arXiv:2603.08353v1 [math.ST] 9 Mar 2026

中等规模 Kendall 相关矩阵的极限谱分布及其应用

Raunak Shevade[a],*, Monika Bhattacharjee[a]

[a]数学系，印度理工学院孟买分校

摘要

我们建立了中等高维情形下 Kendall 相关矩阵的极限谱分布，其中维数的增长速度低于样本量。我们的框架允许观测值相互独立但不必同分布，并适用于离散数据和连续数据。不同于基于独立同分布观测得出的现有结果，我们的方法在存在显著分布异质性的情况下仍然成立，也涵盖了超出以往研究范围的某些独立同分布模型。

在某些迹满足温和的对称性和收敛条件下，我们证明，经过适当中心化和缩放的 Kendall 相关矩阵的经验谱分布几乎必然弱收敛到一个确定性的、通常依赖于模型的极限。该分析阐明了分布异质性如何影响极限谱。

作为一项应用，我们提出了一种用于检测高维数据中分量间依赖关系的图形工具，并表明忽略异质性可能导致依赖关系的虚假检测。

关键词：极限谱分布、半圆律、中等高维、Hoeffding分解、自由累积量、独立性检验

2020年数学学科分类：主要分类：60B20；次要分类：46L54、62G35、62H15、62H20

1. 引言

样本协方差矩阵和相关矩阵在多元统计分析中发挥着核心作用。在高维情形下，理解变量间相互依赖关系的一种常见策略是研究这些矩阵的特征值和特征向量的渐近行为。随机矩阵理论框架下已对此领域进行了广泛研究。

考虑一个维度为 $\mathbb{R}_p$ $p \times p$ 的随机矩阵。$\mathbb{R}_p$ 的经验谱分布（ESD）为其每个特征值赋予 $1/p$ 的质量，记作 $\nu^{\mathbb{R}_p}$。相应的累积分布函数为 $F^{\mathbb{R}_p}$，也称为经验累积分布函数（ECDF）。如果 $F^{\mathbb{R}_p}$ 在 $p \to \infty$ 时弱收敛（依概率或几乎必然）到某个极限，则该极限分布称为极限谱分布（LSD）。对于函数 f，相应的线性谱统计量（LSS）定义为 $\int f(x)\, dF^{\mathbb{R}_p}(x)$。关于样本协方差矩阵的极限谱分布和线性谱统计量的全面介绍，参见 Bai and Silverstein [1]；关于样本相关矩阵的类似研究，参见 Jiang [2], 和 Gao等人 [3]。

为确保几乎必然收敛到极限谱分布，通常假设各元素的二阶矩有限。然而，当数据具有重尾时，许多针对轻尾分布建立的结果便不再成立。例如，Heiny and Yao [4] 证明，在重尾情境下，样本相关矩阵的谱行为与轻尾情形存在显著差异。

*通讯作者：Raunak Shevade，电子邮箱：shevade.raunak@gmail.com

在这类重尾情境中，人们往往更倾向于采用稳健的、非参数的样本协方差矩阵替代方法，例如基于秩的方法。尤其是，Kendall 相关和 Spearman 的 ρ 矩阵因无需严格的矩假设仍具有良好的渐近性质，而受到广泛关注。例如，Bandeira 等人 [5] 和 Bai 和 Zhou [6] 证明，在适当条件下（例如，p、$n \to \infty$ 且 $p/n \to \theta \in (0,\infty)$），Kendall 相关和 Spearman 的 ρ 矩阵的极限谱分布服从 Marčenko–Pastur定律或其仿射变换。Bao 等人 [7], 、Bao [8, 9], 和 Li 等人 [10]等研究也考察了这些矩阵的线性谱统计量和极端特征值的渐近结果。然而，这些结果通常依赖于如下假设：数据同分布、绝对连续，且 p 与样本量以相同速率增长。最近，Dörnemann 等人 [11] 在独立同分布观测条件下，研究了经过适当中心化和标准化的 Kendall 相关和 Spearman 的 ρ 矩阵的极限谱分布；这些观测可以是离散的，因而适用于一般情形 $p/n \to \theta \in [0,\infty)$。在另一种渐近情形下，Bousseyroux 等人 [12] 研究了 p/n^2 收敛到一个正常数时 Kendall 相关矩阵的极限谱分布。Li 等人 [13] 研究了比例增长的高维情形下，独立同分布的连续观测中分量间存在依赖性时 Kendall 相关矩阵的极限谱分布。

本文研究了一个相对较少被探索的情形，即观测值可能来自非同分布的连续分布和/或离散分布。我们关注中等高维情形下肯德尔相关矩阵的极限谱行为，其中维度 p 的增长速度慢于样本量 n，即 $p/n \to 0$。

中等高维情形已经得到充分研究，并且在高维统计学文献中经常出现（例如，Wang 和 Paul [14], Wang 等人 [15], Bhattacharjee 和 Bose [16]）。在比例增长情形 $p/n \to \theta \in (0,\infty)$ 下得到的结果，当 θ 被直接设为零时，通常会退化为无信息的极限。因此，这些结果无法直接用于 $\theta = 0$ 情形下的统计推断。要获得非退化且具有信息性的极限，需要采用不同的中心化和缩放方法，而且分析过程也与比例增长情形存在根本差异。事实上，$\theta = 0$ 和 $\theta \in (0,\infty)$通常会得到定性上不同的结果；例如，Bhattacharjee 和 Bose [17] 以及 Bhattacharjee 和 Bose [16], , 或 Liu 等人 [18] 和 Wang 等人 [15], 分别针对每种情形推导了极限谱分布。在本文中，我们建立了 $p/n \to 0$情形下肯德尔相关矩阵的极限谱分布。

Kendall 相关矩阵是通过基于符号的核对成对比较构造的。符号函数定义为 $\mathrm{Sign}(x) = x\,|x|\mathrm{I}(x, 0)$，其中 $\mathrm{I}(\cdot)$ 是指示函数。对于 $\mathbb{R}^2$中的向量，定义核函数 $h((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \mathrm{Sign}(x_1 - x_2)\,\mathrm{Sign}(y_1 - y_2)$。给定 n 对观测值 $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$，Kendall 相关 τ 是核函数为 h 的 U 统计量：

$$\binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \le i < j \le n} h((x_i, y_i), (x_j, y_j)).$$

设 $X = (X_{ki})$ 为一个 $p \times n$ 数据矩阵。对于每一对 (k, l)，定义 T_{kl} 为序列 $\{X_{ki}\}_{i\in[n]}$和 $\{X_{li}\}_{i\in[n]}$ 之间的 Kendall 相关 τ，其中 $[n] = \{1, 2, ..., n\}$。于是，Kendall 相关矩阵为 $\mathbb{T} = (T_{kl})_{1\le k,\ l\le p}$。

关于独立观测的肯德尔相关矩阵的极限谱分布，最早的结果见 Bandeira 等人[5], ，其中假设 X 的各列同分布且具有密度。他们证明，$\mathbb{T}$ 的极限谱分布依概率收敛到 $2\,3\,M_\theta + \frac{1}{3}$的分布，其中 M_θ服从参数为 θ的 Marčenko–Pastur定律。最近，Dörnemann 等人 [11] 证明，在观测值独立同分布且可能为离散型的条件下，在比例增长的高维情形中，经过适当中心化和归一化的肯德尔相关矩阵的极限谱分布是 Marčenko–Pastur定律的仿射变换；而在中等高维情形中，它收敛到半圆律。在另一种渐近情形下，即维度与样本量的平方成比例时，Bousseyroux 等人 [12] 证明，对于独立同分布的连续观测，Hoeffding 分解可忽略，而余项中的一个分量则主导其极限行为。

设 $D(\mathbb{A})$ 表示由 $\mathbb{A}$ 的对角元素构成的对角矩阵。对于 $\mathbb{T}$，第 k 个对角元素为 $(n(n-1))^{-1} P_{i\ne j} I\{X_{ki}, X_{kj}\}$。当数据绝对连续时，该值几乎必然为 1，因此 $D(\mathbb{T}) = I_p$，即 p 阶单位矩阵，且 $\mathbb{T} - D(\mathbb{T})$ 与 $\mathbb{T}$ 仅相差一个常数平移。相反，当绝对连续性

不成立时，对角元素可能显著变化，不再一致为 1。这种变异性使对 $\mathbb{T}$ 的直接分析变得复杂。由于对角线对应于自关联——这通常信息量较低——我们转而关注中心化矩阵 $\mathbb{T} - D(\mathbb{T})$。该方法同时适用于离散数据和异质数据。

我们的主要结果在三个假设下，证明了 $\mathbb{T} - D(\mathbb{T})$的经验谱分布几乎必然弱收敛。第一个假设与 Bandeira 等人 [5], 的设定相同，即 X 的各个元素相互独立。第二个假设要求 $\mathrm{Sign}(X_{ki} - X_{kj})$的分布及其反向分布对所有 i、j 均满足对称性条件；虽然这一条件在独立同分布情形下自动成立，但它也适用于范围更广的非同分布观测。第三个假设对某些方差–协方差矩阵的幂的迹施加条件，这些矩阵通过符号函数的条件期望$\mathbb{G}_{k,i}$定义。具体而言，我们要求对 $i \in [n]$取平均后的量 $n^{-1}\mathrm{Tr}(\mathbb{G}_{k,i})$ 和 $n^{-2}\mathrm{Tr}(\mathbb{G}_{k_1,i}\mathbb{G}_{k_2,i})$ 以适当的速率收敛到常数。值得注意的是，这些条件严格弱于 Bandeira 等人[5] 所提出的条件，而且至关重要的是，它们允许观测值具有异质性（非同分布）。

在这些假设下，定理 1 表明，经过适当中心化和缩放的 $\mathbb{T} - D(\mathbb{T})$ 的极限谱分布几乎必然存在，并且可由一个对称概率分布刻画。一般而言，该极限并非半圆律（见例 1 和例 2）。在独立同分布观测的特殊情形下，极限谱分布可以通过半圆律与数据的有界变换所对应的方差-协方差矩阵的极限谱分布之间的自由乘法卷积来刻画（只要后者存在）。此外，定理 2 确定了一类具有受控分量异质性的非同分布数据矩阵，对于这类矩阵，极限谱分布可化为半圆律。第 2.3 节给出了三个说明性例子。在第 2.4 节中，我们简要讨论了一种数据驱动的临时方法，用于验证我们的关键假设。要对这一方法进行严格的数学论证，需要更为先进的工具和技术，这将留待今后研究。

需要强调的是，Dörnemann 等人 [11], 是目前在可比框架下唯一的相关研究，其重点在于归一化的肯德尔相关矩阵。相比之下，我们分析的是中心化并缩放后的版本，这一差异并非仅具有技术层面的意义：它会导致显著不同的渐近行为，并使我们能够处理一些超出 Dörnemann 等人 [11]研究范围、甚至处于独立同分布框架之外的模型。只有在连续独立同分布观测这一经典情形下，两种方法才会一致，因为此时两组假设都会自动满足。在更一般的情形下，尤其是在存在离散数据或零膨胀数据时，即使采用独立同分布抽样，渐近行为也可能出现分歧。Dörnemann 等人 [11] 所采用的归一化排除了渐近退化分量的存在，而在涉及稀疏数据或零膨胀数据的应用中，这一假设可能并不现实。相比之下，我们的框架能够容纳此类退化情形（见例 2）：基于归一化的方法在这些情形下会失效，但我们的假设仍然成立，且极限谱分布存在。

另一方面，在我们的设定中，由于没有进行归一化，不同分量的尺度存在异质性，因此需要通过迹条件加以明确控制。这与 Dörnemann 等人[11], 的做法形成对比：他们通过归一化有效地使各分量的变异性趋于一致。因此，他们的结果（例如定理 2.5(1)）与我们的定理1和定理2在理论上有所不同，无法直接比较。尽管如此，我们指出，经过适当修改后，我们的证明技巧可以用于得到他们的主要结果（注释 13）。

最重要的是，我们强调，本研究为建立非同分布观测下 Kendall 相关矩阵的理论迈出了首个系统性步伐。值得注意的是，第 2 节中涉及非同分布数据的所有示例都满足我们的假设，但不属于 Dörnemann 等人 [11], 所建立框架的适用范围，由此体现了我们结果更广泛的适用性。

因此，处理非同分布观测是我们的核心贡献，但并非创新性的唯一来源。即使在某些独立同分布模型中，也存在不满足 Dörnemann 等人 [11] 假设、却适用于我们框架的数据生成机制（见例 2）。因此，本文不仅提供了一个适用于异质情形的扩展，还提出了一种在概念上有别于现有方法的分析途径，能够涵盖现有结果尚未涉及的情形。

我们进一步 探讨我们的研究结果对高维情形下独立性检验的启示 gs.

经典方法——例如似然比检验（Jiang等人 [19]）、基于 L^2 范数的方法（Gao等人 [3], Yang和Pan [20]），以及基于 L^∞ 范数的方法（Jiang [21], Zhou [22], Cai和Jiang [23]）——通常要求高阶矩有限，因此不适用于重尾数据。

相比之下，基于秩的方法（包括基于 Kendall 相关和 Spearman 的 ρ 的方法）在重尾分布下更为稳健。这方面的重要贡献包括：使用 Spearman 矩阵的 L^2-范数检验（Bao 等人 [7]）、基于 Kendall 相关矩阵的线性谱统计量（LSS）的检验（Li 等人 [10]）、分别针对 Kendall 矩阵和 Spearman 矩阵的 L^∞-范数检验（Han 等人 [24]），以及在数据独立、绝对连续且有时满足对称性，且 $p/n \to \theta \in (0, \infty)$ 的假设下提出的一般基于 U 统计量的检验（Leung 和 Drton [25]）。

定理 2 为数据矩阵中的行间依赖提供了图形诊断的基础，即使潜在分布是离散的，或在不同列之间存在异质性，且 $p/n \to 0$。我们通过一项简单的实证研究说明，忽视数据矩阵分布的异质性可能导致误导性结论，尤其是虚假检测出依赖关系。这凸显了在高维独立性检验中明确考虑非同分布观测的重要性。与基于 Dörnemann 等人 [11] 提出的另一种方法进行比较后还发现，在异质性情形下，基于同质性假设设计的方法可能会出现检验尺寸扭曲，且检验功效下降。该诊断的具体细节见第 3 节。虽然可以通过对 $\mathbb{T} - D(\mathbb{T})$ 采用适当选取的线性谱统计量（LSS）来构造正式的显著性检验，但推导相应的渐近分布超出了本文的范围。

2. 经验谱分布的收敛

我们对数据 $\{X_{ki} \text{ 作出以下假设：} 1 \le k \le p, 1 \le i \le n\}$。

假设 1：对于所有 $p, n \ge 1$，集合 $\{X_{ki} : 1 \le k \le p, 1 \le i \le n\}$ 由相互独立的随机变量组成。假设 1 对我们的证明方法至关重要。依赖情形需要采用不同的方法，将在未来的工作中进行研究。Li 等人 [13], 给出了一些关于依赖设定的部分结果，不过仍需进一步推广。

假设2：对于所有 $1 \le k \le p$, $1 \le i, j \le n$ 以及 $p, n \ge 1$，有 $\mathbb{P}(X_{ki} > X_{kj}) = \mathbb{P}(X_{ki} < X_{kj})$。

注释 1. 假设2 是为了确保 $\mathbb{E}(\mathrm{Sign}(X_{ki} - X_{kj})) = 0$ 对所有 k, i, j 都成立。注意，对于每个固定的 k，如果集合 $\{X_{ki}\}_{i=1}^n$ 在不同 i 下同分布，则假设2 自动成立。事实上，$X_{ki} - X_{kj}$ 与 $X_{kj} - X_{ki}$ 同分布，这意味着 $X_{ki} - X_{kj}$ 的分布关于零对称。因此，$\mathbb{E}(\mathrm{Sign}(X_{ki} - X_{kj})) = 0$。

注意，假设2并不要求每个 X_{ki} 都具有对称分布。例如，设X与Y独立，且 $\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 0.5) = \mathbb{P}(Y = -2) = \mathbb{P}(Y = 3) = 0.5$。则 $\mathbb{P}(X > Y) = \mathbb{P}(X < Y) = 0.5$，尽管X和Y都不是对称分布的。

另一方面，即使每个 X_{ki} 关于其中位数对称分布，假设2也未必成立。例如，设X与Y分别为(−1, 1)和(2, 3)上的相互独立的均匀随机变量。则 $\mathbb{P}(X < Y) = 1$且 $\mathbb{P}(X > Y) = 0$。

然而，若对每个k，变量 $\{X_{ki}\}_{i=1}^n$ 关于所有i的共同中位数（不妨设为0，不失一般性）对称，则假设2成立。此时 X_{ki} 与 $-X_{ki}$ 同分布，因此对所有i、j，有 $\mathbb{P}(X_{ki} > X_{kj}) = \mathbb{P}(-X_{ki} > -X_{kj}) = \mathbb{P}(X_{ki} < X_{kj})$。

