雪夫界和弱大数定律/S LLN 在 $\mathcal{H}$ 中已于前文建立，并在引理 4.5 和紧性论证中反复使用（这里只回顾了所需的要点）。

5. 估计与模拟研究

本节通过模拟说明，所提出的偶–奇支撑函数分解如何区分大小 与位置依赖性，以及其如何改进基于施泰纳点的相关性指标。重点在于通过精心设计的依赖情景进行概念验证，而非算法优化。

5.1. 模拟模型

所有模拟均在 $\mathbb{R}^2$ 中进行。每个随机集 X_i 都是一个非中心对称 凸多边形，具体而言是一个非对称三角形。这一选择是有意为之的：对于此类形状，支撑函数的奇分量包含了超出单个点值摘要（如施泰纳点）所能捕捉范围的方向信息。

设 $V_i = \{v_{i1},\ v_{i2},\ v_{i3}\} \subset \mathbb{R}^2$ 表示 X_i 的顶点。其支撑函数为

$$h_{X_i}(u) = \max_{k=1,2,3} \langle u, v_{ik} \rangle, \qquad u \in \mathbb{S}^1.$$

其偶分量与奇分量为

$$W_{X_i}(u) = \tfrac{1}{2}\big(h_{X_i}(u) + h_{X_i}(-u)\big), \qquad C_{X_i}(u) = \tfrac{1}{2}\big(h_{X_i}(u) - h_{X_i}(-u)\big).$$

这些三角形通过以下方面的弱平稳 AR(1) 动态随时间演变：(i) 平移（中心）；(ii) 形状参数（边长和偏度）；以及 (iii) 方向。所有创新序列均以零为中心，在各分量间相互独立，且具有有限的二阶矩。这确保了弱平稳性和混合条件，与前文发展的理论相符。

除了原始奇分量 C_{X_i} 外，我们还考虑其 以施泰纳点为中心的（残差）版本

$$C_{X_i}^{\mathrm{res}}(u) = C_{X_i}(u) - \langle s(X_i), u \rangle,$$

其中 $s(X_i)$ 表示施泰纳点。如第 3.2 节所述，该残差消除了由施泰纳点诱导的奇分量中的线性部分，并分离出方向性位置波动。

5.2. 依赖情景

我们考虑四种情景，记为 S1–S4，旨在共同突出：(i) 偶奇分解区分大小依赖性与位置依赖性的能力；以及 (ii) 基于施泰纳点的相关性指标的局限性。

S1：符号翻转。令

$$Y_i = -X_i.$$

于是，大小分量彼此相同，而位置分量的符号则相反。因此，

$$\mathrm{Corr}_{\mathrm{size}}(X, Y) \approx 1, \qquad \mathrm{Corr}_{\mathrm{loc}}^{\mathrm{res}}(X, Y) \approx -1,$$

且 Steiner 点相关性接近 -1。此情景可作为基准合理性检查。

S2：部分位置依赖。令 Y_i 与 X_i共享相同的平移过程，而其形状和方向独立演变。在这种情况下，施泰纳点重合，因此施泰纳点相关性接近 1。然而，残差位置相关性 $\mathrm{Corr}_{\mathrm{loc}}^{\mathrm{res}}(X,\ Y)$ 要小得多，这反映出双方仅共享奇分量中线性（点值）部分，而高阶方向性波动仍基本相互独立。

S3：具有方向不对称性的大小依赖。令 Y_i 与 X_i共享相同的形状和方向，而其平移过程相互独立。正如预期，施泰纳点相关性接近零。尽管如此，残差位置相关性 $\mathrm{Corr}_{\mathrm{loc}}^{\mathrm{res}}(X,\ Y)$ 仍明显为正。这是由于采用了非对称形状：尽管中心相互独立，共享的形状动力学仍会在奇分量中诱发一致的方向性波动，而这些波动无法通过施泰纳点观察到。

