arXiv:2603.08344v1 [math.KT] 9 Mar 2026

关于对偶下 K-理论不变性的说明

GEORG LEHNER

摘要。在这篇简短的说明中，我们解释了，对于局部化不变量 F 而言，在 F 为 K-理论的情况下，两个关于对偶不变性的例子纯粹形式化地成立；而对于任意局部化不变量，一般性结论并不能归结为形式化陈述。我们记录了一个反例，反驳了泛局部化不变量在取对范畴这一运算下保持不变的说法；该反例最初由 Tabuada 给出。

我们将遵循 K-理论中关于可对偶化范畴的一般约定，这些约定见于 [Efi25] 和[KNP24]。设 $\mathcal{C}$ 为一个可对偶化的 ∞-范畴，且 $F\colon \mathrm{Cat}^{\mathrm{perf}} \to \mathcal{E}$ 为 BGT 意义下的有限型局部化不变量 [BGT10]。一般而言，并不存在 $\mathcal{C} \simeq \mathcal{C}^{\vee} = \mathrm{Fun}^{L}(\mathcal{C},\mathrm{Sp})$。然而，在下面两个例子中，仍然有

$$F^{\mathrm{cont}}(\mathcal{C}) \simeq F^{\mathrm{cont}}(\mathcal{C}^{\vee}).$$

例1。作者在此前的文章 [Leh26]中指出，对于一个稳定局部紧空间 X，存在一个等价

$$F^{\mathrm{cont}}(\mathrm{Sh}(X,\mathrm{Sp})) \simeq F^{\mathrm{cont}}(\mathrm{Cosh}(X,\mathrm{Sp})),$$

其中 $\mathrm{Cosh}(X,\mathrm{Sp}) = \mathrm{Fun}^{L}(\mathrm{Sh}(X,\mathrm{Sp}),\mathrm{Sp}) = \mathrm{Sh}(X,\mathrm{Sp})^{\vee}$ 是 X上的余层的 ∞-范畴。当 X 是局部紧豪斯多夫空间时，这个等价是 Verdier对偶性的一个直接推论；但是，对于稳定局部紧空间，$\mathrm{Sh}(X,\mathcal{C}) \simeq \mathrm{Cosh}(X,\mathcal{C})$意义下的 Verdier对偶性并不成立，因此需要使用 $X^{\vee}$ 的 de Groot对偶 X 的一个版本。

例2。如果 P 是一个连续偏序集，Efimov [Efi25，第 5] 节给出的两项独立计算表明

$$F^{\mathrm{cont}}(\mathrm{Sh}(P,\mathrm{Sp})) \simeq \bigoplus_{p\in P^{\omega}} F(\mathbb{S}) \simeq F^{\mathrm{cont}}(\mathrm{Cosh}(P,\mathrm{Sp})).$$

我们注意到 $\mathrm{Cosh}(P,\mathcal{C}) \simeq \mathrm{Fun}^{L}(\mathrm{Sh}(P,\mathrm{Sp}),\mathcal{C})$，见 [Lur18，第21.1]节。

现在考虑对合 $(-)^{\mathrm{op}}$ ： $\mathrm{Cat}^{\mathrm{perf}} \simeq \mathrm{Cat}^{\mathrm{perf}}$，它将一个稳定的幂等完备 ∞-范畴映射为其对范畴。

定理3。存在函子的自然等价 $\mathrm{Cat}^{\mathrm{perf}} \to \mathrm{Sp}$,

$$K \simeq K \circ (-)^{\mathrm{op}}.$$

证明。注意，取群胚核的函子 $(-)^{\simeq}\colon \mathrm{Cat}^{\mathrm{perf}} \to \mathrm{An}$ 在 $(-)^{\mathrm{op}}$ 下不变。由于 K-理论是配备自然变换 $(-)^{\simeq} \to \Omega^{\infty}K$ 的泛局部化不变量，参见 [BGT10], ，因此 K-理论也具有同样性质。 □