由于每个 T_{kl} 都是一个 U 统计量，其渐近行为由 Hoeffding 分解决定。在本文考虑的高维情形下，一阶（线性）投影占主导，因此决定了极限谱分布。为定义 Hoeffding 投影，令 $F_{kj}(t) = \mathbb{P}(X_{kj} \le t)$ 和 $F_{kj}(t) = \mathbb{P}(X_{kj} < t)$，对所有 $t \in \mathbb{R}$ 均成立。令 $Y_{k,i,j}$ 为给定 X_{ki} 时 $\mathrm{Sign}(X_{ki} - X_{kj})$ 的条件期望，即对所有 $1 \le i, j \le n$ 和 $1 \le k \le p$，均有

$$Y_{k,i,j} = \mathbb{E}(\mathrm{Sign}(X_{ki} - X_{kj})|X_{ki}) = \mathbb{P}(X_{ki} > X_{kj}|X_{ki}) - \mathbb{P}(X_{ki} < X_{kj}|X_{ki}) = \bar{F}_{kj}(X_{ki}) + F_{kj}(X_{ki}) - 1.$$

$Y_{k,i,j}$ 的以下性质可由假设 1 直接得到。

(1) $Y_{k,\ i,\ j}$是 X_{ki} 的可测函数。(2) $Y_{k,\ i,\ j}$与 $\{X^{lj}$ 独立： $1 \le l \le p$， $1 \le j \le n$，l，k，j，i$\}$。(3) $\{Y_{k,\ i,\ j}\}$ 在 $1 \le k \le p$、$1 \le i \le n$ 的范围内相互独立。

对于每个 $1 \le k \le p$ 和 $1 \le i \le n$，定义 $(Y_{k,\ i,\ j}$： $1 \le j \le n)$ 的方差-协方差矩阵为 $n \times n$ 矩阵 ix

$$\mathbb{G}_{k,i} = (\mathrm{Cov}(Y_{k,i,j_1}, Y_{k,i,j_2}))_{1 \le j_1, j_2 \le n}.$$

$\mathbb{T}$ 的一阶Hoeffding投影由 $p \times p$ 矩阵 G 给出，其 (k, l) 项为

$$G_{kl} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} Y_{k,i,j}\, Y_{l,i,j}.$$

注2。假设 $\{X_{ki}\}$ 满足假设 1，且在 i 维度上同分布。则 $Y_{k,\ i,\ j}$ 不依赖于 j，因此可记为 $Y_{k,\ i,\ j} = Y_{ki}$（记作），对所有 j 均如此。此外，对于每个固定的 k，集合 $\{Y_{ki}\}_{i=1}^{n}$ 同分布。因此，对于每个 k，矩阵 $\mathbb{G}_{k,\ i}$ 可简化为 $\mathbb{G}_{k}^{\mathrm{IID}}{}_{,\ i} = \mathrm{Var}(Y_{k1})\,\mathbb{J}_n$，其中 $\mathbb{J}_n$ 表示所有元素均为 1 的 $n \times n$ 矩阵。此外，G 可简化为 G^{IID}，其 (k, l) 项为 $G_{kl}^{\mathrm{IID}} = \frac{1}{n} P_{i=1}^{n} Y_{ki}\, Y_{li}$。另外，$\{Y_{ki}\}$ 在 k 和 i 两个维度上均相互独立。

在第 4.1.2 节中，我们证明：经过适当的中心化与缩放后，$\mathbb{T}$–D($\mathbb{T}$)的经验谱分布与其一阶投影G在p、n $\to \infty$ 且p/n $\to 0$的极限下重合。因此，极限谱分布由协方差矩阵集合 $\{\mathbb{G}_{k,i}\}$的渐近行为所决定。以下假设G1和G2对这些矩阵提供了必要的控制。令$\mathrm{NC}_2(2R)$表示 [2R]的所有非交叉配对划分构成的集合。定义$\sigma_R(i) = i + 1$，其中 $1 \le i \le R - 1$ 且 $\sigma_R(R) = 1$；令 δ_{ab} 为克罗内克δ，即当a = b时取 $\delta_{ab} = 1$，否则取0。

假设 G1。存在$g_1 \in \mathbb{R}$，使得$\max(\sqrt{np}, (n/p))\left(n^{-2}p^{-1} P_{k,i}\,\text{迹}(\mathbb{G}_{k,i}) - g_1\right) \to 0.$

假设 G2。存在非负常数 $g_{2\pi}$，使得对所有 $R \ge 1$ 以及 $\pi \in \mathrm{NC}_2(2R)$，

$$(n^{-R}p^{-1}) \sum_{k_1,\ldots,k_{2R}} \left(\prod_{(b,s)\in\pi} \left(p^{-1}n^{-2} \sum_{i_b} \mathrm{Trace}(\mathbb{G}_{k_b,i_b}\mathbb{G}_{k_{\sigma_{2R}(b)},i_b})\, \delta_{k_b,k_{\sigma_{2R}(s)}} \delta_{k_s,k_{\sigma_{2R}(b)}} \delta_{i_b,i_s} \right) \right) \to g_{2\pi}. \tag{2.1}$$

显然，对某个常数 $C > 0$ 以及所有 $\pi \in \mathrm{NC}_2(2R)$，有 $g_{2\pi} \le C^R$。因此，由 Carleman 条件，矩序列 $P_{\pi\in\mathrm{NC}_2(2R)} g_{2\pi}$ 唯一确定一个概率分布。

注 3。设 $\{X_{ki}\}$ 满足假设 1，且关于 i 同分布。则只要存在常数 g_1 使得，假设 G1 即成立

$$\max(\sqrt{np}, (n/p)) \left(\frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Var}(Y_{k1}) - g_1 \right) \to 0. \tag{2.2}$$

利用 $\mathbb{G}_{k,i}$ = 方差(Y_{k1})$\mathbb{J}_n$ 以及迹($\mathbb{J}_n^2$) $= n^2$,， (2.1) 的左边化为

$$p^{-(R+1)} \sum_{k_1,\ldots,k_{2R}} \prod_{(b,s)\in\pi} \left(\mathrm{Var}(Y_{k_b 1})\, \mathrm{Var}(Y_{k_{\sigma_{2R}(b)}1})\, \delta_{k_b,k_{\sigma_{2R}(s)}} \delta_{k_s,k_{\sigma_{2R}(b)}} \right). \tag{2.3}$$

对任意 $\pi \in \mathrm{NC}_2(2R)$，$\{(k_1, \ldots, k_{2R}) : \delta_{k_b,k_{\sigma_{2R}(s)}} \delta_{k_s,k_{\sigma_{2R}(b)}} = 1, (b, s) \in \pi\}$ 中不同下标的个数恰好为 $R + 1$。因此，(2.3) 中的和式可分解为形如 $\frac{1}{p} P_{p\ k=1}$(方差(Y_{k1}))^{r}的各项之积，其中各整数 $r \ge 1$ 由 π的结构决定。例如，当 $R = 4$时：

- The pairing $\{(1,2),(3,4),(5,6),(7,8)\}$ yields $\left(\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}(\mathrm{Var}(Y_{k1}))^4\right)\left(\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\mathrm{Var}(Y_{k1})\right)^4$,
- 配对 $\{(1,4),(2,3),(5,8),(6,7)\}$ 得到 $\left(\frac{1}{p} P_{p\ k=1}(\text{方差}(Y_{k1}))^2\right)^3 \left(\frac{1}{p} P_{p\ k=1}\,\text{方差}(Y_{k1})\right)^2$.

因此，只要满足以下条件，假设 G2 就成立。
假设 G2-a：对角矩阵 $\Sigma_p = \mathrm{diag}(\mathrm{Var}(Y_{11}), \ldots, \mathrm{Var}(Y_{p1}))$ 的经验谱分布弱收敛到某个极限概率分布。

定理 1. 假设假设 1、2、G1 和 G2 成立，且 $p := p(n) \to \infty$，满足 $p/n \to 0$，当 $n \to \infty$ 时。那么 $pn/p(\mathbb{T} - D(\mathbb{T}))$ 或 $2\,pn/p(G - g_1 I_p)$ 的经验谱分布几乎必然弱收敛到一个概率分布，其奇数阶矩为零，2R 阶矩由 $2^{2R} P_{\pi \in NC_2(2R)} g_{2\pi}$ 给出。

接下来，回顾其概率密度函数如下的半圆律

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2 - x^2}, & -R < x < R, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

我们将其记为 S_R。一般而言，定理 1 得到的极限谱分布并不化为半圆律。只有在特殊情形下，即对某个常数 $C > 0$，有 $g_{2\pi} = C^R$，且对所有 $\pi \in NC_2(2R)$ 均成立时，才会化为半圆律 $2S_{2C}$。

如第 1 节所述，据我们所知，Dörnemann 等人 [11] 是唯一可供比较的现有研究。不过，他们的分析仅限于独立同分布观测，允许分布为离散或连续分布，但未涵盖数据非同分布的情况。

现在我们给出一个例子，其中观测值在行和列两个维度上均为非同分布。该例说明，我们的结果在这一更一般的情形下仍然成立，而 Dörnemann 等人 [11] 的结果则不适用。

例 1. 设 $X_{ki} \sim$ 服从柯西分布$(0, \sigma_{ki})$，其中 $\sigma_{ki} = 1$：当 k、i 均为奇数时取 1；当二者均为偶数时取 10；当 k 为奇数且 i 为偶数时取 20；当 k 为偶数且 i 为奇数时取 30。因此，$\{X_{ki}\}$ 在 k 和 i 两个维度上均为非同分布。此外，$\{X_{ki}\}$ 在两个指标上均相互独立，因此满足假设 1。由于 $X_{ki} - X_{kj}$ 关于 0 对称，假设2也得到满足。不难看出，由于数据矩阵中仅涉及有限种不同的概率分布，假设G1和G2均得到满足。表 1 的前两行一致，表明根据定理 1 得出的理论矩与该例的模拟矩吻合良好。相比之下，表 1 的后两行并不一致，说明 Dörnemann 等人 [11] 的结果不适用于这种情形。

表 1：例 1 的矩比较，其中 $n = 900$和 $p = 30$。

矩的阶	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$	$r = 5$	$r = 6$
基于我们的结果得到的理论矩	1.08	0	8.97	0	14.58
(3/2) $pn/p(\mathbb{T} - D(\mathbb{T}))$ 的经验累积分布函数的经验矩	0.97	0	9.12	0	14.23
(3/2) pn/pT 的经验累积分布函数的经验矩，其中 T 定义于 Dörnemann 等人方程 (6) 之后 [11]	1.01	0	9.27	0	14.28
标准半圆矩	1	0	2	0	5

2.1. 独立同分布观测

本节重点讨论独立同分布观测这一特殊情形，并将我们的发现与 Dörnemann 等人 [11], 的结果进行比较；据我们所知，他们的结果与我们的研究设定最为接近。以下推论可由注记 1–3 以及 Nica 和 Speicher [26]中的 (22.10) 直接得出。

推论 2.1. 同分布观测。设 $\{X_{ki}\}$ 满足假设 1，且沿 i 同分布。进一步假设 (2.2) 和假设 G2-a 成立，并且 $p := p(n) \to \infty$，其中 $p/n \to 0$ 在 $n \to \infty$时趋于 $\to \infty$。那么，$pn/p(\mathbb{T} - D(\mathbb{T}))$ 或 $2\,pn/p(G^{IID} - g_1 I_p)$ 的经验谱分布弱收敛，且几乎必然收敛至 $2S_2 a$，其中 S_2 与 a 自由。

推论 2.2. 同分布连续观测。假设 $\{X_{ki}\}$' 是连续随机变量，满足假设 1，且沿 i 同分布。则 $\{Y_{ki}\}$' 均为取值于 $(-1, 1)$ 上的相互独立的均匀随机变量。因此，对于所有 k、i，$\mathbb{V}ar(Y_{ki}) = 1/3$。于是，当 $g_1 = 1/3$ 时，(2.2) 成立，且满足假设 G2-a，因为 Σ_p 的极限谱分布存在，并退化在 1/3 处。另请注意，$D(\mathbb{T}) = I_p$。因此，$pn/p(\mathbb{T} - I_p)$ 的经验谱分布几乎必然弱收敛至 $(2/3)S_2$，这就是 Dörnemann 等人关于连续观测的定理 2.5 （1） [11] 。

备注 4. 与 Dörnemann 等人 **[11]**的比较。假设 $\{X_{ki}\}$ 满足假设 1，且沿 i 同分布。Dörnemann 等人 [11] 考察了其论文中方程 (6) 后定义的矩阵 T。在他们的第 4.4 节和第 4.5 节——与我们的第 4.1.2 节类似，但需要借助德沃雷茨基–基弗–沃尔福维茨不等式，通过额外论证控制归一化因子——他们证明，pn/pT 的极限谱分布与 (2/3) $pn/p(\tilde{G}^{IID} - I_p)$ 的极限谱分布相同。矩阵 $\tilde{G}^{IID}$ 的对角元素为零；对于 k、l，其第 (k, l) 个元素为 $\sum_{i=1}^{n} \tilde{Y}_{ki} \tilde{Y}_{li}$，其中 $\tilde{Y}_{ki} = \left(\sum_{i=1}^{n} (Y_{ki} - \bar{Y}_k)^2\right)^{-1/2} (Y_{ki} - \bar{Y}_k)$，$\bar{Y}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_{ki}$。因此，由于 Y_{ki} 与 $\tilde{Y}_{ki}$ 之间存在以下结构差异，Dörnemann 等人 [11] 中的 T 的渐近行为不同于 $pn/p(\mathbb{T} - D(\mathbb{T}))$：

性质	Y_{ki}	$\tilde{Y}_{ki}$
沿 k 方向独立	Yes	Yes
沿 i 方向独立	Yes	No
行向量位于单位球面上	No	Yes
期望	0	0
方差	取决于 k	n^{-1}
r阶原始矩	$O(1)$	$O(n^{-r/2})$
r个变量的乘积的期望 具有相同的 k 且 i 互不相同	0	$O(n^{-r})$

因此，Dörnemann 等人 [11] 的推论 2.1 和定理2.5 的结果不能直接比较。尽管如此，沿用定理 1 证明中的类似组合方法，并利用弱依赖结构（由表格最后一行刻画）以及高阶矩的衰减（倒数第二行），可以得到 Dörnemann 等人 [11]的定理 2.5(1)。定理 1 的证明中为得到 Dörnemann 等人 [11] 的定理 2.5(1) 所需的修改细节见注释 13。

现在我们给出一个例子，其中 Dörnemann 等人 [11] 假设 2.2 中的非退化条件不成立，但 (2.2) 和假设 G2-a 成立。在这种情况下，我们的结果仍然有效，而 Dörnemann 等人 [11] 的结果则不适用。

例 2. 对所有 i 和奇数 k，令 $X_{ki} \sim$ 服从柯西分布$(0, \sqrt{k})$。对于每个偶数 k，令 $\mathbb{P}(X_{ki} = 0) = 1 - k^{-1/4}$，且对所有 i，$\mathbb{P}(X_{ki} = 1) = k^{-1/4}$。那么，$\{X_{ki}\}$ 在 i 之间同分布，但在 k 之间不同分布。此外，

$$\limsup_{p\to\infty} \max_{1\le k\le p} \mathbb{P}(X_{k1} = 0) = \lim_{p\to\infty} (1 - p^{-1/4}) = 1, \tag{2.4}$$

因此，Dörnemann 等人的假设 2.2 [11] 被违反。在本例中，$\mathbb{V}ar(Y_{k1}) = 1/3$（当 k 为奇数时），以及 $k^{-1/4}(1 - k^{-1/4})$（当 k 为偶数时）。因此，Σ_p 的经验谱分布弱收敛到一个分布 b，该分布对 0 和 1/3 各赋予质量 0.5。由

推论 2.1，pn/p(𝕋 − D(𝕋)) 的极限谱分布由 S_2b 给出，其中 S 2 与 b 是自由的。表 2 的前两行相符，表明 S_2b 的理论矩与本例的模拟矩吻合良好。相比之下，表 2 的后两行并不相符，表明 [11] 的结果在此情形下不适用。

表 2：例 2 在 n = 900与 p = 30 下的矩比较。

	r = 2	r = 3	r = 4	r = 5	r = 6
$6S_2b$ 的理论矩	1	0	4	0	20
3 pn/p(𝕋 − D(𝕋)) 的经验累积分布函数的经验矩	1.08	0.005	3.94	0.03	20.105
(3/2) pn/pT 的经验累积分布函数的经验矩，其中 T 在 Dörnemann 等人 [11] 的方程 (6) 后定义	3.33	0.04	13.56	0.03	66.55
标准半圆矩	1	0	2	0	5