S4：*Steiner* 点不可见的位置依赖（敏感性分析）。该情景被设计为*S3* 的连续类比。设 Z_i 为 X_i 的一个独立副本（具有相同的边缘几何，但具有独立动力学），并定义

$$Y_i = -\alpha X_i + (1-\alpha)Z_i, \qquad \alpha \in [0,1].$$

由施泰纳点的线性，

$$s(Y_i) = -\alpha s(X_i) + (1-\alpha)s(Z_i),$$

因此，对所有 α，$s(Y_i)$ 与 $s(X_i)$ 相互独立。故对所有 α，Steiner 点相关性始终接近于零。

相比之下，残差奇分量满足

$$C_{Y_i}^{\mathrm{res}} = -\alpha C_{X_i}^{\mathrm{res}} + (1-\alpha)C_{Z_i}^{\mathrm{res}},$$

因此，相关系数$_{\mathrm{loc}}^{\mathrm{res}}(X,\ Y)$ 随 α 连续变化。该情景分离出一种对基于 Steiner 点的汇总完全不可见的方向性位置依赖形式。

5.3. 估计与实现

对于每种情形，我们生成长度为 n 的时间序列，并在 $\mathbb{S}^1$上均匀采样 M个方向。各方向上的协方差采用贝塞尔校正计算，并通过蒙特卡洛平均进行积分。我们报告

$$\widehat{\mathrm{Corr}}_{\mathrm{size}}, \qquad \widehat{\mathrm{Corr}}_{\mathrm{loc}}^{\mathrm{res}},$$

同时报告 Steiner 点相关性以供比较。

这些估计量在弱依赖下的渐近性质源于前文建立的希尔伯特空间极限定理，相关内容总结于附录 A。这里我们重点关注其定性行为。

5.4. 结果

图1报告了基于非对称三角形的情景S1–S3的估计相关性。情景S1作为合理性检查：符号翻转$Y = -X$ 会产生 $\mathrm{Corr}_{\mathrm{size}} \approx 1$ 以及负的残差位置相关性，而 Steiner 点相关性也捕捉到了这一点。

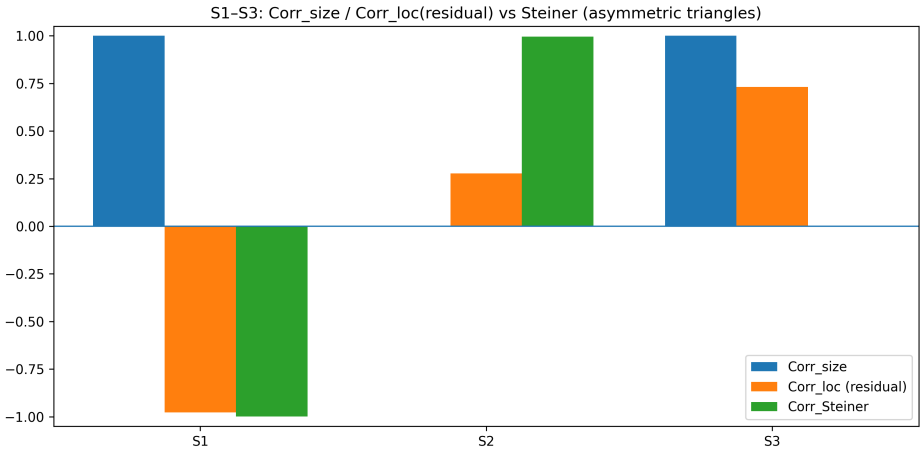


图1：具有非对称三角形的情景S1–S3。残差位置相关系数 $\mathrm{Corr}_{\mathrm{loc}}^{\mathrm{res}}$ 与施泰纳点相关性明显不同，尤其是在情景S3中，施泰纳点未能检测到强烈的大小依赖。

情景S2和S3揭示了基于Steiner点的汇总与所提出的偶奇分解之间的本质区别。在情景S2中，各集合具有相同的中心，但形状动力学彼此独立。因此，施泰纳点相关性接近1，而残差位置相关性则明显较低，这表明表面上的依赖性大多可由共同平移解释，而非方向性位置效应。相比之下，情景S3表现出强烈的大小依赖，同时存在显著的残差位置依赖，尽管施泰纳点相关性接近于零。这表明，即使方向性位置依赖对施泰纳点等任何点值摘要而言完全不可见，它仍可能持续存在，并且能够在奇支撑函数剖面中被检测到。