此结果立即推广至可对偶化的稳定 ∞-范畴。函子 $(-)^{\vee}\colon \mathrm{Pr}^{L}_{\mathrm{dual}} \to \mathrm{Pr}^{L}_{\mathrm{dual}}$，$\mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}^{\vee} = \mathrm{Fun}^{L}(\mathcal{C},\ \mathrm{Sp})$ 给出一个对合， [Efi25，第 1.7] 节。若 $\mathcal{C} = \mathrm{Ind}(\mathcal{C}_0)$ 是紧生成的，则$\mathcal{C}^{\vee}$ =$\mathrm{Ind}(\mathcal{C}_0^{\mathrm{op}})$，因此 $(-)^{\vee}$ 将对合 $(-)^{\mathrm{op}}$ 推广至可对偶化的 ∞-范畴。

2020 数学主题分类。主要：19D99、18F25；次要：18N60、18F20、16K50。关键词和短语。代数 K-理论、局部化不变量、空间上层的 ∞-范畴、布劳尔群。

推论 4. 存在函子 $\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{dual}} \to \mathrm{Sp}$ 之间的自然等价，

$$K^{cont} \simeq K^{cont} \circ (-)^{\vee}.$$

证明。 在 $\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{dual}}$ 上，每个局部化不变量都由其经由 $\mathrm{Ind} : \mathrm{Cat}^{\mathrm{perf}} \to \mathrm{Pr}^L_{\mathrm{dual}}$ 的限制唯一确定，见 [Efi25, 定理 4.10]。因此，该断言归结为前一个定理。 □

例 5。 设 R 是一个 E_1-环谱，特别地，也可以是一个普通环（含幺，但不一定是交换的）。在这种情况下，左模的 ∞-范畴 LMod_R 是紧生成的，且 $\mathrm{LMod}_R \simeq \mathrm{Ind}(\mathrm{Perf}_R)$，[Lur17，命题 7.2.4.2]。记 $K(R) = K(\mathrm{Perf}_R)$。那么

$$\mathrm{LMod}_R^{\vee} \simeq \mathrm{RMod}_R = \mathrm{LMod}_{R^{\mathrm{op}}},$$

其中 R^{op} 是由 R 通过反转乘法顺序得到的 E_1-环，[Lur17，命题 7.2.4.3]。因此有 $K(R) \simeq K(R^{\mathrm{op}})$。

然而，对于任意局部化不变量，同一断言并不成立。

定理 6. 存在一个稳定且幂等完备的 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，使得

$$\mathcal{U}(\mathcal{C}) \not\simeq \mathcal{U}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$$

其中 $U : \mathrm{Cat}^{\mathrm{perf}} \to \mathrm{Mot}$ 是泛有限局部化不变量。

定理 6 的证明将在下一节给出，它是 Tabuada 的工作 [Tab14]的一个特例。在给出证明之前，我们想留给读者一个开放问题：

问题 7. 对于一个可对偶化的 ∞-范畴 $\mathcal{C}$，是否存在一种实用的判据，既适用于例 1 和例 2，又能推出$\mathcal{U}^{\mathrm{cont}}(\mathcal{C}) \simeq \mathcal{U}^{\mathrm{cont}}(\mathcal{C}^{\vee})$?

致谢。 我们感谢 Christoph Winges 与我们讨论并由此引出了这条备注，也感谢 Vladimir Sosnilo 向我们提供定理 6 的反例。我们还要感谢 Maxime Ramzi 和 Thomas Nikolaus 提出的宝贵意见。

作者获得了德国研究联合会（DFG，德国研究联合会）项目编号 427320536–SFB 1442 的资助，同时也获得了德国卓越战略 EXC2044/2- 390685587 项目“明斯特数学：动力学-几何-结构”的资助。

一个反例

让我们回顾一下关于域 k 的布劳尔群的一些一般事实。一般参考文献为 [GS06，第 2 节4]。域 k 的布劳尔群 $\mathrm{Br}(k)$ 是一个阿贝尔群，由有限维中心除代数 D 按布劳尔等价划分所得的等价类构成。乘法定义为$[D][D'] = [D'']$，其中 D'' 是满足 $D \otimes_k D' \cong M_n(D'')$，的唯一中心除代数，其中 $M_n(D'')$ 表示由 D'' 构成的 $n \times n$-阶矩阵代数。中心除代数 D 的逆由 D^{op} 给出。

T以下定理对于计算整体域的布劳尔群至关重要。

定理 8（阿尔贝特–布劳尔–哈塞–诺特定理，[NSW08，定理 8.1。17]）。设 K 是一个整体域。则存在一个正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Br}(K) \longrightarrow \bigoplus_v \mathrm{Br}(K_v) \xrightarrow{\sum_v \mathrm{inv}_v} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

