arXiv:2603.08449v1 [math.FA] 9 Mar 2026

上半平面加权 Bergman 空间与 Hardy 空间上的豪斯多夫算子谱

Carlo Bellavita 和 Georgios Stylogiannis

Abstract. 我们刻画了上半平面加权 Bergman 空间与幂加权 Hardy空间上豪斯多夫算子的谱。

Introduction

函数空间上的积分算子研究是具体算子理论的基石。其中，豪斯多夫算子 $\mathcal{H}_\phi$ 因其与 Ces`aro 算子等其他基本算子的联系，以及在分析学各分支中的应用 [9, 11]而尤为重要。对于上半平面 $\mathbb{U}$上的全纯函数 f，豪斯多夫算子由以下积分定义

$$\mathcal{H}_\phi f(z) = \int_0^\infty f\left(\frac{z}{t}\right)\frac{\phi(t)}{t}dt, \quad z \in \mathbb{U}$$

其中， ϕ 是一个可测核。若 f 是实数轴 $\mathbb{R}$上的可测函数，则该算子具有类似的形式

$$H_\phi f(x) = \int_0^\infty f\left(\frac{x}{t}\right)\frac{\phi(t)}{t}dt \quad x \in \mathbb{R}.$$

现代豪斯多夫算子理论主要分为两个方向：Siskakis 和 Galanopoulos [4, 5, 15, 16, 17, 18], 所确立的复分析框架，以及 Georgakis [8], Liflyand 和 M´oricz [11]所引入的勒贝格空间/傅里叶变换框架。本文旨在整合并运用这两种视角。

本文旨在刻画算子 $\mathcal{H}_\phi$ 在上半平面内两个解析函数空间上的谱：幂加权哈代空间 $H^p_{|\cdot|^a}(\mathbb{U})$ 和加权伯格曼空间 $A^p_a(\mathbb{U})$。我们回顾一下，给定巴拿赫空间 X，算子 $\mathcal{H}_\phi$ 的谱由所有满足以下条件的

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：47B91；次要分类：47G99；30H20；42A45；42A85；46G99。*Key words and phrases.* 豪斯多夫算子；谱；傅里叶乘子；卷积算子；幂加权哈代空间；加权伯格曼空间。第一作者是意大利国家高等数学研究所（INdAM）数学分析、概率论及其应用国家研究组（GNAMPA）的成员。

复数 λ 构成：算子 $\lambda I - \mathcal{H}_\phi$ 在 X上没有有界逆，其中 I 是恒等算子。谱记作 $\sigma(\mathcal{H}_\phi, X)$，或者在无需指明空间 X 时，简记为 $\sigma(\mathcal{H}_\phi)$。

定理1. 设 $1 \leq p < \infty, a > -1$ 和 ϕ 是$[0,\infty)$ 中的可测函数，满足

$$\int_0^\infty |\phi(t)| t^{\frac{a+1}{p}-1}\, dt < \infty.$$

则 $\sigma(\mathcal{H}_\phi, H^p_{|\cdot|^a}(\mathbb{U})) = \overline{\widehat{k_a}_{,p}(\mathbb{R})}$ 其中 $\widehat{k_a}_{,p}(\xi) = \int_0^\infty \phi(t) t^{\frac{a+1}{p}} \frac{dt}{t^{1+i\xi}}$ 对于 $\xi \in \mathbb{R}$。

定理2. 设 $1 \leq p < \infty, a > 0$ 和 ϕ 是 $[0,\infty)$中的可测函数，满足

$$\int_0^\infty |\phi(t)| t^{\frac{a+1}{p}-1}\, dt < \infty.$$

则 $\sigma(\mathcal{H}_\phi, A^p_a(\mathbb{U})) = \overline{\widehat{k_a}_{,p}(\mathbb{R})}$ 其中 $\widehat{k_a}_{,p}(\xi) = \int_0^\infty \phi(t) t^{\frac{a+1}{p}} \frac{dt}{t^{1+i\xi}}$ 且 $\xi \in \mathbb{R}$。

定理1和定理2指出，豪斯多夫算子 $\mathcal{H}_\phi$ 在 Hardy 空间和 Bergman空间中的谱，与核 ϕ的特定傅里叶型变换将实数轴映射所得像集的闭包相同。

通过建立这些刻画，我们得到了豪斯多夫算子范数的新下界，并扩展了关于 Ces`aro 类算子谱性质的结果

$$C_\nu f(z) = \frac{1}{z^\nu} \int_0^z \zeta^{\nu-1} f(\zeta)\, d\zeta.$$

推论3。
(i) Cesaro 算子 $\mathcal{C}_\nu$ 在 $H^p_{|\cdot|^a}(\mathbb{U})$ 上有界，其中 $p \cdot Re\nu > a+1$ 满足 $\|C_\nu\|_{H^p_{|\cdot|^a}} = p(Re\nu - a - 1)^{-1}$ 且

$$\begin{aligned}\sigma(\mathcal{C}_\nu, H^p_{|\cdot|^a}(\mathbb{U})) &= \sigma_{ess}(\mathcal{C}_\nu, H^p_{|\cdot|^a}(\mathbb{U})) \\ &= \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{p}{2(pRe\ \nu - a - 1)} \right| = \frac{p}{2(pRe\ \nu - a - 1)} \right\}.\end{aligned}$$

(ii) Cesaro 算子 $\mathcal{C}_\nu$ 在 $A^p_a(\mathbb{U})$ 上有界，其中 $p \cdot Re\ \ \nu > a+1$ 满足 $\|C_\nu\|_{A^p_a} = p(Re\nu - a - 1)^{-1}$ 且

$$\begin{aligned}\sigma(\mathcal{C}_\nu, A^p_a(\mathbb{U})) &= \sigma_{ess}(\mathcal{C}_\nu, A^p_a(\mathbb{U})) \\ &= \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{p}{2(pRe\ \nu - a - 1)} \right| = \frac{p}{2(pRe\ \nu - a - 1)} \right\}.\end{aligned}$$

$\mathcal{H}_\phi$ 在解析函数空间上的谱分析已有研究，例如Abadias与 Oliva-Maza [1, 14]。在其开创性论文中，作者描述了复合算子强连续群的无穷小生成元的谱，该群

定义了 $\mathcal{H}_{\phi}$。随后，借助带型算子与扇形型算子的函数演算，这些谱性质被转移到 $\mathcal{H}_{\phi}$ 。尽管其方法无疑十分精巧，但也存在一个缺点：应用函数演算要求核函数 ϕ满足特定条件。

本文的主要原创思想是：通过应用酉算子 $U\colon\ L^p(\mathbb{R},|\cdot|^a) \to L^p(\mathbb{R})$, 豪斯多夫算子 H_{ϕ}与一个卷积算子重合

$$(U\circ H_{\phi})f = (Uf) * k_{a,p}$$

其中

$$k_{a,p}(t) = e^{\frac{a+1}{p}t}\phi(e^t), \quad t\in\mathbb{R}.$$

这一联系使我们能够利用关于卷积算子的有界性与谱性质的经典文献结果。当我们考虑作用于全纯函数空间上的豪斯多夫算子时，情况变得更加复杂，因为 $U(H^p_{|\cdot|^a}(\mathbb{U}))$ 的描述并不显式。尽管如此，借助在勒贝格空间上获得的信息，我们仍然能够刻画 $\mathcal{H}_{\phi}$ 在全纯情形下的谱。

本文余下部分分为六节。在第1节中，我们引入 $\mathcal{H}_{\phi}$ 的作用所定义于其上的特定全纯函数空间，并建立后续分析学所需的若干抽象结果。第2节致力于刻画加权勒贝格空间上豪斯多夫算子的谱：具体而言，我们证明该谱如何与卷积算子的谱相关联。在第3节中，我们给出定理1的证明，并在第4节中给出定理2的证明。我们指出，尽管这两个结果适用于不同的空间，它们的证明具有相似的结构。在第5节中，我们描述Ces`aro型算子的谱性质。最后，在第6节中，我们将研究推广到由测度定义的豪斯多夫算子。尽管这一结语部分并非旨在穷尽一切，其目的在于突出一类谱性质特别引人注目的算子——尤其是当它们与具有非规则谱的测度相关联时。