图2展示了情景S4，它在独立性与完全大小依赖性之间进行插值，同时使施泰纳点保持无信息性。

在 α 的所有取值下，Steiner 点相关性始终接近于零。相比之下，大小相关系数和残差位置相关性

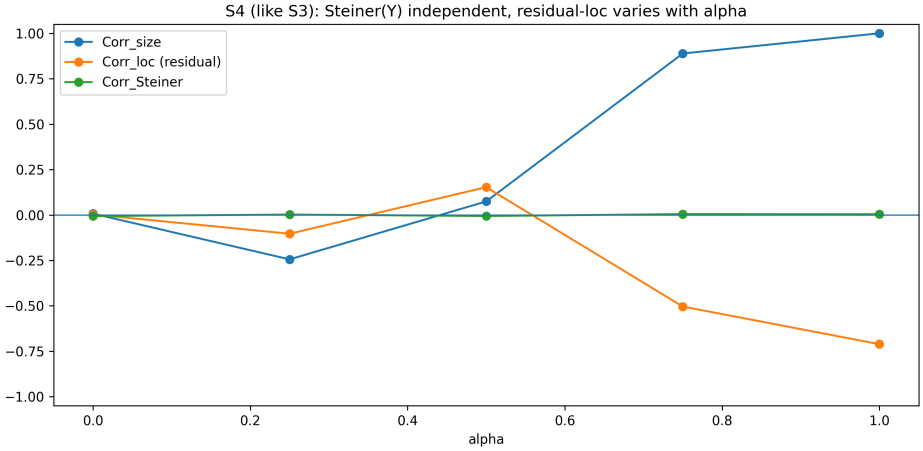


图2：情景S4（敏感性分析）。对于所有 α，Steiner 点相关性仍接近于零，而残差位置相关性持续变化，揭示了基于Steiner点的汇总无法呈现的方向性位置依赖。

会随 α 显著变化，且变化方式在定性上有所不同。这证实，所提出的残差位置指数捕捉到了无法简化为 Steiner 点中心化、也无法从 Steiner 点中心化中恢复的方向依赖。

为完整起见，表1报告了重复试验中的均值和标准差；定性结论保持不变。

表1： $R = 200$次重复试验中相关性估计值的蒙特卡洛均值（标准差）。

情景	相关系数$_{\text{size}}$	相关系数$_{\text{loc(res)}}$	相关系数$_{\text{Steiner}}$
S1	$1.00\,(0.00)$	$-0.98\,(0.02)$	$-1.00\,(0.00)$
S2	$0.01\,(0.05)$	$0.28\,(0.07)$	$0.99\,(0.01)$
S3	$1.00\,(0.00)$	$0.73\,(0.06)$	$0.00\,(0.04)$

6. 应用

本节说明，所提出的偶–奇支撑函数框架如何与现有方法相衔接，并为相依集值数据提供新的建模视角。本文侧重概念阐释，而非算法：每项应用都展示了将大小与位置成分分离如何带来更清晰的解释和更简洁的渐近理论。我们有意将额外的技术细节控制在最低限度。

6.1. 通过支撑损失重新审视区间值回归

区间值响应的回归模型传统上基于中点–半径分解，分别对中心和范围进行建模。这一范式源自符号数据分析 [3] ，并由此形成中心–范围回归模型 [11, 12]。

令 $Y_i = [C_i - R_i,\ \ C_i + R_i]$ 为区间值响应， $x_i \in \mathbb{R}^p$为协变量。考虑如下形式的预测器

$$\widehat{Y}_i = [x_i^\top \beta - r_i,\ x_i^\top \beta + r_i], \qquad r_i := |x_i^\top \gamma|,$$

或更一般地 r_i 由一个非负链接函数给出。定义支撑型二次损失

$$\mathcal{L}_n(\beta,\gamma) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{S}^0} \big(h_{Y_i}(u) - h_{\widehat{Y}_i}(u)\big)^2 \, d\sigma(u), \quad \mathbb{S}^0 = \{\pm 1\}, \quad d\sigma = \tfrac{1}{2}(\delta_{+1} + \delta_{-1}).$$