其中 v 遍历 K的所有素位，第一个映射是限制映射$\mathrm{Br}(K) \to \mathrm{Br}(K_v)$之和，而$\mathrm{inv}_v$ 是局部哈塞不变量映射。对于有限素位 v，该映射

$$\mathrm{inv}_v \colon \mathrm{Br}(K_v) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

是一个同构；对于实素位 v，其像为 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$；对于复素位 v，则为零。

我们可以将上述定理应用于 $k=\mathbb{Q}$。取这些值

$$\mathrm{inv}_2(\alpha)=\frac{1}{3},\ \mathrm{inv}_3(\alpha)=-\frac{1}{3},\ \mathrm{inv}_v(\alpha)=0 \text{ for } v\neq 2,3$$

由此得到一个非零元素 $\alpha\in$Br($\mathbb{Q}$)，其阶为 3，由一个中心除代数 A over $\mathbb{Q}$ 表示。

我们再补充两点评论，后文将用到。

- 设 k 是一个 E_∞-环谱。回顾一下，若一个 k-线性稳定、幂等完备的 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 作为 $\mathrm{Cat}_{\mathrm{perf}\ k}$ 中的对象是可对偶的，则称其光滑且适当 。在这种情况下，存在一个自然等价

$$\mathrm{map}_{\mathrm{Mot}_k}(\mathcal{U}_k(\mathcal{C}),\mathcal{U}_k(\mathcal{D}))\simeq K(\mathrm{Fun}_k^{\mathrm{ex}}(\mathcal{C},\mathcal{D})),$$

  参见 [HSS17，定理 5.25]，，其中 $\mathcal{U}_k:\mathrm{Cat}_k^{\mathrm{perf}}\to \mathrm{Mot}_k$ 是针对k-线性稳定幂等完备 ∞-范畴的泛局部化不变量。
- 若 A 是 $\mathbb{Q}$ 上的有限维中心除代数，则根据 $\mathrm{Perf}_{A^{\mathrm{op}}\otimes_{\mathbb{Q}}A}\simeq$Perf$_{\mathbb{Q}}$ 这一观察可知， A 是光滑且适当的。记 $[M,N]=\pi_0$map$_{\mathrm{Mot}_k}(M,N)$ 为 Mot$_{\mathbb{Q}}$ 中的 M,N。应用前一结果可得 $[\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(A)\ -]\simeq K_0$(Fun$_{\mathrm{ex}}$(Perf$_A$, –)).

命题 9. 设 A 是 $\mathbb{Q}$ 上的有限维中心除代数，且其在 Br($\mathbb{Q}$) 中的阶不为 2。那么 Mot$_{\mathbb{Q}}$ 中 $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(A)\neq\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(A^{\mathrm{op}})$。

证明. A 在 Br($\mathbb{Q}$) 中的阶不为 2，等价于存在某个中心除代数 $D\neq\mathbb{Q}$，使得 $A\otimes_{\mathbb{Q}}A\cong M_n(D)$。特别地， $d=\dim_{\mathbb{Q}}(D)>1$。

复合映射

$$[\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(A^{\mathrm{op}}),\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(A)]\times[\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(A),\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(A^{\mathrm{op}})]\to[\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(A),\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(A)]$$

可识别为

$$K_0(A\otimes_{\mathbb{Q}}A)\times K_0(A^{\mathrm{op}}\otimes_{\mathbb{Q}}A^{\mathrm{op}})\to K_0(A^{\mathrm{op}}\otimes_{\mathbb{Q}}A)\cong K_0(\mathbb{Q})\cong\mathbb{Z}.$$

群 $K_0(A\otimes_{\mathbb{Q}}A)$ 由 $[D]$ 生成，而群 $K_0(A^{\mathrm{op}}\otimes_{\mathbb{Q}}A^{\mathrm{op}})$ 由 $[D^{\mathrm{op}}]$ 生成。这两个元素的乘积为 $[M_d(\mathbb{Q})]=d^2[1]$，属于 $K_0(\mathbb{Q})$。因此，乘法映射可识别为

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}\\ (n,m) & \mapsto & d^2nm,\end{array}$$