注 5。与 Dörnemann 等人 [11], 不同，我们经过中心化和缩放的 Kendall 相关矩阵不需要归一化，因此也不需要渐近非退化条件。观测退化可能产生零元素，但并不意味着矩阵低秩或极限谱分布退化。只要相应的方差结构非退化，极限行为仍然是非平凡的。

注释 6. 独立同分布观测的研究现状。假设 $\{X_{ki}\}$ 满足假设1，且关于 i 同分布。以下总结了我们的结果与 Dörnemann 等人 [11]的结果所蕴含的结论。

1. 连续情形。若 $\{X_{ki}\}$ 为连续随机变量，则 pn/p(𝕋 − D(𝕋)) 与 Dörnemann 等人 [11] 中 pn/p T 的极限谱分布一致，共同极限为 $(2/3)S_2$。参见推论 2.2。

2. Dörnemann 等人 **[11]** 的假设 2.2 成立，但我们的条件不成立。若 Dörnemann 等人 [11] 的假设 2.2 成立，而 (2.2) 或假设 G2-a 不成立，则关于 pn/p(𝕋–D(𝕋))的极限谱分布尚无结果。相比之下，pn/p T 的极限谱分布为 $(2/3)S_2$, , 这已在 Dörnemann 等人 [11]的定理 2.5(1) 中确立。此外，通过对定理 1 的证明稍作修改，也可得到该结果；参见注释 13。3. Dörnemann 等人 **[11]** 的假设 2.2 不成立，但我们的条件成立。若 Dörnemann 等人 [11] 的假设 2.2 不成立，但 (2.2) 与假设 G2-a 成立，则 pn/p(𝕋 − D(𝕋)) 的极限谱分布由推论 2.1 刻画。在此情形下，Dörnemann 等人 [11]中关于 pn/p T 尚无相应结果。进一步的证据见例 2。

2.2. 半圆型极限谱分布

请注意，定理 1 中的极限谱分布是模型特定的，一般而言，除非它退化为半圆律，否则无法用统一形式表示。即使对于独立同分布观测，除非推论 2.1 中的随机变量 a 退化为常数，极限也不一定呈半圆形。下文中，我们将注意力限制在满足假设 3（或假设3A）的数据矩阵类上；对于这些矩阵，pn/p(𝕋 − D(𝕋)) 的极限谱分布收敛于半圆律。

假设 3：存在 γ_1、γ_2；一个正整数 $n^{(0)}$；常数 C、$\delta > 0$，使得对于所有 $1 \le k_1, k_2 \le p$ 以及所有 $n > n^{(0)}$，都有

$$(n/p)\,|n^{-2}\sum_{i\in[n]}\mathrm{Trace}(\mathbb{G}_{k_1,i}) - \gamma_1| \;<\; Ck_1^{-(1+\delta)},\quad (n/p)\,|n^{-3}\sum_{i\in[n]}\mathrm{Trace}(\mathbb{G}_{k_1,i}\mathbb{G}_{k_2,i}) - \gamma_2| < C(\min(k_1,k_2))^{-(1+\delta)}. \tag{2.5}$$

注释 7. 假设 $\{X_{ki}\}$ 满足假设 1，且在 i 上同分布。那么，根据注2，假设 3 可简化为以下条件：存在常数 $\tilde{\gamma}_1$, $C > 0$，使得 $\tilde{\gamma}_1 - C(p/n)k^{-(1+\delta)} < \mathrm{Var}(Y_{k1}) < \tilde{\gamma}_1 + C(p/n)k^{-(1+\delta)}$ 对所有 $k \ge 1$均成立。

注释 8. 假设 3 要求对 $n^{-2}\,P_{i\in[n]}$ 迹($\mathbb{G}_{k_1,i}$) 和 $n^{-3}\,P_{i\in[n]}$ 迹($\mathbb{G}_{k_1,i}\mathbb{G}_{k_2,i}$) 进行适当缩放后，能够将它们分解为一个与 k_1 和 k_2, 无关的主导项，以及一个依赖于 k_1,k_2 、且衰减足够快以使其可求和的余项。该条件不要求观测值及观测值的分量均具有相同分布；相反，它施加了温和的总体正则性条件，足以确保得到半圆极限分布。若缺少这种控制，其渐近行为将回到定理 1 所述的情形，可能产生非半圆极限分布，如例 1 所示。

注释 9. 假设 3 蕴含假设G1和G2，其中 $g_1 = \gamma_1$ 和 $g_{2\pi} = \gamma_2^R$ 对所有 $\pi \in NC_2(2R)$ 和 $R \geq 1$均成立，因为令 $a_n = \max(\sqrt{np},(n/p))$, 则有

$$\begin{aligned} a_n\left|n^{-2}p^{-1}\sum_{k,i}\mathrm{Trace}(\mathbb{G}_{k,i})-\gamma_1\right| &= a_n\left|p^{-1}\sum_{k}(n^{-2}\sum_{i}\mathrm{Trace}(\mathbb{G}_{k,i})-\gamma_1)\right| \le a_n p^{-1}\sum_{k}\left|n^{-2}\sum_{i}\mathrm{Trace}(\mathbb{G}_{k,i})-\gamma_1\right| \\ &\lesssim a_n(p/n)p^{-1}\sum_{k}k^{-(1+\delta)}\to 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left|(n^{-R}p^{-1})\sum_{k_1,\ldots,k_{2R}}\Big(\prod_{(b,s)\in\pi}\Big(p^{-1}n^{-2}\sum_{i_b}\mathrm{Trace}(\mathbb{G}_{k_b,i_b}\mathbb{G}_{k_{\sigma_{2R}(b)},i_b})\,\delta_{k_b,k_{\sigma_{2R}(s)}}\delta_{k_s,k_{\sigma_{2R}(b)}}\delta_{i_b,i_s}\Big)\Big)-\gamma_2^R\right| \\ =\;& (n^{-R}p^{-1})\sum_{k_1,\ldots,k_{2R}}\left(\prod_{(b,s)\in\pi}\Big(p^{-1}n^{-2}\sum_{i_b}\mathrm{Trace}(\mathbb{G}_{k_b,i_b}\mathbb{G}_{k_{\sigma_{2R}(b)},i_b})-(n/p)\gamma_2\Big)\delta_{k_b,k_{\sigma_{2R}(s)}}\delta_{k_s,k_{\sigma_{2R}(b)}}\delta_{i_b,i_s}\right) \\ \lesssim\;& (n^{-R}p^{-1})\sum_{k_1,\ldots,k_{2R}}\prod_{(b,s)\in\pi}\min(k_b,k_{\sigma_{2R}(b)})^{-(1+\delta)}\delta_{k_b,k_{\sigma_{2R}(s)}}\delta_{k_s,k_{\sigma_{2R}(b)}} \lesssim (n^{-R}p^{-1})\sum_{k_1,\ldots,k_{2R}}(\min\{k_j:\ 1\le j\le r\})^{-(1+\delta)} \\ \lesssim\;& n^{-R}p^{R-1}\to 0. \end{aligned}$$

假设 3　　当 $\{X_{ki}:\ 1\le i\le n\}$ 在 $1\le k\le p$ 上同分布时，假设 3 还可进一步放宽如下。

假设 3　　A:　$\{X_{ki}:\ 1\le i\le n\}$ 在 $1\le k\le p$ 上同分布，且存在数值 γ_1、γ_2 使得　　at

$$n^{-(r+1)}\sum_{i\in[n]}\mathrm{Trace}(\mathbb{G}_{k,i})^r\to\gamma_r\ \text{ for all } r=1,2.$$

注释 10. 假设 $\{X_{ki}\}$ 是独立同分布随机变量，且其共同分布不依赖于 n。则假设3A自动成立。

我们在第 2.3 节中给出具有非同分布观测值的例子，以说明假设 1–3（或假设3A）通常都能满足。下面的定理陈述了在假设 3 下，$\mathbb{T}$ –D($\mathbb{T}$) 经过适当中心化和缩放后的极限谱分布。其证明可直接由定理 1 和注 9 得出。

定理 2. 假设假设 1-3 成立（或者假设 3A 取代假设 3 成立），且当 $n\to\infty$ 时，$p := p(n)\to\infty$、$p/n\to 0$。那么，$q\,n\,p\,(\mathbb{T}-D(\mathbb{T}))$ 的经验谱分布几乎必然弱收敛到 $2S^2\sqrt{\gamma_2}$。

2.3. 例子

本节给出三个现有文献尚未涉及的例子。在这些例子中，X_{ki}' 在 k 方向上同分布，但在 i 方向上不同分布。例3考察重尾离散观测值，而例 5 则涉及重尾连续观测值与离散观测值的混合。对于所有这些例子，假设 1、2 和 3A 均成立，因此定理 2 的结论适用。

例 3. 设 X_{ki} 为离散随机变量，它们在 $1\le i\le n$ 上相互独立，并在 $1\le k\le p$ 上独立同分布。若 i 为偶数，概率质量函数为 $\mathbb{P}(X_{ik}=z)=\frac{45}{\pi^4 z^4}$，对所有 $z=\pm1,\pm2,\ldots$。若 i 为奇数，X_{ki} 为缩放的拉德马赫随机变量，即 $\mathbb{P}(X_{ik}=\pm2)=0.5$。此外假设

n, p $\to \infty$ 且 p/n $\to 0$。容易看出假设 1 成立。我们现在论证该模型满足假设2和3A。

验证假设2：假设 i 和 j 的奇偶性相同。那么

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{kj} < X_{ki}) &= \sum_{x_{ki}} \mathbb{P}(X_{kj} < X_{ki} | X_{ki} = x_{ki})\mathbb{P}(X_{ki} = x_{ki}) = \sum_{x_{ki}} \mathbb{P}(X_{kj} < x_{ki})\mathbb{P}(X_{ki} = x_{ki}) \\ &= \sum_{x_{ki}} \mathbb{P}(X_{kj} > -x_{ki})\mathbb{P}(X_{ki} = -x_{ki}) = \sum_{y_{ki}} \mathbb{P}(X_{kj} > y_{ki})\mathbb{P}(X_{ki} = y_{ki}) = \mathbb{P}(X_{kj} > X_{ki}). \qquad (2.6)\end{aligned}$$

注意，(2.6) 用到了所讨论分布的对称性。接下来，假设 i 为偶数而 j 为奇数。那么

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{kj} < X_{ki}) &= \sum_{x=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_{kj} < x)\mathbb{P}(X_{ki} = x) = \frac{1}{2}\Big(2\frac{45}{\pi^4} + \frac{45}{16\pi^4}\Big) + \Big(\frac{1}{2} - \frac{45}{\pi^2} - \frac{45}{16\pi^4}\Big) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{45}{16\pi^4}, \\ \mathbb{P}(X_{kj} > X_{ki}) &= 1 - \mathbb{P}(X_{kj} \le X_{ki}) = 1 - \sum_{x=-1}^{\infty} \mathbb{P}(X_{kj} \le x)\mathbb{P}(X_{ki} = x) = 1 - \frac{1}{2}\Big(\frac{45}{16\pi^4} + 2\frac{45}{\pi^4}\Big) - \Big(\frac{1}{2} - \frac{45}{\pi^4}\Big) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{45}{16\pi^4}.\end{aligned}$$

当 i 为奇数而 j 为偶数时，可类似处理。由此完成假设2成立的证明 ds.

验证假设3A：为此，需要计算 $\mathbb{G}_{k,\,i}$。由于 X_{ki} 在 k 上同分布，因此对于所有 $1 \le k \le p$，$\mathbb{G}_{k,\,i}$ 在 k 上均相同。分别将 i 为偶数和奇数时的 $\mathbb{G}_{k,\,i}$ 记为 $\mathbb{G}^{(1,1)}$ 和 $\mathbb{G}^{(1,2)}$。这些矩阵各个元素的数值可通过以下网址提供的 R 脚本计算：
https://github.com/Rss-1313/Simulations/blob/m
最终结果如下：

$$\mathbb{G}^{(1,1)}(j_1, j_2) = \begin{cases} 0.03275, & \text{if } j_1, j_2 \text{ both are odd,} \\ 0.4566, & \text{if } j_1, j_2 \text{ are of opposite parity,} \\ 0.2675, & \text{if } j_1, j_2 \text{ both are even,} \end{cases} \qquad \mathbb{G}^{(1,2)}(j_1, j_2) = \begin{cases} 0.25, & \text{if } j_1, j_2 \text{ both are odd,} \\ 0.4764, & \text{if } j_1, j_2 \text{ are of opposite parity,} \\ 0.9078, & \text{if } j_1, j_2 \text{ both are even.} \end{cases}$$

显然，

$$\begin{aligned} n^{-2}\sum_{i=1}^{n} \text{Trace}(\mathbb{G}_{k,i}) &\to (0.03275 + 0.2675 + 0.25 + 0.9078)/4 = 0.3645 \\ \text{and } n^{-3}\sum_{i=1}^{n} \text{Trace}(\mathbb{G}_{k,i}^2) &\to ((0.03275)^2 + 2(0.4566)^2 + (0.2675)^2 + (0.25)^2 + 2(0.4764)^2 + (0.9078)^2)/8 = 0.242.\end{aligned}$$

因此，例 3 中的模型满足假设3A，其中 $\gamma_1 = 0.3645$ 和 $\gamma_2 = 0.242$。

因此，由于 $2\sqrt{0.242} = 0.984$，定理 2 表明，pn/p ($\mathbb{T} - \mathbb{D}(\mathbb{T})$) 的经验谱分布弱收敛，并且几乎必然收敛到 2S 0。984。等价地，pn/p ($\mathbb{T} - \mathbb{D}(\mathbb{T})$)/0.984 的经验谱分布弱收敛，并且几乎必然收敛到 S_2。

表 3 第三行所报告的模拟结果表明，pn/p ($\mathbb{T} - \mathbb{D}(\mathbb{T})$)/0.984 的经验谱分布的样本矩与表中第二行给出的 S_2, 的样本矩非常接近。相比之下，表 3 第四行中观察到的差异表明，Dörnemann 等人 [11] 的结果不适用于此例。

例4. 正态分布是统计学中最常用的分布之一。本例考虑来自正态分布的观测值。设 X_{ki} 服从 $N(5, \sigma_i^2)$，其中 σ_i = i。注意，对于不同的 i，观测值相互独立；对于不同的 k，观测值独立同分布。容易看出，假设 1 成立。由于正态分布的对称性，假设2成立。接下来，我们将讨论该模型的假设3A。容易看出，对于所有 i、$j_1, j_2, ,$ 我们有

$$\mathbb{G}_{k,i}(j_1, j_2) = \frac{2}{\pi}\sin^{-1}\rho_{i,j_1,j_2} \text{ where } \rho_{i,j_1,j_2} = \frac{\sigma_i^2}{(\sigma_i^2 + \sigma_{j_1}^2)^{0.5}(\sigma_i^2 + \sigma_{j_2}^2)^{0.5}}.$$

表 3：n = 4900 和 p = 70 时例 3–5 的矩比较。设 ω_1 和 ω_2 分别为 Dörnemann 等人定理 2.5（1）中所考察的 pn/p($\mathbb{T} - \mathbb{D}(\mathbb{T})$)/2 $\sqrt{\gamma_2}$ 和 $\mathcal{W}_2 = (3/2)$ pn/pT 的经验谱分布 [11]

第 r 阶矩	r = 2	r = 3	r = 4	r = 5	r = 6	r = 7	r = 8
S_2	1	0	2	0	5	0	14
例 3：ω_1	0.97	7×10^{-9}	1.96	13×10^{-7}	5.07	0.0001	13.93
例 3：ω_2	3.82	0.0004	40.44	0.0021	312.22	0.02	3670.06
例4：ω_1	1.02	12×10^{-10}	2.01	8×10^{-6}	4.96	0.0003	13.89
例4：ω_2	1.37	0.0006	3.64	0.0013	12.19	0.004	45.88
例 5：ω_1	0.98	8×10^{-10}	1.97	11×10^{-6}	5.03	0.0001	14.06
例 5：ω_2	2.93	0.0003	12.76	0.0009	71.19	0.007	224.77

由于在解析上难以计算 r = 1,2 时的 Trace($\mathbb{G}^r_{k,\ i}$)，我们转而采用数值分析。通过该分析，得到 γ_1 和 γ_2 的估计值，分别记为 $\hat{\gamma}_1$ 和 $\hat{\gamma}_2$。计算该值的 R程序见链接 https://github.com/Rss-1313/LSDp-n-to-0/blob/main/Gkinormal900.R。因此，得到 $\hat{\gamma}_1$ 和 $\hat{\gamma}_2$ 的值分别为 0.3783 和 0.1622466。

