arXiv:2603.08362v1 [math.SP] 9 Mar 2026

# 周期量子树的点谱

JONATHAN BREUER[1,3] 与NETANEL Y. LEVI[2,3]

Abstract. 我们研究赋有薛定谔型微分算子和 δ 型顶点条件的周期量子树的点谱，所用方法基于生成该树的紧图的子集。我们证明了此类算子特征值的已有离散结果的类似结论（见 [4,8]）。具体而言，我们定义了态密度测度，并求出了周期树的特征值测度。

尽管大多数结果都可从离散情形推广而来，但连续情形与离散情形之间一个显著的差异是，**正则**周期量子树可能具有特征值。

我们证明，对边长作任意小的调整后，具有至少一个圈的紧量子图的万有覆盖上标准薛定谔算子的点谱为空。

## 1. INTRODUCTION

近年来，树上的周期雅可比矩阵引起了广泛关注（ [3–8,15, 18–21, 26, 28, 30] 是部分文献）。它们是定义在有限连通图的万有覆盖上的离散薛定谔型算子（下文将给出精确定义）。人们关注的性质包括谱的结构、谱测度的性质、态密度、特征值的存在性以及特征函数的结构。

连续（又称“度量”）图，是将图视为由线段构成、并通过节点连接而成的集合时得到的；它们在应用和理论方面都十分重要。当在这样的度量图上关联一个连续薛定谔算子时，该模型称为量子图。这类图在化学和物理学中有应用，其本身的数学性质也颇具研究价值（参见例如 [10] 及其中的参考文献）。

周期量子树是树上周期雅可比矩阵在连续情形下的自然类比；据我们所知，它们尚未像离散类比那样受到同等程度的关注（论文 [2, 14] 是值得注意的例外）。本文讨论周期量子树的特征值（记作 $\sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{H}_\mathcal{T})$，并称为点谱），以及特征函数所支撑的边和顶点。我们所做的大部分工作，是将 [8] 中的研究推广到连续情形。不过，所得结果存在一些显著差异。我们先给出若干定义。

离散图是一个有序对 $G = (V, E)$，其中 $V$ 是顶点集合， $E$ 是由顶点对组成的集合，称为边。对于任意顶点和边的子集 $X \subseteq G$，我们令 $V(X)$ 表示 $X$ 的顶点集合， $E(X)$ 表示 $X$的边集合。对于 $v, u \in V$，若 $v$ 与 $u$ 相邻，即存在一条边 $(v, u) \in E$，则记作 $v \sim u$。类似地，两条边相邻

日期：2026年3月10日。[1] 耶路撒冷希伯来大学数学研究所，以色列耶路撒冷，邮编 91904。由以色列高等研究院提供支撑。电子邮箱：jbreuer@math.huji.ac.il。[2] 耶路撒冷希伯来大学数学研究所，以色列耶路撒冷，邮编 91904。电子邮箱：ne- tanel.levi2@mail.huji.ac.il。[3] 本研究部分获得以色列科学基金会第 1378/20 号资助，以及美以双边科学基金会第 2020027 号资助。

当它们有一个公共顶点时，一条边与一个顶点相邻，当且仅当该顶点是这条边的一个端点。

我们仅考虑简单 图——也就是说，不含环（将一个顶点连接到其自身的边）且不含多重边（同一对顶点之间多于一条边）的图。如下文所解释的，这一表面上的限制并不会真正限制我们结果的一般性。

我们进一步将注意力限制在局部有限图上，即每个顶点都只有有限个邻居顶点的图。一个顶点的度 是与该顶点相关联的边的数目。若每个顶点的度均为 d，则称该图为*d*-正则 。

有时，将 $E$ 视为有向边的集合会比较方便，其中每条边被赋予两个方向。给定两个顶点 $v$ 与 $u$，我们用$(v,u)$表示从 $v$ 指向 $u$的边。对于每条有向边 $e \in E$，我们用$\check{e}$ 表示具有相反方向的同一条边。

**记号 1.1.** 对于顶点 $v \in V$，我们定义：

- $E_v$ 作为与 $v$ 相接的所有边的集合，不考虑定向；
- $E_v^+ = \{(u,v) \mid u \sim v\}$，以 $v$ 为终点的边的集合；
- $E_v^- = \{(v,u) \mid u \sim v\}$，以 $v$ 为起点的边的集合。

若顶点序列 $v_1, \dots, v_n$ 满足 $v_i \neq v_j$ 对所有 $i \neq j$ 均成立、 $v_i \sim v_{i+1}$ 对所有 $i \in \{1, \dots, n-1\}$ 均成立，且 $v_n \sim v_1$，则称其为一个圈。纯环是指所有顶点的度均为 2 的圈，但 $v_1$ 除外； $v_1$ 的度可以更高，并作为该圈与图其余部分的连接点。

加权离散图定义为一个元组 $G = (V, E, a, b)$，其中 $(V, E)$ 是一个离散图， $a : E \to \mathbb{C}$ 是一个用于赋予边权的函数，而 $b : V \to \mathbb{R}$ 是一个用于赋予势的函数。我们要求对每个 $e \in E$，$a_{\check{e}} = a_e$ 均成立。

这些数据定义了一个自伴算子

$$A_G : \ell^2(V) \to \ell^2(V)$$

称为雅可比算子，其作用如下：

$$(A\eta)(v) = b_v \eta(v) + \sum_{e=(u,v)\in E_v^+} a_e \, \eta(u) \, . \tag{1}$$

给定一个图 $G = (V, E)$ 和一个函数 $\ell : E \to \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$，我们得到一个度量图，即相应的复形，其中边 $e \in E$ 的长度由 $\ell(e) = \ell(\check{e}) = \ell_e$ 给出。我们用 $x_e$ 表示沿边 $e$的坐标，并用 $I_e$表示相应的线段。我们用字母 $\Gamma$ 表示这样的度量图，以区别于组合结构 $G$，并记作 $\Gamma = (V, E, \ell)$。

$\Gamma$ 所对应的拓扑空间由 $\bigcup_{e\in E} I_e / \sim$ 得到，其中 $\sim$ 按照由图 $(V, E, \ell)$ 确定的关联关系来等同这些区间的端点：每个端点 0 或 $\ell_e$ 被粘合到相应的顶点 $v \in V$。

$\Gamma$ 上的度量 $d_\Gamma$ 定义为

$$d_\Gamma(x, y) := \inf\{\text{length}(\gamma) \, : \, \gamma \text{ is a path in } \Gamma \text{ connecting } x \text{ to } y\},$$

其中，路径的长度通过将其各线段在相应边区间中的欧几里得长度求和来计算 $I_e$。该度量诱导 $\Gamma$作为一维复形的自然拓扑。我们将只考虑边长集合$\{\ell(e)\}_{e\in E}$ 有下界的度量图，即存在 $\delta = \delta_\Gamma > 0$ 使得 $\ell(e) > \delta$ 对所有 $e \in E$成立。

在此假设下，一个紧致度量图 是具有有限个顶点和边的度量图。

量子图 $\Gamma$ 是一个度量图，配备有希尔伯特空间 $\bigoplus_{e\in E} L_2(e)$，并且其上定义了一个自伴微分算子。该算子的定义域是索伯列夫空间 $\bigoplus_{e\in E} H^2(e)$直和中的函数所构成的子空间，这些函数在边于顶点处取值及导数时满足某些条件。在本文中，图所配备的微分算子是一个薛 ¨定谔型 微分算子。这是一个形如

$$(\mathcal{H}_\Gamma f)(x_e) = -\frac{d^2 f}{dx_e^2}(x_e) + W(x_e) f(x_e) \tag{2}$$

的算子，其中 $W$ 是图上的实值函数，称为势。我们假设 $W$在每条边上（视为闭区间）连续，但不要求不同边在顶点处取值相同。标准薛 ¨定谔算子 （又称拉普拉斯算子）对应于情形 $W = 0$。

我们将 $\mathcal{H}_\Gamma$ 的定义域记为 $\mathrm{Dom}(\mathcal{H}_\Gamma) \subseteq \bigoplus_{e\in E} H^2(e)$。该定义域通过顶点 [10] 处的“粘合”条件定义。使 $\mathcal{H}_\Gamma$ 自伴的一类顶点条件是$\delta$型条件。在每个顶点 $v \in V(\Gamma)$ 处，函数$f = \bigoplus_{e\in E} f_e \in \mathrm{Dom}(\mathcal{H}_\Gamma)$ 满足以下条件：

$$\begin{cases} f \text{ is continuous at } v, \text{ and} \\ \sum_{e\in E_v^-} \dfrac{df_e}{dx_e}(v) = \alpha_v f(v), \end{cases} \tag{3}$$

对于某个实常数 $\alpha_v \in \mathbb{R}$。为定义 (3) 中的导数，我们在每条边上固定一个定向。导数沿着从顶点 $v$出射 的方向取值，因此该表达式涉及沿关联边的出射导数。基尔霍夫条件是 $\delta$ 型顶点条件的特例，对应于选择 $\alpha_v = 0$。

扩展 $\delta$型 顶点条件还包括狄利克雷条件，其要求：

$$\begin{cases} f \text{ is continuous at } v, \text{ and} \\ f(v) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

通常将这一条件形式化地记为 $\alpha_v = \infty$。除非另有说明，当提及 $\delta$型顶点条件时，我们同时包括标准和扩展的 $\delta$ 型条件。

**注记 1.2.** 具有狄利克雷边界条件的顶点实际上将图分成若干连通分支。将这样的顶点视为叶子（即度为一的顶点）往往是有用的。

量子图 $\Gamma = (V, E, \ell, \mathcal{H}_\Gamma)$的覆盖是另一个量子图 $\Lambda = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \ell_\Lambda, \mathcal{H}_\Lambda)$，连同一个连续的覆盖映射 $\Xi\colon \Lambda \to \Gamma$，它将顶点映射到顶点、将边映射到边，并且是保持边长、顶点的局部同构

粘合数据以及势。即下列条件成立：

$$
\begin{aligned}
&\forall v,u\in\mathcal{V},\quad v\sim u\Rightarrow \Xi(v)\sim\Xi(u);\\
&\forall\, v\in\mathcal{V},\ \forall\, u\in V,\qquad \Xi(v)\sim u\implies \exists\,\tilde{u}\in\Xi^{-1}(u)\text{ such that }v\sim\tilde{u};\\
&\forall e\in\mathcal{E},\quad \ell_e=\ell_{\Xi(e)};\\
&\forall e\in\mathcal{E},\ \forall x_e\in I_e,\quad \Xi(x_e)=x_{\Xi(e)};\\
&\forall x\in\Lambda,\quad W(x)=W(\Xi(x));\\
&\forall v\in\mathcal{V},\quad \alpha_v=\alpha_{\Xi(v)}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

我们将 $\Lambda$ 称为 $\Gamma$ 的**覆盖**。如果 $\Lambda$ 是有限覆盖，那么存在 $n\in\mathbb{N}$，使得$|V(\Lambda)|=n\cdot|V(\Gamma)|$，此时 $\Lambda$ 称为 $\Gamma$ [8]的 $n$-**覆盖**。

连通量子图 $\Gamma$ 的**万有覆盖**是唯一的（在同构意义下）树 $\mathcal{T}=(\mathcal{V},\ \mathcal{E},\ \ell_{\mathcal{T}},\ \mathcal{H}_{\mathcal{T}})$，它覆盖 $\Gamma$ 的所有其他覆盖。如果 $\Gamma$ 是树，那么 $\Gamma=\mathcal{T}$。否则，$\Gamma$ 至少包含一个圈，而 $\mathcal{T}$ 是一棵无限树，由将所有圈展开为无限且不重复的路径构造而成。

**周期量子树**是量子树 $\mathcal{T}=(\mathcal{V},\ \mathcal{E},\ \ell_{\mathcal{T}},\ \mathcal{H}_{\mathcal{T}})$，它是紧致连通量子图 $\Gamma=(V,\ E,\ \ell,\ \mathcal{H}_\Gamma)$ 的万有覆盖。

对于离散图（$V,\ E,\ a,\ b$），类似地，可以定义覆盖的概念（$\mathcal{V},\ \mathcal{E}$、$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$），其中覆盖映射保持顶点势和边权。也就是说，

$$
\begin{aligned}
&\forall v,u\in\mathcal{V},\quad v\sim u\Rightarrow\Xi(v)\sim\Xi(u)\ \text{ and }\ \mathbf{a}_{(v,u)}=a_{(\Xi(v),\Xi(u))}\\
&\forall v\in\mathcal{V},\quad \mathbf{b}_v=b_{\Xi(v)}\,.
\end{aligned}
$$

万有覆盖的概念也以类似方式定义，在有限离散图的万有覆盖上得到的算子称为树上的周期雅可比矩阵。

如上所述，不失一般性，我们只考虑简单图。要看出这一假设在一般情况下并不具有限制性，一种方法是注意到：任何环都可以通过插入一个配备基尔霍夫条件的辅助顶点来修改，而不影响函数空间或定义域 $\mathrm{Dom}(\mathcal{H}_\Gamma)$。类似的步骤也可用于消除多重边。但在下文定理 1.4 的特殊情形中，这种做法是不可接受的，因为插入一个度为 2 的基尔霍夫顶点会破坏正则性。尽管如此，由于我们处理的是图 $\Gamma$ 的万有覆盖上的算子，我们总可以取一个度足够高且不含环或多重边的有限覆盖（由 [8, 引理 2.3], 可知这样的覆盖存在，另见下文定理 1.6），并可将万有覆盖视为由该有限覆盖产生。

此外，除定理 1.4 外，所有结果都可推广到势在每条边上仅为分段连续的图。这同样可以通过在间断点处引入有限个带有基尔霍夫条件的二度顶点来实现，从而将问题化归为连续情形。

树上周期雅可比矩阵的点谱已在 [4, 8] 中得到研究，本文旨在对连续情形开展类似的研究。如上文所述，连续情形与离散情形之间存在一些定性差异。这些差异主要源于存在这样一些特征函数：它们在某条边上不为零，

但在该边的两个顶点处为零。例如， [4] 表明，正则树上的周期雅可比矩阵没有特征值。在下一个例子中，我们将说明这一结论在连续情形下并不成立。

**例 1.3.** 令 $\Gamma = (V, E, \ell, \mathcal{H}_\Gamma)$ 为具有 *5* 个顶点的完全量子图，其中$\ell_e = 2\pi$ 对每个 $e \in E$均成立。这是一个 *4*-正则量子图。我们在 $\Gamma$ 上赋予标准薛定谔算子，并在所有顶点处施加基尔霍夫条件。令 $\mathcal{T} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 为其万有覆盖，并赋予标准算子 $\mathcal{H}_\mathcal{T}$。

$\mathcal{T}$是一棵无限四正则树，所有边的长度都相同。固定一个顶点 $r \in \mathcal{V}$，并将与 $r$相接的四条边 $(e_1, e_2, e_3, e_4)$分成两对：$(e_1, e_2)$和$(e_3, e_4)$。子树 $D_+ \subseteq \mathcal{T}$由移除$(e_1, e_2)$ 后，保留剩余部分中 $r$ 所在的连通分支得到。同理，子树 $D_-$ 由移除$(e_3, e_4)$ 后，保留剩余部分中 $r$ 所在的连通分支得到。注意， $D_+ \cap D_- = \{r\}$。