该损失是本文研究的一般 $L^2(\sigma)$支撑风险在一维情形下的特例。

命题 6.1 （中点–半径回归是精确优化器）。 对于区间响应，$h_{Y_i}(u) = u\, C_i + R_i$且 $h_{\widehat{Y}_i}(u) = u\, x_i^\top \beta + r_i$。因此，

$$\mathcal{L}_n(\beta,\gamma) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Big[(C_i - x_i^\top \beta)^2 + (R_i - |x_i^\top \gamma|)^2 \Big].$$

若 $r_i = x_i^\top \gamma$ 满足 $x_i^\top \gamma \geqslant 0$，则最小化 $\mathcal{L}_n$ 可分解为关于中点和半径的两个最小二乘问题。

证明。 在 $\mathbb{S}^0$ 上，支撑函数分解为 $h_Y(u) = W_Y + u\, C_Y$，其中$W_Y = R$ 且 $C_Y = C$。因此， $L^2(\sigma)$ 损失正交地分解为偶部和奇部，从而得到所述分解。 □

命题 6.1 表明，经典的中点–半径回归是自然的基于支撑函数的风险的精确 最小化解。在一维情况下，奇分量与线性项（由 Steiner 诱导）重合，因此不存在剩余的位置分量。这解释了为什么中点–半径回归能够充分捕捉区间的位置效应，而高维随机集则需要本文提出的更丰富的偶–奇框架。对弱依赖数据的推广可直接基于前文建立的希尔伯特空间极限定理得出。

6.2. 区间不确定性下的鲁棒线性规划

带区间系数的鲁棒线性规划是优化领域的经典课题；参见 Ben-Tal 等人 [2] 和 Schrijver [15]。从随机集视角来看，区间不确定性对应于凸集值系数，其几何特性可用支撑函数自然地描述 [10]。

考虑以下线性规划

$$\min\{c^\top x : Ax \leqslant b,\ x \in \mathbb{R}^p\},$$

其中，每个系数行 $(a_j,\ b_j)$ 均为区间值。给定决策向量 x，定义残差区间

$$R_j(x) := \{a_j^\top x - b_j : a_j \in A_j,\ b_j \in B_j\} = [C_j(x) - S_j(x),\, C_j(x) + S_j(x)].$$

其中， $C_j(x)$ 表示系统性偏移（位置），而 $S_j(x)$ 量化不确定性膨胀（大小）。

经典鲁棒约束等价于 $C_j(x) + S_j(x) \leqslant 0$。这得到了标准的区间鲁棒重构，但支撑函数表示明确揭示了位置效应与大小效应之间的分离。与施泰纳点等点值概括不同，支撑函数保留了方向信息，并且在不确定性存在依赖或非轴对齐时仍能提供有效信息。这类考虑依赖性的表述自然适用于随机集框架，并可推广到独立区间界之外。

6.3. 一个开放问题：基于相关集值信号的干预

最后，我们通过一个开放式示例来说明偶奇分解在结构上的优势。假设在每个时刻 t ，我们观测到一个凸集值信号 $X_t \subset \mathbb{R}^d$，例如表示空间风险或不确定性区域。过程 (X_t) 呈弱相关，并通过其支撑函数来描述。

在时刻 t，决策者选择一个凸干预集 U_t ，并受规模预算约束，目标是最小化时刻 $t+1$的二次支撑损失，

$$\mathcal{R}_t(U_t) := \mathbb{E}\|h_{X_{t+1}} - h_{U_t}\|_{2,\sigma}^2, \qquad \int_{\mathbb{S}^{d-1}} W_{U_t}(u)\, d\sigma(u) \leqslant B.$$

根据偶奇分解，

$$\mathcal{R}_t(U_t) = \mathbb{E}\|C_{X_{t+1}} - C_{U_t}\|_{2,\sigma}^2 + \mathbb{E}\|W_{X_{t+1}} - W_{U_t}\|_{2,\sigma}^2,$$