因此，由于 $2\sqrt{0.1622466} = 0.81$，定理 2 表明，pn/p ($\mathbb{T} - \mathbb{D}(\mathbb{T})$) 的经验谱分布几乎必然弱收敛到 2S 0.81。等价地，pn/p ($\mathbb{T} - \mathbb{D}(\mathbb{T})$)/0.81 的经验谱分布几乎必然弱收敛到 S_2。

表 3 第五行报告的模拟结果表明，pn/p ($\mathbb{T} - \mathbb{D}(\mathbb{T})$)/0.81 的经验谱分布的样本矩与表中第二行给出的 S_2，的样本矩高度吻合。相比之下，表 3 第六行中观察到的差异表明，Dörnemann 等人 [11] 的结果不适用于本例。

例 5。本节关注来自离散分布和连续分布的观测值。就本例而言，令偶数 i 时 $X_{ki} \sim t(1)$（即自由度为 1 的 t分布），奇数 i 时 $\mathbb{P}(X_{ki} = \pm 1) = 0.5$。容易看出，观测值在 k 和 i 上都是独立的。因此显然，该设定满足假设 1。注意，观测值在 i 上并非同分布。现在我们将讨论该模型是否满足假设 2 和 3A。

假设2的验证：由于 X_{ki} 和 X_{kj} 是独立同分布的连续随机变量，因此当 i 和 j 均为偶数时，$\mathbb{P}(X_{ki} < X_{kj}) = \mathbb{P}(X_{ki} > X_{kj})$ 显然成立。接下来，假设 i 和 j 均为奇数，则

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{ki} < X_{kj}) &= 1 - \mathbb{P}(X_{kj} \le X_{ki}) = 1 - \sum_{x_{ki}=-1,1} \mathbb{P}(X_{kj} \le x_{ki})\mathbb{P}(X_{ki} = x_{ki}) = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \\
\mathbb{P}(X_{ki} > X_{kj}) &= \mathbb{P}(X_{kj} < X_{ki}) = \sum_{x_{ki}=-1,1} \mathbb{P}(X_{kj} < x_{ki})\mathbb{P}(X_{ki} = x_{ki}) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

现在，假设 i 为奇数而 j 为偶数，则

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{kj} > X_{ki}) &= 1 - \mathbb{P}(X_{kj} \le X_{ki}) = 1 - \sum_{x_{ki}=-1,1} \mathbb{P}(X_{kj} \le x_{ki})\mathbb{P}(X_{ki} = x_{ki}) = 1 - \frac{1}{4}\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \\
\mathbb{P}(X_{kj} < X_{ki}) &= \sum_{x_{ki}=-1,1} \mathbb{P}(X_{kj} < x_{ki})\mathbb{P}(X_{ki} = x_{ki}) = \frac{1}{4}\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

i 为偶数而 j 为奇数的情形可类似处理。由此完成了对例 5 中模型满足假设2的证明。

假设3A的验证：为验证假设3A，必须建立 n^{-s-1} P $_i$迹($\mathbb{G}^s{}_{k,i}$) 对于 s = 1、2 的收敛性。建立上述收敛性的算法与例 3 所采用的算法相同，并且

因此此处省略详细内容。用于该计算的 R 脚本链接为 https://github.com/Rss-1313/LSDp-n-to-0/bl 并证明，对于 $\gamma_1 = 0.3343$ 和 $\gamma_2 = 0.1115451$，例 5 满足假设3A。

因此，由于 $2\sqrt{\gamma_2} = 0.668$，定理 2 表明，$\mathrm{pn/p}\,(\mathbb{T} - \mathbb{D}(\mathbb{T}))$ 的经验谱分布弱收敛且几乎必然收敛到 $2S_{0.668}$。等价地，$\mathrm{pn/p}\,(\mathbb{T} - \mathbb{D}(\mathbb{T}))/0.668$ 的经验谱分布弱收敛且几乎必然收敛到 S_2。

表 3 第七行报告的模拟结果显示，$\mathrm{pn/p}\,(\mathbb{T} - \mathbb{D}(\mathbb{T}))/0.668$ 的经验谱分布的样本矩与表中第二行给出的 $S_{\overline{2}}$ 的样本矩非常接近。相比之下，表 3 最后一行所观察到的差异表明，Dörnemann 等人 [11] 的结果不适用于此例。

注 11. Li 等人 [13] 在独立同分布连续情形下，针对分量间存在依赖性的情况建立了 Kendall 相关矩阵的极限谱分布（并将 Bandeira 等人 [5] 的结果作为一个特例加以涵盖）；Dörnemann 等人 [11]则研究了独立性假设下的独立同分布离散情形。我们的工作进一步将 Dörnemann 等人 [11] 的研究推广到非同分布观测，以及超出其假设范围的某些离散/混合独立同分布情形。Dörnemann 等人[11] 和本文都在很大程度上依赖分量间独立性。若要将我们的结果推广到分量间存在依赖性的情形，就需要采用截然不同的技术，尤其是在存在分布异质性的情况下，因此留待未来研究。

注 12. 在随机矩阵理论中，渐近区间 $\mathrm{p/n} \to 0$、$\mathrm{p/n} \to \theta \in (0, \infty)$ 和 $\mathrm{p/n} \to \infty$ 通常会导致截然不同的极限谱行为，一般无法在统一框架下处理。本文关注区间 $\mathrm{p/n} \to 0$；比例维数情形和超高维情形需要采用截然不同的技术，尤其是在存在异质性的情况下，因此留待未来研究。

2.4. 通过聚类对假设进行数据驱动的临时验证

一般而言，当数据矩阵的所有条目均来自不同的分布时，直接验证我们理论框架中所施加的结构性假设是不可行的。然而，当这些条目可以归入若干簇，且每个簇内的观测值共享相同的潜在分布时，便会出现一种具有实际意义且易于处理的情形。这使得我们可以通过处理较少数量的分布成分来降低问题的复杂度。

更确切地说，假设指标集 $\{(\mathrm{k}, \mathrm{i}) : 1 \le \mathrm{k} \le \mathrm{p},\ 1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{n}\}$ 可以划分为L_n 个簇$\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_{L_n}$，使得给定簇中的所有条目同分布。我们允许簇大小变化，但假设每个簇都足够大，以便能够可靠地估计相应的分布函数，同时簇的总数L_n 在增长，但相对于np较小。

在实践中，真实的聚类结构是未知的。因此，我们采用一种数据驱动方法：首先ˆ ˆ ˆ应用合适的聚类算法，将指标划分为估计簇$\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_{L_n}$。这些估计簇充当同分布条目的潜在群组的代理。

ˆ 对于每个估计簇 Ω_u，我们定义经验分布函数

$$\hat{F}_u(t) = \frac{1}{|\hat{\Omega}_u|} \sum_{(k,i) \in \hat{\Omega}_u} \boldsymbol{I}(X_{ki} \le t),$$

其中 I(·) 是指示函数，用于估计该簇内的共同分布函数。需要注意的是，该估计量受到两种误差来源的影响：(i) 聚类步骤中的不准确性所导致的误分类误差；(ii) 经验分布估计固有的抽样误差。

利用这些经验分布函数，我们提出通过考察各簇之间的对称性条件来评估假设2的有效性。具体而言，对于任意一对簇 u、v，我们考虑以下量

$$A_{u,v} = \frac{1}{|\hat{\Omega}_v|} \sum_{(k,i) \in \hat{\Omega}_v} (\hat{F}_u(X_{ki}) + \bar{\hat{F}}_u(X_{ki}) - 1), \quad A_{v,u} = \frac{1}{|\hat{\Omega}_u|} \sum_{(k,i) \in \hat{\Omega}_u} (\hat{F}_v(X_{ki}) + \bar{\hat{F}}_v(X_{ki}) - 1).$$

如果对于所有簇对 u、v，$A_{u,v} \approx A_{v,u}$，则这为支持假设2提供了经验证据。

˜接下来，我们转向协方差结构$\mathbb{G}_{k,i}$的估计。对于每个 (k, i)，令 Ω_{ki} 表示与该条目关联的估计簇˜ ˆ，即若 (k, i) $\in \Omega_u$，则 $\Omega_{ki} = \Omega_u$。然后，我们定义估计量

$$\hat{\mathbb{G}}_{k,i}(j_1, j_2) = \frac{1}{|\tilde{\Omega}_{ki}|} \sum_{(k',i') \in \tilde{\Omega}_{ki}} (\hat{F}_{\tilde{\Omega}_{kj_1}}(X_{k'i'}) + \bar{\hat{F}}_{\tilde{\Omega}_{kj_1}}(X_{k'i'}) - 1)(\hat{F}_{\tilde{\Omega}_{kj_2}}(X_{k'i'}) + \bar{\hat{F}}_{\tilde{\Omega}_{kj_2}}(X_{k'i'}) - 1).$$

˜该估计量通过汇总估计簇 Ω_{ki} 内的信息，并以经验分布函数替代未知的分布函数而得到。

ˆ一旦构造出$\mathbb{G}_{k,i}$我们就可以通过在相应表达式中用$\mathbb{G}_{k,i}$替换$\mathbb{G}_{k,i}$ˆ，来对假设G1、G2和3（或3A）进行经验评估。这样，理论条件便可转化为仅基于观测数据的可计算量。

我们强调，上述过程本质上是一种启发式方法，主要旨在为模型评估提供实用指南。若要进行严格论证，则需要精确控制聚类误差和经验分布函数的估计误差，并定量分析这些误差对假设检验的影响。

更重要的是，应将本研究视为迈向建立理论框架、以处理中等高维情形下非同分布观测的第一步。若缺乏定理1和定理2这类结果，就难以设计出有原则且具有充分理论依据的方法，以检验异质分布下的独立性。这类似于连续独立同分布观测的情形：Bandeira 等人建立的关于肯德尔相关矩阵谱分布的极限定理 [5], ，对于推动在比例增长的高维情形下基于线性谱统计量构建严谨的独立性检验发挥了重要作用；参见 Li 等人 [10]。

相比之下，非同分布情形面临的挑战要大得多，本文提出的理论结果为未来沿这一方向开展研究奠定了必要基础。因此，下一节提出的独立性检验框架属于探索性内容，主要用于说明忽视分布异质性可能导致依赖关系的虚假检测。如何建立一种充分严谨、能够应对这些复杂性的检验方法，仍是未来研究的重要方向。

3. 独立性检验

现有针对重尾数据的独立性检验通常假设观测值相对于 $\mathbb{R}$ 上的勒贝格测度具有密度，并且 $p \times n$ 数据矩阵的各列同分布，维数比满足 $p/n \to \theta \in (0, \infty)$。近期，Dörnemann 等人 [11] 在独立同分布观测的条件下研究了 Kendall 相关矩阵的极限谱分布，在 $p/n \to \theta \in [0, \infty)$ 的情形下允许数据为离散或连续。尽管文中没有明确讨论，但他们的结果也可用于在独立同分布框架下构造独立性检验。

相比之下，定理1和定理2提供了一个检验行独立性的框架，即使观测值为离散型且列分布并非同分布，该框架在 $p/n \to 0$ 的情形下仍然适用。不过，需要注意的是，定理1和定理2中的 $pn/p(\mathbb{T} - \mathbb{D}(\mathbb{T}))$ 的极限谱分布通常并非分布无关。因此，下文所述的检验程序也不是分布无关的。

如下所示（见表4），未能考虑非同分布观测可能会导致依赖关系的虚假检测。本节的讨论有意采用探索性方式，并基于一种临时方法，旨在强调在检验独立性时妥善处理分布异质性的重要性。严谨的处理方式，包括构造适当的检验统计量（例如基于线性谱统计量的检验统计量）以及开展系统的理论分析，都需要大量进一步研究，超出了本文的范围。

˜ ˜令 Z = {Z_{ki} : 1 ≤ k ≤ p, 1 ≤ i ≤ n} 和 X = {X_{ki} : 1 ≤ k ≤ p, 1 ≤ i ≤ n} 为两个相互独立且同分布的数据矩阵，每个矩阵的元素相互独立，并满足假设1、2、G1和G2（或假设3或3A）。考虑一个 p × p 矩阵 $\mathbb{A}$，其第 (i, j) 个元素在 i > j 且满足某个 $\alpha > 0$时为 α_{i-j+1}，否则为零。我们观测到的数据矩阵为

$$\boldsymbol{Z} = \tilde{\boldsymbol{X}} + \mathbb{A}\tilde{\boldsymbol{Z}}.$$

我们的目标是检验原假设 H_0 : $\mathbb{A} = 0$ 对备择假设 H_1 : $\mathbb{A}$, 0。

图形检验程序。所提出的图形检验按如下步骤进行:

1. 由观测数据矩阵 Z 计算肯德尔相关矩阵 $\mathbb{T}$Z。˜2. 模拟一个独立的参考矩阵 X。3. 计算肯德尔相关矩阵 $\mathbb{T}$ ˜X。4. 在同一图上绘制 $q_{np}(\mathbb{T}Z - \mathbb{D}(\mathbb{T}Z))$ 与 $q_{np}(\mathbb{T}\tilde{}X - \mathbb{D}(\mathbb{T}\tilde{}X))$ 的经验谱分布的分布函数。5. 若两个经验谱分布接近，则不拒绝 H_0；否则，拒绝 H_0。

图1展示了该程序的表现。第一行对应于原假设，其中经验分布重合，而其余各行对应于备择假设，其中可观察到明显偏离。

经验检验水平。为评估该检验的经验检验水平，我们按以下步骤进行:

1. 在 H_0 （即 $\mathbb{A} = 0$）下模拟 Z，并计算 $\mathbb{T}$Z。˜2. 模拟 X 并计算 $\mathbb{T}$ ˜X。3. 计算 $q_{np}(\mathbb{T}Z - \mathbb{D}(\mathbb{T}Z))$ 与 $q_{np}(\mathbb{T}\tilde{}X - \mathbb{D}(\mathbb{T}\tilde{}X))$的经验谱分布之间的柯尔莫哥洛夫距离。4. 独立重复步骤 1–3 共 2000 次，并记录这些距离。5. 将这些距离的 95^{th} 百分位数定义为临界值。6. 再重复步骤 1–3 共 1000 次，并计算距离超过临界值的比例。这给出

es

经验检验水平。

经验功效。为评估经验功效:

1. 在 H_1 （即 $\mathbb{A}$, 0）下模拟 Z，并计算 $\mathbb{T}$Z。˜2. 模拟 X 并计算 $\mathbb{T}$ ˜X。3. 计算相应经验谱分布之间的柯尔莫哥洛夫距离。

4. 将上述步骤重复2000次。

5. 计算超过由检验水平分析得到的临界值的距离所占比例。由此得到经验检验功效。

表4表明，所提出的检验具有良好的经验尺寸控制以及令人满意的检验功效。

˜实际考量。在实际应用中，X 的分布未知，无法直接模拟。为解决这一问题，可以先应用聚类算法，将数据矩阵的元素分组成若干簇，使每个簇内的元素具有近似相同的分布。随后，可以对每个簇内的分布函数进行经验估计，并利用从这些估计分布中抽取的独立

元素生成一个参考矩阵。在 H_0, such˜ 条件下，预期替代矩阵能够模拟 X 的行为，但会受到误分类和分布估计带来的误差影响。如何量化这种近似误差仍是一个重要的未解问题。

局限性。所提出检验的性能取决于信号强度。特别是，当 X 的变异性
˜ ˜
˜占主导地位，而 $\mathbb{A}$ Z 的变异性较小时，Z 的肯德尔相关矩阵可能仍与 X 的矩阵相近，从而导致检验功效较低。对最小可检测信号强度进行精确刻画超出了本文的研究范围，将留待未来研究探讨。
结论。本节的主要目的是强调，忽视数据矩阵分布中的异质性可能导致误导性结论，尤其是依赖关系的虚假检测。因此，在高维独立性检验中，恰当考虑非同分布观测至关重要。

作为比较，也可以基于 Dörnemann 等人的定理 2.5（1）构造类似的独立性检验[11], , 并在表4中报告其经验表现。结果表明，即使原假设为真，这种备择方法也倾向于更频繁地拒绝原假设，说明在异质分布下可能存在水平失真。此外，其经验功效通常低于所提出的方法。

表4：所提出的检验以及基于 [11], 的定理 2.5（1）的检验在不同(n, p)和 α取值下的经验检验水平与检验功效，基于2000次重复。对于 α的每个取值，报告两列：第一列对应于所提出的检验，第二列对应于由 [11]导出的检验。观测值相互独立，其分布如下：当i为偶数时，X_{ki} 服从由$\mathbb{P}(X_{ki} = z) = \mathbb{P}(X_{ki} = -z) = \frac{45}{\pi^4 z^4}$给出的对称重尾分布，其中z为 $= \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots$；当i为奇数时，$\mathbb{P}(X_{ki} = \pm 2) = 0.3$且 $\mathbb{P}(X_{ki} = \pm 1) = 0.2$。