对于每条边 $e$ *in* $\mathcal{T}$，我们固定一个定向，使坐标 $x_e \in [0, 2\pi]$ 沿远离 $r$的方向递增。我们在 $f$ 上定义一个特征函数，使其在 $\mathcal{T}$上满足：对于每条边 $e \in \mathcal{E}$，当其与 $r$的距离为 $2\pi n$ 时，该函数为

$$f_e(x_e) = \frac{1}{3^n} \sin(x_e),$$

并且在 $D_-$上，对于每条边 $e \in \mathcal{E}$，当其与 $r$的距离为 $2\pi n$ 时，该函数为

$$f_e(x_e) = -\frac{1}{3^n} \sin(x_e).$$

该图如图 *1* 所示。

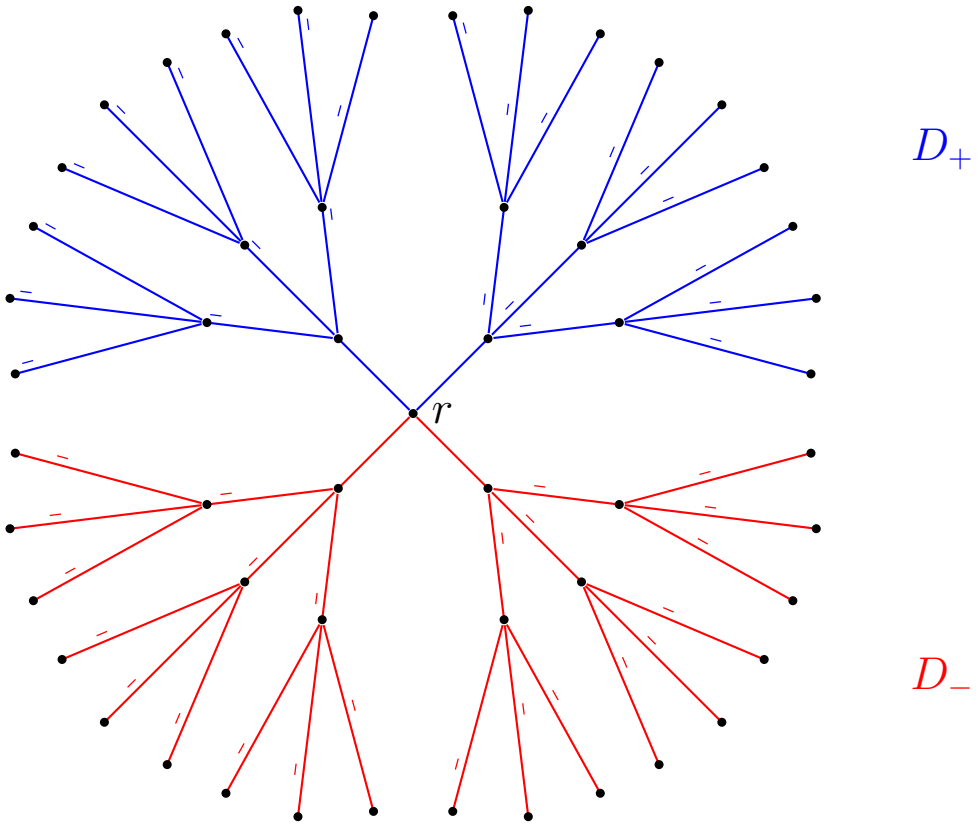

FIGURE 1. 例 1.3 中的万有覆盖。图中展示了顶点 $r$ 的邻域。集合 $D_+$ 以蓝色标示，集合 $D_-$ 以红色标示。所有正弦函数均表示每条边上的特征函数，参数从距离 $r$ 较近的端点到距离 $r$较远的端点。

可以看出，这个函数满足顶点条件（注意，在每个顶点 $v \neq r$都有一条边 $e \in E_v^-$指向 $r$），且 $f \in \bigoplus_{e\in E} H^2\ (e)$，因此 $f \in \mathrm{Dom}(\mathcal{H}_\mathcal{T})$，并且它是 $\mathcal{H}_\mathcal{T}$ 的一个特征函数，对应的特征值为 *1*。

然而，刻画正则周期量子树上的所有可能特征函数并不困难。我们将证明以下

**定理 1.4.** 设 $\Gamma = (V, E, \ell, \mathcal{H}_\Gamma)$ 是一个紧致的 $d$-正则简单量子图，具有$\delta$型顶点条件，其中 $\alpha_v < \infty$ 对每个 $v \in V$均成立。设 $\mathcal{H}_\Gamma$ 是一个薛定谔型微分算子，并设 $\mathcal{T}$ 是 $\Gamma$ 的万有覆盖，配备相应的薛定谔算子 $\mathcal{H}_\mathcal{T}$。

那么，对每个 $\lambda \in \sigma_{\mathfrak{p}}(\mathcal{H}_\mathcal{T})$，存在一条边 $e \in E$，使得下列微分方程在 $[0, \ell_e]$上有一个非平凡解：

$$\begin{aligned} &\forall x \in [0, \ell_e], \quad -\frac{d^2 f}{dx^2}(x) + W|_e(x) f(x) = \lambda f(x) \\ &f(0) = f(\ell_e) = 0\,. \end{aligned} \tag{6}$$

对于标准的 *Schr¨inger* 算子（即当 $W = 0$）时，可以推出

$$\sigma_{\mathfrak{p}}\left(\mathcal{H}_\mathcal{T}\right) \subseteq \left\{ \frac{n^2\pi^2}{\ell_e^2} \mid e \in E,\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

离散情形下，分析点谱的一个核心对象是态密度——对称群作用的一个基本域上的谱测度的平均。为了表述连续情形中的类似结果，我们需要花些篇幅讨论周期量子树的态密度的定义和性质。

### 1.1. **态密度**。

**定义 1.5.** *i.* 有限离散图 $G = (V, E, a, b)$ 的（归一化）特征值计数测度 $\nu_d$，定义为对 $A_G$ 的特征值（按重数计数）进行计数，再除以图中的顶点数。也就是说，

$$\nu_d = \frac{1}{|V|} \sum_{\lambda \in \sigma_{\mathfrak{p}}(A_G)} \delta_\lambda \tag{7}$$

其中，$\delta_\lambda$ 是 $\{\lambda\}$的示性函数。

*ii.* 紧量子图$\Gamma = (V, E, \ell, \mathcal{H}_\Gamma)$ 的（归一化）特征值计数测度 $\nu_c$ 的定义与离散情形类似，只是此时用特征值的数量（按重数计数）除以图中边长之和。也就是说，

$$\nu_c = \frac{1}{\mathcal{L}_E} \sum_{\lambda \in \sigma_{\mathfrak{p}}(\mathcal{H}_\Gamma)} \delta_\lambda\,. \tag{8}$$

其中，$\mathcal{L}_E = \sum_{e\in E} \ell_e$ 是图中所有边长之和。

*iii.* 设 $G=(V,E,a,b)$ 为带权有限离散图，$\mathcal{T}$ 为其万有覆盖，覆盖映射为 $\Xi:\ \mathcal{T}\to\Gamma$。对每个 $v\in V$，任选一个 $\tilde{v}\in\Xi^{-1}(v)$。则态密度定义为

$$\mu_d=\frac{1}{|V|}\sum_{v\in V}\mu_{\tilde{v}} \tag{9}$$

其中，$\mu_{\tilde{v}}$ 是示性函数 $\delta_{\tilde{v}}$的谱测度。

*iv.* 设 $\Gamma=(V,E,\ell,\mathcal{H}_\Gamma)$ 是一个紧量子图，其上带有薛定谔型微分算子和自伴顶点条件。设 $X$ 是万有覆盖的一个连通基本集，$\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是 $L_2(X)=\bigoplus_{e\in X}L_2(e)$的一个标准正交基。那么态密度为

$$\mu_c=\frac{1}{\mathcal{L}_E}\sum_{k\in\mathbb{N}}\mu_{g_k} \tag{10}$$

其中，$\mu_{g_k}$ 是 $g_k$ 的谱测度，$\mathcal{L}_E=\sum_{e\in E}\ell_e$ 是 $\Gamma$ 中所有边长之和（如上所述）。

关于 $\mu_c$ 定义良好（即与基本域和标准正交基 $\{g_k\}_k$的选取无关）的证明见 [24]。下一个定理阐明了特征值计数测度与态密度之间的联系。

**定理 1.6.** 设 $\Gamma$ 是一个紧量子图，配有薛定谔型微分算子，$\mathcal{T}$ 是其万有覆盖，$\mathcal{T}$ 的态密度记为 $\mu_c$。那么

*i.* 存在一列 $\Gamma$ 的覆盖 $\Gamma_n$，其围长（即最小圈中的边数）随着 $n\to\infty$ 趋于无穷。*ii.* 对于这一列，$\Gamma_n$ 的特征值计数测度 $\nu_n$ 弱收敛（即对紧支撑连续函数积分时收敛）到 $\mu_c$。

定理 1.6(i) 的证明见引理 2.3], ，其中也证明了定理 1.6(ii) 的离散类比。定理 1.6(ii) 的证明见 [24]。在下文的定理 2.5 中，我们将针对 $\delta$ 型顶点条件，给出态密度的累积分布函数以及有限区间测度的界。这尤其意味着 $\mu_c$ 是一个局部有限测度。

论文 [1] 通过定义并研究量子图的 Benjamini-Schramm 极限（其背景远比周期树更一般），研究有限量子图的特征值计数测度的极限。当然，由于这种收敛性可以推出，我们对态密度的定义（在周期图这一特殊情形下）与他们的定义一致。

态密度与本文的相关性体现在定理 1.8(iii)中：我们计算了万有覆盖的每个特征值处的态密度值。我们得到的公式是一个公式的连续情形的类比；该公式可追溯至 Aomoto 在 [4]离散情形下的工作（另见 [8]）。

**1.2. 主要结果。** 树上的周期雅可比矩阵特征值分析中的一个核心对象，是与某个特征值对应的 Aomoto 集，即底层有限图中其提升支撑特征函数的顶点集（见 [4, 8]）。这里我们将考察一个类似的对象，称为*Q-Aomoto* 集，但我们也需要离散版本。

**定义 1.7**。 设 $G=(V,E,a,b)$ 为一个加权离散图，且 $\mathcal{T}=(\mathcal{V},\mathcal{E},\mathbf{a},\mathbf{b})$为其万有覆盖，覆盖映射为 $\Xi:\ \mathcal{T}\to G$。设 $\lambda\in\mathbb{R}$ 是 $\mathcal{T}$的一个特征值。Aomoto 集 $X_\lambda(G)$ 是顶点 $v\in V$ 的一个子集，使得存在 $\tilde{v}\in\Xi^{-1}(v)$ 以及函数 $\eta\in\ker(\lambda-A_{\mathcal{T}})$ 满足 $\eta(\tilde{v})\neq 0$。

设 $\Gamma=(V,E,\ell,\mathcal{H}_\Gamma)$ 为一个紧量子图，并设 $\mathcal{T}=(\mathcal{V},\mathcal{E},\ell_{\mathcal{T}},\mathcal{H}_{\mathcal{T}})$ 为其万有覆盖，覆盖映射为 $\Xi:\mathcal{T}\to\Gamma$。设 $\lambda\in\mathbb{R}$ 为 $\mathcal{T}$ 的一个特征值。该Q-Aomoto 集 $X_\lambda(\Gamma)=V_\lambda(\Gamma)\cup E_\lambda(\Gamma)$ 是图 $\Gamma$ 的一个子集，定义如下：

*i.* $V_\lambda(\Gamma)$ 是所有满足如下条件的顶点 $v\in V$ 的集合：存在 $\tilde{v}\in\Xi^{-1}(v)$ 以及函数 $h\in\ker(\lambda-\mathcal{H}_{\mathcal{T}})$，使得 $h(\tilde{v})\neq 0$。*ii.* $E_\lambda(\Gamma)$ 是所有满足如下条件的边 $e\in E$ 的集合：存在 $\tilde{e}\in\Xi^{-1}(e)$ 以及函数$h\in\ker(\lambda-\mathcal{H}_{\mathcal{T}})$，使得 $h|_{\tilde{e}}$ 不恒为零。

注意，Q-Aomoto 集 $X_\lambda(\Gamma)$ 不一定是 $\Gamma$ 的子图，而是度量空间 $\Gamma$的一个子空间，其中某些点可能是顶点。事实上，在 $\delta$ 型顶点条件下，连续性意味着，如果 $v\in V_\lambda(\Gamma)$，那么每条与 $v$ 相接的边都属于 $E_\lambda(\Gamma)$，即 $E_v\subseteq E_\lambda(\Gamma)$。然而，可能存在一条或多条边，其上的特征函数不为零，但在至少一个相邻顶点处为零。因此，一条边可能属于该图的 Q-Aomoto 集，即使它的某些相邻顶点不属于该集合。

We 将 Q-Aomoto 集的边界 定义为 $\partial X_\lambda(\Gamma)\cup\partial_\infty X_\lambda(\Gamma)$，其中

$$\partial X_\lambda(\Gamma)=\{v\in V\setminus V_\lambda(\Gamma)\mid E_v\cap E_\lambda(\Gamma)\neq\emptyset,\ \alpha_v<\infty\}, \tag{11}$$

$$\partial_\infty X_\lambda(\Gamma)=\{v\in V\setminus V_\lambda(\Gamma)\mid E_v\cap E_\lambda(\Gamma)\neq\emptyset,\ \alpha_v=\infty\}. \tag{12}$$

若两条边 $e,\ e'\in E_v\cap X_\lambda(\Gamma)$（对于某个 $v\in V$）在.....中相连 $X_\lambda(\Gamma)$，则称它们$v\in V_\lambda(\Gamma)$。

一般而言，对于图的顶点和边的子集 $X$，我们将中的圈定义为顶点序列 $\{v_1,\dots,v_n\}\subseteq V(X)$ 以及相应的边序列

$$\{(v_1,v_2),(v_2,v_3),\dots,(v_{n-1},v_n),(v_n,v_1)\}\subseteq E(X)$$

使得所列出的所有顶点和边都包含在 $X$ 中。也就是说，整个圈必须位于 $X$ 内。

$\Gamma$ 在 $\lambda\in\mathbb{R}$ 处的指标定义为

$$I_\lambda(\Gamma)=ccX_\lambda(\Gamma)-|\partial X_\lambda(\Gamma)|, \tag{13}$$

其中，$ccX_\lambda(\Gamma)$表示 $X_\lambda(\Gamma)$的连通分支数，而 $|\partial X_\lambda(\Gamma)|$ 是 $\partial X_\lambda(\Gamma)$中的顶点数，如式 (11) 中所定义。