从而在目标函数层面，位置追踪与大小分配相互解耦。这种分离会被 Aumann 期望或 Steiner点等标量汇总量所掩盖，因为它们混合了这两种效应。

我们在此不寻求完整的解决方案。本例旨在说明，所提出的框架如何自然地产生易于解释的子问题，并通过前文构建的长期协方差算子，实现对依赖性有充分考量的不确定性量化。在这一情境下，制定完整的随机控制或优化方案仍是一个开放问题。

与模拟的联系。 第5节的模拟研究通过展示残余位置分量能够捕捉方向依赖效应，补充了这些应用；这些效应即便在简单的几何设置中，也无法通过基于 Steiner 点的概述反映出来。

7. 结论与未来工作

本文利用支撑函数的偶–奇（大小–位置）分解，构建了一个统一框架，用于分析集值随机过程的依赖性和渐近性质。通过引入逐分量协方差与相关结构，以及与之相容的最大相关系数 $\rho_{\max}$，我们建立了一套依赖理论，使其在弱依赖条件下仍能提供信息、避免基于选择的退化，并且内在地适应随机集的几何特性。在这一框架下，我们建立了一系列经典极限定理，包括大数定律、希尔伯特空间中心极限定理与泛函中心极限定理，以及 $\rho_{\max}$-混合集值过程的迭代对数律。

一个关键的概念性成果是严格区分大小驱动的不确定性与位置驱动的漂移。这解决了现有方法的结构性局限，因为在这些方法中，这两种效应不可避免地被混为一谈。具体而言，所提出的框架在大小分量消失时仍保持非退化，并揭示了标量混合系数和基于 Steiner 点的汇总所无法捕捉的方向依赖现象。

未来研究方向。 本研究为进一步探索开辟了若干途径。

- **更精细的依赖概念**。 尽管所有一维投影的标量相关系数均为零，支撑函数层面仍存在非平凡的依赖性，这表明随机集存在新的弱

依赖类别。开发其他基于相关系数的混合系数，并确定能使相同极限定理成立的最优混合条件，仍是开放问题。

- **几何驱动的极限理论**。 由偶奇分解引出的长期协方差算子的分块对角结构，揭示了依赖性与几何之间更深层的相互作用。系统研究集值协方差与相关性的几何不等式、仿射不变性及集中现象，是颇具前景的方向。

- **统计推断**。 大小效应与位置效应的分离自然引出了新的推断问题，包括检验方向持续性与纯振幅变异之间的差异，以及构造随机集长期协方差算子的依赖稳健估计量。

- **优化与数据驱动的扩展**。 该框架为依赖集值信号驱动的优化与决策问题提供了有理论依据的基础，也为高维情境和基于学习的情境提供了自然的接口。针对随机集开发依赖感知优化与控制方法，仍是一个鲜有探索的领域。

总体而言，结果表明，集值过程中的依赖性并非只是标量理论在技术层面的扩展，而是全新概率结构的来源。通过在统一框架中协调几何、依赖性与渐近理论，本研究为建立弱依赖随机集的系统理论奠定了基础。

致谢

作者衷心感谢同事们就集值随机过程和弱依赖进行的有益讨论。作者还感谢匿名审稿人认真审阅稿件并提出建设性意见，这些意见有助于提升论文的清晰度并拓展其研究范围。

数据可用性声明

本研究未生成或分析任何数据。

代码可用性

支持本研究结果的模拟代码可向作者提出合理请求获取。

人工智能的使用

生成式人工智能工具用于语言编辑和格式调整辅助。科学内容、数学结果和结论均由作者独立完成。

作者贡献

作者独立完成了本稿件的理论、证明、模拟和撰写工作。

经费

本研究未获得外部资助。

利益冲突

作者声明不存在利益冲突。

附录 A. 基于模拟的估计量的一致性与收敛速率

本附录汇集了第5节中所用蒙特卡洛插入估计量的标准一致性和收敛结果。列出这些结果是为了完整起见。这些结果依赖于弱相依过程的经典大数定律和矩界，除正文中建立的 $L^2(\sigma)$ 框架外，并不构成独立的贡献。

