arXiv:2603.08452v1 [math.GR] 9 Mar 2026

来自3阶群的三次映射

Vadim Alekseev 和 Andreas Thom

Abstract. 本文旨在对从3阶循环群映入任意非阿贝尔群的含幺三次映射进行分类。我们证明，允许存在从3阶循环群映入的含幺三次映射的泛群是无限群，并给出其具体表示，还给出它在 $\mathrm{PSL}_3(\mathbb{C})$ 中的一个无限表示，其像是一个与 $\mathrm{PSL}_3(\mathbb{Z}[\omega])$ 可公度的算术格，其中 ω 是本原三次单位根。由此我们得到，存在幂零类任意大的有限幂零群，它们允许从 C_3 映入的含幺三次映射，其像生成整个群。

引言与基本定义

群之间多项式映射的研究由 A. Leibman 发起，[**Lei98, Lei02**], 其动机来自遍历理论和加法组合学中的应用。设 G, H 为群，且令 $\varphi\colon G \to H$ 为一个映射。对 $k \in G$，我们定义有限差分（或沿方向 k 的离散导数）为

$$(\Delta_k\varphi)(g) := \varphi(kg)\varphi(g)^{-1}, \qquad g \in G. \tag{1}$$

按照 [**Lei98**], 的方法，我们通过迭代有限差分来定义多项式映射。若 φ 恒等于 **1**，我们称其为次数为 -1 的多项式。对于 $d \geq -1$，若对每个 $k \in G$，映射 $\Delta_k\varphi\colon G \to H$ 都是次数为 d的多项式，我们称 φ 为次数为 $d+1$ 的多项式。特别地，**0** 次多项式映射是常值映射，而 **1** 次多项式映射是一个同态与一个常数的乘积（参见 [**JT24**，引理 2.1]）。若 φ **(1)** $= 1$，我们称 φ 为单位化的 。在全文中，我们假设所有多项式映射都是单位化的，因为任何多项式映射都可以乘以适当的常数使其单位化。我们将次数至多为 2 的多项式映射称为二次 多项式映射，将次数至多为 3 的多项式映射称为三次多项式映射。

在 [**JT24**] 中，作者提出了一种研究非阿贝尔群之间多项式映射的新方法，从而能够更明确地描述二次映射的结构。给定一个群 G 和 $k \in \mathbb{N}$，总存在一个泛群 $\mathrm{Pol}_k(G)$，它带有一个泛多项式映射 $\varphi\colon\ G \to \mathrm{Pol}_k(G)$，其次数为 k；任何从 G到 H 的次数为 k 的多项式映射，都可表示为 φ 与一个从 $\mathrm{Pol}_k(G)$ 到 H 的唯一确定的同态的复合。对于二次映射，泛群的结构可以用具体方式描述；而对于 $k \geq 3$ ，即使在最简单的情形下，这些群的结构仍有些神秘。除 $G = C_2$（对所有 $k \geq 0$，$\mathrm{Pol}_k(C_2)$ 都同构于 C_{2^k} ）以及完美群之外，参见 [**JT24**，推论**1**。5],其中自然映射 $\mathrm{Pol}_k(G) \to G$ 对所有 $k \geq 1$都是同构，目前文献中尚无关于 $k \geq 3$的 $\mathrm{Pol}_k(G)$ 的任何计算。

本文中，我们运用 [**JT24**]中的结果，对来自3阶循环群的三次映射进行分类。尽管这当然是顺理成章的下一个问题，但计算并非易事，所得结果也出人意料。本文中我们令 $C_3 = \langle \sigma \mid \sigma^3 = 1 \rangle$ 和 $\tau := \sigma^2$。如上所述，群 $\mathrm{Pol}_3(C_3)$ 是容纳一个含幺三次映射 $\varphi\colon\ C_3 \to \mathrm{Pol}_3(C_3)$的泛群；也就是说，任何从 $C_3 \to G$ 到任意群 G 的含幺三次映射 α，都可通过一个（唯一的）同态 $\bar{\alpha}\colon\ \mathrm{Pol}_3(C_3) \to G$分解，即 $\alpha = \bar{\alpha} \circ \varphi$。由于群范畴容许任意乘积，泛群 $\mathrm{Pol}_3(C_3)$ 的存在性很容易得到证明；其关于生成元与关系的初步描述与 $\mathrm{Pol}_2(G)$ 的描述相似，另见 [**JT24**，注2。5]。

下面是我们的第一个主要结果：

THEOREM 1. 群 $\mathrm{Pol}_3(C_3)$ 同构于群

$$\langle a, b \mid (ba)^3, (ab^{-1}a)^3, [ba, ab^{-1}a] \rangle,$$

其中，对于通用含幺三次映射 $\varphi\colon\ C_3 \to \mathrm{Pol}_3(C_3)$，有 $a = \varphi(\sigma)$ $b = \varphi(\tau)$。

元素 a、b 具有无限阶，并且群 $\mathrm{Pol}_3(C_3)$ 包含一个非阿贝尔自由子群。

虽然第一个断言可以通过直接计算得到，但第二个断言更为微妙，并且依赖于对 $\mathrm{Pol}_3(C_3)$ 在 $\mathrm{PSL}_3(\mathbb{C})$ 中的一个无限表示进行计算机辅助搜索。因此，含幺映射 $\varphi\colon\ C_3 \to \mathrm{PSL}_3(\mathbb{C})$ 由下式给出

$$\varphi(\sigma) = \begin{pmatrix} \omega r^2 & \frac{-2\omega-1}{3} r^2 & \frac{-\omega-2}{3} r^2 \\ -r^2 & -\omega r^2 & \frac{-2\omega-1}{3} r^2 \\ -(\omega+1) r^2 & r^2 & r^2 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \varphi(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\omega+2}{3} r \\ r & 0 & (\omega+1) r \\ 0 & r & \omega r \end{pmatrix}$$