定义了所需的基本概念后，我们继续描述周期量子图特征值的性质。如上所述，这些是 [8] 中结果的连续情形的类比。

**定理 1.8.** 设 $\Gamma=(V,E,\ell,\mathcal{H}_\Gamma)$ 是一个具有 $\delta$ 型顶点条件的紧量子图，其微分算子 $\mathcal{H}_\Gamma$ 为薛定谔型。设 $\mathcal{T}$ 是 $\Gamma$的万有覆盖，覆盖映射为 $\Xi:\mathcal{T}\to\Gamma$，并设 $\lambda\in\sigma_{\mathfrak{p}}(\mathcal{H}_{\mathcal{T}})$。

那么：

*i.* 由 $\Gamma$ 中 $V_\lambda(\Gamma)$ 中的顶点诱导的子图是无环的。

*ii.* 对于 $X_\lambda(\Gamma)$ 的每个连通分支 $T_1$ （按照我们对 $X_\lambda(\Gamma)$中$\widetilde{\ }$边之间连接关系的定义），以及 $\mathcal{T}$中 $T_1$ 的提升的每个连通分支 $\widetilde{T}_1$，

$$\dim\left\{h|_{\widetilde{T}_1} \;\middle|\; h\in\ker(\lambda-\mathcal{H}_{\mathcal{T}})\right\}=1.$$

*iii.* 态密度满足：

$$\mu(\{\lambda\})=\frac{I_\lambda(\Gamma)}{\mathcal{L}_E}.$$

**注 1.9.** *i.* 如果一个图不含任何圈，也就是说它是若干棵树的并，则称其为“无环”的。在我们的情形中，不难看出，由 $V_\lambda(\Gamma)$ 中的顶点诱导出的 $\Gamma$ 的子图是无环的，当且仅当 $X_\lambda(\Gamma)$中不存在顶点和边均包含于其中的圈。我们也将此事实表述为$X_\lambda(\Gamma)$ 是无环的。*ii.* 由于 $X_\lambda(\Gamma)$ 是无环的，定理 *1.8(ii)* 等价于以下陈述： $\lambda$ 是在 $T_1$ 上施加狄利克雷顶点条件于 $\partial X_\lambda(\Gamma)\cup\partial_\infty X_\lambda(\Gamma)$后得到的薛定谔算子的一个单特征值。

现在我们考察原紧图与其万能覆盖的点谱之间的联系。

**定理 1.10.** 设 $\Gamma=(V,E,\ell,\mathcal{H}_\Gamma)$ 是一个具有 $\delta$ 型顶点条件和 *Schr¨inger* 型微分算子 $\mathcal{H}_\Gamma$ 的紧量子图。设 $\mathcal{T}$ 是 $\Gamma$的万有覆盖，其覆盖映射为 $\Xi:\mathcal{T}\to\Gamma$，并假设 $\lambda\in\sigma_{\mathfrak{p}}(\mathcal{H}_{\mathcal{T}})$。那么：

*i.* $\lambda\in\sigma_{\mathfrak{p}}(\mathcal{H}_\Gamma)$。此外， $\mathcal{H}_\Gamma$ 和 $\lambda$ 的特征空间中存在一个子空间，其维数至少为

$$I_\lambda(\Gamma)=\mathcal{L}_E\cdot\mu(\{\lambda\})$$

该子空间中的元素在 *Q-Aomoto* 集 $X_\lambda(\Gamma)$之外均为零。

*ii.* 设 $G$ 是 $\Gamma$ 的一个 $n$提升，其覆盖映射为 $\xi:G\to\Gamma$。那么 $\lambda\in\sigma_{\mathfrak{p}}(\mathcal{H}_G)$。此外， $L_2(G)$中 $\lambda$ 的特征空间存在一个子空间，其维数至少为

$$n\cdot I_\lambda(\Gamma)=n\cdot\mathcal{L}_E\cdot\mu(\{\lambda\})$$

该子空间中的元素在提升的 *Q-Aomoto* 集 $\xi^{-1}(X_\lambda(\Gamma))$之外均为零。

**定义 1.11.** 设 $\Gamma=(V,E,\ell,\mathcal{H}_\Gamma)$ 是一个紧量子图，设 $\lambda\in\mathbb{R}$，并设$X=E_X\cup V_X\subseteq\Gamma$，其中 $V_X\subseteq V$和 $E_X\subseteq E$。若满足以下条件，我们称 $X$ 是 $\lambda$ 的一个适格Q-Aomoto集：

*i.* 如果 $v\in V_X$，那么 $E_v\subseteq E_X$。*ii.* $V_X$ 中的顶点诱导出一个无环子图。*iii.* 对于$X$的每个连通分支 $T_1$，按照备注 *1.2* 中对 *Q-Aomoto* 集所述的含义，值 $\lambda$ 是算子 $\mathcal{H}_\Gamma$ 限制在 $T_1\cup\partial T_1\cup\partial_\infty T_1$上的特征值，其中在 $\partial T_1$ 和 $\partial_\infty T_1$上施加狄利克雷边界条件。*iv.*

$$cc(X)-|\partial X|>0.$$

我们将 $\lambda$的适格 Q-Aomoto 集构成的族记为 $A_\lambda(\Gamma)$。对于每个 $\lambda\in\sigma_{\mathfrak{p}}(\mathcal{H}_{\mathcal{T}})$, Q-Aomoto 集 $X_\lambda(\Gamma)$是 $\lambda$的适格 Q-Aomoto 集之一。也就是说， $X_\lambda(\Gamma)\in A_\lambda(\Gamma)$。

**定理 1.12**。 设 $\Gamma=(V,E,\ell,\mathcal{H}_\Gamma)$ 是一个具有 $\delta$-型顶点条件的紧量子图，其微分算子 $\mathcal{H}_\Gamma$ 为薛定谔型，并设 $\mathcal{T}$为其万有覆盖。对于每个 $\lambda\in\mathbb{R}$ 以及每个 $X\in A_\lambda(\Gamma)$,

*i.* $\lambda \in \sigma_{\mathfrak{p}}(\mathcal{H}_\Gamma)$，重数至少为 $cc(X) - |\partial X|$。*ii.* $\lambda \in \sigma_{\mathfrak{p}}(\mathcal{H}_\mathcal{T})$ 且 $\mu(\{\lambda\}) \geq \frac{cc(X)-|\partial X|}{\mathcal{L}_E}$。

**推论 1.13**。设 $\Gamma = (V、E、\ell、\mathcal{H}_\Gamma)$ 是一个具有 $\delta$ 型顶点条件并带有薛定谔型微分算子的紧量子图，且 $\mathcal{T}$ 是其万有覆盖。则：

*i.* 对于每个 $\lambda \in \sigma_{\mathfrak{p}}(\mathcal{H}_\mathcal{T})$，

$$\mu(\{\lambda\}) = \frac{1}{\mathcal{L}_E} \max_{X \in A_\lambda(\Gamma)} (cc(X) - |\partial X|),$$

其中，该最大值由 *Q-Aomoto* 集取得。

*ii.* $\sigma_{\mathfrak{p}}(\mathcal{H}_\mathcal{T})$ 可在有限时间内根据 $\Gamma$ 计算得到。

由定理 1.8 和定理 1.12，我们可以得出推论 1.13(i)。由定理 1.10 和定理 1.12，我们得到推论 1.13(ii)。

最后，我们证明：对于配备标准拉普拉斯算子的周期量子树，非空点谱的存在在可能的边长空间中是一个拓扑上罕见的事件。

**定理 1.14.** 设 $\Gamma = (V, E, \ell, \mathcal{H}_\Gamma)$ 为一个紧量子图，具有 $\delta$ 型顶点条件，其中狄利克雷条件仅允许出现在度为 *1* 的顶点处，该图至少含有一个圈，并配备标准 *Schr¨odinger* 算子 $\mathcal{H}_\Gamma = -d^2/dx^2$；设 $\mathcal{T}$ 为其万有覆盖，覆盖映射为 $\Xi : \mathcal{T} \to \Gamma$。则对于 $\mathbb{R}_+^{|E|}$ 中长度的一个剩余集，$\sigma_{\mathfrak{p}}(\mathcal{H}_\mathcal{T}) = \emptyset$。

本文余下部分的结构如下。在第 2 节中，我们建立若干辅助结果，并给出所承诺的关于紧区间态密度的界。在第 3 节中，我们证明定理 1.4、1.8、1.10、1.12 和 1.14。

**致　　谢**。作者感谢 Ram Band 提出的许多有益建议　　.

## 2. AUXILIARY RESULTS

我们这一分析背后的主要思想，是将连续问题转化为一个离散问题。具体而言，给定一个量子图以及一个特征值 $\lambda$，我们将构造一个相应的、带有雅可比矩阵的离散图，并给出量子图的 $\lambda$-特征函数与该雅可比矩阵的 0-特征函数之间的一个映射。这一思想（应用于紧图）至少可以追溯到 Exner 在 [16], 中的工作，并且已在多种情形中得到应用（另见 [13,17,25,27]中的若干推广与应用）。

我们从两个方面推广 [16] 中的构造。首先，我们考虑具有非零势的算子。其次，我们允许特征函数在一条边的两个端点处均为零。为此，在分析的第一步中，我们需要一个稍显繁复的构造，称之为量子图的“导出图”。这仅对于一条中心引理（引理 2.4）的证明是必要的。在第 3 节中不再使用导出图，而是采用一种更简单的与离散情形的对应。

首先，我们需要考虑特征值方程解的局部基。

**记号 2.1**。设 $\Gamma = (V, E, \ell, \mathcal{H}_\Gamma)$ 是一个具有 $\delta$ 型顶点条件的量子图，其上定义了一个带有势函数 $W$ 的薛定谔型算子 $\mathcal{H}_\Gamma$。对于每条边 $e = (v, u) \in E$,

从 $v$ 定向到 $u$，并对每个 $\lambda \in \mathbb{R}$，考虑定义在 $I_e = [0, \ell_e]$ 上的下列微分方程：

$$-\frac{d^2h}{dx^2}(x_e) + W|_e(x_e)\, h(x_e) = \lambda h(x_e),\ x_e \in I_e. \tag{14}$$

我们为二维解空间 $\{f_e, g_e\}$ 定义一个实基，其初始条件为：

$$\begin{aligned} f_e(0) &= 1,\ f_e'(0) = 0 \\ g_e(0) &= 0,\ g_e'(0) = 1 \end{aligned} \tag{15}$$

它们的朗斯基行列式为

$$f_e(\ell_e)\, g_e'(\ell_e) - f_e'(\ell_e)\, g_e(\ell_e) = f_e(0)\, g_e'(0) - f_e'(0)\, g_e(0) = 1. \tag{16}$$

回顾记号 1.1。若已知 $h \in \ker(\lambda - \mathcal{H}_\Gamma)$ 在顶点 $v$ 处的值，以及它沿边 $e = (v, u) \in E_v^-$ 方向的出射导数，则可用如下公式确定 $h$ 在 $u$ 处的值及其在同一条边上的出射导数：

$$\begin{pmatrix} h(u) \\ h'_{\check{e}}(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_e(\ell_e) & g_e(\ell_e) \\ -f_e'(\ell_e) & -g_e'(\ell_e) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h(v) \\ h'_e(v) \end{pmatrix}, \tag{17}$$

其中我们取 $\check{e} = (u, v)$ 以反转导数的方向，从而使其成为从 $u$出发的出射导数。由 $\delta$ 型顶点条件所施加的连续性，$h$ 在每个 $v \in V$ 处的极限沿每条边 $e \in E_v$ 都相同。显然，先对 $e$ 应用 (17) 中的矩阵，再对 $\check{e}$ 应用相应矩阵，应得到单位矩阵。即，

$$\begin{pmatrix} f_{\check{e}}(\ell_e) & g_{\check{e}}(\ell_e) \\ -f'_{\check{e}}(\ell_e) & -g'_{\check{e}}(\ell_e) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_e(\ell_e) & g_e(\ell_e) \\ -f_e'(\ell_e) & -g_e'(\ell_e) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

我们可以利用（16）求解这些方程，得到以下恒等式（这些恒等式将在后文中发挥作用）：

$$\begin{aligned} f_e(\ell_e) &= g'_{\check{e}}(\ell_e) \\ g_e(\ell_e) &= g_{\check{e}}(\ell_e) \\ f_e'(\ell_e) &= f'_{\check{e}}(\ell_e). \end{aligned} \tag{19}$$

现在我们定义导出图和算子 $\gamma_\lambda$，它们建立了量子图上 $\lambda$ 的特征空间与导出图上 0 的特征空间之间的联系。

**定义 2.2.** （图 *2* 中给出了一个例子）设 $\Gamma = (V, E, \ell, \mathcal{H}_\Gamma)$ 为一个具有 *Schr¨odinger* 型微分算子及 $\delta$ 型顶点条件的量子图。对每一个$\lambda \in \mathbb{R}$，我们将 $\Gamma$ 的对应于 $\lambda$ 的导出图定义为离散图 $\Gamma_{disc,\lambda} = (V_{disc,\lambda}, E_{disc,\lambda}, a_\lambda, b_\lambda)$，使得：

$$V_{disc,\lambda} = \bigcup_{\substack{v\in V\\ \alpha_v<\infty}} \left( \{v_p\} \cup \bigcup_{e\in E_v^-} \{v_e\} \right) \cup \bigcup_{\substack{v\in V\\ \alpha_v=\infty}} \bigcup_{e\in E_v^-} \{v_e\} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} E_{disc,\lambda} = & \bigcup_{\substack{e=(v,u)\in E\\ \alpha_v,\alpha_u<\infty}} \{(v_p,u_p),(v_p,u_{\check{e}}),(v_p,v_e),(v_e,u_{\check{e}})\} \cup \\ & \bigcup_{\substack{e=(v,u)\in E\\ \alpha_v<\infty,\alpha_u=\infty}} \{(v_p,u_{\check{e}}),(v_p,v_e),(v_e,u_{\check{e}})\} \cup \bigcup_{\substack{e=(v,u)\in E\\ \alpha_v,\alpha_u=\infty}} \{(v_e,u_{\check{e}})\} \end{aligned} \tag{21}$$

因此，对于每个具有非狄利克雷边界条件的顶点 $v\in\Gamma$，图 $\Gamma_{disc,\lambda}$ 具有一个对应于原顶点的 $v$ 副本，以及对应于每条出边的 $v$ 副本。在狄利克雷边界条件的情形下，$v$ 仅有的副本是那些对应于引出边的副本。我们称 $v_p$ 为 $v$ 的主顶点，并称 $\{v_e\}_{e\in E_v^-}$ 为 $v$ 的影子顶点。

至于边，它们体现了图的结构，包括主顶点之间（若存在）、主顶点与影子顶点之间以及影子顶点之间的连接，所有这些都与 $\Gamma$ 中的连接相对应。此外，我们还将每条主边与其影子边相连。

对于每个 $v\in V$ 和每个 $e\in E_v$，势满足

$$b_{v_i} = \begin{cases} 2\alpha_v & i=p \\ 0 & i\neq p \end{cases}, \tag{22}$$

并且对于每个 $e=(u,v)\in E$,

$$\begin{aligned} a_{(v_p,v_{\check{e}})} &= a_{(v_{\check{e}},v_p)} = -1 \\ a_{(u_p,v_p)} &= f_e'(\ell_e) \\ a_{(u_e,v_{\check{e}})} &= g_e(\ell_e) \\ a_{(u_p,v_{\check{e}})} &= f_e(\ell_e) \\ a_{(u_e,v_p)} &= g_e'(\ell_e). \end{aligned} \tag{23}$$