附录 *A.1.* 设置与假设

设 $(X_i,\ Y_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中的弱平稳凸紧随机集序列。对于 $\star \in \{$ 大小，loc$\}$，回顾

$$\Phi_X^{(\mathrm{size})}(u) = W_X(u), \qquad \Phi_X^{(\mathrm{loc})}(u) = C_X(u),$$

并类似地定义 $\Phi_Y^{(\star)}$ 。

对于 $u \in \mathbb{S}^{d-1}$，令

$$g_\star(u) := \mathrm{Cov}\big(\Phi_X^{(\star)}(u), \Phi_Y^{(\star)}(u)\big), \qquad \mathrm{Cov}_\star(X,Y) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} g_\star(u)\, d\sigma(u).$$

我们作出以下假设。

（A1）积分二阶矩：

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathbb{E}\, h_{X_0}(u)^2\, d\sigma(u) < \infty, \qquad \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathbb{E}\, h_{Y_0}(u)^2\, d\sigma(u) < \infty.$$

（A2）弱依赖性：序列 $(X_i,\ Y_i)$ 满足弱依赖条件，确保二阶统计量的大数定律和中心极限定理成立，例如 ρ- 混合性且满足 $\sum_{k\geqslant 1} \rho(k) < \infty$。

(A3) 随机方向：$u_1, \ldots, u_M \overset{\text{独立同分布}}{\sim}$ 均匀分布$(\mathbb{S}^{d-1})$，且与数据相互独立。

附录 *A.2.* 逐方向协方差估计对于固定方向 $u \in \mathbb{S}^{d-1}$,
定义

$$\widehat{\mathrm{Cov}}_n^{(\star)}(u) := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\big(\Phi_{X_i}^{(\star)}(u) - \overline{\Phi}_n^{(\star)}(u)\big)\big(\Phi_{Y_i}^{(\star)}(u) - \overline{\Psi}_n^{(\star)}(u)\big),$$

其中，$\overline{\Phi}_n^{(\star)}(u) = n^{-1}\sum_i \Phi_{X_i}^{(\star)}(u)$ 和 $\overline{\Psi}_n^{(\star)}(u)$ 的定义类似。

引理附录 A.1 (逐方向均方误差**)**。 假设(A1)–(A3)成立。此外，假设以下条件之一成立：

$(A1^{+})$ $\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathbb{E}\, h_{X_0}(u)^4\, d\sigma(u) < \infty$ *and similarly for* Y_0*;*

$(A1^{++})$ $\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathbb{E}\, h_{X_0}(u)^{2+\delta}\, d\sigma(u) < \infty$ *for some* $\delta > 0$*, together with a Davydov–Rio type inequality for the dependence.*

那么，对于 $\star \in \{$大小，loc$\}$,

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathbb{E}\big(\widehat{\mathrm{Cov}}_n^{(\star)}(u) - g_\star(u)\big)^2\, d\sigma(u) \;\leqslant\; \frac{C_\star}{n},$$

其中 $C_\star$为某个有限常数。

证明。 这是弱依赖条件下样本协方差估计量的标准二阶矩界。将贝塞尔校正协方差表示为中心化乘积，并分离经验均值项，可将其分解为一个阶为 n^{-1} 的方差项和一个阶为 n^{-2}的偏差项。由（A1^{+}）或（A1^{++}），利用柯西–施瓦茨不等式和达维多夫–里奥不等式，可得积分矩界。详细论证与正文中的证明一致，故为简洁起见，此处省略。

□

附录 *A.3.* 积分估计量与蒙特卡洛误差

基于 M 随机方向的蒙特卡洛估计量为

$$\widehat{\mathrm{Cov}}_\star^{(M,n)}(X,Y) := \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\widehat{\mathrm{Cov}}_n^{(\star)}(u_j).$$

附录 A.1 定理 （一致性与收敛速率）。假设(A1)–(A3)。那么，当 M, $n \to \infty$,

$$\widehat{\mathrm{Cov}}_{\star}^{(M,n)}(X,Y) \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathrm{Cov}_{\star}(X,Y), \qquad \star \in \{\mathrm{size}, \mathrm{loc}, \mathrm{tot}\}.$$