	$\alpha = 0$		$\alpha = 1$		$\alpha = 2$	
(n, p)	Ours	[11]	Ours	[11]	Ours	[11]
(49, 7)	0.06	0.56	0.808	0.764	0.862	0.72
(100, 10)	0.058	0.72	0.992	0.81	0.994	0.78
(900, 30)	0.054	0.77	1	0.812	1	0.88

4. 技术细节

4.1. 定理1的证明

由于 $\mathbb{T}$ 的元素是 U 统计量，其渐近行为由 Hoeffding投影决定（详见 Bose 和 Chatterjee [27] ）。正如我们将要证明的，一阶投影已足以满足我们的目的。我们将 $\mathbb{T}$分解为 $\mathbb{T} = \mathbb{T}_1 + \mathbb{T}_2$，其中 $\mathbb{T}_1$ 的元素基本上对应于一阶投影，而 $\mathbb{T}_2$ 则表示余项。我们将证明， $\mathbb{T}_2$ 这一项是可忽略的，即它不会影响极限谱分布（LSD）。因此，在进行适当的中心化和缩放之后， $\mathbb{T}$ 与 $\mathbb{T}_1$ 的极限谱分布（LSDs）是相同的。

4.1.1. $\mathbb{T}$的 Hoeffding分解

令 $X_i = (X_{1i}, X_{2i}, \ldots, X_{pi})'$ 对所有 $1 \le i \le n$ 均成立。根据假设 1，对于 $1 \le k, l \le p$ 和 $1 \le i, j \le n$，有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(h((X_{ki}, X_{li}), (X_{kj}, X_{lj}))|\boldsymbol{X}_i) &= \mathbb{E}(\mathrm{Sign}(X_{ki} - X_{kj})|\boldsymbol{X}_i)\mathbb{E}(\mathrm{Sign}(X_{li} - X_{lj})|\boldsymbol{X}_i) = Y_{k,i,j}Y_{l,i,j}, \\ \mathbb{E}(h((X_{ki}, X_{li}), (X_{kj}, X_{lj}))|\boldsymbol{X}_j) &= \mathbb{E}(\mathrm{Sign}(X_{ki} - X_{kj})|\boldsymbol{X}_j)\mathbb{E}(\mathrm{Sign}(X_{li} - X_{lj})|\boldsymbol{X}_j) = Y_{k,j,i}Y_{l,j,i}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\text{Note that} \quad \sum_{i,j\in[n],i\neq j} Y_{k,i,j}Y_{l,i,j} = \sum_{i,j\in[n],i\neq j} Y_{k,j,i}Y_{l,j,i} = \sum_{i,j\in[n]} Y_{k,i,j}Y_{l,i,j} - \sum_{i\in[n]} Y_{k,i,i}Y_{l,i,i}.$$

对于 k, l ∈ [p], , 定义

$$G_{kl} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j\in[n]} Y_{k,i,j}Y_{l,i,j}, \quad \text{and} \quad F_{kl} = \begin{cases} \dfrac{1}{n(n-1)} \sum_{i\in[n]} Y_{k,i,i}Y_{l,i,i}, & \text{if } k \neq l, \\ 0 \ \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4.2}$$

令 $\mathbb{G}$ 和 $\mathbb{F}$ 分别为其第 (k,l) 个元素为 G_{kl} 和 F_{kl} 的矩阵。令 $\mathbb{G}^0$ 为一个对角矩阵，其第 k 个对角元素为

$$\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j\in[n]} \mathbb{E}(Y_{k,i,j}^2) = \mathbb{E}(G_{kk}).$$

对于 $1 \le k, l \le p$ 和 $1 \le i, j \le n$，定义

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{kl}(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_j) &= h((X_{ki}, X_{li}), (X_{kj}, X_{lj})) - Y_{k,i,j}Y_{l,i,j} - Y_{k,j,i}Y_{l,j,i} \quad \text{and} \\ H_{kl} &= \begin{cases} \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1\le i\neq j\le n} \tilde{H}_{kl}(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_j), & \text{if } k \neq l, \\ 0, \ \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

令 $\mathbb{H}$ 为其第 (k, l) 个元素为 H_{kl} 的矩阵，并令 I_p 为 p 阶单位矩阵。
因此，我们可以写成 $pnp^{-1}(\mathbb{T} - D(\mathbb{T})) = \mathbb{T}_1 + \mathbb{T}_2$，其中

$$\mathbb{T}_1 = 2\sqrt{np^{-1}}(\mathbb{G} - g_1\boldsymbol{I}_p), \quad \text{and} \quad \mathbb{T}_2 = \sqrt{np^{-1}}(-2\mathbb{F} + \mathbb{H} - 2(D(\mathbb{G}) - \mathbb{G}^0) - 2(\mathbb{G}^0 - g_1\boldsymbol{I}_p)). \tag{4.3}$$

4.1.2. $\mathbb{T}_2$的可忽略性
为了证明 $\nu^{\sqrt{np^{-1}}(\mathbb{T}-D(\mathbb{T}))}$ 与 $\nu^{\mathbb{T}_1}$ 之间的 Lévy 距离几乎必然收敛到 0，我们使用引理 1，该引理引自 [1]的推论 A.41。令 $L(\nu^{\mathbb{A}}, \nu^{\mathbb{B}})$ 表示 $\nu^{\mathbb{A}}$ 与 $\nu^{\mathbb{B}}$之间的 Lévy 距离。对于两个序列 $\{a_n : n \ge 1\}$和 $\{b_n : n \ge 1\}$，$a_n \lesssim b_n$ 表示存在某个不依赖于 n 的 $C > 0$，使得对所有 $n \ge 1$，$a_n \le Cb_n$。

引理 1. 设 $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{B}$ 是 $p \times p$ 阶对称矩阵。则 $(L(\nu^{\mathbb{A}}, \nu^{\mathbb{B}}))^3 \le p^{-1}\text{Trace}(\mathbb{A} - \mathbb{B})^2$。

要证明 $\mathbb{T}_2$ 可以忽略，根据引理 1，只需证明

$$np^{-2}\text{Trace}(2\mathbb{F} - \mathbb{H} + 2D(\mathbb{G}) - 2g_1\boldsymbol{I}_p)^2 \to 0 \ \text{almost surely as } p/n \to 0. \tag{4.4}$$

注意，$np^{-2}\text{Trace}(2\mathbb{F} + 2D(\mathbb{G}) - 2g_1I_p - \mathbb{H})^2$

$$\lesssim \ np^{-2}\text{Trace}(\mathbb{F}^2) + np^{-2}\text{Trace}((D(\mathbb{G}) - \mathbb{G}^0)^2) + np^{-2}\text{Trace}(\mathbb{H}^2) + np^{-2}\text{Trace}(\mathbb{G}^0 - g_1\boldsymbol{I}_p)^2 = A + B + C + D, \text{ say.}$$

现在证明这些项中的每一项都几乎必然趋于 0。

证明 $A \to 0$ 几乎必然成立。定义

$K_1 = \{(k_1,k_2,k_3,k_4) : \ 1 \le k_1 \neq k_2, k_3 \neq k_4 \le p\}$, $I_1 = \{\{(i_1, j_1), (i_2, j_2), (i_3, j_3), (i_4, j_4)\} : \ 1 \le i_r, j_r \le n, \ 1 \le r \le 4\}$。
因此，

$$\frac{\mathbb{E}(\text{Trace}(\mathbb{H}^2))^2}{(n(n-1))^{-4}} = \sum_{(k_1,k_2,k_3,k_4)\in K_1} \mathbb{E}(H_{k_1k_2}^2 H_{k_3,k_4}^2) = \sum_{K_1,I_1} \mathbb{E}(\tilde{H}_{k_1k_2}(\boldsymbol{X}_{i_1}, \boldsymbol{X}_{j_1})\tilde{H}_{k_1k_2}(\boldsymbol{X}_{i_2}, \boldsymbol{X}_{j_2})\tilde{H}_{k_3k_4}(\boldsymbol{X}_{i_3}, \boldsymbol{X}_{j_3})\tilde{H}_{k_3k_4}(\boldsymbol{X}_{i_4}, \boldsymbol{X}_{j_4})).$$

注意，对所有 $1 \le k, l \le p$ 和 $1 \le i, j \le n$，由假设1和假设2，我们有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\text{Sign}(X_{ki} - X_{kj})) &= \mathbb{P}(X_{ki} > X_{kj}) - \mathbb{P}(X_{ki} < X_{kj}) = 0, \ \text{by Assumption 2,} && (4.5) \\ \mathbb{E}(h((X_{ki}, X_{li}), (X_{kj}, X_{lj}))) &= \mathbb{E}(\text{Sign}(X_{ki} - X_{kj}))\mathbb{E}(\text{Sign}(X_{li} - X_{lj})) = 0, \ \text{by Assumption 1 and (4.5),} && \\ \mathbb{E}(Y_{k,i,j}) &= \mathbb{E}(\text{Sign}(X_{ki} - X_{kj})) = 0, \ \text{by (4.5),} && (4.6) \\ \mathbb{E}(Y_{k,i,j}Y_{l,i,j}) &= \mathbb{E}(Y_{k,i,j})\mathbb{E}(Y_{l,i,j}) = 0, \ \text{by Assumption 1 and (4.6).} && (4.7) \end{aligned}$$

因此，由(4.6)和(4.7)，我们有

$$\mathbb{E}(\tilde{H}_{kl}(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_j)) = \mathbb{E}(h((X_{ki}, X_{li}), (X_{kj}, X_{lj})) - Y_{k,i,j}Y_{l,i,j} - Y_{k,j,i}Y_{l,j,i}) = 0. \tag{4.8}$$

利用公式（4.8），我们可以得出结论：如果存在至少一个 $s \in \{1,2,3,4\}$，使得 i_s 的值和 j_s 的值均未在 $\cup_{w=1,w\neq s}^{4}\{i_w, j_w\}$ 中重复出现，那么

$$\mathbb{E}(\tilde{H}_{k_1k_2}(\boldsymbol{X}_{i_1}, \boldsymbol{X}_{j_1})\tilde{H}_{k_1k_2}(\boldsymbol{X}_{i_2}, \boldsymbol{X}_{j_2})\tilde{H}_{k_3k_4}(\boldsymbol{X}_{i_3}, \boldsymbol{X}_{j_3})\tilde{H}_{k_3k_4}(\boldsymbol{X}_{i_4}, \boldsymbol{X}_{j_4})) = 0. \tag{4.9}$$

设 $\tilde{Z}$ 是一个与 X_{kj} 和 X_{lj} 独立的随机变量。那么

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\tilde{H}_{kl}(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_j)\tilde{Z}) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\tilde{H}_{kl}(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_j)|\boldsymbol{X}_i)\mathbb{E}(\tilde{Z}|\boldsymbol{X}_i)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}((h((X_{ki}, X_{li}), (X_{kj}, X_{lj})) - Y_{k,i,j}Y_{l,i,j} - Y_{k,j,i}Y_{l,j,i})|X_i)\mathbb{E}(\tilde{Z}|\boldsymbol{X}_i)) \\ &= \mathbb{E}((\mathbb{E}(h((X_{ki}, X_{li}), (X_{kj}, X_{lj}))|\boldsymbol{X}_i) - Y_{k,i,j}Y_{l,i,j} - \mathbb{E}(Y_{k,j,i}Y_{l,j,i}))\mathbb{E}(\tilde{Z}|\boldsymbol{X}_i)) = 0, \text{ by (4.1) and (4.7)}\end{aligned} \tag{4.10}$$

对于 $1 \le i, j \le n$ 和 $1 \le k, l \le p$。第三个等号成立，是因为 $Y_{k,i,j}$ 是 X_{ki} 的函数，因此 $\mathbb{E}(Y_{k,i,j}Y_{l,i,j}|X_i) = Y_{k,i,j}Y_{l,i,j}$，且 $\mathbb{E}(Y_{k,j,i}Y_{l,j,i}|X_i) = \mathbb{E}(Y_{k,j,i}Y_{l,j,i})$ 几乎必然成立。

由公式（4.10）可知，如果存在至少一个 $s \in \{1,2,3,4\}$，使得 i_s 的值或 j_s 的值在 $\cup_{w=1,w\neq s}^{4}\{i_w, j_w\}$ 中没有重复出现，那么

$$\mathbb{E}(\tilde{H}_{k_1k_2}(\boldsymbol{X}_{i_1}, \boldsymbol{X}_{j_1})\tilde{H}_{k_1k_2}(\boldsymbol{X}_{i_2}, \boldsymbol{X}_{j_2})\tilde{H}_{k_3k_4}(\boldsymbol{X}_{i_3}, \boldsymbol{X}_{j_3})\tilde{H}_{k_3k_4}(\boldsymbol{X}_{i_4}, \boldsymbol{X}_{j_4})) = 0. \tag{4.11}$$

令 $I_2 = \{\{(i_1, j_1), (i_2, j_2), (i_3, j_3), (i_4, j_4)\} \in I_1 : |\{i_1, j_1, i_2, j_2, i_3, j_3, i_4, j_4\}| \le 4\}$。由（4.5），我们有

$$\begin{aligned} n^2p^{-2}\mathbb{E}(\mathrm{Trace}(\mathbb{H}^2))^2 &= n^2p^{-2}(n(n-1))^{-4}(T_1 + T_2) \quad \text{where} \\ T_1 &= \sum_{K_1,\, I_2} \mathbb{E}(\tilde{H}_{k_1k_2}(\boldsymbol{X}_{i_1}, \boldsymbol{X}_{j_1})\tilde{H}_{k_1k_2}(\boldsymbol{X}_{i_2}, \boldsymbol{X}_{j_2})\tilde{H}_{k_3k_4}(\boldsymbol{X}_{i_3}, \boldsymbol{X}_{j_3})\tilde{H}_{k_3k_4}(\boldsymbol{X}_{i_4}, \boldsymbol{X}_{j_4})), \\ T_2 &= \sum_{K_1,\, I_1\setminus I_2} \mathbb{E}(\tilde{H}_{k_1k_2}(\boldsymbol{X}_{i_1}, \boldsymbol{X}_{j_1})\tilde{H}_{k_1k_2}(\boldsymbol{X}_{i_2}, \boldsymbol{X}_{j_2})\tilde{H}_{k_3k_4}(\boldsymbol{X}_{i_3}, \boldsymbol{X}_{j_3})\tilde{H}_{k_3k_4}(\boldsymbol{X}_{i_4}, \boldsymbol{X}_{j_4})). \end{aligned} \tag{4.12}$$

公式（4.9）和（4.11）显然蕴含 $T_2 = 0$，因此

$$n^2p^{-2}\mathbb{E}(\mathrm{Trace}(\mathbb{H}^2))^2 = n^2p^{-2}(n(n-1))^{-4}T_1. \tag{4.13}$$

此外，由于对所有 $k, l \in [p]$ 以及 $i, j \in [n]$，$H_{kl}(X_i, X_j)$ 均有界，我们显然有

$$T_1 = O(n^4p^4). \tag{4.14}$$

公式（4.13）和（4.14）共同蕴含 $\mathbb{E}(np^{-1}\text{迹}(\mathbb{H}^2))^2 = O((p/n)^2)$。当 $p/n \to 0$ 时，我们有 $\mathbb{E}((np^{-2}\text{迹}(\mathbb{H}^2))^2 \le Cp^{-2}$，对某个 $C > 0$。这就完成了 $A \to 0$ 几乎必然的证明。

$B \to 0$ 几乎必然的证明。定义 $I_3 = \{(i_1, i_2, i_3, i_4) : i_s \in [n], 1 \le s \le 4\}$。因此，

$$(n(n-1))^4\mathbb{E}(\mathrm{Trace}(\mathbb{F}^2))^2 = \sum_{K_1,\, I_3} \mathbb{E}(Y_{k_1,i_1,i_1}Y_{k_2,i_1,i_1}Y_{k_1,i_2,i_2}Y_{k_2,i_2,i_2}Y_{k_3,i_3,i_3}Y_{k_4,i_3,i_3}Y_{k_3,i_4,i_4}Y_{k_4,i_4,i_4}). \tag{4.15}$$

作为 $Y_{k,i,j}$ 对所有 $k \in [p]$, 以及 $i, j \in [n]$，由 (4.15) 知其有界，于是有 $\mathbb{E}(np^{-1}\text{迹}(\mathbb{F}^2))^2 = O((p/n)^2)$，并且 hence

$$\mathbb{E}((np^{-2}\mathrm{Trace}(\mathbb{F}^2))^2 \le Cp^{-2} \text{ for some } C > 0. \tag{4.16}$$