由此得到雅可比矩阵

$$(A_\Gamma\eta)(v_j) = \begin{cases} 2\alpha_v\eta(v_p) + \sum_{e=(u,v)\in E_v^+} \left(f_e'(\ell_e)\eta(u_p) + g_e'(\ell_e)\eta(u_e) - \eta(v_{\check{e}})\right) & j=p \\ f_e(\ell_e)\eta(u_p) + g_e(\ell_e)\eta(u_e) - \eta(v_p) & j=\check{e}: e=(u,v)\in E_v^+ \end{cases} \tag{24}$$

此公式对 $\alpha_v,\alpha_u<\infty$ 成立。在 $\alpha_v=\infty$ $(\alpha_u=\infty)$ 的情形下，将 $\eta(v_p)$ $(\eta(u_p))$ 替换为 $0$。

注意，这些权重是实数，并且由(19)可知，它们不依赖于边的方向。

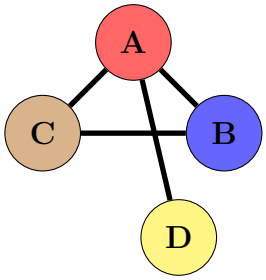


图1

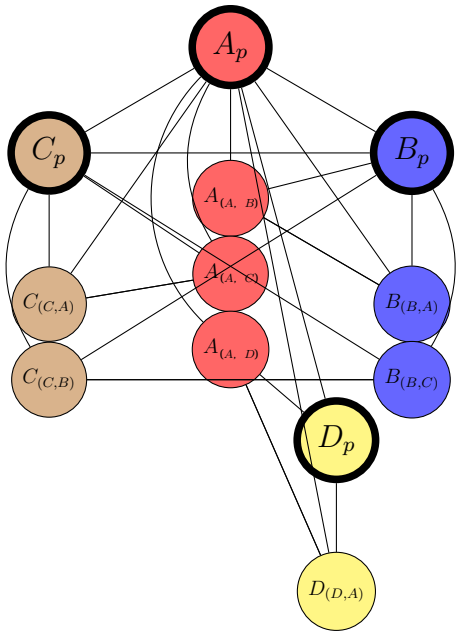


图2

FIGURE 2. 图1是一个量子图 $\Gamma = (V, E, \ell, \mathcal{H}_\Gamma)$，其中 $\alpha_v < \infty$对每个 $v \in V$成立，而图2是其导出图。对于每个 $v \in V$，我们将主顶点与影子顶点分开。每个顶点$v$ 有deg($v$)个影子顶点，每个对应于 $\Gamma$中与 $v$ 关联的一条不同的边。每个影子顶点连接到它在 $\Gamma$中所连接的相邻顶点的主顶点，并连接到对应于同一条边且取相反方向的影子顶点。若主顶点在 $\Gamma$中彼此相连，则它们也彼此相连，并且每个主顶点都连接到其所有对应的影子顶点。

现在我们想定义一个一一线性算子 $\gamma_\lambda : \ker(\lambda - \mathcal{H}) \hookrightarrow \ker(A_\Gamma)$，其中对于每个 $h \in \ker(\lambda - \mathcal{H})$ 以及每个 $v \in V$，

$$\gamma_\lambda(h)(v_p) = h(v),$$

以及对于每个 $e \in E_v^-$，

$$\gamma_\lambda(h)(v_e) = h'_e(v),$$

其中，$h'_e(v)$ 是 $h$ 在 $v$ 沿 $e$方向的出射导数。在继续之前，我们必须验证这确实定义了一个映入 $\ker(A)$ 的单射线性映射，并且保持范数的有限性。

**引理 2.3.** 设 $\Gamma = (V, E, \ell, \mathcal{H}_\Gamma)$ 是一个配备薛定谔算子和 $\delta$ 型顶点条件的量子图。假设：

- 边长 $\{\ell_e\}_{e \in E}$ 取值于一个有限集合，
- 势函数 $\{W|_e\}_{e \in E}$ 取值于一个有限集合。

那么，对于每个特征值 $\lambda \in \mathbb{R}$，映射 $\gamma_\lambda$ 是从$\ker(\lambda - \mathcal{H})$ 到$\ker(A_\Gamma)$的单射线性映射。

**证明。** 首先，我们要证明该算子保持范数的有限性。也就是说，我们要证明

$$\sum_{\substack{v\in V\\ \alpha_v<\infty}}\left(\left|\gamma_\lambda(h)(v_p)\right|^2+\sum_{e\in E_v^-}\left|\gamma_\lambda(h)(v_e)\right|^2\right)+\sum_{\substack{v\in V\\ \alpha_v=\infty}}\sum_{e\in E_v^-}\left|\gamma_\lambda(h)(v_e)\right|^2<\infty\,.$$

我们假设 $h\in\ker(\lambda-\mathcal{H})$ 满足 $\|h\|_{L^2(\Gamma)}<\infty$ 以及 $\|h'\|_{L^2(\Gamma)}<\infty$。根据 (15)，每条边 $e$ 上的函数 $h_e$ 可表示为

$$h_e(x)=h_e(0)f_e(x)+h'_e(0)g_e(x),\qquad x\in[0,\ell_e]\,.$$

由于函数 $f_e$ 和 $g_e$ 连续，因此存在一个常数 $\ell_1>0$，可将其选取为满足 $\ell_1<\frac{1}{2}\min_{e\in E}\ell_e$，且对于所有 $e\in E$ 和所有 $x\in[0,\ell_1]$，以下一致估计成立：

$$\max\left\{|f_e(x)-1|\,,|f'_e(x)|\,,|g_e(x)|\,,|g'_e(x)-1|\right\}<\frac{1}{10}\,.$$

利用

$$2\mathrm{Re}\left(a\bar{b}\right)\le|a|^2+|b|^2\,,\quad\forall a,b\in\mathbb{C}$$

我们得到

$$\int_0^{\ell_1}|h_e(x)|^2\,dx=\int_0^{\ell_1}|h_e(0)|^2\left(f_e(x)\right)^2+2\Re\left(h_e(0)\,\overline{h'_e(0)}\right)f_e(x)\,g_e(x)+|h'_e(0)|^2\left(g_e(x)\right)^2dx\ge$$

$$\ge\int_0^{\ell_1}|h_e(0)|^2\left(\frac{9}{10}\right)^2-\left(|h_e(0)|^2+|h'_e(0)|^2\right)\frac{11}{10}\frac{1}{10}dx=\frac{\ell_1}{100}\left(70\,|h_e(0)|^2-11\,|h'_e(0)|^2\right)\,,$$

同理

$$\int_0^{\ell_1}|h'_e(x)|^2\,dx\ge\frac{\ell_1}{100}\left(70\,|h'_e(0)|^2-11\,|h_e(0)|^2\right)\,.$$

So

$$\int_0^{\ell_1}|h_e(x)|^2\,dx+\int_0^{\ell_1}|h'_e(x)|^2\,dx\ge\frac{59\ell_1}{100}\left(|h_e(0)|^2+|h'_e(0)|^2\right)\,.$$

将所有相关边邻域的贡献相加，我们得到估计

$$\frac{59\ell_1}{100}\left\|\gamma_\lambda(h)\right\|^2_{\ell_2\left(\Gamma_{disc,\lambda}\right)}\le\|h\|^2_{L_2(\Gamma)}+\|h'\|^2_{L_2(\Gamma)}<\infty\,.$$

现在还需证明 $\mathrm{Im}(\gamma_\lambda)\subseteq\ker(A_\Gamma)$。由（17）可知，每个属于 $\ker(\lambda-\mathcal{H})$ 的特征函数 $h\in$ 以及每一对 $v\sim u$，其中 $e=(u,v)$，都满足

$$\gamma_\lambda(h)(v_p)=f_e(\ell_e)\cdot\gamma_\lambda(h)(u_p)+g_e(\ell_e)\cdot\gamma_\lambda(h)(u_e)\,.$$

因此，

$$\left(A_\Gamma\gamma_\lambda(h)\right)(v_{\check{e}})=0\quad\text{for every } v\in V\text{ and every } e\in E_v^+\,.$$

此外，由顶点条件（3）可得：

$$\alpha_v\cdot\gamma_\lambda(h)(v_p)=\sum_{e=(u,v)\in E_v^+}\gamma_\lambda(h)(v_{\check{e}})=-\sum_{e=(u,v)\in E_v^+}\left[f'_e(\ell_e)\cdot\gamma_\lambda(h)(u_p)+g'_e(\ell_e)\cdot\gamma_\lambda(h)(u_e)\right]\,.$$

因此

$$\left(A_\Gamma\gamma_\lambda(h)\right)(v_p)=0\quad\text{for every } v\in V\,.$$

□

以下引理在我们对定理 1.8 的证明分析中发挥着核心作用。其证明利用了映射 $\gamma_\lambda$。

**引理 2.4.** 设 $\mathcal{T}=(V,E,\ell,\mathcal{H})$ 是一棵连通量子树，其上配备 *Schrödinger* 型算子 $\mathcal{H}$ 以及所有顶点上的 $\delta$ 型顶点条件，使得对每一个满足 $\deg(v)>1$ 的顶点 $v$ 都有 $\alpha_v<\infty$。用 $\partial_\infty\mathcal{T}$ 表示满足 $\alpha_v=\infty$(从而$\partial_\infty\mathcal{T}\subseteq\{v\in V\mid \deg(v)=1\}$) 的顶点 $v$ 的集合。

假设 $\lambda\in\sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{H})$，并且存在特征函数 $h\in\ker(\lambda-\mathcal{H})$，使得对所有 $v\in V\setminus\partial_\infty\mathcal{T}$ 都有$h(v)\neq 0$。则下列陈述成立：

(i) 集合 $\{f|_V\mid f\in\ker(\lambda-\mathcal{H})\}$ 是 $\ell^2(V)$ 的一维子空间。(ii) 若 $\mathcal{T}$ 有限，则 $\dim(\ker(\lambda-\mathcal{H}))=1$。

**证明**。取导出图 $\mathcal{T}_{disc,\lambda}=(V_{disc,\lambda},E_{disc,\lambda},a_\lambda,b_\lambda)$，其上带有雅可比算子$A_{\mathcal{T}}$，选取一个根 $r\in V\setminus\partial_\infty\mathcal{T}$，并记 $\eta=\gamma_\lambda(h)$。

令 $\tilde{h}\in\ker(\lambda-\mathcal{H})$，记为 $\zeta=\gamma_\lambda\left(\tilde{h}\right)$，并考虑 $c=\frac{\zeta(r_p)}{\eta(r_p)}$。我们将按到 $r$ 的距离进行归纳，证明对于每个 $v\in V$，都有 $\zeta(v_p)=c\eta(v_p)$，从而证明 (i)。接着证明，若另外 $\mathcal{T}$ 有限，则对于每个 $u\in V_{disc,\lambda}$，都有 $\zeta(u)=c\eta(u)$。由映射 $\gamma_\lambda$ 的单射性可知，这将推出 (ii)。

假设 $\zeta(v_p)=c\eta(v_p)$，并对 $u\sim v$ 记 $e=(u,v)$，其中 $v$ 是图中离 $r$ 更近的那条边。若 $g_e(\ell_e)=0$，则由假设及 (17)，

$$cf_e(\ell_e)\eta(u_p)=c\eta(v_p)=\zeta(v_p)=f_e(\ell_e)\zeta(u_p)\,.$$

在这种情况下，由 (16) 可知 $f_e(\ell_e)\neq 0$，因此 $\zeta(u_p)=c\eta(u_p)$。

假设 $g_e(\ell_e)\neq 0$。考虑通过删除从 $v$ 发出的所有边（连接它与 $u$ 的 $e$ 除外），并保留包含 $v$ 和 $u$ 的连通分支，从 $\mathcal{T}$ 得到的子树 $\Gamma$。注意，在 $\Gamma$ $v$ 的导出图中只有一个影顶点——$v_{\check{e}}$。令 $T_{v,e}$ 为从该导出图中移除 $v_p$（以及从其发出的边），但保留 $v_{\check{e}}$ 后得到的图。这是 $\mathcal{T}_{disc,\lambda}$ 的一个子图。

于是，由于 $A_{\mathcal{T}}$ 是自伴的，我们有

$$\left\langle\zeta,A_{\mathcal{T}}\left(\eta|_{T_{v,e}}\right)\right\rangle=\left\langle A_{\mathcal{T}}\zeta,\eta|_{T_{v,e}}\right\rangle=0\,. \tag{25}$$

由于根据引理 2.3，$A_{\mathcal{T}}\eta=0$，我们得到公式

$$\begin{aligned}A_{\mathcal{T}}\left(\eta|_{T_{v,e}}\right)=&\left[-\eta(v_{\check{e}})+f_e'(\ell_e)\eta(u_p)+g_e'(\ell_e)\eta(u_e)\right]\delta_{v_p}+\\&+\eta(v_p)\delta_{v_{\check{e}}}-f_e'(\ell_e)\eta(v_p)\delta_{u_p}-g_e'(\ell_e)\eta(v_p)\delta_{u_e}\,,\end{aligned} \tag{26}$$

其中用到了 (19)。将 (26) 代入 (25)，并且由于 $\eta(v_p)\neq 0$，我们推得

$$[\zeta(v_{\check{e}})-c\eta(v_{\check{e}})]-f_e'(\ell_e)[\zeta(u_p)-c\eta(u_p)]+g_e'(\ell_e)[c\eta(u_e)-\zeta(u_e)]=0\,. \tag{27}$$

现在，利用方程 $[A_{\mathcal{T}}\zeta](v_{\check{e}})=[A_{\mathcal{T}}\zeta](u_e)=0$ 和 (19) 写出

$$\zeta(v_{\check{e}})=\frac{1}{g_e(\ell_e)}\left(\zeta(u_p)-g_e'(\ell_e)\zeta(v_p)\right),$$

and

$$\zeta(u_e)=\frac{1}{g_e(\ell_e)}\left(\zeta(v_p)-f_e(\ell_e)\zeta(u_p)\right).$$

将这些代入（27），并应用（16），得到：

$$\zeta(u_p)=\frac{cg_e(\ell_e)}{2}\left[\frac{2g_e'(\ell_e)}{g_e(\ell_e)}\eta(v_p)+\eta(v_{\check{e}})-f_e'(\ell_e)\eta(u_p)-g_e'(\ell_e)\eta(u_e)\right]. \tag{28}$$

接下来，利用 $[A_{\mathcal{T}}\eta](u_e) = 0$ 和 $[A_{\mathcal{T}}\eta](v_{\check{e}}) = 0$ 推导出 $\eta(v_{\check{e}})$ 和 $\eta(v_p)$ 的类似表达式。将这些代入（28），得出 $\zeta(u_p) = c\eta(u_p)$，从而完成了（i）的证明。