它不会映到 $1\in\mathbb{Z}$，因为 $d>1$。换言之， $[\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(A),\ \mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(A)]$ 中的恒等元不在该复合映射的像中，因此 $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(A)$ 与 $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(A^{\mathrm{op}})$ 在 Mot$_{\mathbb{Q}}$ 中不等价。□

单位映射 $\mathbb{S}\to\mathbb{Q}$ 将 $\mathbb{Q}$ 表明为 Sp 中的幂等代数。因此，对于任意两个 $\mathbb{Q}$-代数A， A', [，Sp 上的张量积限制为 LMod$_{\mathbb{Q}}$ 和 $A\otimes_{\mathbb{S}}A'\simeq A\otimes_{\mathbb{Q}}A'$ 上通常的张量积，见 Lur17，命题 4.8.2.7]。特别地，有 $A\otimes_{\mathbb{S}}\mathbb{Q}\simeq A$。

定理 *6* 的证明。由前一个命题可立即推出结论 $\mathcal{U}(A)\neq\mathcal{U}(A^{\mathrm{op}})$；否则，沿着 $\mathbb{S}\to\mathbb{Q}$ 进行基变换将得到 $\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(A)\simeq\mathcal{U}_{\mathbb{Q}}(A^{\mathrm{op}})$。□

注 10。这里给出的证明策略可以大幅推广。事实上，对于每个域 k，映射

$$\mathcal{U}_k:\mathrm{Br}(k)\to\mathrm{Pic}(\mathrm{Mot}_k)$$

是单射，见 [Tab14，定理 9。1]，另见 [Ram25]，其中给出了更具结构性的综述。映射$\mathcal{U}_k$ 将逆元映到 $(-)^{\mathrm{op}}$，因此命题 9 可作为推论得到。还可以通过将 k 替换为拟紧拟分离概形 X 来进一步推广，从而得到更加丰富的反例，见 [Ram25，第 3] 页。

参考文献

[BGT10] Andrew Blumberg、David Gepner 和 Goncalo Tabuada。《高阶代数 K 理论的一个普适刻画》。载于：《Geometry & Topology》17（2010年1月）。doi: 10.2140/gt.2013.17.733。[Efi25] Alexander I. Efimov。大型范畴的 K-理论与局部化不变量。2025年。arXiv：2405.12169 [math.KT]。网址：https://arxiv.org/abs/2405.12169。[GS06] Philippe Gille 和 Tamás Szamuely。《中心单代数与伽罗瓦上同调》。第 101 卷。剑桥高等数学研究丛书。剑桥：剑桥大学出版社，2006年。ISBN：978-0-521-86103-8。[HSS17] Marc Hoyois、Sarah Scherotzke 和 Nicolò Sibilla。《高阶迹、非交换动机与范畴化陈特征》。载于：《Advances in Mathematics》309（2017年3月），第 97–154 页。doi: 10.1016/j.aim.2017.01.008。arXiv： 1511.03589 [math.KT]。[KNP24] Achim Krause、Thomas Nikolaus 和 Phil Pützstück。《流形上的层》。2024年。网址： https://www.uni-muenster.de/IVV5WS/WebHop/user/nikolaus/Papers/sheaves-on-manifolds.pdf。[Leh26] Georg Lehner。稳定紧空间的代数 K理论。2026年。arXiv: 2602.18245 [math.KT]。网址：https://arxiv.org/abs/2602.18245。[Lur17] Jacob Lurie。《高阶代数》。2017年。[Lur18] Jacob Lurie。《谱代数几何》。预印本。2018年。网址： https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/SAG-rootfile.pdf。[NSW08] Jürgen Neukirch、Alexander Schmidt 和 Kay Wingberg。《数域上同调》。第 2 版。第 323 卷。数学科学基础丛书。柏林、海德堡：施普林格，2008年。ISBN：978-3-540-37888-4。doi: 10.1007/978-3-540-37889-1。[Ram25] Maxime Ramzi。《阿祖玛雅代数的局部化动机》。载于：arXiv 预印本（2025年）。arXiv:2509.01507 [math.AG]。[Tab14] Gonçalo Tabuada。《通过非交换动机研究环面簇与扭曲射影齐性簇的加性不变量》。载于：《Journal of Algebra》417（2014年），第 15–38 页。doi: 10.1016/j.jalgebra.2014.06.028。