至此完成了 $B \to 0$ 几乎必然的证明。

C 几乎必然成立的证明。令 $\tilde{Y}_{k,i,j} = Y_{k,i,j}^2 - \mathbb{E}(Y_{k,i,j}^2)$。则由 (4.2)，$(n(n-1))^4\mathbb{E}(\text{迹}((D(\mathbb{G}) - \mathbb{G}^0)^2))^2$ 等于

$$= \sum_{k_1,k_2=1}^{p} \sum_{\substack{(i_1,i_2,i_3,i_4)\in I_3 \\ (j_1,j_2,j_3,j_4)\in I_3}} \mathbb{E}(\tilde{Y}_{k_1,i_1,j_1}\tilde{Y}_{k_1,i_2,j_2}\tilde{Y}_{k_2,i_3,j_3}\tilde{Y}_{k_2,i_4,j_4}). \tag{4.17}$$

˜由于对所有 k ∈ [p] 和 i, j ∈ [n], , 若 $\mathbb{E}(Y_{k,i,j}) = 0$ 中至少存在一个 s ∈ {1, 2, 3, 4}，使得值 i_s 在 $\{i_w$ 中不重复： $1 \le w \le 4, w, s\}$，则显然有

$$\mathbb{E}(\tilde{Y}_{k_1,i_1,j_1}\tilde{Y}_{k_1,i_2,j_2}\tilde{Y}_{k_2,i_3,j_3}\tilde{Y}_{k_2,i_4,j_4}) = 0. \tag{4.18}$$

令 $I_4 = \{(i_1,i_2,i_3,i_4) \in I_3 : \ |\{(i_1,i_2,i_3,i_4\}| \le 2\}$。于是根据（4.17），有

$$(n(n-1))^4\mathbb{E}(\mathrm{Trace}((D(\mathbb{G}) - \mathbb{G}^0)^2))^2 = T_3 + T_4, \tag{4.19}$$

其中

$$T_3 = \sum_{k_1,k_2=1}^{p} \sum_{\substack{(j_1,j_2,j_3,j_4)\in I_3 \\ (i_1,i_2,i_3,i_4)\in I_4}} \mathbb{E}(\tilde{Y}_{k_1,i_1,j_1}\tilde{Y}_{k_1,i_2,j_2}\tilde{Y}_{k_2,i_3,j_3}\tilde{Y}_{k_2,i_4,j_4}), \quad T_4 = \sum_{k_1,k_2=1}^{p} \sum_{\substack{(j_1,j_2,j_3,j_4)\in I_3 \\ (i_1,i_2,i_3,i_4)\in I_3\setminus I_4}} \mathbb{E}(\tilde{Y}_{k_1,i_1,j_1}\tilde{Y}_{k_1,i_2,j_2}\tilde{Y}_{k_2,i_3,j_3}\tilde{Y}_{k_2,i_4,j_4}).$$

方程（4.18）意味着 $T_4 = 0$，因此

$$(n(n-1))^4\mathbb{E}(\mathrm{Trace}((D(\mathbb{G}) - \mathbb{G}^0)^2))^2 = T_3. \tag{4.20}$$

此外，由于对于所有 k ∈ [p] 以及 i、j ∈ [n], , $Y_{k,\ i,\ j}$ 都有界，因此有

$$T_3 = O(p^2n^6). \tag{4.21}$$

方程（4.20）和（4.21）意味着 $\mathbb{E}(np^{-1}\mathrm{Trace}((D(\mathbb{G}) - \mathbb{G}^0)^2))^2 = O(1)$，并且由于 $p/n \to 0$， $\mathbb{E}(np^{-2}\mathrm{Trace}((D(\mathbb{G}) - \mathbb{G}^0)^2))^2 \le Cp^{-2}$，其中某个 $C > 0$。这就完成了 $C \to 0$ 几乎必然成立的证明。

$D \to 0$ 几乎必然成立的证明。注意，$np^{-2}\mathrm{Trace}(\mathbb{G}^0 - g_1I_p)^2 = np^{-2}\mathrm{Trace}((\mathbb{G}^0)^2) + np^{-1}g_1^2 - 2g_1np^{-2}\mathrm{Trace}(\mathbb{G}^0)$。此外，根据假设 3，有

$$\frac{n}{p^2}\mathrm{Trace}(\mathbb{G}^0) = \frac{n}{p^2}\sum_{k=1}^{p}\mathbb{E}(\mathbb{G}_{kk}) = \frac{(n(n-1))^{-1}n}{p^2}\sum_{k=1}^{p}\sum_{i,j\in[n]}\mathbb{E}(Y_{k,i,j}^2) = \frac{(n(n-1))^{-1}n}{p^2}\sum_{k=1}^{p}\sum_{i\in[n]}\mathrm{Trace}(\mathbb{G}_{k,i}) = (n/p)g_1 + o(1).$$

接下来，

$$\begin{aligned}
\frac{n}{p^2}\mathrm{Trace}(\mathbb{G}^0)^2 &= \frac{n}{p^2}\sum_{k=1}^{p}(\mathbb{E}(\mathbb{G}_{kk}))^2 = \frac{(n(n-1))^{-2}n}{p^2}\sum_{k=1}^{p}\sum_{i_1,j_1,i_2,j_2\in[n]}\mathbb{E}(Y_{k,i_1,j_1}^2)\mathbb{E}(Y_{k,i_2,j_2}^2) \\
&= \frac{(n(n-1))^{-2}n}{p^2}\sum_{k=1}^{p}\sum_{i_1,i_2\in[n]}\mathrm{Trace}(\mathbb{G}_{k,i_1})\mathrm{Trace}(\mathbb{G}_{k,i_2}) = \frac{n^3}{(n(n-1))^2}\frac{n^2}{p^2}\sum_{k=1}^{p}\Big(n^{-2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Trace}(\mathbb{G}_{k,i})\Big)^2 = T_7 + T_8 + T_9 \\
&= \frac{n^3}{(n(n-1))^2}\frac{n^2}{p^2}\sum_{k=1}^{p}\Big(n^{-2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Trace}(\mathbb{G}_{k,i}) - g_1\Big)\Big(n^{-2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Trace}(\mathbb{G}_{k,i})\Big) + g_1\frac{n^3}{(n(n-1))^2}\frac{n^2}{p^2}\sum_{k=1}^{p}\Big(n^{-2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Trace}(\mathbb{G}_{k,i})\Big) \\
&= O\left((n/p^2)\sum_{k=1}^{p}\Big(n^{-2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Trace}(\mathbb{G}_{k,i}) - g_1\Big)\right) + g_1O\left((np^2)^{-1}\sum_{k=1}^{p}\sum_{i\in[n]}\mathrm{Trace}(\mathbb{G}_{k,i})\right) \\
&= O\Big[(n/p)\left(p^{-1}n^{-2}\sum_{k=1}^{p}\sum_{i\in[n]}\mathrm{Trace}(\mathbb{G}_{k,i}) - g_1\right)\Big] + (n/p)g_1^2 + o(1) = (n/p)g_1^2 + o(1).
\end{aligned}$$

因此 np^{-2}迹$(\mathbb{G}^0 - g_1I_p)^2 \to 0$。这就完成了 $D \to 0$ 几乎必然的证明。

4.1.3. $\mathbb{T}_1$的极限谱分布

以下 该引理用于建立经过适当中心化和缩放的 $\mathbb{T}_1$ 的极限谱分布，并对其进行识别 n.

引理 2。（Bose *[28]* 中的引理 1.2.4）设 $\{\mathbb{A}_p:\ p \geq 1\}$ 是一列实对称随机矩阵。假设

(c1) 对所有 $R \geq 1$, $p^{-1}\mathbb{E}\mathrm{Trace}(\mathbb{A}_p^R) \to \lambda_R$；

(c2) 对所有 $R \geq 1$, $\mathbb{E}(p^{-1}\mathrm{Trace}(\mathbb{A}_p^R) - p^{-1}\mathbb{E}\mathrm{Trace}(\mathbb{A}_p^R))^4 = O(p^{-2})$;

(c3) 矩序列 $\{\lambda_R:\ R \geq 1\}$ 满足 $\sum_{R=1}^{\infty} \lambda_2^{-1/2R}\ R = \infty$ （Carleman 条件），因此确定唯一的概率分布。

那么， $\nu^{\mathbb{A}_p}$ 几乎必然收敛到由矩序列 $\{\lambda_R\}$确定的分布。

现在将引理 2 应用于矩阵序列 $\mathbb{T}_1$，以确定极限谱分布。本节中，我们分别验证 $\mathbb{T}_1$ 满足条件 (c1) 和 (c2)。半圆变量的矩很容易验证满足条件 (c3)。由此得到定理 2。

$\mathbb{T}_1$满足条件 (c1) 的验证。以下引理直接推出 $\mathbb{T}_1$ 满足条件 (c1)。

引理 3. 设假设 1、2、G1 和 G2 成立，且 n、$p \to \infty$，$p/n \to 0$。则对所有 $R \geq 1$，$\lim p^{-1}\mathbb{E}$迹$((pn/p\ (\mathbb{G} - g_1 I_p))^{2R-1}) = 0$ 且 $\lim p^{-1}\mathbb{E}$迹$((pn/p\ (\mathbb{G} - g_1 I_p))^{2R}) = P_{\pi \in NC_2(2R)}\, g_{2\pi}$。

引理 3 的证明：对任意正整数 R，令 σ_R 表示作用在 $\{1, 2, \ldots\ldots R\}$ 上的循环置换，使得$\sigma_R(r) = r + 1$，$1 \leq r \leq R - 1$，且 $\sigma_R(R) = 1$。现在 $p^{-1}\mathbb{E}$[迹$(pnp^{-1}(\mathbb{G} - g_1 I_p))^R$] 等于

$$\frac{n^{R/2}}{p^{(R/2)+1}} \sum_{\substack{k_r \in [p] \\ r \in [R]}} \mathbb{E}[\prod_{r \in [R]} (G_{k_r, k_{\sigma_R(r)}} - g_1 \delta_{k_r, k_{\sigma_R(r)}})] = \frac{n^{R/2}}{p^{(R/2)+1}(n(n-1))^R} \sum_{\substack{k_r \in [p] \\ r \in [R]}} \mathbb{E}\Big[\prod_{r \in [R]} \sum_{i_r, j_r \in [n]} (Y_{k_r, i_r, j_r} Y_{k_{\sigma_R(r)}, i_r, j_r} - g_1 \delta_{k_r, k_{\sigma_R(r)}})\Big]$$

$$= \frac{n^{R/2}}{p^{(R/2)+1}(n(n-1))^R} \sum_{\substack{k_r \in [p] \\ r \in [R]}} \sum_{\substack{i_r, j_r \in [n] \\ r \in [R]}} \mathbb{E}\Big[\prod_{r \in [R]} (Y_{k_r, i_r, j_r} Y_{k_{\sigma_R(r)}, i_r, j_r} - g_1 \delta_{k_r, k_{\sigma_R(r)}})\Big]. \tag{4.22}$$

考虑 k 指标 $K = \{k_r : r \in [R]\}$ 和 i 指标 $I = \{i_r : r \in [R]\}$ 之间的连通二分图，其边集合为 $E = \{(k_{r+\epsilon_r}, i_r) : r \in [R], \varrho = 0, 1\}$。E 中的单条边不能孤立出现。假设存在边 $(k_{q+\epsilon}, i_q) \in E$，对于某个 q 和 $\varrho = 0, 1$，该边与 E 中其他任何边都不匹配。那么显然 $k_{q+\epsilon}$, $k_{q+1-\epsilon}$，且 (4.22) 可简化为

$$\frac{n^{R/2}}{p^{(R/2)+1}(n(n-1))^R} \sum_{\substack{k_r \in [p] \\ r \in [R]}} \sum_{\substack{i_r, j_r \in [n] \\ r \in [R]}} \mathbb{E}(Y_{k_{q+\epsilon}, i_q, j_q}) \mathbb{E}\Big[Y_{k_{q+1-\epsilon}, i_q, j_q} \prod_{\substack{r \in [R] \\ r \neq q}} (Y_{k_r, i_r, j_r} Y_{k_{\sigma_R(r)}, i_r, j_r} - g_1 \delta_{k_r, k_{\sigma_R(r)}})\Big]$$

其值为 0，因为根据假设1和假设2，$\mathbb{E}(Y_{k_r,\ i_r、\ j_r}) = 0$。这意味着，只要 E 中存在孤立边，(4.22) 的值就是 0。因此，只需考虑至少重复出现两次的边。此类不同边至多有 R 条，并且由于该图是连通的，我们有

$$|K| + |I| \leq |E| + 1 = R + 1, \tag{4.23}$$

$$p^{-1}\mathbb{E}[\mathrm{Trace}(\sqrt{np^{-1}}(\mathbb{G} - g_1 \boldsymbol{I}_p))^R] = \frac{p^{-((R/2)+1)} n^{R/2}}{(n(n-1))^R} \sum_{\substack{K, I \\ |E| \leq R}} \sum_{\substack{j_r \in [n] \\ r \in [R]}} \Big(\prod_{r \in [R]} (Y_{k_r, i_r, j_r} Y_{k_{\sigma_R(r)}, i_r, j_r} - g_1 \delta_{k_r, k_{\sigma_R(r)}})\Big). \tag{4.24}$$

另请注意，由（4.23）可得

$$p^{-1}\mathbb{E}[\mathrm{Trace}(\sqrt{np^{-1}}(\mathbb{G} - g_1 \boldsymbol{I}_p))^R] \lesssim O((p/n)^{((R/2)-|I|)}). \tag{4.25}$$

由于 $p/n \to 0$ 趋于 p，$n \to \infty$趋于无穷大，对于 (4.24) 中的任意一种贡献，必须满足：$|K| = (R/2) + 1$，$|I| = (R/2)$。这意味着，要使 (4.24) 有贡献，不仅必须满足对 |K|、|I| 的限制，还必须满足

不同边的数量 |E| 恰好等于 R。这意味着每条边恰好重复两次。令 $P_2(2R)$ 为 $\{1, 2, ...2R\}$的所有配对划分构成的集合。容易验证，对于满足 $|K| + |I| = R + 1$ 的所有连通二分图，其集合与 $P_2(2R)$ 之间存在双射。令 K_π 和 I_π 分别为由 $\pi \in P_2(2R)$ 诱导出的不同 k 指标和 i 指标的集合。

$$p^{-1}\mathbb{E}[\text{Trace}(\sqrt{np^{-1}}(\mathbb{G} - g_1\boldsymbol{I}_p))^R] = \frac{p^{-((R/2)+1)}n^{R/2}}{(n(n-1))^R}\sum_{\pi\in P_2(2R)}\sum_{\substack{K_\pi, I_\pi \\ j_r\in[n], r\in[R]}}\mathbb{E}\Big(\prod_{r\in[R]}(Y_{k_r,i_r,j_r}Y_{k_{\sigma_R(r)},i_r,j_r} - g_1\delta_{k_r,k_{\sigma_R(r)}})\Big). \quad (4.26)$$

考虑存在至少一个类型为 $(k_l, i_l) = (k_{\sigma_R(l)}, i_l)$ 的边匹配的情形，其中某个 $l \in [R]$。不失一般性，假设 $l = 1$。那么，该匹配对 $p^{-1}\mathbb{E}[\text{迹}(pnp^{-1}(\mathbb{G} - g_1I_p))^R]$ 的贡献为

$$\Big|\sqrt{(n/p)}n^{-2}\sum_{k_1,i_1,j_1}\mathbb{E}(Y_{k_1,i_1,j_1}Y_{k_1,i_1,j_1} - g_1)p^{-1}\mathbb{E}\Big((\sqrt{np^{-1}}(\mathbb{G} - g_1\boldsymbol{I}_p))^{R-1}_{k_1,k_1}\Big)\Big|$$

$$= \Big|\sqrt{\frac{p}{n}}\sum_{k_1=1}^{p}\frac{n}{p}(n^{-2}\sum_{i_1=1}^{n}\text{Trace}(\mathbb{G}_{k_1,i_1}) - g_1)\frac{1}{p}\mathbb{E}\Big((\sqrt{\frac{n}{p}}(\mathbb{G} - g_1\boldsymbol{I}_p))^{R-1}_{k_1,k_1}\Big)\Big| \le \sqrt{np}\Big|\frac{1}{n^2p}\sum_{k_1=1}^{p}\sum_{i_1=1}^{n}\text{Trace}(\mathbb{G}_{k_1,i_1}) - g_1\Big| = o(1),$$