对于 (ii)，若 $g_e(\ell_e) \neq 0$，将 $\zeta(u_p) = c\eta(u_p)$ 代入我们已得到的关于 $\zeta(v_{\check{e}})$ 和$\eta(v_{\check{e}})$ 的公式中，得到 $\zeta(v_{\check{e}}) = c\eta(v_{\check{e}})$。最后，对 $[A_{\mathcal{T}}\eta](v_{\check{e}})$ 使用 (24)，并结合关于 $\zeta(u_e)$ 的公式，我们推得 $\zeta(u_e) = c\eta(u_e)$。

至此，我们已完成对每条满足 $g_e(\ell_e) \neq 0$ 的边 $e \in E$ 的证明。注意，由 (19) 可知，这一性质与边的方向无关。

若 $\mathcal{T}$ 是有限的，考虑由满足 $g_e(\ell_e) = 0$ 的边 $e \in E$ 张成的子图 $G$，并令 $T$ 为 $G$ 的一个连通分支。假设该子图的叶子之一（即度为一的顶点） $w$ 满足狄利克雷条件（因此，它也是 $\mathcal{T}$ 的一个叶节点），并假设 $w$ 通过顶点 $u$ 与子图 $G$ 的其余部分相连。记作$e = (w,\ u)$（其中 $\deg(w) = 1$，且 $u$ 是唯一与 $w$ 相连的顶点）。由 (24)，因为$g_e(\ell_e) = 0$，所以 $\eta(w_p) \neq 0$ 当且仅当 $\eta(u_p) \neq 0$。因此 $\eta(u_p) = 0$；若 $\alpha_u < \infty$，则这与我们关于 $\eta$ 的假设矛盾。若 $\alpha_u = \infty$，则 $\mathcal{T}$ 中只有两个顶点和一条边，而此时 $\mathcal{T}$ 是一个区间，因此结论显然成立。

因此，我们可以假设，对于 $T$ 的每个顶点 $u$，都有 $\alpha_u < \infty$。现在，再取 $T$ 的一个叶节点 $w$，令 $e = (w, u)$ 为连接 $w$ 与 $T$ 其余部分的唯一一条边。注意，对于 $\mathcal{T}$ 中从 $w$ 引出的任意边 $e' \neq e$（如果存在这样的边），都有 $\zeta(w_{e'}) = c\eta(w_{e'})$。此外，$\zeta(w_p) = c\eta(w_p)$。由 $\alpha_w < \infty$ 给出的顶点条件可知，$\zeta(w_e) = c\eta(w_e)$。沿着边 $e$ 追踪 $h$ 和 $h$，可得 $h'(u) = ch'(u)$，即 $\zeta(u_{\check{e}}) = c\eta(u_{\check{e}})$。我们可以从所有叶节点开始重复这一过程，然后从 $T$ 中移除这些叶节点。这样会得到一棵新的有限树，因此它也有叶节点。重复此过程，最终便会耗尽这张有限图。因此，证毕。□

下面的定理本身也具有独立价值，它给出了态密度的界。我们将在下文使用其推论。

**定理 2.5.** 设 $\Gamma = (V, E, \ell, \mathcal{H}_\Gamma)$ 是一个紧量子图，具有薛定谔型微分算子和 $\delta$ 型顶点条件；设 $\mathcal{T} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \ell_{\mathcal{T}}, \mathcal{H}_{\mathcal{T}})$ 是它的万有覆盖。设 $\mu$为与 $\mathcal{T}$关联的态密度，并记

$$W_{\max} = \max_{x\in\Gamma} W(x), \quad W_{e,\max} = \max_{x\in I_e} W(x), \quad W_{e,\min} = \min_{x\in I_e} W(x), \quad V^\circ = \{v \in V \mid \alpha_v < \infty\},$$

其中，我们将 $\Gamma$ 的内部记作 $V^\circ$。于是：

*i.* 对每个 $x > W_{\max}$，

$$\max\left\{\frac{\sum_{e\in E}\ell_e\sqrt{x - W_{e,\max}}}{\pi\mathcal{L}_E} - \frac{|E|}{\mathcal{L}_E}, 0\right\} \leq \mu\big((-\infty, x)\big) \leq \mu\big((-\infty, x]\big) \leq \frac{\sum_{e\in E}\ell_e\sqrt{x - W_{e,\min}}}{\pi\mathcal{L}_E} + \frac{|V^\circ|}{\mathcal{L}_E}. \tag{29}$$

特别地，以下魏尔型渐近成立

$$\mu\big((-\infty, x]\big) = \frac{\sqrt{x}}{\pi} + O(1) \qquad x \to \infty. \tag{30}$$

*ii.* 对每个 $W_{\max} < a \le b < \infty$,

$$\max\left\{\frac{\sum_{e\in E}\ell_e\left(\sqrt{b-W_{e,\max}}-\sqrt{a-W_{e,\min}}\right)}{\pi}-\frac{|E|+|V^\circ|}{\mathcal{L}_E},0\right\}\le\mu\big((a,b)\big) \tag{31}$$
$$\le\mu\big([a,b]\big)\le\frac{\sum_{e\in E}\ell_e\left(\sqrt{b-W_{e,\min}}-\sqrt{a-W_{e,\max}}\right)}{\pi\mathcal{L}_E}+\frac{|E|+|V^\circ|}{\mathcal{L}_E}.$$

**推论 2.6.** 在采用 $\delta$型顶点条件的情形下，态密度 $\mu$是局部有限且正则的测度。

为证明定理 2.5，我们将使用关于斯图姆－刘维尔算子的 [10], 个标准结果，以及一个我们在此证明的引理。

**引理 2.7.** *[10,* 定理 *3.1.1]* 设 $\Gamma$ 为一个配备自伴薛定谔算子 $\mathcal{H}_\Gamma$的紧量子图。则预解算子 $(\mathcal{H}_\Gamma - i)^{-1}$ 在$L^2(\Gamma)$上是紧的。因此， $\mathcal{H}_\Gamma$ 具有由特征函数组成的完备正交系，且其谱 $\sigma(\mathcal{H}_\Gamma)$ 仅由孤立特征值 $\lambda_n$ 构成，这些特征值的重数有限，且 $\lambda_n \to \infty$为 $n \to \infty$。

我们用 $\lambda_n(\Gamma)$表示 $\Gamma$的特征值（按非递减顺序排列）序列，并按重数计入。

**引理 2.8.** *[10,* 定理 *3.1.8]* 设 $\Gamma_{\alpha'}$ 是一个带有 $\delta$ 型顶点条件的紧量子图，它由图 $\Gamma_\alpha$ 通过将顶点 $v$ 处条件的系数从 $\alpha$ 改为 $\alpha'$ 得到。若 $-\infty < \alpha < \alpha' \le \infty$，则

$$\lambda_n(\Gamma_\alpha) \le \lambda_n(\Gamma_{\alpha'}) \le \lambda_{n+1}(\Gamma_\alpha),$$

其中，特征值按重数计，符号沿用引理 *2.7* 中的记法。

以下是斯图姆－刘维尔算子理论中的一个标准结果。

**引理 2.9.** （精确表述见例如 *[31]* 或 *[12,* 命题 *7.14]*）考虑如下系统

$$-\frac{d^2}{dx^2}u(t)+q(t)u(t)=\lambda u(t),\quad u(0)=u(L)=0$$

定义在区间 $[0,L]$上，其中 $L>0$ 和 $q\in C$（$[0,L]$）。那么，该系统的第 $n$ 个特征值 $\lambda_n$ 满足以下界

$$\frac{\pi^2n^2}{L^2}+q_{\min}\le\lambda_n\le\frac{\pi^2n^2}{L^2}+q_{\max}, \tag{32}$$

其中

$$q_{\min}=\min_{t\in[0,L]}q(t),\qquad q_{\max}=\max_{t\in[0,L]}q(t). \tag{33}$$

**引理 2.10**。 设 $\Gamma=(V,E)$ 是一个配备了薛定谔算子 $\mathcal{H}_\Gamma$ 的紧量子图。则 $\mathcal{H}_\Gamma$ 有下界，即其谱有下界。此外，该下界可以为 $\Gamma$ 及其所有覆盖图统一选取。

**证明。** 设 $\mathcal{H}_0 = -\frac{d^2}{dx^2}$ 表示 $\Gamma$ 上的标准薛定谔算子。如 [22], 的推论10所示，算子 $\mathcal{H}_0$ 有下界；更确切地说，存在一个常数 $C' \geq 0$ 使得

$$\mathcal{H}_0 \geq -C' \operatorname{Id}.$$

常数 $C'$ 仅取决于有限的边长集合以及图的顶点条件。

由于由势 $W$ 定义的乘法算子满足 $\|W\|_{\mathrm{op}} = \|W\|_\infty$， [29] 中的定理 9.1 通过标准微扰理论保证了相应的微扰算子结果。

最后，此下界对 $\Gamma$ 的所有覆盖图都是一致的，因为势值、边长和顶点条件在覆盖下保持不变。□

现在我们可以证明定理 2.5。

**定理 2.5 的证明。** 设 $\Gamma_n = (V_n, E_n, \ell_n, \mathcal{H}_{\Gamma_n})$ 是 $\Gamma = (V, E, \ell, \mathcal{H}_\Gamma)$ 的一列 $m_n$-覆盖，其覆盖映射为 $\Xi_n \colon \Gamma_n \to \Gamma$，其中 $m_n \to \infty$ 如 $n \to \infty$，与定理 1.6(i) 中一样，并且围长趋于无穷。令 $x > W_{\max}$。对每个 $n$，令 $\Gamma_{n,D}$ 为从 $\Gamma_n$ 得到的图，其所有顶点 $v \in V_n$ 均施加狄利克雷条件。令 $\{\lambda_{n,\ell}\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ 为 $\mathcal{H}_{\Gamma_n}$ 的特征值，并令 $\{\lambda_\ell(\Gamma_{n,D})\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ 为 $\mathcal{H}_{\Gamma_{n,D}}$ 的特征值。

对于每个 $e \in E_n$，令 $\mathfrak{a}_{n,e}$ 为满足以下条件的最大非负整数

$$\frac{\mathfrak{a}_{n,e}^2 \pi^2}{\ell_e^2} + W_{e,\min} \leq x,$$

并类似地用 $W_{e,\max}$ 代替来定义 $\mathfrak{b}_{n,e}$。于是

$$\frac{\ell_e}{\pi}\sqrt{x - W_{e,\min}} - 1 < \mathfrak{a}_{n,e} \leq \frac{\ell_e}{\pi}\sqrt{x - W_{e,\min}}$$

$$\frac{\ell_e}{\pi}\sqrt{x - W_{e,\max}} - 1 < \mathfrak{b}_{n,e} \leq \frac{\ell_e}{\pi}\sqrt{x - W_{e,\max}}\,.$$

由引理 2.9 可知

$$\sum_{e\in E_n} \frac{\ell_e}{\pi}\sqrt{x - W_{e,\max}} - |E_n| < \sum_{e\in E_n} \mathfrak{b}_{n,e} \leq \#\left\{\ell \in \mathbb{N} \mid \lambda_\ell\left(\Gamma_{n,D}\right) \leq x\right\} \leq$$
$$\leq \sum_{e\in E_n} \mathfrak{a}_{n,e} \leq \sum_{e\in E_n} \frac{\ell_e}{\pi}\sqrt{x - W_{e,\min}}\,.$$

根据引理 2.8，在恢复 $m_n|V^\circ|$ 内部顶点处的原始顶点条件后，特征值计数测度的累积分布函数 $\nu_n\big((-\infty, x]\big)$ 满足

$$\frac{\sum_{e\in E} \ell_e\sqrt{x - W_{e,\max}}}{\pi\mathcal{L}_E} - \frac{|E|}{\mathcal{L}_E} < \nu_n\big((-\infty, x]\big) \leq \frac{\sum_{e\in E} \ell_e\sqrt{x - W_{e,\min}}}{\pi\mathcal{L}_E} + \frac{|V^\circ|}{\mathcal{L}_E}\,.$$

类似地，对于开区间：

$$\frac{\sum_{e\in E} \ell_e\sqrt{x - W_{e,\max}}}{\pi\mathcal{L}_E} - \frac{|E|}{\mathcal{L}_E} \leq \nu_n\big((-\infty, x)\big) < \frac{\sum_{e\in E} \ell_e\sqrt{x - W_{e,\min}}}{\pi\mathcal{L}_E} + \frac{|V^\circ|}{\mathcal{L}_E}\,.$$

根据引理 2.10，存在一个常数 $C \geq 0$，使得对于每个 $n$， $\mathcal{H}_n$ 的谱都包含于 $[-C, \infty)$。因此，

$$\nu_n\big((-\infty, x)\big) = \nu_n\big((-C, x)\big),$$
$$\nu_n\big((-\infty, x]\big) = \nu_n\big([-C, x]\big),$$

并且类似地，

$$\mu\big((-\infty, x)\big) = \mu\big((-C, x)\big),$$
$$\mu\big((-\infty, x]\big) = \mu\big([-C, x]\big).$$

根据定理 1.6(ii)中建立的模糊收敛，对于每个 $n$，我们有，

$$\mu\big((-C, x)\big) \;\leq\; \nu_n\big((-C, x)\big) \;\leq\; \nu_n\big([-C, x]\big) \;\leq\; \mu\big([-C, x]\big).$$

因此，对于每个 $\varepsilon > 0$，

$$\limsup_{n\to\infty} \nu_n\big([-C+\varepsilon, x-\varepsilon]\big) \leq \mu\big([-C+\varepsilon, x-\varepsilon]\big) \leq \mu\big((-C, x)\big)$$
$$\leq \mu\big([-C, x]\big) \leq \mu\big((-C-\varepsilon, x+\varepsilon)\big) \leq \liminf_{n\to\infty} \nu_n\big((-C-\varepsilon, x+\varepsilon)\big).$$

最后，令 $\varepsilon \downarrow 0$并利用测度的单调连续性，即得不等式 (29)。

现在，将 $\sqrt{1 - \frac{W_{e,\max}}{x}}$ 和 $\sqrt{1 - \frac{W_{e,\min}}{x}}$ 展开为泰勒级数，即可立即得到 (30)。

对任意 $W_{\max} \leq a \leq b < \infty$，我们得到

$$\frac{\sum_{e\in E} \ell_e \left(\sqrt{b - W_{e,\max}} - \sqrt{a - W_{e,\min}}\right)}{\pi} - \frac{|E| + |V^\circ|}{\mathcal{L}_E} \leq \mu\big((a, b)\big) =$$
$$= \mu\big((-\infty, b)\big) - \mu\big((-\infty, a]\big) \leq \frac{\sum_{e\in E} \ell_e \left(\sqrt{b - W_{e,\min}} - \sqrt{a - W_{e,\max}}\right)}{\pi \mathcal{L}_E} + \frac{|E| + |V^\circ|}{\mathcal{L}_E}.$$

同一证明适用于闭区间 $[a, b]$，从而确立 (31)。 □

## 3. PROOF OF THE MAIN THEOREMS

我们从一个重要观察开始。

**观察 3.1.** 在 *Q-Aomoto* 集中有两类连通分支：

*i.* 一组连通的顶点以及从它们发出的边。*ii.* 边 $e = (v, u) \in E_\lambda(\Gamma)$ 使得 $g_e(\ell_e) = 0$（回顾 (15)），其中 $v, u \notin X_\lambda(\Gamma)$。注意，由 ***(19)***， $g_e(\ell_e) = 0$ 当且仅当 $g_{\bar{e}}(\ell_e) = 0$。