1. Preliminaries

在算子 A 的谱中，我们根据 $\lambda I - A$ 的行为区分出若干特定子集：

- 点谱 $\sigma_p(A)$。它由 A 的所有特征值组成。
- 本质谱 $\sigma_{\text{ess}}(A)$. 它被定义为点 λ 的集合，在这些点处算子 $\lambda I - A$ 不是弗雷德霍姆的。形式上

$$\sigma_{\text{ess}}(A) = \{\lambda\in\mathbb{C} \mid \dim(\ker(\lambda I - A)) = \infty \text{ or } \operatorname{codim}(\operatorname{Ran}(\lambda I - A)) = \infty\},$$
$$\text{where } \operatorname{codim}(Y) = \dim(X/Y) \text{ for a subspace } Y\subseteq X.$$

•近似点谱 $\sigma_{ap}(A)$. 它包含所有使 $\lambda I - A$ 非下有界的 $\lambda \in \mathbb{C}$ 。若存在单位向量序列 $\{x_n\} \subset X$ （其中 $\|x_n\| = 1$），使得

$$\lim_{n\to\infty} \|(\lambda I - A)x_n\| = 0.$$

A的预解集记为 $\rho(A)$，它是谱在复平面中的补集，由所有使预解算子 $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ 存在且有界的点 $\lambda \in \mathbb{C}$ 组成。

本研究关注作用于上半平面 $\mathbb{U}$上加权伯格曼空间与加权Hardy空间的豪斯多夫算子 $\mathcal{H}_\phi$ 的谱。

设 $a > 0$ 与 $1 \le p < \infty$。加权伯格曼空间 $A^p_a(\mathbb{U})$是 $\mathbb{U}$ 上所有满足以下条件的全纯函数 f 所构成的空间

$$\|f\|_{A^p_a} = \left(\int_{\mathbb{U}} |f(z)|^p \, dA_a(z) \right)^{1/p} < \infty,$$

其中当 $z = x+iy$时 $dA_a(z) = y^{a-1}\, dxdy$。经典Hardy空间 $H^p(\mathbb{U})$在形式上被解释为加权伯格曼空间当 $a \to 0$时的极限情形，记为 $H^p(\mathbb{U}) = A^p_0(\mathbb{U})$。

沿用Garc´ıa-Cuerva [6], 对 $1 \le p < \infty$ 与 $a > -1$的做法，我们将幂加权Hardy空间 $H^p_{|\cdot|^a}(\mathbb{U})$定义为 $\mathbb{U}$ 上所有满足以下条件的解析函数所构成的空间

$$\|f\|_{H^p_{|\cdot|^a}} = \sup_{y>0} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x+iy)|^p |x|^a \, dx \right)^{1/p} < \infty.$$

对于任意 $f \in H^p_{|\cdot|^a}(\mathbb{U})$，非切向极限 $f^*(x) = \lim_{y\to 0^+} f(x+iy)$ 对几乎处处的 $x \in \mathbb{R}$ 存在。该边界函数 f^* 满足

$$\|f\|^p_{H^p_{|\cdot|^a}} = \int_{\mathbb{R}} |f^*(x)|^p |x|^a \, dx.$$

根据 [6, 引理 II.1.2], 对于 $f \in H^p_{|\cdot|^a}(\mathbb{U})$，我们知道增长估计

$$|f(x+iy)| \le [w_a(B(x,y))]^{-1/p} \, \|f\|_{H^p_{|\cdot|^a}}, \tag{1}$$

其中，对于任意有界可测集 $E \subset \mathbb{R}$， $w_a(E) = \int_E w_a(x)\, dx$， $w_a(x) = |x|^a$ 以及 $B(x, t) = \{s \in \mathbb{R} : |s - x| < t\}$ 对于 $x \in \mathbb{R}$ 和 $t > 0$。方程 (1) 表明，在 $H^p_{|\cdot|^a}$ 范数下的收敛意味着在 $\mathbb{U}$ 的紧子集上一致收敛。

在证明我们的主要定理时，我们使用以下抽象命题。

命题 4. 设 X 是一个巴拿赫空间， W 是X的闭子空间。设 $T\colon X \to X$有界，且 $T(W) \subset W$。若对每个 $\lambda \in \rho(T)$，预解式 $R(\lambda, T)$ 满足 $R(\lambda, T)(W) \subset W$，则

$$\sigma(T, W) \subseteq \sigma(T, X).$$

证明。设 $\lambda \notin \sigma(T, X)$，并反设 $\lambda \in \sigma(T, W)$。有两种可能：

- 或者（$T-\lambda I$）$|_W$ 不是单射，也就是说，存在 $\psi \in W$ 使得 $T\psi - \lambda\psi = 0$。然而，由于 $W \subset X$，则（$T-\lambda I$）$|_X$ 也不是单射，这与假设 $\lambda \notin \sigma$（T, X）矛盾。

- 或者（$T-\lambda I$）$|_W$ 不是满射，也就是说，存在非零的 $\phi \in W$，使得对于任何 $\psi \in W$，$T\psi - \lambda\psi = \phi$ 都不成立。然而，由于 $\lambda \notin \sigma$（T, X），存在 $\psi \in X$ 使得 $T\psi - \lambda\psi = \phi$。由于 $\psi = R$（λ, T）$\phi \in W$，算子（$T-\lambda I$）$|_W$ 必须是满射，

由此可得 $\lambda \notin \sigma$（T, W），也就是说，σ（T, W）$\subseteq \sigma$（T, V）。 □

命题5. 设 W 是巴拿赫空间 V 的一个闭子空间，使得P： $V \to W$ 是有界投影。设 T 是 V上的有界算子，使得 $T(W) \subseteq W$。若 T与 P可交换，则

$$\sigma(T, W) \subseteq \sigma(T, V).$$

证明. 设 $\lambda \notin \sigma(T, V)$，并反设 $\lambda \in \sigma(T, W)$。有两种可能：

- 要么$(T-\lambda I)|_W$ 不是单射。在这种情况下，我们如命题4中那样得到矛盾。

- 或者$(T-\lambda I)|_W$ 不是满射，即存在非零的 $\phi \in W$，使得对任何 $\psi \in W$都不成立 $T\psi - \lambda\psi = \phi$。然而，由于 $\lambda \notin \sigma(T, V)$，存在 $\psi \in V$使得 $T\psi - \lambda\psi = \phi$。因此

$$\phi = P(\phi) = P \circ T\tilde{\psi} - \lambda P\tilde{\psi} = (T-\lambda)P\tilde{\psi},$$

这是不可能的。

由此可得 $\lambda \notin \sigma(T, W)$，即 $\sigma(T, W) \subseteq \sigma(T, V)$。 □

以下深刻结果归功于Wiener，通常在巴拿赫代数的框架内证明，参见 [7, 第 104] 页。

命题 6. 设 $K \in L^1(\mathbb{R})$，并假设 λ 是一个复数ˆ，使得 $\lambda \neq 0$，且对任意 $\xi \in \mathbb{R}$，都有 $\lambda \neq K(\xi)$。那么，存在一个函数$A_\lambda \in L^1(\mathbb{R})$，使得

$$\lambda A_\lambda(x) - K * A_\lambda(x) = K(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

其中 $K * A_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} K(s)A_\lambda(x-s)ds$ 是通常意义下的卷积。

2. Spectrum of H_ϕ on $L^p(\mathbb{R}, |\cdot|^a)$

在开始证明主要结果之前，我们先分析作用于实数轴上的幂权勒贝格空间的豪斯多夫算子的谱 H_ϕ。

设 $1 \leq p \leq \infty$ 和 $a > -1$。加权勒贝格空间 $L^p(\mathbb{R}, |\cdot|^a)$ 由所有满足以下条件的函数 f 组成：

$$\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R},|\cdot|^a)} = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p |x|^a dx < \infty, \quad 1 \leq p < \infty,$$

并且，对于 $p = \infty$，由所有满足 $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R},\ |\cdot|^a)} = \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\} < \infty$ 的 f 构成。

关于豪斯多夫算子在加权勒贝格空间上的有界性，已有文献 [12], [13] 对其进行了研究，随后又在 [10] 中作了进一步探讨。

定理 7. [10, 定理1。5] 设 $1 \leq p \leq \infty$ 且 $a > -1$。假设 ϕ 是定义在 $(0, \infty)$ 上的可测函数，满足

$$\int_0^\infty |\phi(t)| t^{\frac{1+a}{p}-1} dt.$$

那么， H_ϕ 在 $L^p(\mathbb{R}, |\cdot|^a)$ 上有界，并且

$$\left| \int_0^\infty \phi(t) t^{\frac{1+a}{p}-1} dt \right| \leq \|H_\phi\|_{L^p(\mathbb{R},|\cdot|^a)} \leq \int_0^\infty |\phi(t)| t^{\frac{1+a}{p}-1} dt.$$