其中，$p^{-1}\mathbb{E}\Big((pnp^{-1}(\mathbb{G} - g_1I_p))^{R-1}{}_{k_1,k_1}\Big) = O(1)$ 的推导与方程 (4.25) 中的推理相同。这意味着渐近而言，类型为 $(k_l, i_l) = (k_{\sigma_R(l)}, i_l)$ 的匹配没有贡献，其中某个 $l \in [R]$。因此，分析中只考虑 [2R] 的其他非交叉配对划分和交叉划分。令 I(.) 表示指示函数，并令 $\zeta(r) = I(r \text{ 为偶数})$。因此，(4.26) 可改写为

$$\frac{p^{-((R/2)+1)}n^{R/2}}{(n(n-1))^R}\sum_{\pi\in P_2(2R)}\sum_{\substack{K_\pi, I_\pi \\ j_r\in[n], r\in[R]}}\Big(\prod_{(b,s)\in\pi}(G_{k_{\lceil b/2\rceil+\zeta(b)},i_{\lceil b/2\rceil}}(j_{\lceil b/2\rceil}, j_{\lceil s/2\rceil}))\delta_{k_{\lceil b/2\rceil+\zeta(b)},k_{\lceil s/2\rceil+\zeta(s)}}\delta_{i_{\lceil b/2\rceil}i_{\lceil s/2\rceil}}\Big)$$

设 $NC_2(2R)$ 为 [2R] 的所有非交叉配对划分构成的集合。类似于 Bose [28], 中定理 2.1.3 的论证，可以证明上述项对 $P_2(2R)/NC_2(2R)$ 的贡献在极限下为 0。这意味着全部贡献均来自 2R 的非交叉配对划分，即 $NC_2(2R)$。因此，$p^{-1}\mathbb{E}[\text{迹}(pnp^{-1}(\mathbb{G} - \gamma_1I_p))^R]$ 等于

$$\frac{p^{-((R/2)+1)}}{n^{3R/2}}\sum_{\pi\in NC_2(2R)}\sum_{\substack{K_\pi, I_\pi \\ j_r\in[n], r\in[R]}}\Big(\prod_{(b,s)\in\pi}(\mathbb{G}_{k_{\lceil b/2\rceil+\zeta(b)},i_{\lceil b/2\rceil}}(j_{\lceil b/2\rceil}, j_{\lceil s/2\rceil}))\delta_{k_{\lceil b/2\rceil+\zeta(b)},k_{\lceil s/2\rceil+\zeta(s)}}\delta_{i_{\lceil b/2\rceil}i_{\lceil s/2\rceil}}\Big) + o(1). \quad (4.27)$$

接下来，观察关于 I 的元素的以下事实。

(a) 指标 i_r 的取值在 I 中对所有 $r \in [R]$ 必须至少重复两次。(b) $|I| = R/2$（由 (4.25)）。

(c) 仅由 [2R] 的非交叉配对划分得到的项有贡献。

事实 (b) 清楚地表明，若 R 为奇数，则 $p^{-1}\mathbb{E}[\text{迹}(pnp^{-1}(\mathbb{G} - \gamma_1I_p))^R] = o(1)$。因此，此后仅考虑 R 的偶数值。此外，(a)–(c) 共同在偶数 R 下诱导出 I 上的非交叉配对划分。设 $NC_2(I)$ 为 I 的所有非交叉配对划分构成的集合。则 $NC_2(2R)$ 连同 (a)–(c) 与 $NC_2(I)$ 之间存在双射 F，其中 $k_b = k_{\sigma_R(s)}$ 与 $k_s = k_{\sigma_R(b)}$ 对应于 $(i_b, i_s) \in \pi \in NC_2(I)$。

于是，(4.27) 化简为 $\lim p^{-1}\mathbb{E}[\text{迹}(pnp^{-1}(\mathbb{G} - g_1I_p))^R]$ 等于

$$\sum_{\pi\in NC_2(I)}\lim\frac{p^{-((R/2)+1)}}{n^{3R/2}}\sum_{K_{F^{-1}(\pi)}, I_{F^{-1}(\pi)}}\Big(\prod_{(i_b,i_s)\in\pi}((Y_{k_b,i_b,j_b}Y_{k_{\sigma_R(b)},i_b,j_b}Y_{k_{\sigma_R(s)},i_b,j_s}Y_{k_s,i_b,j_s})(\delta_{k_bk_{\sigma_R(s)}}\delta_{k_sk_{\sigma_R(b)}}\delta_{i_bi_s}))\Big). \quad (4.28)$$

注意，K 的元素的特定匹配 $\delta_{k_bk_{\sigma_R(s)}}\delta_{k_sk^{\sigma_R(b)}}$ 被视为交叉划分的 E 的元素没有贡献。根据 $\mathbb{G}_{k,i}$ 的定义，(4.28) 中的项化简为以下形式

$$\sum_{\pi\in NC_2(I)}\lim\frac{p^{-((R/2)+1)}}{n^{3R/2}}\sum_{K_{F^{-1}(\pi)},I_{F^{-1}(\pi)}}\sum_{\substack{j_r\in[n]\\ r\in[R]}}\Big(\prod_{(i_b,i_s)\in\pi}(\mathbb{G}_{k_b,i_b}(j_b,j_s)\mathbb{G}_{k_{\sigma_R(b)},i_b}(j_s,j_b))(\delta_{k_bk_{\sigma_R(s)}}\delta_{k_sk_{\sigma_R(b)}}\delta_{i_bi_s}))\Big)$$

$$=\sum_{\pi\in NC_2(I)}\lim\frac{p^{-((R/2)+1)}}{n^{3R/2}}\sum_{K_{F^{-1}(\pi)},I_{F^{-1}(\pi)}}\Big(\prod_{(i_b,i_s)\in\pi}(\mathrm{Trace}(\mathbb{G}_{k_b,i_b}\mathbb{G}_{k_{\sigma_R(b)},i_b})(\delta_{k_bk_{\sigma_R(s)}}\delta_{k_sk_{\sigma_R(b)}}\delta_{i_bi_s}))\Big)$$

$$=\sum_{\pi\in NC_2(I)}\lim\frac{p^{-((R/2)+1)}}{n^{3R/2}}\sum_{K_{F^{-1}(\pi)}}\Big(\prod_{(i_b,i_s)\in\pi}(\sum_{i_b}\mathrm{Trace}(\mathbb{G}_{k_b,i_b}\mathbb{G}_{k_{\sigma_R(b)},i_b})(\delta_{k_bk_{\sigma_R(s)}}\delta_{k_sk_{\sigma_R(b)}}\delta_{i_bi_s}))\Big)$$

$$=\sum_{\pi\in NC_2(I)}\lim(n^{-(R/2)}p^{-1})\sum_{K_{F^{-1}(\pi)}}\Big(\prod_{(i_b,i_s)\in\pi}(p^{-1}n^{-2}\sum_{i_b}\mathrm{Trace}(\mathbb{G}_{k_b,i_b}\mathbb{G}_{k_{\sigma_R(b)},i_b})(\delta_{k_bk_{\sigma_R(s)}}\delta_{k_sk_{\sigma_R(b)}}\delta_{i_bi_s}))\Big)=\sum_{\pi\in NC_2(I)}g_{2\pi}.$$

这证明了引理 3。

注释 13. 假设 $\{k_u:\ 1\le u\le R\}$ i 诱导出一个具有 B 个块的划分，而 $\{i_u:\ 1\le u\le R\}$ 诱导出一个具有 R_1 个块的划分。对于每个 $u\in 1,\ldots,R_1$ 以及 $v\in 1,\ldots,B$，令 f_{uv} 表示与第 u 个块对应的 i-指标和与第 v 个块相关联的 k-指标共同出现的频率。因此，鉴于每个 i-指标出现两次，$\sum_{v=1}^{B}\tilde{f}_{uv}$ 等于第 u 个块的基数的两倍。令 $f_{tu}=\sum_{v=1}^{B}\mathbb{I}(f_{uv}=t)$。于是，根据注释 4 中提到的 $\tilde{Y}_{ki}$ 的性质，并注意到 $\sum^{R_1}u=1\sum_{t=1}^{2R}tf_{tu}=2R$，对于该特定划分，我们有 $(n/p)^{R/2}p^{-1}$迹$(\tilde{G}^{IID}R)=O(p^{-R/2-1+B}n^{R/2+R_1-\sum_{u=1}^{R_1}[f_{1u}+\sum_{t=2}^{2R}f_{tu}(t/2)]})=O(p^{-R/2-1+B}n^{\sum_{u=1}^{R_1}[1-(1/2)f_{1u}-\sum_{t=2}^{2R}f_{tu}(t/4)]})$，只有当 $B=R/2+1$，且对所有 t、2 和 u 均有 $f_{2u}=2$、$f_{tu}=0$ 时，该项才有贡献，从而 $R_1=R/2$。显然，将 $\mathbb{G}_{k,i}$ 替换为 $n\mathbb{G}_{k,i}$ 后，这将引导我们得到 (4.27)。在此情况下，$\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y_{kl})$ 将被 1 替代。因此，(2.2) 对 $g_1=1$ 成立，并且假设 G2-a 得到满足，其中 Σ_p 的极限谱分布退化于 1。于是，仿照推论 2.1 的论证，并取退化于 1 的 a，$pn/p(\tilde{G}^{IID}-I_p)$ 的极限谱分布是标准半圆律。这与定理 2.5(1) 中给出的 (3/2) pn/p T 的极限谱分布一致，见 [11]。

验证 $\mathbb{T}_1$ 的 (c2)。令 $\Pi=$迹$(pnp^{-1}(\mathbb{G}-g_1\overline{I_p})^R$。则 $\mathbb{E}(\Pi-\mathbb{E}(\Pi))^4=A_1-4A_2A_4+6A_3A_4^2-3A_4^4$，其中 $A_i=\mathbb{E}(\Pi^{5-i})$ 对所有 $1\le i\le 4$ 均成立。注意

$$\begin{aligned}A_1&=\frac{n^{2R}}{p^{2R}}\sum_{\substack{k_{ur}\in[p],\\ r\in[R],\ u\in[4]}}\mathbb{E}\Big(\prod_{r\in[R],\ u\in[4]}(G_{k_{ur}k_{u\sigma_R(r)}}-g_1\delta_{k_{ur}k_{u\sigma_R}(r)})\Big)\\&=\frac{n^{2R}}{p^{2R}(n(n-1))^{4R}}\sum_{\substack{k_{ur}\in[p],\ i_{ur},j_{ur}\in[n]\\ r\in[R],\ u\in[4]}}\mathbb{E}\Big(\prod_{r\in[R],\ u\in[4]}(Y_{k_{ur},i_{ur},j_{ur}}Y_{k_{u\sigma_R(r)},i_{ur},j_{ur}}-\frac{(n(n-1))}{n^2}g_1\delta_{k_{ur}k_{u\sigma}(r)})\Big).\end{aligned}$$

设 $K_{u2}=\{k_{ur}:r\in[R]\}$，$I_{u5}=\{i_{ur}:r\in[R]\}$，且 $E_{u1}=\{(k_{u(r+\epsilon_r)},\ i_{ur}):r\in[R],\varrho_r=0,1\}$。考虑由不同的 k 指标 $\cup_{u\in[4]}K_{u2}$ 和 i 指标 $\cup_{u\in[4]}I_{u5}$ 构成的任意连通二分图，其边为 $\cup_{u\in[4]}E_{u1}$。令 E 为 $\cup_{u\in[4]}E_{u1}$ 的子集，其中每条边至少出现两次。对于 $\cup_{u\in[4]}E_{u1}$ 的任意子集 E，定义

$$A_{1E}=(n(n-1))^{-4R}\sum_{\substack{k_{ur}\in[p],\ i_{ur},\ j_{ur}\in[n]\\ r\in[R],\ u\in[4]}}\mathbb{E}\Big(\prod_{r\in[R],\ u\in[4]}Y_{k_{ur},i_{ur},j_{ur}}Y_{k_{u\sigma_R(r)},i_{ur},j_{ur}}\Big)\boldsymbol{I}(E).$$

显然，$A_{1(\cup_{u\in[4]}E_{u1}\setminus\tilde{E})}=0$，因此 $A_1=A_{1\tilde{E}}+A_{1(\cup_{u\in[4]}E_{u1}\setminus\tilde{E})}=A_{1\tilde{E}}$。现在考虑 E 的以下子集：

$$\begin{aligned}\tilde{E}_1&=\text{set of all edges in }\tilde{E}\text{ where }E_{u1}\text{'s are disconnected for all }u\in[4],\\ \tilde{E}_{2,((s_1,s_2),s_3,s_4)}&=\text{set of all edges in }\tilde{E}\setminus\tilde{E}_1\text{ where }E_{s_11}\cup E_{s_21},E_{s_31}\text{ and }E_{s_41}\\&\quad\text{are disconnected for all }s_1\ne s_2\ne s_3\ne s_4,\\ \tilde{E}_2&=\tilde{E}_{2,((1,2),3,4)}\cup\tilde{E}_{2,((1,3),2,4)}\cup\tilde{E}_{2,((1,4),2,3)}\cup\tilde{E}_{2,((2,3),1,4)}\cup\tilde{E}_{2,((2,4),1,3)}\cup\tilde{E}_{2,((3,4),1,2)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{E}_{13,((s_1,s_2,s_3),s_4)} &= \text{set of all edges in } \tilde{E}\setminus(\tilde{E}_1\cup\tilde{E}_2) \text{ where } E_{s_11}\cup E_{s_21}\cup E_{s_31} \text{ and } E_{s_41}\\
&\quad \text{are disconnected for all } s_1\neq s_2\neq s_3\neq s_4,\\
\tilde{E}_3 &= \tilde{E}_{3,((1,2,3),4)}\cup\tilde{E}_{3,((1,2,4),3)}\cup\tilde{E}_{3,((1,3,4),2)}\cup\tilde{E}_{3,((2,3,4),1)},\\
\tilde{E}_{3,((s_1,s_2),(s_3,s_4)} &= \text{set of all edges in } \tilde{E}\setminus(\tilde{E}_1\cup\tilde{E}_2\cup\tilde{E}_3) \text{ where } E_{s_11}\cup E_{s_21} \text{ and } E_{s_31}\cup E_{s_41}\\
&\quad \text{are disconnected for all } s_1\neq s_2\neq s_3\neq s_4,\\
\tilde{E}_4 &= \tilde{E}_{4,((1,2),(3,4))}\cup\tilde{E}_{4,((1,3),(2,4))}\cup\tilde{E}_{4,((1,4),(2,3))},\\
\tilde{E}_5 &= \text{set of all edges in } \tilde{E} \text{ where } E_{u1}\text{'s are all connected for } u\in[4].
\end{aligned}
$$

注意到 $\tilde{E}=\cup_{s=1}^5\tilde{E}_s$，且 $A_1=A_1\tilde{E}=P_{s=1}^5A_1\tilde{E}_s$，$A_1\tilde{E}2_{,((1,2),3,4)}=A_1\tilde{E}2_{,((1,3),2,4)}=A_1\tilde{E}2_{,((1,4),2,3)}=A_1\tilde{E}2_{,((2,3),1,4)}=A_1\tilde{E}2_{,((2,4),1,3)}=A_1\tilde{E}2_{,((3,4),1,2)}$，$A_1\tilde{E}3_{,((1,2,3),4)}=A\tilde{E}3_{,((1,2,4),3)}=A\tilde{E}3_{,((1,3,4),2)}=A\tilde{E}3_{,((2,3,4),1)}$，$A_1\tilde{E}4_{,((1,2),(3,4))}=A_1\tilde{E}4_{,((1,3),(3,4))}=A_1\tilde{E}4_{,((1,4),(2,3))}$。定义 $A_{12}=A_1\tilde{E}2_{,((1,2),3,4)}A_4^{-2}$以及 $A_{13}=A_1\tilde{E}3_{,((1,2,3),4)}A_4^{-1}$。显然，我们有 $A_1\tilde{E}_1=A_4^4$以及 $A_1\tilde{E}4_{,((1,2),(3,4))}=A_{12}^2$。因此，$A_1=A_4^4+6A_{12}A_4^2+4A_{13}A_4+3A_{12}^2+A_1\tilde{E}_5$。类似地，可以很容易证明 $A_2=A_4^3+3A_{12}A_4+A_{13}$，$A_3=A_4^2+A_{12}$。因此，

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\Pi-\mathbb{E}(\Pi))^4 &= A_1-4A_2A_4+6A_3A_4^2-3A_4^4=A_4^4+6A_{12}A_4^2+4A_{13}A_4+3A_{12}^2+A_{1\tilde{E}_5}\\
&\quad -4(A_4^3+3A_{12}A_4+A_{13})A_4+6(A_4^2+A_{12})A_4^2-3A_4^4=3A_{12}^2+A_{1\tilde{E}_5}. \qquad (4.29)
\end{aligned}
$$