图 3 展示了一个具有这两种连通分支的 Q-Aomoto 集示例。

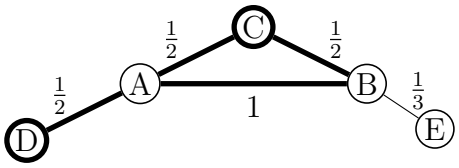


FIGURE 3. 一个量子图 $\Gamma$，其中突出显示了与 $\lambda = \pi^2$ 对应的 Q-Aomoto 集。该图在所有顶点处均配备标准薛定谔算子和基尔霍夫边界条件。边长标注在各条边旁。顶点$D$ 及其关联边，以及顶点 $C$ 及其关联边，构成观察 3.1 中所述第一类的两个连通分支。边 $(A, B)$ 构成第二类的一个连通分支。在此例中， $\partial X_{\pi^2}(\Gamma) = \{A, B\}$。

**定理 1.8(i)-(ii) 的证明**。 对于第二种类型的 Q-Aomoto 分支，结论显然成立（根据观察 3.1）。对于第一种类型，考虑一个连通分支 $X \subseteq \Xi^{-1}(X_\lambda(\Gamma))$。利用特征函数的可数线性组合，我们可以构造一个函数 $h$ ，使得对于每个 $v \in V(X)$，都有 $h(v) \neq 0$ ，并且对于每个 $e \in E(X)$， $h|_e$ 不恒为零。在子图 $X \cup \partial X \cup \partial_\infty X$ 的边界 $\partial X$ 上施加狄利克雷边界条件。根据引理 2.4(i)，特征函数在 $V(X)$ 上的限制属于 $\ell^2(V(X))$ 的一个一维子空间。如果 $\Xi(X)$ 包含一个圈，那么 $X$ 将是无限且周期的，这与该子集的对称性以及 $h$ 在平移下的不变性相矛盾。

至此，我们证明了定理 1.8(i)，特别地证明了 $X$ 是有限的。最后，引理 2.4(ii)推出定理 1.8(ii)。□

回顾一下，图中的纯环 是指这样一种环：除至多一个顶点外，每个顶点的度均为 2，该特殊顶点是环与图的其余部分相连的顶点。下一个引理表明，如果一个特征函数的支撑包含纯环的提升中的某些顶点，那么它必定在与图相连的那个顶点处为零。

**引理 3.2.** 设 $L \subseteq \Gamma$ 是一个纯环， $u$ 是 $L$ 与图 $\Gamma$ 的其余部分相连的顶点。假设对于每个顶点 $v \in V(L)$， $\alpha_v < \infty$。设 $\lambda \in \sigma_{\mathfrak{p}}(\mathcal{H}_\mathcal{T})$，并假设 $X_\lambda(\Gamma) \cap L \neq \emptyset$。那么必然有 $u \in \partial X_\lambda(\Gamma)$。

**证明**。 由 $\delta$ 型条件 (3) 可知， $L$ 的所有边都属于 $E_\lambda(\Gamma)$。反设 $u \in V_\lambda(\Gamma)$。那么存在一个特征函数 $h \in \ker(\lambda - \mathcal{H}_\mathcal{T})$，它在一个无限连通分支 $X \subseteq \mathcal{T}$ 上不为零；该分支中间可能省略了 $\Xi^{-1}(L)$ 中一些度为 2 的顶点。于是可以在此处应用引理 2.4 的证明中的归纳论证。

事实上，对于每个 $v \in V(L) \setminus \{u\}$ 和每个满足 $h(\tilde{v}) = 0$的 $\tilde{v} \in \Xi^{-1}(v)$，令 $e_1, e_2 = (\tilde{v}, w) \in E_{\tilde{v}}^-$ 。由 (3) 可得

$$h'_{e_1}(\tilde{v}) = -h'_{e_2}(\tilde{v}).$$

这使我们能够根据 $\gamma(h)(\tilde{v}_{e_1})$ 确定值 $\gamma(h)(\tilde{v}_{e_2})$，其中 $\gamma(h)(\tilde{v}_p) = 0$（回忆上一节中的导出图）。随后，应用 (17) 中的传播关系，我们可以确定 $\gamma(h)(w_p)$ 和 $\gamma(h)(w_{e_2})$，并沿着圈继续归纳下去。

通过从提升 $\tilde{u} \in \Xi^{-1}(u) \cap X$ 开始进行“归纳”，我们得出结论：特征函数在 $X$ 上的限制必定属于 $L^2(X)$ 的一个一维子空间。然而，

圈固有的对称性以及 $L$ 内的平移不变性与这一结论相矛盾，这意味着 $u \in \partial X_\lambda(\Gamma)$，正如所声称的那样。□

根据定理 1.8(i)–(ii)，我们现在引入一些记号，它们将在后续定理的证明中发挥作用。

**记号 3.3.** 固定 $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{H}_{\mathcal{T}})$。令 $T_1, \dots, T_m$ 为与 $\lambda$ 相关联的 $\Gamma = (V, E, \ell, \mathcal{H}_\Gamma)$ 的 *Q-Aomoto* 连通分支（因此 $m = ccX_\lambda(\Gamma)$ 是 *Q-Aomoto* 集的连通分支数）。由于 $X_\lambda(\Gamma)$ 无环，其连通分支都是树，因此可与 $X_\lambda(\Gamma)$ 在 $\mathcal{T}$ 中的提升的连通分支相对应。根据定理 *1.8(ii)*，将 $\lambda$- 特征函数空间限制到每个这样的分支后，所得空间都是一维的，因此我们可以将 $h_1, \dots, h_m$ 定义为特征函数限制在相应分支上所得的归一化函数。这些函数也是该子图的归一化特征函数

$$X_\lambda(\Gamma) \cup \partial X_\lambda(\Gamma) \cup \partial_\infty X_\lambda(\Gamma)\,,$$

现在，在 $\partial X_\lambda(\Gamma)$ 上施加狄利克雷边界条件。由于势是实值的，我们可以假设函数 $h_1, \dots, h_m$ 均为实值且已归一化。令 $S_i$ 表示万有覆盖 $\mathcal{T} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \ell_{\mathcal{T}}, \mathcal{H}_{\mathcal{T}})$ 中子图 $T_i$ 的互不相交副本所构成的集合。对于每个 $s \in S_i$，我们定义函数 $h_{i,s} \in H^2(\mathcal{T})$ 如下：

$$h_{i,s}(x) = \begin{cases} h_i(\Xi(x)) & x \in s \\ 0 & otherwise. \end{cases}. \tag{34}$$

于是，每个 $h \in \ker(\lambda - \mathcal{H}_{\mathcal{T}})$ 都可以分解为

$$h = \sum_{i=1}^{m} \sum_{s \in S_i} \beta_s h_s,\ \beta_s \in \mathbb{C}\,. \tag{35}$$

注意，函数 $h_s$ 不一定属于 $\mathit{Dom}(\mathcal{H}_{\mathcal{T}})$，因为不要求它们满足边界 $\partial X_\lambda(\Gamma)$处的顶点条件。

现在我们构造一个二分离散图 $\Gamma' = (V', E', a', b')$（它不是由定义 2.2 得到的导出图）。该构造遵循一种与 Banks、Garza-Vargas 和 Mukherjee 在 [8,第 5 节1]针对离散图提出的过程类似的方法。我们将顶点集定义为 $V' = U \cup \partial X_\lambda(\Gamma)$，其中 $U = \{t_1, \dots, t_m\}$，且每个 $t_i$ 对应一个 Q-Aomoto 分支 $T_i$。对于每个 $i \in [m]$，顶点 $t_i$ 称为 $T_i$ 的代表顶点。边集 $E'$ 由连接每个 $t_i$ 与任意一个在原图 $\Gamma$ 中和 $T_i$ 相邻的顶点 $v \in \partial X_\lambda(\Gamma)$ 的边组成。注意，连通分支 $T_i$ 可能是一条单独的边（不包含其相连的顶点）。在 $\Gamma'$ 中，这样的边由一个顶点表示。

对于每个 $i \in [m]$ 以及每个与顶点$u_i \in V(T_i)$处的子树 $T_i$ 相邻的 $v \in \partial X_\lambda(\Gamma)$，我们定义权重 $a'_{(t_i,v)} := (h_i)'_{(u_i,\ v)}(v)$。

我们设定 $b' \equiv 0$。如果原图中的一个顶点通过多重边与某个 Q-Aomoto 分支相连，那么在 $\Gamma'$中就会出现多条对应边，从而可能产生边重数。也就是说，二分图 $\Gamma'$ 可能在 $\partial X_\lambda(\Gamma)$中的一个顶点与某个 Q-Aomoto 分支的代表顶点 $t_i$ 之间包含平行边。图 4 展示了此类对应图的一个示例。

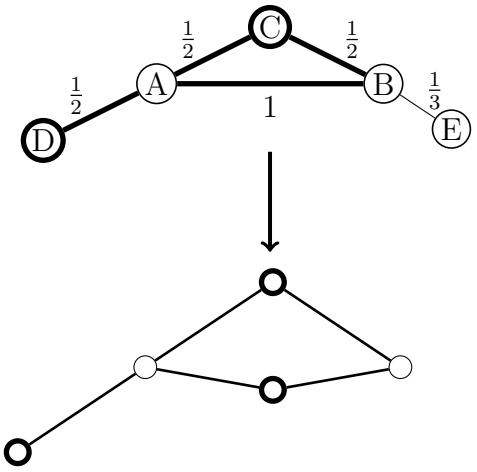


FIGURE 4. 图 3 中的量子图及其对应于特征值 $\lambda = \pi^2$ 的关联离散图。 $\lambda$ 的 Q-Aomoto 集已高亮标出。在下方的离散图中，与 Q-Aomoto 集的连通分支相对应的顶点也已高亮标出。注意，边 $(A, B)$ 表示观察 3.1 中所述的第二类 Q-Aomoto 分支，在离散模型中被表示为一个顶点。

令 $\mathcal{T}'$ 表示 $\Gamma'$的万有覆盖，令 $\Xi' : \mathcal{T}' \to \Gamma'$ 为相应的覆盖映射，并令 $A_{\mathcal{T}'}$ 为由参数 $\{a', b'\}$定义的雅可比算子。我们定义一个映射

$$\varphi : \ker(\lambda - \mathcal{H}_{\mathcal{T}}) \xrightarrow{\sim} \ker(A_{\mathcal{T}'})$$

by

$$\varphi(h) := \varphi\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{s\in S_i}\beta_s h_s\right) := \sum_{i=1}^{m}\sum_{s\in S_i}\beta_s\delta_{u_s} =: \tilde{h}\,, \tag{36}$$

对每个 $h \in \ker(\lambda - \mathcal{H}_{\mathcal{T}})$，其中 $u_s$ 表示 $\mathcal{T}'$ 中对应于 Q-Aomoto 连通分支 $s$ 的顶点，而 $\delta_{u_s}$ 是 $u_s$ 处的示性函数。

按照 [8] 中的策略，我们将首先证明 $\varphi$ 定义了一个等距嵌入，随后证明它是一个同构。

**命题 3.4.** 由 (36) 定义的映射 $\varphi$ 是 $\ker(\lambda - \mathcal{H}_{\mathcal{T}})$ 到$\ker(A_{\mathcal{T}'})$的等距包含。

**证明**。 等距映射由每个函数 $h_s$ 的归一化立即得出。还需验证 $\varphi(h) \in \ker(A_{\mathcal{T}'})$。由于 $\mathcal{T}'$ 是二分图且 $b' \equiv 0$，只需证明

$$\left(A_{\mathcal{T}'}\varphi(h)\right)(v) = 0$$

对每个 $v \in \Xi'^{-1}(\partial X_\lambda(\Gamma))$ 都成立。事实上，在这种情况下我们有

$$\left(A_{\mathcal{T}'}\varphi(h)\right)(v) = \sum_{e\in E_v^-} h'_e(v) = \alpha_v h(v) = 0$$

正如所要求的。 □

**命题 3.5**。 回顾离散 *Aomoto* 集的定义 *1.7*。令 $G'_1$、...、$G'_n$ 表示 $\Gamma'$ 的连通分支，并对每个 $j=1$、...、$n$ 定义 $U_j := G'_j \cap U$。那么，与特征值 0 对应的 $G_j$ 的 *Aomoto* 集满足

$$X_0\left(G'_j\right) = U_j\,.$$

**证明**。 将 $T_1,\dots,T_m$ 记为 $\Gamma$ 的 Aomoto 分支，使得它们对应的代表顶点 $U_j = \{t_1,\dots,t_m\}$ 位于 $G'_j$ 中。对于每个 $i$，存在一个函数$h \in \ker(\lambda - \mathcal{H}_{\mathcal{T}})$，满足 $\varphi(h)(s_i) \neq 0$，其中某个 $s_i \in \Xi'^{-1}(t_i)$。由命题 3.4，得到$\varphi(h) \in \ker(A_{\mathcal{T}'})$，因此 $U_j \subseteq X_0(G'_j)$。

根据 [8, 定理 3.1(i)], ，离散图的 Aomoto 分支是无环的，因此 $X_0(G'_j)$ 在 $G'_j$中构成一个森林。反设 $X_0(G'_j)$ 中某些顶点相连。那么存在一棵具有多个顶点的树 $T_i \subseteq X_0(G'_j)$，以及一个函数 $\varphi(h) \in \ker(A_{\mathcal{T}'})$，使得对于某个 $T_i$ 的提升 $S \subseteq \Xi'^{-1}(T_i)$ 中的每个 $u$，都有 $\varphi(h)(u) \neq 0$。

然而，由于 $A_{\mathcal{T}'}$ 具有零势，对于 $S$中的叶节点 $\tilde{v}$，必有 $(A_{\mathcal{T}'}\varphi(h))(\tilde{v}) \neq 0$，这就产生了矛盾。因此， $X_0(G'_j)$ 必须是一个独立集。由 $G'_j$的构造可知， $U_j$ 是 $G'_j$中的极大独立集，因而 $X_0(G'_j) = U_j$。□

**命题 3.6.** 映射 $h \mapsto h$ 是$\ker(\lambda - \mathcal{H}_{\mathcal{T}})$ 与$\ker(A_{\mathcal{T}'})$之间的等距同构。

**证明**。 我们要证明 $\varphi$ 是满射。事实上，对于每个 $\eta \in \ker(A_{\mathcal{T}'})$，根据命题 3.5，存在 $\beta_s$ 使得

$$\eta = \sum_{i=1}^{m} \sum_{s\in S_i} \beta_s \delta_{u_s}$$

采用记号 3.3 中的记号。于是

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{s\in S_i} \beta_s h_s\right) = \eta\,.$$