描述 $\sigma(\mathcal{H}_\phi,\ L^p(\mathbb{R},\ |\cdot|^a))$ 的关键在于：经过适当变换后，豪斯多夫算子成为一个卷积算子，因此我们能够刻画其谱。

显然，

$$L^p(\mathbb{R}, |\cdot|^a) \cong L^p(\mathbb{R}_+, x^a\, dx) \oplus L^p(\mathbb{R}_+, x^a\, dx).$$

事实上，给定函数 $f \in L^p(\mathbb{R}, |\cdot|^a)$，我们考虑由下式定义的有序对 (f_+, f_-)

$$f_+(x) = f(x)\chi_{(0,\infty)}(x), \quad f_-(x) = f(-x)\chi_{(-\infty,0)}(-x).$$

显然，

$$\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R},|\cdot|^a)} = \|f_+\|^p_{L^p(\mathbb{R}_+,x^a\,dx)} + \|f_-\|^p_{L^p(\mathbb{R}_+,x^a\,dx)}$$

且映射 $f \to (f_+, f_-)$ 在 $L^p(\mathbb{R}, |\cdot|^a)$ 与 $L^p(\mathbb{R}_+, x^a\, dx) \oplus L^p(\mathbb{R}_+, x^a\, dx)$ 之间给出一个等距同构。

引理 8。 空间 $L^p(\mathbb{R}_+, x^a\, dx)$ 与 $L^p(\mathbb{R})$ 等距同构。

证明。设 $f \in L^p(\mathbb{R}_+, x^a\, dx)$，并定义映射 U： $L^p(\mathbb{R}_+, x^a\, dx) \to L^p(\mathbb{R})$ 如下

$$Uf(x) = e^{\frac{a+1}{p}x} f(e^x).$$

我们观察到

$$\begin{aligned}\|Uf\|^p_{L^p(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} |Uf(x)|^p\, dx = \int_{\mathbb{R}} |f(e^x)|^p e^{(a+1)x}\, dx \\ &= \int_0^\infty |f(u)|^p u^a\, du = \|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}_+,x^a\,dx)}.\end{aligned}$$

这表明 U 是一个等距同构。算子 U 也是满射的。事实上，对于 $g \in L^p(\mathbb{R})$，令 $f(x) = x^{-\frac{a+1}{p}} g(\ln x)$，其中 $x \in \mathbb{R}_+$。于是 $Uf = g$。逆算子 U^{-1}： $L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R}_+, x^a\, dx)$定义为 $U^{-1}g(x) = x^{-\frac{a+1}{p}} g(\ln x)$。情形 $p = \infty$ 可通过显然的修改得到。□

豪斯多夫算子保持分解 $L^p(\mathbb{R}_+, x^a\,dx)\oplus L^p(\mathbb{R}_+, x^a\,dx)$。事实上， $H_\phi f_+, H_\phi f_-$ 支撑在$(0,\infty)$上，并且我们可以写成 $H_\phi = H_\phi^+ \oplus H_\phi^-$ 。因此，只需考虑豪斯多夫算子 H_ϕ 在 $L^p(\mathbb{R}_+, x^a\,dx)$上的作用。

引理 9. 设 H_ϕ 是作用于 $L^p(\mathbb{R}_+, x^a\,dx)$ 上的豪斯多夫算子，并设 U 如引理 *8* 中所定义。那么，对每个 $f \in L^p(\mathbb{R})$，

$$(UH_\phi U^{-1})f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-s)k_{a,p}(s)\,ds,$$

其中 $k_{a,p}(s) = \phi(e^s)e^{\frac{a+1}{p}s}$。

证明。 设 $f \in L^p(\mathbb{R})$，并令 $g = U^{-1}f$。那么

$$\begin{aligned}(UH_\phi g)(x) &= e^{\frac{a+1}{p}x}\int_0^\infty g\left(\frac{e^x}{t}\right)\frac{\phi(t)}{t}\,dt \\ &= \int_0^\infty e^{\frac{a+1}{p}(x-\ln t)} g\left(\frac{e^x}{t}\right) t^{\frac{a+1}{p}-1}\phi(t)\,dt \\ &= \int_0^\infty Ug(x-\ln t)\, t^{\frac{a+1}{p}-1}\phi(t)\,dt.\end{aligned}$$

令 $s = \ln t$，则 $ds = t^{-1}dt$。那么

$$(UH_\phi U^{-1})f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-s)k_{a,p}(s)\,ds.$$

证明完毕。 □

现在我们可以描述作用于 $L^p(\mathbb{R}, |\cdot|^a)$上的 H_ϕ 的谱。我们回顾一下，只要傅里叶变换有定义， k 的傅里叶变换就由$\hat{k}(x) = \int_{\mathbb{R}} k(t)e^{-itx}dt$给出。

定理 10。 设 $1 \le p \le \infty$ 和 $a > -1$。若 $\int_0^\infty |\phi(t)|t^{\frac{1+a}{p}-1}dt$ 有限，则

$$\sigma(H_\phi, L^p(\mathbb{R}, |\cdot|^a)) = \overline{\widehat{k_{a,p}}(\mathbb{R})},$$

其中$k_{a,\,p}(t) = e^{\frac{a+1}{p}t}\phi(e^t)$。

证明。 由于 $L^p(\mathbb{R},\ |\cdot|^a) \cong L^p(\mathbb{R}_+,\ x^a\,dx) \oplus L^p(\mathbb{R}_+,\ x^a\,dx)$，因此我们有

$$\sigma(H_\phi, L^p(\mathbb{R}, |\cdot|^a)) = \sigma(H_\phi, L^p(\mathbb{R}_+, x^a\,dx)).$$

根据定理 7，豪斯多夫算子 H_ϕ 在 $L^p(\mathbb{R},\ |\cdot|^a)$上有界，且函数$k_{a,\,p} \in L^1(\mathbb{R})$。对于 $f \in L^p(\mathbb{R})$，令

$$Kf(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-s)k_{a,p}(s)\,ds$$

是由 $k_{a,p}$ 诱导的卷积算子。众所周知， [3] 算子 $\widehat{\ }$ 的谱满足 $\sigma(K, L^p(\mathbb{R}))$ $= k_{a,p}(\mathbb{R})$。根据酉等价

由引理 9 得出，我们可以断定

$$\sigma(H_\phi, L^p(\mathbb{R}, |\cdot|^a)) = \sigma(K, L^p(\mathbb{R})) = \overline{\widehat{k_{a,p}}(\mathbb{R})}.$$

□

在开始分析作用于解析函数空间上的豪斯多夫算子的谱之前，我们注意到，如引理 9 中所述，通过卷积算子描述豪斯多夫算子，也有助于描述 H_ϕ 在 $L^p(\mathbb{R}, |\cdot|^a)$ 上的范数。

命题 11。设 ϕ 在 $[0,\infty)$ 上可测。豪斯多夫算子H_ϕ： $L^2(\mathbb{R}, |\cdot|^a) \to L^2(\mathbb{R}, |\cdot|^a)$ 有界，当且仅当

$$\widehat{k_{a,2}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} k_{a,2}(s) e^{-i\xi s}\, ds = \int_0^\infty t^{\frac{a+1}{2}} \phi(t) \frac{dt}{t^{1+i\xi}} \in L^\infty(\mathbb{R}). \tag{2}$$

此外，$\|H_\phi\|_{L^2(\mathbb{R}, |\cdot|^a)} = \|\widehat{k_{a,2}}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$。

证明。若 H_ϕ 在 $L^2(\mathbb{R}, |\cdot|^a)$ 上有界，则它在 $L^2(\mathbb{R}_+, x^a\, dx)$ 上有界。因此，$UH_\phi U^{-1}$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 上的有界卷积算子。这一事实$\widehat{\ }$以及普朗歇尔定理意味着 $k_{a,2} \in L^\infty(\mathbb{R})$ 和 $\|k_{a,2}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le \|H_\phi\|$。反之，若 $\widehat{k_a}_2 \in L^\infty(\mathbb{R})$，则 $UH_\phi U^{-1}$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 上有界，并且范数等式由 $L^2(\mathbb{R}, |\cdot|^a)$ 的分解得到。□