设 $\cup_{u\in[4]}E_{u1}$ 是满足每条边恰好出现两次的子集。根据与证明 (c1) 相同的论证，我们有 $A_{12}^2=A_1(\tilde{E}_{4,((1,2),(3,4))}\cap\tilde{E})+O(p^2)$ 且 $A_1\tilde{E}_5=A_1(\tilde{E}_5\cap\tilde{E})+O(p)$。定义

$$
\begin{aligned}
\tilde{A}_{1,(r_1,r_2,r_3r_4)} &= \frac{n^{2R}}{p^{2R}(n(n-1))^{4R}}\sum_{\substack{k_{ur}\in[p],\ i_{ur},\ j_{ur}\in[n]\\(r\in[R],\ u\in[4])}}\mathbb{E}\Big(\prod_{r\in[R],\ u\in[4]}(Y_{k_{ur},i_{ur},j_{ur}}Y_{k_{u\sigma_R(r)},i_{ur},j_{ur}}-\frac{n(n-1)}{n^2}g_1\delta_{k_{ur}k_{u\sigma_R(r)}})\Big)\\
&\qquad \boldsymbol{I}((k_{1r_1},i_{1r_1})=(k_{2r_2},i_{2r_2}),(k_{3r_3},i_{3r_3})=(k_{4r_4},i_{4r_4})),\\
\tilde{A}_{2,(r_1,r_2,r_3r_4)} &= \frac{n^{2R}}{p^{2R}(n(n-1))^{4R}}\sum_{\substack{k_{ur}\in[p],\ i_{ur},\ j_{ur}\in[n]\\(r\in[R],\ u\in[4])}}\mathbb{E}\Big(\prod_{r\in[R],\ u\in[4]}(Y_{k_{ur},i_{ur},j_{ur}}Y_{k_{u\sigma_R(r)},i_{ur},j_{ur}}-\frac{n(n-1)}{n^2}g_1\delta_{k_{ur}k_{u\sigma_R(r)}})\Big)\\
&\qquad \boldsymbol{I}((k_{1\sigma_R(r_1)},i_{1r_1})=(k_{2r_2},i_{2r_2}),(k_{3r_3},i_{3r_3})=(k_{4r_4},i_{4r_4})),\\
\tilde{A}_{3,(r_1,r_2,r_3r_4)} &= \frac{n^{2R}}{p^{2R}(n(n-1))^{4R}}\sum_{\substack{k_{ur}\in[p],\ i_{ur},\ j_{ur}\in[n]\\(r\in[R],\ u\in[4])}}\mathbb{E}\Big(\prod_{r\in[R],\ u\in[4]}(Y_{k_{ur},i_{ur},j_{ur}}Y_{k_{u\sigma_R(r)},i_{ur},j_{ur}}-\frac{n(n-1)}{n^2}g_1\delta_{k_{ur}k_{u\sigma_R(r)}})\Big)\\
&\qquad \boldsymbol{I}((k_{1\sigma_R(r_1)},i_{1r_1})=(k_{2r_2},i_{2r_2}),(k_{3\sigma_R(r_3)},i_{3r_3})=(k_{4r_4},i_{4r_4})).
\end{aligned}
$$

显然，$A_1(\tilde{E}_{4,((1,2),(3,4))}\cap\tilde{E})=P_{r_u\in[R],(u\in[4])}(A1_{,(r_1,r_2,r_3r_4)}+2A2_{,(r_1,r_2,r_3r_4)}+A3_{,(r_1,r_2,r_3r_4)})$. 记为

$$
\tilde{\mathbb{G}}(k_r,k_{\sigma_R(r)})=\sqrt{np^{-1}}(\mathbb{G}(k_r,k_{\sigma_R(r)})-g_1\delta_{k_r,k_{\sigma_R(r)}}).
$$

注意到

$$
\begin{aligned}
\tilde{A}_{1,(r_1,r_2,r_3r_4)} &= \frac{n^2}{p^2(n(n-1))^4}\sum_{\substack{k_{ur_u},k_{u(r_u+1)},\\k_{(u+1)(r_u+1)}\in[p]\\u=1,3}}\ \sum_{\substack{i_{ur_u},j_{ur_u},\\j_{(u+1)r_u}\in[n]\\u=1,3}}\ \prod_{u=1,3}\mathbb{E}(\tilde{\mathbb{G}}^{R-1}(k_{ur_u},k_{u(r_u+1)})\\
&\qquad Y_{k_{u(r_u+1)},i_{ur_u},j_{ur_u}}Y_{k_{(u+1)(r_u+1)},i_{ur_u},j_{(u+1)r_{u+1}}}\tilde{\mathbb{G}}^{R-1}(k_{(u+1)(r_u+1)},k_{ur_u}))\mathbb{E}(Y_{k_{ur_u},i_{ur_u},j_{ur_u}}Y_{k_{ur_u},i_{ur_u},j_{(u+1)r_{u+1}}})\\
&= \frac{n^2}{p^2(n(n-1))^4}\sum_{\substack{k_{ur_u},k_{u(r_u+1)},\\k_{(u+1)(r_u+1)}\in[p]\\u=1,3}}\ \sum_{i_{ur_u},j_{ur_u}\in[n]}\ \prod_{u=1,3}\mathbb{E}(\tilde{\mathbb{G}}^{R-1}(k_{ur_u},k_{u(r_u+1)})\\
&\qquad Y_{k_{u(r_u+1)},i_{ur_u},j_{ur_u}}Y_{k_{(u+1)(r_u+1)},i_{ur_u},j_{ur_u}}\tilde{\mathbb{G}}^{R-1}(k_{(u+1)(r_u+1)},k_{ur_u}))\mathbb{E}(Y^2_{k_{ur_u},i_{ur_u},j_{ur_u}})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lesssim \frac{n^2}{p^2(n(n-1))^4} \sum_{\substack{k_{ur_u},k_{u(r_u+1)},\\ k_{(u+1)(r_u+1)}\in[p]\\ u=1,3}} \sum_{i_{ur_u},j_{ur_u}\in[n]\\ u=1,3} \prod_{u=1,3} \mathbb{E}(\tilde{\mathbb{G}}^{R-1}(k_{ur_u},k_{u(r_u+1)})\\
&\quad (Y_{k_{u(r_u+1)},i_{ur_u},j_{ur_u}}Y_{k_{(u+1)(r_u+1)},i_{ur_u},j_{ur_u}} - g_1\delta_{k_{u(r_u+1)}k_{(u+1)(r_u+1)}} + g_1\delta_{k_{u(r_u+1)}k_{(u+1))(r_u+1)}})\tilde{\mathbb{G}}^{R-1}(k_{(u+1)(r_u+1)},k_{ur_u}))\\
&= \frac{n}{p(n(n-1))^2} \sum_{\substack{k_{ur_u},k_{u(r_u+1)},\\ k_{(u+1)(r_u+1)}\in[p]\\ u=1,3}} \prod_{u=1,3} [\mathbb{E}(\tilde{\mathbb{G}}^{R-1}(k_{ur_u},k_{u(r_u+1)})\tilde{\mathbb{G}}(k_{u(r_u+1)},k_{(u+1)(r_u+1)})\tilde{\mathbb{G}}^{R-1}(k_{(u+1)(r_u+1)},k_{ur_u}))]\\
&+ \frac{n^2}{p^2(n(n-1))^2} \sum_{\substack{k_{ur_u},k_{u(r_u+1)},\\ k_{(u+1)(r_u+1)}\in[p]\\ u=1,3}} \prod_{u=1,3} [\mathbb{E}(\tilde{\mathbb{G}}^{R-1}(k_{ur_u},k_{u(r_u+1)})g_1\delta_{k_{u(r_u+1)}k_{(u+1))(r_u+1)}}\tilde{\mathbb{G}}^{R-1}(k_{(u+1)(r_u+1)},k_{ur_u}))]\\
&\lesssim \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p}(n(n-1))}\mathbb{E}\mathrm{Trace}(\tilde{\mathbb{G}}^{2R-1})\right)^2 + \left(\frac{n}{p(n(n-1))}\mathbb{E}\mathrm{Trace}(\tilde{\mathbb{G}}^{2R-2})\right)^2 = O(1).
\end{aligned}
$$

类似地，可以证明，当 $u = 2, 3$ 时，$\tilde{A}_{u,(r_1,r_2,r_3r_4)} = O(1)$。类似的论证可以证明 $A_{1(\tilde{E}_5\cap\tilde{E})} = O(p^2)$。因此，我们有 $\mathbb{E}(\Pi - \mathbb{E}(\Pi))^4 = O(p^2)$。这就证明了 (c2)，并完成了定理 2 的证明。

致谢。作者衷心感谢编辑、副编辑和审稿人认真阅读稿件，并提出宝贵的意见和建议。他们富有见地的反馈显著提升了论文的清晰度、呈现效果和整体质量。

参考文献

[1] Z. Bai, J. W. Silverstein，《大维随机矩阵的谱分析》，第20卷，施普林格，2010。

[2] T. Jiang，样本相关矩阵特征值的极限分布，Sankhy¯a:《印度统计学杂志》66 (2004) 35–48。

[3] J. Gao, X. Han, G. Pan, Y. Yang，高维相关矩阵：中心极限定理及其应用，英国皇家统计学会会刊 B辑：统计方法学 79 (2017) 677–693。

[4] J. Heiny, J. Yao，重尾总体样本相关矩阵特征值的极限分布，《统计年鉴》50 (2022) 3249–3280。

[5] A. S. Bandeira、A. Lodhia、P. Rigollet，Kendall秩相关系数的 Marčenko-Pastur 定律，《电子概率通信》22（2017）1–7。

[6] Z. Bai、W. Zhou，不具有列独立结构的大样本协方差矩阵，《中华统计学志》18（2008）425–442。

[7] Z. Bao、L.-C. Lin、G. Pan、W. Zhou，大维 Spearman秩相关矩阵的谱统计及其应用，《统计年鉴》43（2015）2588–2623。

[8] Z. Bao，Spearman秩相关系数的 Tracy–Widom极限，预印本（2019）。

[9] Z. Bao，Kendall秩相关系数的 Tracy–Widom极限，《统计年鉴》47（2019）3504–3532。

[10] Z. Li, Q. Wang, R. Li，大维 Kendall秩相关矩阵的线性谱统计量的中心极限定理及其应用，《统计年鉴》49（2021）1569–1593。

[11] N. Dörnemann, M. Fleermann, J. Heiny，《关联、尾部与谱：高维中基于秩的依赖度量》，arXiv 预印本 arXiv:2508.14992（2025）。

[12] P. Bousseyroux, T. Espana, M. Smerlak, 《另一种 Marčenko-Pastur 定律：关于 Kendall秩相关系数》, 《概率电子通讯》31（2026）1–10。[13] Z. Li, C. Wang, Q. Wang, 《具有依赖性的高维肯德尔秩相关矩阵的特征值》, 《中国科学：数学》66（2023）2615–2640。[14] L. Wang, D. Paul, 《当 p/n→ 0 时重归一化可分离样本协方差矩阵的极限谱分布》, 《多元分析杂志》126（2014）25–52。[15] L. Wang, A. Aue, D. Paul, 《中等高维下某类线性时间序列的样本自协方差矩阵谱分析》, 《伯努利》23（2017）2181–2209。[16] M. Bhattacharjee, A. Bose, 《当 p/n→0 时样本自协方差矩阵的联合收敛及其应用》, 《统计年鉴》47（2019）3470–3503。[17] M. Bhattacharjee, A. Bose, 《高维自协方差矩阵的大样本行为》, 《统计年鉴》44（2016）598–628。[18] H. Liu, A. Aue, D. Paul, 《线性时间序列的 Marčenko-Pastur 定律》, 《统计年鉴》43（2015）675–712。[19] D. Jiang, Z. Bai, S. Zheng, 《大维变量集合的独立性检验》, 《中国科学：数学》56（2013）135–147。[20] Y. Yang, G. Pan, 《基于正则化典型相关系数的高维数据独立性检验》, 《统计年鉴》43（2015）467–500。[21] T. Jiang, 《样本相关矩阵最大元素的渐近分布》, 《应用概率年刊》14（2004）865–880。[22] W. Zhou, 《相关矩阵最大非对角元素的渐近分布》, 《美国数学会汇刊》359（2007）5345–5363。[23] T. T. Cai, T. Jiang, 《随机矩阵相干性的极限定律及其在协方差结构检验与压缩感知矩阵构造中的应用》, 《统计年鉴》39（2011）1496–1525。[24] F. Han, S. Chen, H. Liu, 《高维无分布检验》, 《生物计量学》104（2017）813–828。[25] D. Leung, M. Drton, 《利用秩相关之和进行高维独立性检验》, 《统计年鉴》46（2018）280–307。[26] A. Nica, R. Speicher, 《自由概率组合学讲义》, 剑桥大学出版社，英国剑桥，2006。[27] A. Bose, S. Chatterjee, 《U 统计量、M_m-估计量与重抽样》, 施普林格，2018。[28] A. Bose, 《模式随机矩阵》, Chapman & Hall/CRC，2018。

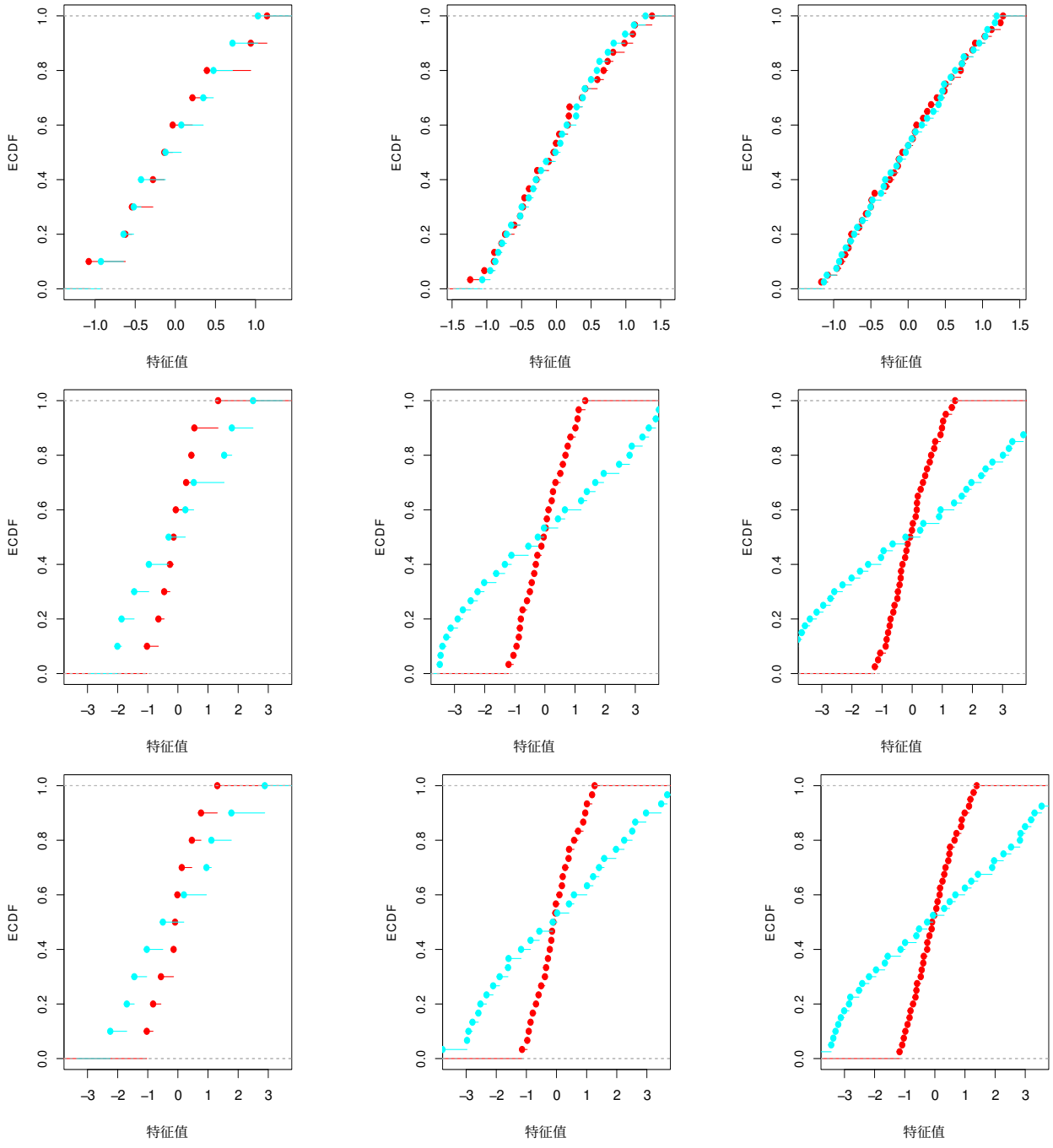


图1：例 3 设置下 pn/p($\overline{\mathbb{T}_Z}$ − D($\mathbb{T}_Z$))（青色）和 pn/p($\overline{\mathbb{T}_X}$ − D($\mathbb{T}_X$))（红色）的经验累积分布函数；各列分别对应 (n, p) =(100, 10)、(900, 30)、(1600, 40)，各行分别对应 $\alpha = 0$、1、2。