□

**引理 3.7**。 *i.* 设 $G=(V,E,a,b)$ 是一个有限加权离散图， $\mathcal{T}$ 是其万有覆盖，覆盖映射为 $\Xi: \mathcal{T} \to G$，并设 $\lambda \in \sigma_{\mathfrak{p}}(A_{\mathcal{T}})$。设 $\mathcal{B}$ 是$\ker(\lambda - A_{\mathcal{T}})$的一组标准正交基。那么，对每个 $u \in V$ 以及每个 $\tilde{u} \in \Xi^{-1}(u)$，与 $\delta_{\tilde{u}}$, $\mu_u$ 相关联的谱测度与 $\tilde{u} \in \Xi^{-1}(u)$ 的选择无关，且满足

$$\mu_u(\{\lambda\}) = \sum_{\eta\in\mathcal{B}} |\eta(\tilde{u})|^2\,.$$

*ii.* 设 $\Gamma=(V,E,\ell,\mathcal{H}_\Gamma)$ 是一个具有 $\delta$ 型顶点条件的紧量子图，配备一个薛定谔型微分算子 $\mathcal{H}_\Gamma$。设 $\mathcal{T}$ 是其万有覆盖，覆盖映射为 $\Xi: \mathcal{T} \to \Gamma$，并设 $\lambda \in \sigma_{\mathfrak{p}}(\mathcal{H}_{\mathcal{T}})$。令 $\mathcal{B}$ 为 $\ker(\mathcal{H}_{\mathcal{T}} - \lambda)$的一组标准正交基。那么，对每个具有谱测度 $\mu_g$ 的 $g \in L^2(\mathcal{T})$，有

$$\mu_g(\{\lambda\}) = \sum_{h\in\mathcal{B}} |\langle g,h\rangle|^2\,.$$

**证明。** 令 $P_{\{\lambda\}}$ 表示投影到对应于特征值 $\lambda$ 的特征空间上的谱投影。那么，在离散情形下，我们有：

$$\mu_u(\{\lambda\}) = \left\langle P_{\{\lambda\}}\delta_{\tilde{u}}, \delta_{\tilde{u}}\right\rangle = \left\|P_{\{\lambda\}}\delta_{\tilde{u}}\right\|^2 = \sum_{\eta\in\mathcal{B}} \left|\left\langle P_{\{\lambda\}}\delta_{\tilde{u}}, \eta\right\rangle\right|^2 =$$
$$= \sum_{h\in\mathcal{B}} \left|\left\langle \delta_{\tilde{u}}, P_{\{\lambda\}}\eta\right\rangle\right|^2 = \sum_{h\in\mathcal{B}} \left|\langle \delta_{\tilde{u}}, \eta\rangle\right|^2 = \sum_{h\in\mathcal{B}} |\eta(\tilde{u})|^2 .$$

对 $\tilde{u}$ 的选择不变，这源于对称性。

对于量子（连续）情形，类似地可得：

$$\mu_g(\{\lambda\}) = \sum_{h\in\mathcal{B}} \left|\left\langle P_{\{\lambda\}}g, h\right\rangle\right|^2 = \sum_{h\in\mathcal{B}} \left|\left\langle g, P_{\{\lambda\}}h\right\rangle\right|^2 = \sum_{h\in\mathcal{B}} |\langle g, h\rangle|^2 .$$

□

**引理 3.8.** 设 $\Gamma = (V, E, \ell, \mathcal{H}_\Gamma)$ 是一个带有 $\delta$ 型顶点条件和 *Schr¨inger* 型微分算子 $\mathcal{H}_\Gamma$ 的紧量子图。设 $\mathcal{T}$ 是其万有覆盖，覆盖映射为 $\Xi\colon \mathcal{T}\to\Gamma$，且设 $\lambda\in\sigma_{\mathfrak{p}}(\mathcal{H}_{\mathcal{T}})$。

设 $\Gamma' = (V', E', a', b')$ 是相应的二分离散图，并设 $T\subseteq\Gamma$ 是一个 *Q-Aomoto* 分支，其对应的顶点为 $t\in V(\Gamma')$。用 $\mu'_t$ 表示示性函数 $\delta_t$ 的谱测度。

设 $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是 $L_2(T) = \bigoplus_{e\in T} L_2(e)$ 的一组标准正交基，并设 $\mu_{g_k}$ 是与函数 $g_k\circ\Xi|_{\widetilde{T}}$ 相关联的谱~测度，其中 $T\subseteq\mathcal{T}$ 是 $T$ 的一个副本。那么

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu_{g_k}(\{\lambda\}) = \mu'_t(\{0\}) .$$

**证明。** 令 $\mathcal{T}'$ 为 $\Gamma'$ 的万有覆盖，并令 $\tilde{t}\in\mathcal{T}'$ 为与 $\sim T$ 对应的顶点。那么，由于 $\varphi$ 是等距映射，对于每个 $h\in$，都有 ker$(\mathcal{H}_{\mathcal{T}}-\lambda)$

$$|\varphi(h)(\tilde{t})|^2 = \sum_{\tilde{e}\in E(\widetilde{T})} \int_{\tilde{e}} |h|^2\, dx = \sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle h, \tilde{g}_k\rangle|^2 ,$$

其中 $\tilde{g}_k := g_k\circ\Xi|_{\widetilde{T}}$ 对每个 $k\in\mathbb{N}$ 都成立。

利用引理 3.7，我们得到

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu_{g_k}(\{\lambda\}) = \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{h\in\mathcal{B}} |\langle h, \tilde{g}_k\rangle|^2 = \sum_{h\in\mathcal{B}}\sum_{k\in\mathbb{N}} |\langle h, \tilde{g}_k\rangle|^2 = \sum_{h\in\mathcal{B}} \|h\|^2_{L^2(\widetilde{T})} = \sum_{h\in\mathcal{B}} |\varphi(h)(\tilde{t})|^2 = \mu'_t(\{0\}),$$

因为 $\{\varphi(h)\}_{h\in\mathcal{B}}$ 是 ker $(A_{\mathcal{T}})$ 的一组基。 □

现在我们可以证明定理 1.8(iii)。

**定理 1.8(iii) 的证明。** 在 [8,观察 5.5], 中，Banks、Garza-Vargas 和 Mukherjee 考虑了一个类似的情形，并证明对于顶点 $t\in U$ 的谱测度 $\mu'_t$（其中 $U$ 是与 Q-Aomoto 分支对应的顶点集合），对应图的指标满足：

$$I_0(\Gamma') = cc(X_0(\Gamma')) - |\partial X_0(\Gamma')| = \sum_{t\in U} \mu'_t(\{0\}) .$$

不过，请注意， $cc(X_0(\Gamma')) = cc(X_\lambda(\Gamma))$ 和 $|\partial X_0(\Gamma')| = |\partial X_\lambda(\Gamma)\quad|$.

我们希望计算态密度（回顾定义 1.5）。因此，设 $X$ 为 $\mathcal{T}$的一个连通基本集。设$\{g'_l\}_{l\in\mathbb{N}}$为 $L_2($ $\Gamma\backslash E_\lambda(\Gamma))$的一个标准正交基，并且对于

每个 $\ell \in \mathbb{N}$，设$\mu_{g'_\ell}$ 表示其提升 $\tilde{g}'_\ell$ 到 $X$ 的谱测度（由于 $E(\Gamma)$与 $E(X)$之间存在明显的等同，该谱测度是自然定义的）。然后，由引理 3.7(ii)，我们有：

$$\mu_{g'_\ell}(\{\lambda\}) = \sum_{h\in\mathcal{B}} |\langle \tilde{g}'_\ell, h\rangle|^2 = 0\,,$$

由于对所有 $h \in \mathcal{B}$，$\mathrm{supp}(h) \subseteq E_\lambda(\Gamma)$，因此对于每个 $\ell$，都有 $\langle \tilde{g}'_\ell,\ h\rangle = 0$。

现在用 $\mathcal{U}$ 表示所有 Q-Aomoto 连通分支的集合。对于每个 $T \in \mathcal{U}$，令 $\{g_k^T\}_{k\in\mathbb{N}}$ 为 $L_2(T)$ 的一组标准正交基，并用 $\mu_{g_k^T}$ 表示将 $g_k^T$ 提升到 $X$ 后的谱测度。于是，结合式 (10) 和引理 3.8，可得

$$\mathcal{L}_E\mu(\{\lambda\}) = \sum_{T\in\mathcal{U}}\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu_{g_k^T}(\{\lambda\}) + \sum_{\ell\in\mathbb{N}} \mu_{g'_\ell}(\{\lambda\}) =$$
$$= \sum_{T\in\mathcal{U}}\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu_{g_k^T}(\{\lambda\}) = \sum_{t\in U} \mu'_t(\{0\}) = I_0(\Gamma') = I_\lambda(\Gamma)\ .$$

这正是所需的结果。 □

现在我们可以证明定理 1.4。

**定理 1.4 的证明**。令 $\lambda \in \sigma_{\mathfrak{p}}(\mathcal{H}_\mathcal{T})$，并反设所有 Q-Aomoto 分支均属于观察 3.1 中所述的第一类，即由顶点及其边构成的有限树。每棵这样的树都通过至少 $d$ 条边连接到 $\partial X_\lambda(\Gamma)$。然而，$\partial X_\lambda(\Gamma)$ 中的所有顶点的度也都是 $d$，因此每个顶点至多能从 $X_\lambda(\Gamma)$ 吸收 $d$ 条边。由此可得

$$|\partial X_\lambda(\Gamma)| \geq \frac{d\cdot ccX_\lambda(\Gamma)}{d} = ccX_\lambda(\Gamma)$$

这与定理 1.8(iii)相矛盾。

In 对于标准薛定谔算子 $\mathcal{H} = -\frac{d^2}{dx^2}$ 的情形，这意味着 — t

$$\sigma_{\mathfrak{p}}(\mathcal{H}_\mathcal{T}) \subseteq \left\{ \frac{n^2\pi^2}{\ell_e^2} \mid e\in E,\ n\in\mathbb{N} \right\}.$$

事实上，对于任意 $\lambda > 0$ 要具有紧支撑特征函数，都必须满足 $\sin(\sqrt{\lambda}\ell_e) = 0$，其中 $e \in E$，也就是说，$\sqrt{\lambda}\ell_e = n\pi$，其中 $n \in \mathbb{N}$。另一方面，如果$\lambda \leq 0$，则相应的解要么是线性的，要么是指数型的，因而不可能在任意一条边的两个端点处同时为零，这就意味着不存在此类特征函数。

□

**注 3.9**。对于紧的2-正则量子图的情形——也就是一个纯环——对每个 $v \in V$ 都有 $\alpha_v < \infty$，每个 *Q-Aomoto* 分支（任一类型）都通过恰好两条边与 $\partial X_\lambda$（$\Gamma$）相连。在这种情形下，采用与上述类似的论证可得，万有覆盖没有特征值，并且 $\sigma_{\mathfrak{p}}$（$\mathcal{H}_\mathcal{T}$）$= \emptyset$。这一结果也可通过考察直线上特征子空间的重数而得到，并且早已为人所知。

**定理 1.10 的证明**。这是 (ii) 部分的证明；令 $n = 1$ 即可得到 (i) 部分。考虑相应的离散图 $\Gamma'$，并令 $G'$ 为与 $G$ 对应的 $n$ 重覆盖 $\Gamma'$。进一步，令 $\xi' : G' \to \Gamma'$ 为这两个离散图之间的覆盖映射。分别用 $P$ 和 $P_\partial$ 表示投影到支撑在 $\xi'^{-1}(X_0(\Gamma'))$ 和 $\xi'^{-1}(\partial X_0(\Gamma'))$ 上的函数子空间的正交投影。我们可以将雅可比

算子限制在 Im($P$) 上，并得到

$$\mathrm{Im}\left(A_{G'}|_{\mathrm{Im}(P)}\right) \subseteq \mathrm{Im}(P_\partial)\,.$$

因此，由维数定理，

(37)

$$\dim\left(\ker\left(A_{G'}|_{\mathrm{Im}(P)}\right)\right) \geq \dim\left(\mathbb{C}^{n\cdot|X_0(\Gamma')|}\right) - \dim\left(\mathbb{C}^{n\cdot|\partial X_0(\Gamma')|}\right) = n\cdot(ccX_\lambda(\Gamma) - |\partial X_\lambda(\Gamma)|) > 0\,.$$

与记号 3.3 一样，令 $T_1$、.....、$T_m$ 为 $G$ 的 Q-Aomoto 分支，其对应的顶点为 $t_1$、.....、$t_m \in V(G')$，而 $h_1$、.....、$h_m$ 是将特征函数投影到这些分支上后得到的归一化函数。于是映射

$$\ker\left(A_{G'}|_{\mathrm{Im}(P)}\right) \hookrightarrow \ker\left(\mathcal{H}_G - \lambda\right)$$

由 $\sum_{i=1}^m \alpha_i\delta_{t_i} \mapsto \sum_{i=1}^m \alpha_i h_i$ 给出了所需的子空间，并完成了证明。 □

此定理中的不等式可能是严格的。例如，在例 1.3 的紧正则图中，可以在每条边上取函数 cos($x$)（定向无关紧要）。该函数确实是紧图上 Schr¨odinger 算子的特征函数；然而，它无法由上述构造生成，因为它并非在每个顶点处都为零。由定理 1.8(i) 可知，这意味着该函数在提升的 Q-Aomoto 集之外并不为零。

**定理 1.12 的证明**。 我们以与构造 Q-Aomoto 集相同的方式构造相应的离散图 $\Gamma'_X$，但使用 $X$ 的连通分支，而不是 $X_\lambda$(Γ)。顶点 $t_1$、.....、$t_n$ 对应于分支 $T_1$、.....、$T_n \subseteq X$。

根据引理 2.4(ii)（在 $\partial X$上施加狄利克雷边界条件）， $X$ 的每个连通分支所对应的特征子空间都是一维的。我们将这些分支上相应的归一化实特征函数记为$h_1$、.....、$h_n$。

与定理 1.10 的证明相同，维数定理推出

$$\dim\left(\ker\left(A_{\Gamma'_X}\right)\right) \geq cc(X) - |\partial X|\,.$$

通过等距包含，这便得到定理 1.12(i)

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i\delta_{t_i} \mapsto \sum_{i=1}^m \sum_{s\in S_i} \alpha_i h_i\,.$$

对于定理 1.12(ii)，设 $\Gamma_n$ 是 $\Gamma$ 的一列 $m_n$-覆盖，满足定理 1.6(i)的假设，并用 $\nu_n$ 表示它们的归一化特征值计数测度。设 $\mu$是 Γ的态密度。

由定理 1.12(i)，我们得到下界：

$$\nu_n\left(\{\lambda\}\right) = \frac{\dim\left(\ker\left(\mathcal{H}_{\Gamma_n} - \lambda\right)\right)}{\mathcal{L}_{E_n}} \geq \frac{m_n\left(cc\left(X\right) - |\partial X|\right)}{m_n\mathcal{L}_E} = \frac{cc\left(X\right) - |\partial X|}{\mathcal{L}_E}\,.$$

因此，根据定理 1.6(ii)以及 $\mu$ 的正则性（已在推论 2.6中确立），可得

$$\mu\left(\{\lambda\}\right) \geq \frac{cc\left(X\right) - |\partial X|}{\mathcal{L}_E} > 0\,.$$