3. Proof of Theorem 1

设 ϕ 是 $(0,\infty)$ 上的可测函数。我们考虑上半平面上的加权 Hardy 空间上的有界豪斯多夫算子 $\mathcal{H}_\phi$。Hung 和 Dy [10] 对其有界性作出了如下刻画。

定理 12（[10, 定理1。3]）。设 $1 \le p \le \infty$、$a > -1$，且设 ϕ 是 $(0, \infty)$ 上的可测函数。

（i）如果 ϕ 满足条件

$$\int_0^\infty t^{\frac{a+1}{p}-1} |\phi(t)|\, dt < \infty, \tag{3}$$

则 $\mathcal{H}_\phi$ 在 $H^p_{|\cdot|^a}(\mathbb{U})$ 上有界。此外，

$$\left| \int_0^\infty t^{\frac{a+1}{p}-1} \phi(t)\, dt \right| \le \|\mathcal{H}_\phi\|^p_{H^p_{|\cdot|^a}} \le \int_0^\infty t^{\frac{a+1}{p}-1} |\phi(t)|\, dt.$$

（ii）反之，如果 $\phi \ge 0$ 且 $\mathcal{H}_\phi$ 在 $H^p_{|\cdot|^a}(\mathbb{U})$ 上有界，则条件（3）成立。

我们现在可以描述 $\mathcal{H}_\phi$ 在 $H^p_{|\cdot|^a}(\mathbb{U})$上的谱。

ˆ ⁀定理*1*的证明。为简洁起见，我们用 k 代替 $k_{a,\ p}$。ˆ设 $\lambda \notin k(\mathbb{R})$。根据命题 6和 [3, 引理 1], , 存在函数 $A_\lambda \in L^1(\mathbb{R})$，使得 $\lambda^{-1}(I + A_\lambda *)$是 $(\lambda I - k*)$在$L^p(\mathbb{R})$上的逆函数。因此， $\lambda^{-1}(I + U^{-1}A_\lambda * U)$是 ($\lambda I - U^{-1}k * U)$在$L^p(\mathbb{R}_+,\ x^a\,dx)$上的逆函数。但是

$$U^{-1}k * U = H_\phi \quad \text{and} \quad U^{-1}A_\lambda * U = H_{\psi_\lambda}$$

其中 $\psi_\lambda(s) = A_\lambda(\ln\ s)s^{-\frac{a+1}{p}}$。注意到

$$\int_0^\infty |\psi_\lambda(s)| s^{\frac{a+1}{p}-1}\,ds = \int_0^\infty |A_\lambda(\ln s)|\frac{1}{s}\,ds = \int_{\mathbb{R}} |A_\lambda(s)|\,ds < \infty.$$

这意味着 H_{ψ_λ} 在 $L^p(\mathbb{R},\ |x|^a\,dx)$ 上有界，见定理 7；且 $\mathcal{H}_{\psi_\lambda}$ 在 $H^p_{|\cdot|^a}(\mathbb{U})$ 上有界，见定理 12。此外，由定理1.4]

$$(\mathcal{H}_\phi f)^* = H_\phi f^* \quad \text{and} \quad (\mathcal{H}_\psi f)^* = H_\psi f^*,$$

对每个 $f \in H^p_{|\cdot|^a}(\mathbb{U})$ 都成立。因此

$$(A) \quad (\lambda I - \mathcal{H}_\phi)(H^p_{|\cdot|^a}(\mathbb{U})) \subseteq H^p_{|\cdot|^a}(\mathbb{U}),$$
$$(B) \quad \frac{1}{\lambda}(I + \mathcal{H}_\psi)(H^p_{|\cdot|^a}(\mathbb{U})) \subseteq H^p_{|\cdot|^a}(\mathbb{U}).$$

此外，对每个 $f \in H^p_{|\cdot|^a}(\mathbb{U})$

$$\begin{aligned}
&\|\frac{1}{\lambda}(I + \mathcal{H}_{\psi_\lambda})(\lambda I - \mathcal{H}_\phi)f - f\|_{H^p_{|\cdot|^a}(\mathbb{U})} \\
&\quad \le C\|(\frac{1}{\lambda}(I + \mathcal{H}_{\psi_\lambda})(\lambda I - \mathcal{H}_\phi)f)^* - f^*\|_{L^p(\mathbb{R},|\cdot|^a dx)} \\
&\quad = C\|(\frac{1}{\lambda}(I + H_{\psi_\lambda})(\lambda I - H_\phi)f^* - f^*\|_{L^p(\mathbb{R},|\cdot|^a dx)}.
\end{aligned}$$

我们考虑定义如下的一对 $(f_+^*,\ f_-^*)$

$$f_+^*(x) = f^*(x)\chi_{(0,\infty)}(x), \quad f_-^*(x) = f^*(-x)\chi_{(-\infty,0)}(-x).$$

显然,

$$\begin{aligned}
&\|(\frac{1}{\lambda}(I + H_{\psi_\lambda})(\lambda I - H_\phi)f^* - f^*\|^p_{L^p(\mathbb{R},|\cdot|^a)} \\
&\quad = \|(\frac{1}{\lambda}(I + H_{\psi_\lambda})(\lambda I - H_\phi)f_+^* - f_+^*\|^p_{L^p(\mathbb{R}_+,x^a\,dx)} \\
&\qquad + \|(\frac{1}{\lambda}(I + H_{\psi_\lambda})(\lambda I - H_\phi)f_-^* - f_-^*\|^p_{L^p(\mathbb{R}_+,x^a\,dx)} = 0.
\end{aligned}$$

类似地，$\|\frac{1}{\lambda}(\lambda I - \mathcal{H}_\phi)(I + \mathcal{H}_{\psi_\lambda})f - f\|_{H^p_{|\cdot|^a}(\mathbb{U})} = 0$。这意味着

$$\frac{1}{\lambda}(I + \mathcal{H}_{\psi_\lambda})(\lambda I - \mathcal{H}_\phi) = (\lambda I - \mathcal{H}_\phi)\frac{1}{\lambda}(I + \mathcal{H}_{\psi_\lambda}) = I, \text{on } H^p_{|\cdot|^a}(\mathbb{U})).$$

因此， λ 属于 $\mathcal{H}_\phi|_{H^p}$的预解集 $_{|\cdot|^a}$ 并且，根据命题 4,

$$\sigma(\mathcal{H}_\phi, H^p_{|\cdot|^a}(\mathbb{U})) \subset \overline{\hat{k}(\mathbb{R})}.$$

为证明反向包含，取 $\delta \in (0,1)$，并设 $\phi_\delta(t) = \phi(t)\chi_{[\delta,1/\delta)}(t)$。则

$$\|\mathcal{H}_\phi - \mathcal{H}_{\phi_\delta}\|_{H^p_{|\cdot|^a}} \leq \int_0^\delta |\phi(t)| t^{\frac{a+1}{p}-1}\, dt + \int_{\frac{1}{\delta}}^\infty |\phi(t)| t^{\frac{a+1}{p}-1}\, dt$$

当 δ 趋于零时，该值趋于零。对于任意 $0 < \epsilon < 1$ 和 $\xi \in \mathbb{R}$，我们定义函数

$$f_{\epsilon,\xi}(z) = (z+i)^{-\frac{a+1}{p}-\epsilon+i\xi}.$$

由于 $e^{-|\xi|\pi} \leq |(z+i)^{i\xi}| \leq e^{|\xi|\pi}$，根据 [10, Pag.17] ，我们有

$$\|f_{\epsilon,\xi}\|_{H^p_{|\cdot|^a}} \sim \|f_{\epsilon,0}\|_{H^p_{|\cdot|^a}} \sim \epsilon^{-1/p} < \infty,$$

其中，第一次比较中涉及的常数取决于 ξ。我们来考虑

$$\widehat{k_\delta}(\xi) = \int_0^\infty \phi_\delta(t) t^{\frac{a+1}{p}} \frac{dt}{t^{1+i\xi}}.$$