此外，若$(\mathrm{A1}^{+})$ 成立，则存在常数 $\kappa_1, \kappa_2 < \infty$ ，使得

$$\mathrm{Var}\big(\widehat{\mathrm{Cov}}_{\star}^{(M,n)}(X,Y)\big) \leqslant \frac{\kappa_1}{n} + \frac{\kappa_2}{M}.$$

证明。 分解

$$\widehat{\mathrm{Cov}}_{\star}^{(M,n)} - \mathrm{Cov}_{\star} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\big(\widehat{\mathrm{Cov}}_{n}^{(\star)}(u_j) - g_{\star}(u_j)\big) + \Big(\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} g_{\star}(u_j) - \int g_{\star}\, d\sigma\Big).$$

根据独立同分布方向的大数定律，第二项收敛于零。根据引理附录 A.1，第一项收敛。方差界由全方差定律得到，其中将蒙特卡洛误差（$O(M^{-1})$）与统计误差（$O(n^{-1})$）分开。

□

附录 A.1 推论 （相关系数估计量的一致性）。 假设$\mathrm{Var}_{\star}(X) > 0$ 且 $\mathrm{Var}_{\star}(Y) > 0$。则

$$\widehat{\mathrm{Corr}}_{\star}^{(M,n)}(X,Y) \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathrm{Corr}_{\star}(X,Y), \qquad \star \in \{\mathrm{size}, \mathrm{loc}, \mathrm{tot}\}.$$

证明。 将定理附录 A.1 应用于协方差和方差估计量，并应用斯卢茨基定理。

□

附录 A.1 注记。 选择 $M \simeq n$ ，可平衡蒙特卡洛误差与统计误差，并使均方误差达到 n^{-1} 阶。这些速率是标准结果，与经典积分协方差估计量的速率相当。

参考文献

[1] Zvi Artstein 和 Richard A Vitale。随机紧集的强大数定律。概率年刊，第 879–882 页，1975 年。[2]Aharon Ben-Tal 和 Arkadi Nemirovski。鲁棒优化——方法与应用。数学规划，92(3)：453–480，2002 年。[3] Lynne Billard 和 Edwin Diday。符号数据分析：概念统计学与数据挖掘（Wiley 计算统计学丛书），2007 年。[4] Richard C Bradley。强混合条件的基本性质：综述及若干未决问题。概率调查，2：107–144，2005 年。[5] Zengjing Chen、Yuting Lan 和 Gaofeng Zong。上集值概率与模糊集值概率的强大数定律。数学控制与相关领域，5(3)：435，2015 年。[6] John B Conway。泛函分析教程，第 96 卷。施普林格，2019 年。[7] Richard J. Gardner。几何断层成像。剑桥大学出版社，剑桥，第 2 版，2006 年。[8] Shoumei Li、Yukio Ogura 和 Vladik Kreinovich。集值随机变量与模糊集值随机变量的极限定理及应用，第 43 卷。施普林格科学与商业媒体，2013 年。[9] Florence Merlevède、Magda Peligrad 和 Emmanuel Rio。强混合条件下的伯恩斯坦不等式与中等偏差。载于高维概率 *V*：*Luminy* 卷，第 5 卷，第 273–293 页。数理统计学会，2009 年。[10] Ilya Molchanov。随机集理论。施普林格，2005 年。[11] Eufrásio de A Lima Neto 和 Francisco de AT De Carvalho。将中心与范围法用于符号区间数据的线性回归模型拟合。计算统计与数据分析，52(3)：1500–1515，2008 年。

[12] Eufrásio de A Lima Neto 和 Francisco de AT De Carvalho。符号区间值变量的约束线性回归模型。计算统计与数据分析，54(2)：333–347，2010。[13] Emmanuel Rio 等。弱相依随机过程的渐近理论，第 80 卷。施普林格，2017。[14] Rolf Schneider。凸体：*Brunn–Minkowski*理论。剑桥大学出版社，剑桥，第 2 版扩充版，2014。[15] Alexander Schrijver。线性与整数规划理论。约翰威立父子出版公司，1998。[16] Luc Tri Tuyen。关于弱平稳 φ-混合集值随机变量序列的强大数定律。*arXiv* 预印本 *arXiv:2601.09197*，2026。