□

.....的证明　定理 1.14 基于 Berkolaiko 和 Liu [11] 的以下结果。

**引理 3.10**。 *[11,* 定理 *3.6]* 设 $\Gamma$ 是一个配备标准薛定谔算子 $\mathcal{H}=-\frac{d^2}{dx^2}$ 的连通紧量子图，并且所有顶点均满足 $\delta$ 型条件，其中狄利克雷条件仅允许施加于度为一的顶点。假设 $\Gamma$ 不是纯环。那么，对于 $\mathbb{R}_+^{|E|}$ 中边长的一个剩余集， $\mathcal{H}$ 的每个特征函数 $f$ 都满足以下条件之一：

*i.* $f(v)\neq 0$ 对每个满足 $\alpha_v<\infty$ 的顶点 $v$。
*ii.* 支撑$(f)=L$，其中 $L$ 是 $\Gamma$ 中的一个纯环。

**定理 1.14 的证明**。若 $\Gamma$ 是一个纯环，则它是一个紧致二正则量子图。正如注 3.9 中所述，在这种情况下，万有覆盖不具有特征值。

现在假设 $\Gamma$ 不是纯环，并且首先假设 Γ不包含纯˜环。由定理 1.10(i)，$\sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{H}_{\mathcal{T}})\subseteq\sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{H}_{\Gamma})$，对于每个 λ-特征函数 $f$，在 $\mathcal{T}$ 上都存在一个 λ-特征函数 $f$，定义在 Γ上，其支撑包含于 $\Xi\Big($支撑$(\tilde{f})\Big)$。此外，对于任意满足 $f(v)\neq 0$的 $v\in V$，都存在 $\tilde{v}\in\Xi^{-1}(v)$，使得 $\tilde{f}(\tilde{v})\neq 0$。由引理 3.10，对于边长的一个剩余集而言，这些就是所有满足 $\alpha_v<\infty$的顶点 $v\in V(\Gamma)$，这与 Γ 包含一个圈这一事实矛盾。因此，对于边长的一个剩余集，$\sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{H}_{\mathcal{T}})$ 为空。

因此，我们可以将注意力限制在不是纯环但包含纯环的有限图上。设 $L\subseteq\Gamma$ 是一个纯环，它通过顶点 $u\in V$与图的其余部分相连。我们通过用 $|E_u|$ 个不同的顶点替换 $u$ 来构造一个修改后的图，其中每个新顶点都通过一条来自 $E_u$的边与图相连，并在每个新顶点处施加狄利克雷边界条件。

因此，对于每一个这样的圈 $L$，我们得到有限个连通子图$\Gamma_1^L$，……，$\Gamma_{m_L}^L$，$\widehat{L}$，其中 $\widehat{L}$是 $L$经过此过程后的修改。图 5 给出了这一分解的示意图。

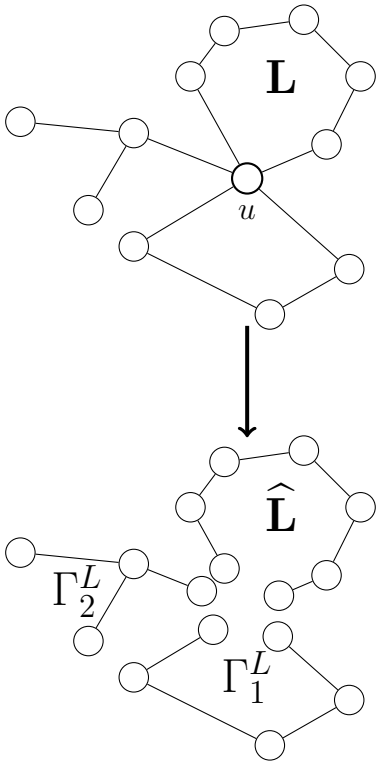

FIGURE 5. 上方的图包含一个环 $L$，它通过一个度为 5 的顶点 $u$ 与图的其余部分相连。在下方的图中，顶点 $u$被拆分为五个不同的度为 1 的顶点，每个顶点各保留一条关联边。该操作将 $L$与图的其余部分分离，而图的剩余部分也被划分为两个连通分支，分别记为 $\Gamma_1^L$和 $\Gamma_2^L$。

我们的目标是证明，对于每个 $i$，对于边长的一个剩余集都成立。为此，只需证明在边长的一个开稠密集上，$0 \notin \sigma_{\mathfrak{p}}(\mathcal{H}_{\widehat{L}})$，并且对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$\mathcal{H}_{\Gamma_i^L}$ 的 $n$ 阶特征值（见引理 2.7）在边长的一个开稠密集上不是 $\mathcal{H}_{\widehat{L}}$ 的特征值。所有这些集合的交集于是为剩余集。

为说明 $0 \notin \sigma_{\mathfrak{p}}\big(\mathcal{H}_{\widehat{L}}\big)$，注意到取该值的特征函数在每条边上都是线性的。由 $\widehat{\ }$ $L$ 中 $u$ 的两个副本处的狄利克雷条件，它必须在这两个顶点处都为零。$\widehat{\ }$固定一条从 $u$ 发出的边 $e_1$，对于 $L$ 中其他所有边长的任意选择，至多存在一种 $e_1$ 的长度选择，使得 0 成为一个特征值。因此，在 $\widehat{L}$ 中使 $0 \notin \sigma_{\mathfrak{p}}\big(\mathcal{H}_{\widehat{L}}\big)$ 成立的边长集合是稠密的。此外，由于特征值连续依赖于边长（例如见 $[9, 10]$），小扰动会保持特征值与零之间的严格不等式，因此该集合也是开集。

现在取 $n \in \mathbb{N}$，使得 $\mathcal{H}_{\Gamma_i^L}$ 的第 $n$ 个特征值非零。根据 $[11]$,$\widehat{\ }$，通过改变 $L$ 中一条边的长度，可以控制 $\mathcal{H}_{\widehat{L}}$ 的非零特征值。因此，固定 $\Gamma_i^L$ 的边长以及 $\widehat{L}$ 中除一条边以外的所有边长后，使该特征值与 $\mathcal{H}_L$ 的某个特征值重合的被排除边长构成可数集。其补集因而稠密；同样，由特征值关于边长的连续性可知该集合是开集。

对所有纯环 $L \subseteq \Gamma$ 及其对应的所有分支 $\Gamma_i^L$ 取交集，再与引理 3.10 中得到的剩余集取交集，我们得到一个边长剩余集 $S \subseteq \mathbb{R}_+^{|E|}$，使得对每个纯环 $L$ 及每个 $i$,

$$\sigma_{\mathfrak{p}}\Big(\mathcal{H}_{\Gamma_i^L}\Big) \cap \sigma_{\mathfrak{p}}\big(\mathcal{H}_{\widehat{L}}\big) = \emptyset.$$

设 $\ell \in S$，并假设对于边长 $\ell$，存在一个带有特征函数 $\tilde{f}$ 的 $\lambda \in \sigma_{\mathfrak{p}}(\mathcal{H}_T)$。那么，根据定理 1.10(i)，$\Xi\left(\operatorname{supp}\left(\tilde{f}\right)\right)$ 包含于 $\lambda$-Q-Aomoto 集 $\lambda \in \sigma_{\mathfrak{p}}(\mathcal{H}_\Gamma)$ 中，并且存在一个支撑在 $\Xi\left(\operatorname{supp}\left(\tilde{f}\right)\right)$ 上的特征函数 $f$。此外，对于任意满足 $f(v) \neq 0$ 的 $v \in V$，存在 $\tilde{v} \in \Xi^{-1}(v)$，使得 $\tilde{f}(\tilde{v}) \neq 0$。如果对所有满足 $\alpha_v < \infty$ 的 $v \in V$，都有 $f(v) \neq 0$，那么 $\Gamma$ 的 Q-Aomoto 集包含一个圈（因为 $\alpha_v = \infty$ 仅在叶子上），这与定理 1.8(i) 矛盾。因此，根据引理 3.10，我们必有

$$\operatorname{supp}(f) = L$$

对于某个唯一的纯环 $L \subseteq \Gamma$，连接 $L$ 与图中其余部分的顶点 $u$ 必须位于 $\partial X_\lambda(\Gamma)$ 中（由引理 3.2 可知）。因此可得 $\lambda \in \sigma_{\mathfrak{p}}\big(\mathcal{H}_{\widehat{L}}\big)$。

现在，若 $X_\lambda(\Gamma) \subseteq L$，那么根据圈的性质，有 $I_\lambda(\Gamma) = 0$，这就导出了矛盾。因此，存在 $i \in [m_L]$ 使得

$$X_\lambda(\Gamma) \cap \Gamma_i^L \neq \emptyset.$$

因此，存在一条边 $e \in X_\lambda(\Gamma) \cap \Gamma_i^L$、一个提升 $\widetilde{e} \in \Xi^{-1}(e)$，以及一个函数 $g \in \ker(\lambda - \mathcal{H}_\mathcal{T})$，使得 $g|_{\widetilde{e}}$ 不恒等于零，且

$$g(\widetilde{u}) = 0 \qquad \text{for every } \widetilde{u} \in \Xi^{-1}(u).$$

现在我们按如下方式从 $\mathcal{T}$ 构造一个修改后的图。将 $\Xi^{-1}(u)$中的每个顶点替换为$|E_u|$ 个不同的顶点，其中每个新顶点恰好与 $E_u$中的一条边关联。在这些新顶点处施加狄利克雷边界条件，并令 $\mathcal{T}_i^L$表示包含 $\widetilde{e}$的连通分支。很容易验证， $\mathcal{T}_i^L$是 $\Gamma_i^L$的万有覆盖。此外，限制 $g|_{\mathcal{T}_i^L}$定义了一个特征函数，因此

$$\lambda \in \sigma_{\mathfrak{p}}\left(\mathcal{H}_{\mathcal{T}_i^L}\right).$$

根据定理 1.10(i),

$$\sigma_{\mathfrak{p}}\left(\mathcal{H}_{\mathcal{T}_i^L}\right) \subseteq \sigma_{\mathfrak{p}}\left(\mathcal{H}_{\Gamma_i^L}\right).$$

因此,

$$\lambda \in \sigma_{\mathfrak{p}}\left(\mathcal{H}_{\Gamma_i^L}\right) \cap \sigma_{\mathfrak{p}}\left(\mathcal{H}_{\widehat{L}}\right),$$

这与边长的选取相矛盾。证明至此完成。 □

## References

[1] N. Anantharaman, M. Ingremeau, M. Sabri and B. Winn, *Benjamini-Schramm* 极限下量子图的经验谱测度, J. Funct. Anal. **280**(2021), 108988.[2] N. Anantharaman, M. Ingremeau, M. Sabri and B. Winn, 量子树的绝对连续谱, Commun. Math. Phys.**383** (2021), 537—594.[3] O. Angel, J. Friedman and S. Hoory, 图的万有覆盖的非回溯谱, Trans. AMS **367** (2015), 4287–4318.[4] K. Aomoto, 拟齐次树上的点谱, Pacific J. Math., Volume 151 (1991) no. 2, p. 231-242.[5] N. Avni, J. Breuer, G. Kalai and B. Simon, 树上周期雅可比矩阵的周期边界条件, Pure and Applied Functional Analysis, **7** (2022), 489–502 (专刊纪念 Shmuel Agmon 百岁诞辰).[6] N. Avni, J. Breuer and B. Simon, 树上的周期雅可比矩阵, Adv. Math. **370** (2020), 42pp.[7] J. Banks, J. Breuer, J. Garza-Vargas, E. Seelig and B. Simon, 树上周期雅可比矩阵的一个实用公式, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **121**(2024), Paper No. e2315218121, 4 pp.[8] J. Banks, J.Garza-Vargas and S. Mukherjee, 万有覆盖树上周期算子的点谱, International Mathematics Research Notices, Volume 2022, Issue 22, November 2022, Pages 17713– 17744.[9] G. Berkolaiko and P. Kuchment. 量子图的谱对顶点条件和边长的依赖性。载于 谱几何，第 84 卷，纯数学研讨会论文集。American Math. Soc., 2012. 预印本 arXiv:1008.0369.[10] G. Berkolaiko and P. Kuchment, 量子图导论, 第 186 卷，数学调查与专著。AMS, 2013.[11] G. Berkolaiko and W. Liu, 量子图特征值的简单性与特征函数不消失, J. Math. Anal. Appl. **445**, (2017), 803–818.[12] S. Brendle, 常微分方程，在线讲义。[13] J. Br¨uning, V. Geyler and K. Pankrashkin, 具有磁场的周期量子图的康托尔谱与带谱, Commun. Math. Phys. **269** (2007), 87—105.

[14] R. Carlson, 自由群的量子凯莱图, J. Spectr. Theory 7 (2017) 907–937.[15] J. Christiansen, B. Simon and M. Zinchenko, 树上周期雅可比矩阵的评注, J. Math. Phys. 62 (2021), 042101.[16] P. Exner, 图上的薛定谔算子与某些雅可比矩阵之间的对偶性, Ann. Inst. H. P. Carpin´e 66 (1997), 359–371.[17] P. Exner, A. Kostenko, M. Malamud and H. Neidhardt, 无穷量子图的谱理论, Ann. Henri Poincar´e 19 (2018), 3457—3510.[18] A. Fig`a-Talamanca and M. A. Picardello, 自由群上的调和分析, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 87, Marcel Dekker, Inc., 纽约, 1983[19] A. Fig` a-Talamanca and T. Steger, 齐次树上各向异性随机游走的调和分析, Mem. A.M.S., 110 (1994).[20] J. Garza-Vargas and A. Kulkarni, 通过合并自由性研究无穷图的谱, Canad. J. Math., 75, (2023), 1633–1684.[21] M. Keller, D. Lenz and S. Warzel, 有限锥型树的谱理论, Israel J. of Math. 194 (2013), 1–29.[22] P. Kuchment, 量子图 I：一些基本结构, Waves Random Media 14 (2004), S107 – S128.[23] M. Keller, D. Lenz and S. Warzel, 有限锥型树导论：随机算子与确定性算子, Markov Processes Relat. Fields 21 (2015), 557–574.[24] N. Y. Levi, 具有势的量子图上的热核与迹公式, 预印本。[25] F. Lled´o and O. Post, 离散图和度量图的特征值夹逼, J. Math. Anal. Appl. 348 (2008), 806–833.[26] T. Nagnibeda and W. Woess, 具有有限锥型的树上的随机游走, J. Theo. Prob., 15 (2002), 383–422.[27] O. Post, 等边量子图与边界三元组, 《图及其应用分析》, 469–490, 纯数学研讨会论文集第 77 卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2008。[28] T. Sunada, 流形上周期薛定谔算子的群 C*-代数与谱, Canad. J. Math., 44 (1992), 180–193.[29] J. Weidmann, 希尔伯特空间中的线性算子, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 68. Springer- Verlag, 纽约, 1980.[30] W. Woess, 无穷图与群上的随机游走, Cambridge Tracts in Mathematics, 138, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2000.[31] A. Zettl, 斯图姆-刘维尔理论, AMS Mathematical Surveys and Monographs 121, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 美国, 2000。