对于每个 $z = x + iy \in \mathbb{U}$，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\phi_\delta} f_{\epsilon,\xi}(z) - f_{\epsilon,\xi}(z)\widehat{k_\delta}(\xi) =& \mathcal{H}_{\phi_\delta} f_{\epsilon,\xi}(z) - f_{\epsilon,\xi}(z) \int_0^\infty \phi_\delta(t) t^{\frac{a+1}{p}} \frac{dt}{t^{1+i\xi}} \\ =& \int_\delta^{1/\delta} \left(\varphi_{\epsilon,\xi,z}(t) - \varphi_{\epsilon,\xi,z}(1)\right) \phi(t) t^{\frac{a+1}{p}} \frac{dt}{t^{1+i\xi}},\end{aligned}$$

其中 $\varphi_{\epsilon,\ \xi,\ z}(t) = t^\epsilon/(z+ti)^{\frac{1+a}{p}+\epsilon-i\xi}$。对于每个 $t \in (\delta,\ 1/\delta)$ 和 $z \in \mathbb{U}$，由拉格朗日中值定理可得

$$|\varphi_{\epsilon,\xi,z}(t) - \varphi_{\epsilon,\xi,z}(1)| \leq |t-1| \sup_{s\in(\delta,1/\delta)} |\varphi'_{\epsilon,\xi,z}(s)|.$$

我们计算

$$\begin{aligned}\varphi'_{\epsilon,\xi,z}(t) &= \frac{\epsilon t^{\epsilon-1}}{(z+ti)^{\frac{1+a}{p}+\epsilon-i\xi}} - i\frac{(\frac{1+a}{p}+\epsilon-i\xi)t^\epsilon}{(z+ti)^{\frac{1+a}{p}+1+\epsilon-i\xi}} \\ &= \left(\frac{\epsilon t^{\epsilon-1}}{(z+ti)^{\frac{1+a}{p}+\epsilon}} - i\frac{(\frac{1+a}{p}+\epsilon-i\xi)t^\epsilon}{(z+ti)^{\frac{1+a}{p}+1+\epsilon}}\right)(z+it)^{i\xi}.\end{aligned}$$

由于 $|(z+it)^{i\xi}| = e^{-\xi \arg(z+it)} \leq e^{|\xi|\pi}$，因此我们有

$$|\varphi_{\epsilon,\xi,z}(t) - \varphi_{\epsilon,\xi,z}(1)| \leq (\frac{1}{\delta}-1)e^{|\xi|\pi}\left(\frac{\epsilon\delta^{\epsilon-1}}{|z+\delta i|^{\frac{a+1}{p}+\epsilon}} + \frac{(\frac{1+a}{p}+\epsilon+|\xi|)\delta^{-\epsilon}}{|z+\delta i|^{1+\frac{a+1}{p}+\epsilon}}\right).$$

and

$$|\varphi_{\epsilon,\xi,z}(t)-\varphi_{\epsilon,\xi,z}(1)|\le e^{|\xi|\pi}\left(\frac{\epsilon\delta^{-(2+\frac{a+1}{p})}}{|z+i|^{\frac{a+1}{p}+\epsilon}}+\frac{(\frac{1+a}{p}+\epsilon+|\xi|)\delta^{-(2+2\epsilon+\frac{a+1}{p})}}{|z+i|^{1+\frac{a+1}{p}+\epsilon}}\right),$$

因为对于任意 $z\in\mathbb{U}$, $|z+\delta i|>\delta|z+i|$。因此

$$\begin{aligned}&\frac{\|\mathcal{H}_{\phi_\delta}(f_{\epsilon,\xi})-\widehat{k_\delta}(\xi)f_{\epsilon,\xi}\|_{H^p_{|\cdot|^a}}}{\|f_{\epsilon,\xi}\|_{H^p_{|\cdot|^a}}}\\&\qquad\le C\int_\delta^{1/\delta}|\phi(t)|t^{\frac{a+1}{p}-1}\,dt\left[\epsilon\delta^{\delta^{-(2+\frac{a+1}{p})}}+\epsilon^{1/p}(\frac{1+a}{p}+\epsilon+|\xi|)\right]\end{aligned}$$

当 ϵ 趋于 0 时，它趋于零。更一般地，令 $\varepsilon>0$ 足够小，并选取 $\delta>0$，使得 $\|\mathcal{H}_\phi-\mathcal{H}_{\phi_\delta}\|_{H^p_{|\cdot|^a}}<\varepsilon$ 且 $|k(\xi)-k_\delta(\xi)|<\varepsilon$。那么

$$\begin{aligned}&\lim_{\epsilon\to0}\frac{\|\mathcal{H}_\phi f_{\epsilon,\xi}-\hat{k}(\xi)f_{\epsilon,\xi}\|_{H^p_{|\cdot|^a}}}{\|f_{\epsilon,\xi}\|_{H^p_{|\cdot|^a}}}\\&\le\lim_{\epsilon\to0}\left(\frac{\|\mathcal{H}_{\phi_\delta}(f_{\epsilon,\xi})-\widehat{k_\delta}(\xi)f_{\epsilon,\xi}\|_{H^p_{|\cdot|^a}}}{\|f_{\epsilon,\xi}\|_{H^p_{|\cdot|^a}}}+\|\mathcal{H}_\phi-\mathcal{H}_{\phi_\delta}\|_{H^p_{|\cdot|^a}}+|\hat{k}(\xi)-\widehat{k_\delta}(\xi)|\right)\\&<2\varepsilon.\end{aligned}$$

ˆ 由于 ε 是任意的，这意味着 $k(\xi)$ 属于 $\mathcal{H}_\phi$ 的近似点谱，即

$$\sigma(\mathcal{H}_\phi,H^p_{|\cdot|^a}(\mathbb{U}))=\overline{\hat{k}(\mathbb{R})}.$$

□

定理1证明的第二部分给出了豪斯多夫算子范数的一个原创下界。

推论 13. 设 ϕ 是 $[0,\infty)$ 中的可测函数，满足

$$\int_0^\infty|\phi(t)|t^{\frac{a+1}{p}-1}\,dt<\infty.$$

Then

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\left|\widehat{k_{a,p}}(\xi)\right|\le\|\mathcal{H}_\phi\|_{H^p_{|\cdot|^a}},$$

其中 $\widehat{k_{a,p}}(\xi)=\int_0^\infty\phi(t)\frac{t^{\frac{a+1}{p}}}{t^{1+i\xi}}\frac{dt}{}$。

证明。 显然

$$|\widehat{k_{a,p}}(\xi)| = \frac{\|\widehat{k_{a,p}}(\xi) f_{\epsilon,\xi}\|_{H^p_{|\cdot|^a}}}{\|f_{\epsilon,\xi}\|_{H^p_{|\cdot|^a}}} \leq \frac{\|\mathcal{H}_\phi f_{\epsilon,\xi}\|_{H^p_{|\cdot|^a}}}{\|f_{\epsilon,\xi}\|_{H^p_{|\cdot|^a}}} + \frac{\|\mathcal{H}_\phi f_{\epsilon,\xi} - \hat{k}(\xi) f_{\epsilon,\xi}\|_{H^p_{|\cdot|^a}}}{\|f_{\epsilon,\xi}\|_{H^p_{|\cdot|^a}}}$$
$$\leq \|\mathcal{H}_\phi\|_{H^p_{|\cdot|^a}} + \frac{\|\mathcal{H}_\phi f_{\epsilon,\xi} - \hat{k}(\xi) f_{\epsilon,\xi}\|_{H^p_{|\cdot|^a}}}{\|f_{\epsilon,\xi}\|_{H^p_{|\cdot|^a}}}.$$

根据前一定理的证明，对于每个固定的 ξ，当 $\widehat{\epsilon}$ 趋于零时，第二项也趋于零。这证明了 $|\widehat{k_{a,\ p}}(\xi)| \leq \|\mathcal{H}_\phi\|_{H^p_{|\cdot|^a}}$。 □

由命题 11 和推论 13 可立即得出 $\|\mathcal{H}_\phi\|_{H^2_{|\cdot|^a}} = \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \left|\widehat{k_{a\ 2,}}(\xi)\right|$。推论 13 给出的下界可能高于定理 12 给出的下界。

4. Proof of Theorem 2

设 ϕ 是 $(0,\ \infty)$ 上的一个可测函数。我们考虑上半平面加权伯格曼空间上的有界豪斯多夫算子 $\mathcal{H}_\phi$。Hung 和 Dy [10] 刻画了该算子的有界性如下。

定理 14 ([10, 定理 1。1])。 设 $1 \leq p < \infty$ 和 $a > 0$，并设 ϕ 是定义在 $(0,\infty)$ 上的可测函数。

(i) 若 ϕ 满足条件

$$\int_0^\infty t^{\frac{a+1}{p}-1} |\phi(t)|\, dt < \infty, \tag{4}$$

则 $\mathcal{H}_\phi$ 在 $A^p_a(\mathbb{U})$上有界。此外，

$$\left|\int_0^\infty t^{\frac{a+1}{p}-1}\phi(t)\, dt\right| \leq \|\mathcal{H}_\phi\|^p_{A^p_a} \leq \int_0^\infty t^{\frac{a+1}{p}-1}|\phi(t)|\, dt.$$

(ii) 反之，若 $\phi \geq 0$ 且 $\mathcal{H}_\phi$ 在 $A^p_a(\mathbb{U})$上有界，则条件(4) 成立。

现在我们可以描述 $\mathcal{H}_\phi$ 在 A^p_a上的谱。

定理*2*的证明。若 $f \in L^p_a(\mathbb{U})$，则

$$\|f\|^p_{L^p_a(\mathbb{U})} = \int_0^\pi (\sin\theta)^a \|f_\theta\|^p_{L^p(\mathbb{R}_+ r^a\, dr)} d\theta,$$

其中 $f_\theta(r) = f(re^{i\theta})$。因此， $f \in L^p_a(\mathbb{U})$ 意味着对于几乎所有的 $\theta \in [0,\pi]$，函数 $f_\theta \in L^p(\mathbb{R}_+, r^a\, dr)$。注意到 $(\mathcal{H}_\phi f)_\theta = \mathcal{H}_\phi f_\theta$。

$\widehat{\ \ \ \

$\lambda^{-1}(I+U^{-1}A_\lambda * U)$ 是 $(\lambda I - U^{-1}k*U)$ 在 $L^p(\mathbb{R}_+,\ r^a\,dr)$ 上的逆。由于 $U^{-1}k*U=\mathcal{H}_\phi$, $U^{-1}A_\lambda * U=\mathcal{H}_{\psi_\lambda}$ 满足 $\psi_\lambda(s)=A_\lambda(\ln s)s^{-\frac{a+1}{p}}$，且

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |\psi_\lambda(s)|s^{\frac{a+1}{p}-1}\,ds &= \int_0^\infty |A_\lambda(\ln s)|\frac{1}{s}\,ds\\ &= \int_{\mathbb{R}} |A_\lambda(s)|\,ds<\infty,\end{aligned}$$

我们有，$\mathcal{H}_{\psi_\lambda}$ 在空间 $L^p(\mathbb{R}_+,\ r^a\,dr)$上有界，见定理 7；在$L^p_a(\mathbb{U})$上有界（这是闵可夫斯基不等式的简单应用），并且在 $A^p_a(\mathbb{U})$上有界，见定理 14。因此

$$\begin{aligned}&(A)\quad (\lambda I-\mathcal{H}_\phi)(L^p_a(\mathbb{U}))\subseteq L^p_a(\mathbb{U}),\\ &(B)\quad \frac{1}{\lambda}(I+\mathcal{H}_\psi)(A^p_a(\mathbb{U}))\subseteq A^p_a(\mathbb{U}).\end{aligned}$$

此外，对于每个$\theta\in[0,\pi]$，$\frac{1}{\lambda}(I+\mathcal{H}_{\psi_\lambda})(\lambda I-\mathcal{H}_\phi)f_\theta=(\lambda I-\mathcal{H}_\phi)\frac{1}{\lambda}(I+\mathcal{H}_{\psi_\lambda})f_\theta=f_\theta$。这意味着

$$\begin{aligned}&\|\frac{1}{\lambda}(I+\mathcal{H}_{\psi_\lambda})(\lambda I-\mathcal{H}_\phi)f-f\|_{L^p_a(\mathbb{U})}\\ &\quad=\int_0^\pi(\sin\theta)^a\|(\frac{1}{\lambda}(I+\mathcal{H}_{\psi_\lambda})(\lambda I-\mathcal{H}_\phi)f-f)_\theta\|^p_{L^p(\mathbb{R}_+r^a\,dr)}d\theta\\ &\quad=\int_0^\pi(\sin\theta)^a\|(\frac{1}{\lambda}(I+\mathcal{H}_{\psi_\lambda})(\lambda I-\mathcal{H}_\phi)f)_\theta-f_\theta\|^p_{L^p(\mathbb{R}_+r^a\,dr)}d\theta\\ &\quad=\int_0^\pi(\sin\theta)^a\|\frac{1}{\lambda}(I+\mathcal{H}_{\psi_\lambda})(\lambda I-\mathcal{H}_\phi)f_\theta-f_\theta\|^p_{L^p(\mathbb{R}_+r^a\,dr)}d\theta\\ &\quad=0,\end{aligned}$$

并且，通过类似的计算可得

$$\|\frac{1}{\lambda}(I+\mathcal{H}_\phi)(\lambda I-\mathcal{H}_{\psi_\lambda})f-f\|_{L^p_a(\mathbb{U})}=0.$$

由于

$$\frac{1}{\lambda}(I+\mathcal{H}_\phi)(\lambda I-\mathcal{H}_{\psi_\lambda})=\frac{1}{\lambda}(I+\mathcal{H}_{\psi_\lambda})(\lambda I-\mathcal{H}_\phi)=I$$

在 $L^p_a(\mathbb{U})$上，根据包含关系（A）和（B），点 λ属于 $\rho(\mathcal{H}_\phi,\ L^p_a(\mathbb{U}))$和 $\rho(\mathcal{H}_\phi,\ A^p_a(\mathbb{U}))$的预解集。因此

$$\sigma(\mathcal{H}_\phi,L^p_a(\mathbb{U}))\subset\overline{\hat{k}(\mathbb{R})}\quad\text{and}\quad\sigma(\mathcal{H}_\phi,A^p_a(\mathbb{U}))\subset\overline{\hat{k}(\mathbb{R})}.$$

对于反向包含，设 $\delta\in(0,1)$，并设 $\phi_\delta(t)=\phi(t)\chi_{[\delta,1/\delta)}(t)$。于是 $\|\mathcal{H}_\phi-\mathcal{H}_{\phi_\delta}\|_{A^p_\alpha}$在 δ趋于零时趋于零。对于任意 $0<\epsilon<1$和 $\xi\in\mathbb{R}$，定义函数

$$f_{\epsilon,\xi}(z)=(z+i)^{-\frac{a+1}{p}-\epsilon+i\xi}.$$

由于 $e^{-|\xi|\pi}\le|(z+\epsilon i)^{i\xi}|\le e^{|\xi|\pi}$，根据 [10, Pag.10]，我们有

$$\|f_{\epsilon,\xi}\|_{A^p_a}\sim\|f_{\epsilon,0}\|_{A^p_a}\sim\epsilon^{-1/p}<\infty,$$

其中第一次比较中涉及的常数取决于 ξ。按照定理1证明中的相同计算，我们得到

$$\frac{\|\mathcal{H}_{\phi_\delta}(f_{\epsilon,\xi}) - \widehat{k_\delta}(\xi) f_{\epsilon,\xi}\|_{A^p_a}}{\|f_{\epsilon,\xi}\|_{A^p_a}} \leq C \int_\delta^{1/\delta} |\phi(t)| t^{\frac{a+1}{p}-1}\, dt \left[\epsilon \delta^{\delta^{-(2+\frac{a+1}{p})}} + \epsilon^{1/p}\left(\frac{1+a}{p} + \epsilon + |\xi|\right)\right]$$

当 ϵ 趋于 0 时，它趋于零。更一般地，取足够小的 $\varepsilon > 0$，并选取 $\delta > 0$，使得 $\|\mathcal{H}_\phi - \mathcal{H}_{\phi_\delta}\|_{A^p_a} < \varepsilon$ 且 $|k(\xi) - k_\delta(\xi)| < \varepsilon$。于是

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to 0} \frac{\|\mathcal{H}_\phi f_{\epsilon,\xi} - \hat{k}(\xi) f_{\epsilon,\xi}\|_{A^p_a}}{\|f_{\epsilon,\xi}\|_{A^p_a}} \\
&\leq \lim_{\epsilon\to 0} \left(\frac{\|\mathcal{H}_{\phi_\delta}(f_{\epsilon,\xi}) - \widehat{k_\delta}(\xi) f_{\epsilon,\xi}\|_{A^p_a}}{\|f_{\epsilon,\xi}\|_{A^p_a}} + \|\mathcal{H}_\phi - \mathcal{H}_{\phi_\delta}\|_{A^p_a} + |\hat{k}(\xi) - \widehat{k_\delta}(\xi)| \right) \\
&< 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

ˆ 由于 ε 是任意的，这意味着 $k(\xi)$ 属于 $\mathcal{H}_\phi$ 的近似点谱，即

$$\sigma(\mathcal{H}_\phi, L^p_a(\mathbb{U})) = \sigma(\mathcal{H}_\phi, A^p_a(\mathbb{U})) = \overline{\hat{k}(\mathbb{R})}.$$

□

正如对加权 Hardy 空间所观察到的，定理2证明的第二部分给出了豪斯多夫算子范数的一个新下界。事实上

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \left|\widehat{k_{a,p}}(\xi)\right| \leq \|\mathcal{H}_\phi\|_{A^p_a},$$

其中 $\widehat{k_a}_{,\,p}(\xi) = \int_0^\infty \phi(t) t^{\frac{a+1}{p}} \frac{dt}{t^{1+i\xi}}$。

5. Cesaro Type operators: proof of Corollary 3

我们重新获得并拓展了关于 Ces´aro 类算子谱的 [2, 定理 34] 的结果。设 $\nu \in \mathbb{C}$ 满足 Re$\nu > 0$。回顾一下，Ces´aro 类算子定义为

$$C_\nu f(z) = \frac{1}{z^\nu} \int_0^z \zeta^{\nu-1} f(\zeta)\, d\zeta.$$

推论3的证明。Cesaro 算子 $\mathcal{C}_\nu$ 是一个特定的 Hausdorff 算 $\mathcal{H}_\phi$，与核 $\phi_{\mathcal{C}_\nu}(t) = \frac{1}{t^\nu}\chi_{[1,\infty)}(t)$相关。我们证明 $\mathcal{C}_\nu$满足定理1和定理2的假设。事实上，令 $1 + a < p \cdot$ Re ν,

then

$$\|C_\nu\| = \int_0^\infty |\phi_{\mathcal{C}_\nu}(t)| t^{\frac{a+1}{p}-1}\, dt = \int_1^\infty t^{\frac{a+1}{p}-\mathrm{Re}\nu-1}\, dt$$
$$= \left[\frac{1}{\frac{a+1}{p}-\mathrm{Re}\nu} t^{\frac{a+1}{p}-\mathrm{Re}\ \nu}\right]_1^\infty = \frac{p}{p\mathrm{Re}\nu - a - 1} < \infty.$$

因此， $\mathcal{C}_\nu$ 在相应的空间中有界。我们注意到

$$\widehat{k_{a,p}^{\mathcal{C}_\nu}}(\xi) = \int_0^\infty \phi_{\mathcal{C}_\nu}(t) t^{\frac{a+1}{p}} \frac{dt}{t^{1+i\xi}} = \int_1^\infty t^{\frac{a+1}{p}-1-\nu-i\xi}\, dt$$
$$= \int_0^\infty e^{(\frac{a+1}{p}-\nu-i\xi)t}\, dt = \frac{1}{i\xi - \frac{a+1}{p} + \nu}.$$

因此，其谱是 $i\mathbb{R}$ 在由 $(z - \frac{a+1}{p} + \nu)^{-1}$ 给出的线性分式映射下的像的闭包。各情况下本质谱的描述可由对 [14,备注 41] □的讨论得出。

6. Hausdorff operators defined by measures

令 $M(\mathbb{R}_+)$、 $M(\mathbb{R})$ 分别表示半轴 $(0, \infty)$ 和实数轴 $\mathbb{R}$ 上的正正则博雷尔测度空间。对于 $\mu \in M(\mathbb{R}_+)$，我们在加权Hardy空间 $H^p_{|\cdot|^a}(\mathbb{U})$ 上定义豪斯多夫算子 $\mathcal{H}_\mu$ ，如下:

$$\mathcal{H}_\mu f(z) = \int_0^\infty f\left(\frac{z}{t}\right) \frac{d\mu(t)}{t},$$

类似地，对于 $f \in L^p(\mathbb{R}, |\cdot|^a)$，定义如下:

$$H_\mu f(x) = \int_0^\infty f\left(\frac{x}{t}\right) \frac{d\mu(t)}{t}.$$

注意，要使这些算子定义良好， μ 在原点处不能有点质量。根据 [10,引理 4.4（ii）]„ 我们注意到

$$|\mathcal{H}_\mu f(z)| \le \int_0^\infty \left|f\left(\frac{z}{t}\right)\right| \frac{d|\mu|(t)}{t}$$
$$\le w_a(B(x,y))^{-1/p} \|f\|_{H^p_{|\cdot|^a}} \int_0^\infty t^{\frac{a+1}{p}-1} d|\mu|(t),$$

其中 $|\mu|$ 表示全变差测度。这证明 $\mathcal{H}_\mu$ 在 $\mathbb{U}$上是良定义的。因此，条件

$$\int_0^\infty t^{\frac{a+1}{p}-1} d|\mu|(t) < \infty \tag{5}$$

足以保证 $\mathcal{H}_\mu$ 的有界性。事实上，由闵可夫斯基不等式可得

$$\|\mathcal{H}_\mu\|_{H^p_{|\cdot|^a}} \le \int_0^\infty t^{\frac{a+1}{p}-1} d|\mu|(t) \quad \text{and} \quad \|H_\mu\|_{L^p(\mathbb{R},|\cdot|^a)} \le \int_0^\infty t^{\frac{a+1}{p}-1} d|\mu|(t).$$

与绝对连续测度的情形类似，可以验证

$$\overline{\widehat{k_{a,p}}(\mathbb{R})} \subseteq \sigma(\mathcal{H}_\mu, H^p_{|\cdot|^a}(\mathbb{U})) \quad \text{and} \quad \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \left|\widehat{k_{a,p}}(\xi)\right| \leq \|\mathcal{H}_\mu\|_{H^p_{|\cdot|^a}}, \tag{6}$$

其中 $\widehat{k_{a,p}}(\xi) = \int_0^\infty t^{\frac{a+1}{p}} \frac{d\mu(t)}{t^{1+i\xi}}$。

如第2节所述，豪斯多夫算子 H_μ 在幂权空间 $L^p(\mathbb{R}, |\cdot|^a)$ 上的谱分析可归结为研究一个卷积算子

$$\sigma(H_\mu, L^p(\mathbb{R}, |\cdot|^a)) = \sigma(T_\nu, L^p(\mathbb{R})), \tag{7}$$

其中 $T_\nu f = \nu * f$ 是与测度 ν 相关联的 $L^p(\mathbb{R})$ 上的卷积算子，该测度定义为

$$d\nu(s) = e^{(\frac{a+1}{p}-1)s} dL^*[\mu](s), \tag{8}$$

并且 $L^*\mu$ 是与函数 $L(s) = \ln(s)$ 相关联的推前测度。

因此，刻画豪斯多夫算子的谱等价于分析其对应的卷积测度的谱。

对于 $\nu,\ \lambda \in M(\mathbb{R})$，卷积 $\nu * \lambda$ 定义为满足以下条件的唯一测度：对于任意博雷尔集 $A \subset \mathbb{R}$

$$(\nu * \lambda)(A) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \chi_A(x+y)\, d\nu(x)\, d\lambda(y).$$

由于狄拉克测度 δ_0 是单位元，即 $\delta_0 * \nu = \nu$，我们可以考虑 T_ν 在测度代数 $M(\mathbb{R})$ 上的作用。按照 Zafran [20], 的定义，若测度 $\nu \in M(\mathbb{R})$ 满足以下条件，则称其具有自然谱：

$$\sigma(T_\nu, M(\mathbb{R})) = \hat{\nu}(\mathbb{R}) \cup \{0\}.$$

我们将这类测度的集合记为 $\mathcal{N}(\mathbb{R})$。尽管 $\mathcal{N}(\mathbb{R})$ 包含所有绝对连续测度和离散测度，维纳–皮特现象[19] 表明这一性质并非普遍成立。具体而言，存在一些属于 $M_0(\mathbb{R})$ 的测度——即傅里叶–斯蒂尔切斯变换在无穷远处趋于零的测度所构成的闭理想中的测度——不具有自然谱。

假设 $\nu \in \mathcal{N}(\mathbb{R})$。对于任意 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\hat{\nu}(\mathbb{R}) \cup \{0\})$，存在一个逆测度 $\nu_\lambda \in M(\mathbb{R})$，使得 $(\lambda\delta_0 - \nu) * \nu_\lambda = \delta_0$。这意味着 $\lambda I - T_\nu$ 可逆，且其逆为 T_{ν_λ}，因此 $\sigma(T_\nu,\ L^p(\mathbb{R})) \subseteq \hat{\nu}(\mathbb{R}) \cup \{0\}$。

将其提升回 $L^p(\mathbb{R}_+, |\cdot|^a)$ 后，我们通过测度定义算子 $H_{\nu^*_\lambda}$

$$d\nu^*_\lambda(s) = s^{1-\frac{a+1}{p}} dE^*[\nu_\lambda](s),$$

其中， $E^*\nu_\lambda$ 是与函数 $E(s) = e^s$相关联的推前测度。全变差满足

$$\int_0^\infty t^{\frac{a+1}{p}-1} d|\nu_\lambda^*|(t) = \int_{\mathbb{R}} d|\nu_\lambda|(t) = \|\nu_\lambda\| < \infty,$$

从而确保 $H_{\nu_\lambda^*}$ 和 $\mathcal{H}_{\nu_\lambda^*}$ 有界，且分别是$\lambda I - H_\mu$ 和 $\lambda I - \mathcal{H}_\mu$的逆算子。沿用定理1的证明，可得

$$\sigma(\mathcal{H}_\mu, H^p_{|\cdot|^a}(\mathbb{U})) \subseteq \hat{\nu}(\mathbb{R}) \cup \{0\} \quad \text{and} \quad \sigma(H_\mu, L^p(\mathbb{R}, |\cdot|^a)) \subseteq \hat{\nu}(\mathbb{R}) \cup \{0\}.$$

应用 (6) 和 (8)，还可推出

$$\sigma(\mathcal{H}_\mu, H^p_{|\cdot|^a}(\mathbb{U})) = \widehat{k_{a,p}}(\mathbb{R}) \cup \{0\}.$$

当 ν 不具有自然谱时，情况就更加微妙。虽然定理1中的测试函数表明，$\hat{\nu}(\mathbb{R})$包含于近似点谱，但恒等式 $\sigma(T_\nu, M(\mathbb{R})) = \hat{\nu}(\mathbb{R}) \cup \{0\}$可能不成立，而对 $\sigma(H_\mu, L^p(\mathbb{R}, |\cdot|^a))$ 的完整刻画仍有待研究。

不过，对于某些特定的测度类，仍然可以取得进展。例如，若 $\nu \in M_0(\mathbb{R})$，则对于 $1 < p < \infty$

$$\sigma(T_\nu, L^p(\mathbb{R})) = \hat{\nu}(\mathbb{R}) \cup \{0\}. \tag{9}$$

由此以及 (6)，我们可以得出 $\sigma(H_\mu, L^p_{|\cdot|^a}(\mathbb{R})) = \widehat{k_a}, p(\mathbb{R})$。此外，如 [10, 定理 1.5 (ii)]所示， H_μ 与柯西–施瓦茨投影 P 交换： $L^p(\mathbb{R}, |\cdot|^a) \to H^p_{|\cdot|^a}(\mathbb{U})$，其中 $-1 < a < p-1$。应用命题5和关系式 (9)，我们得出：若 H_μ 与P 交换，且测度

$$e^{(\frac{a+1}{p}-1)s} dL^*[\mu](s) \in M_0(\mathbb{R}),$$

则对于 $-1 < a < p-1$,

$$\sigma(\mathcal{H}_\mu, H^p_{|\cdot|^a}(\mathbb{R})) = \widehat{k_{a,p}}(\mathbb{R}) \cup \{0\}.$$

Declarations

本文所述研究未使用任何数据。作者对本文内容承担全部责任。

References

[1] Luciano Abadias 和 Jes´us Oliva-Maza。d 上全纯函数空间中广义豪斯多夫矩阵的谱集。 *Journal of Functional Analysis*，286 6( ):110298，2024年。[2] Snehalatha Ballamoole、Job O. Bonyo、Thomas L. Miller 和 Vivien G. Miller。半平面 Hardy空间和 Bergman空间上的 Ces ` *Complex* aro 型算子。 *Analysis and Operator Theory* 10 1 187 203, 2016 , ( ): – 。[3] David W. Boyd。卷积算子的谱。 *Acta Universitatis Szegediensis.* , : – 。[4] *Acta Scientiarum Mathematicarum* 35 31 37, 1973 Petros Galanopoulos 和 Aristomenis G. Siskakis。豪斯多夫矩阵与复合算子。 *Illinois Journal of Mathematics*，45(3)，2001年7月。

[5] Petros Galanopoulos 和 Georgios Stylogiannis。Fock 空间上的豪斯多夫算子与系数乘子问题。*Proceedings of the American Mathematical Society* 151 7 3023 3035, 2023，( ): – 。[6] Jos´e Garc´ıa-Cuerva。 *Weighted H^p spaces*。波兰科学院数学研究所，1979年。[7] Izrail M. Gelfand、Dmitrii A. Raĭkov 和 Georgii E. Shilov。*Commutative Normed Rings*。AMS Chelsea 出版系列。美国数学会，1999。[8] Constantine Georgakis。傅里叶–斯蒂尔切斯变换的豪斯多夫平均。*Proceedings of the American Mathematical Society* 116 2 465 471, 1992，( ): – 。[9] Felix Hausdorff。求和方法与矩序列。*Mathematische Zeitschrift* 9 1 2 74 109, 1921，(–): – 3月。[10] Ha D. Hung 和 Luong D. Ky。加权 Bergman空间和 Hardy空间上的豪斯多夫算子。*Journal of Mathematical Analysis and Applications*，551(1)，2025年11月。[11] Elijah Liflyand 和 Ferenc M´oricz。豪斯多夫算子在实 Hardy 空间 $H^1(\mathbb{R})$ 上有界。*Proceedings of the American Mathematical Society*，128 5 1391 1396，1999年( ): – 8月。[12] Carlos Lizama、Pedro J. Miana、Rodrigo Ponce 和 Luis S´anchez-Lajusticia。关于广义 Ces`aro 算子在 Sobolev 空间上的有界性。 *J. Math. Anal. Appl.*，419 1 373 394，2014年( ): – 。[13] Pedro J. Miana 和 Jes´us Oliva-Maza。Sobolev-Lebesgue 空间上的积分算子。*Banach J. Math. Anal.*，15(3)：论文第52号，30，2021年。[14] Jes´us Oliva-Maza。本质谱的谱映射定理与正则化函数演算。*Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics* 155 2 634 656, 2023，( ): – 10月。[15] Aristomenis G. Siskakis。 H^p上的复合半群与 Cesaro 算子。*Journal of the London Mathematical Society*，s2-36(1):153–164，1987年8月。[16] Aristomenis G. Siskakis。Cesaro 算子在 H^1 上有界。*Proceedings of the American Mathematical Society* 110 2 461 462, 1990，( ): – 。[17] Aristomenis G. Siskakis。Cesaro 算子的 Bergman 空间范数。*Archiv der Mathematik* 67 4 312 318, 1996，( ): – 10月。[18] Georgios Stylogiannis。上半平面的 Bergman空间上的豪斯多夫算子。*Concrete Operators*，7(1):69–80，2020年。引用次数：11；全部为开放获取，其中包括金色开放获取和绿色开放获取。[19] Norbert Wiener 和 Harry R. Pitt。关于绝对收敛的傅里叶–斯蒂尔切斯变换。 *Duke Mathematical Journal*，4(2):420–436，1938年。[20] Misha Zafran。关于乘子的谱。 *Pacific Journal of Mathematics*，47 2 609 626，1973年( ): – 8月。

Email address: carlo.bellavita@gmail.com
Email address: carlo.bellavita@unimi.it

Dipartimento di Matematica “F. Enriques”, Dipartimento di Eccellenza MUR 2023-2027 Università degli Studi di Milano Via C. Saldini 50 20133 Milano , , , Italy.

Email address: g.stylog@gmail.com
Email address: stylog@math.auth.gr

Department of Mathematics Aristotle University of Thessaloniki 54124 , , , Thessaloniki Greece.