其中 $\omega \in \mathbb{C}$是一个本原三次单位根，r是 $r^3 = 1 - \omega$的一个根，该映射是三次的，并导出从 $\mathrm{Pol}_3(C_3)$ 到 $\mathrm{PSL}_3(\mathbb{C})$ 的一个表示，其像是一个与 $\mathrm{PSL}_3(\mathbb{Z}[\omega])$ 可公度的算术格。这个算术格可以被明确描述，见定理 2；定理 1 中其余的断言则可通过在该表示中的直接计算得到。另有一个从 $\mathrm{Pol}_3(C_3)$ 到 $\mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_3((u)))$ 的表示，其像是算术的，详见定理 3。

对于一个含幺三次映射 $\varphi : G \to H$，每个一阶差分 $\Delta_k \varphi$ 都是 2 次多项式。我们将按如下方式对这些一阶差分进行单位化。对于 $k \in G$ 定义

$$\beta_k(g) := \varphi(k)^{-1} (\Delta_k \varphi)(g) = \varphi(k)^{-1} \varphi(kg) \varphi(g)^{-1}, \qquad g \in G. \tag{2}$$

设 $\varphi\colon\ C_3 \to G$ 是一个含幺三次映射。因此，β_σ 和 β_τ 是从 C_3 到 G的含幺二次映射，并且可以利用 [**JT24**]中的结果作进一步分析。第 1 节给出了 $\mathrm{Pol}_2(C_3)$ 结构的明确描述。随后将在第 2 节中利用这一描述，对从 C_3 出发的三次映射进行分类，并证明定理 1。

最后，第 3 节描述了局部紧群 $\mathrm{PSL}_3(\mathbb{C})$ 中的算术格；该算术格是由上述表示下 $\mathrm{Pol}_3(C_3)$ 的像产生的。本部分使用了 Jambor 的 L_3–U_3-商群算法[**Jam12**] ，并依赖于计算机辅助搜索和计算；我们使用 Magma 独立验证了这些搜索和计算，详见随附代码。

1. 二次映射与$\mathrm{Pol}_2(C_3)$

以下命题纠正了 [**JT24**，备注 4.5], 中的一项错误主张；其中声称群 $\mathrm{Pol}_2(C_3)$ 与系数取自 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 的海森堡群同构，见备注 1。

Proposition 1. 我们有

$$\mathrm{Pol}_2(C_3) \cong \left\langle a,b \;\middle|\; a^9=1,\ b^9=1,\ bab^{-1}=a^4,\ aba^{-1}=b^4 \right\rangle, \tag{3}$$

其中，对于泛含幺二次映射 $\phi:\ C_3 \to \mathrm{Pol}_2(C_3)$，$a=\phi(\sigma)$ 和 $b=\phi(\tau)$。群 $\mathrm{Pol}_2(C_3)$ 的阶为 27，并且同构于 $C_9 \rtimes C_3$，其中 C_3 的生成元通过在 C_9 上乘以 4 起作用。

Proof. 根据 [**JT24**，定理 1。3], 存在一个同构

$$\mathrm{Pol}_2(C_3) \cong (\omega(C_3)\otimes_{\mathbb{Z}} C_3)\rtimes_{\psi} C_3,$$

其中 C_3 通过左乘作用于 $\omega(C_3)$，在 $C_3=\mathrm{ab}(C_3)$ 上平凡作用，乘法为

$$(\xi,g)(\eta,h)=(\xi+g\eta+\psi(g,h),gh),$$

和 $\psi(g,h)=c(g)\otimes h$ 与 $c(g)=g-1$ [**JT24**、定理 1.3 及其证明]。此外，泛映射为

$$\phi(g)=(0,g)\qquad (g\in C_3)$$

[**JT24**，定理 1.3] 的证明。

令 $V:=\omega(C_3)\otimes_{\mathbb{Z}} C_3$（采用加法记号）。由于 $\omega(C_3)$ 是秩2自由阿贝尔群，其基为 $\alpha:=\sigma-1$ 和 $\beta:=\tau-1$，因此 $V\cong(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ 的基为

$$e_1:=\alpha\otimes\bar\sigma,\qquad e_2:=\beta\otimes\bar\sigma.$$

特别地，$|V|=9$，因此 $|\mathrm{Pol}_2(C_3)|=|V||C_3|=27$。

记 $a:=\phi(\sigma)=(0,\sigma)$ 和 $b:=\phi(\tau)=(0,\tau)$。利用 $\psi(g,h)=c(g)\otimes h$ 和 $\tau=2\bar\sigma$，我们记录

$$\psi(\sigma,\sigma)=e_1,\quad \psi(\tau,\sigma)=e_2,\quad \psi(\sigma,\tau)=2e_1,\quad \psi(\tau,\tau)=2e_2.$$

Then

$$\begin{aligned} a^2&=(0,\sigma)^2=(\psi(\sigma,\sigma),\tau)=(e_1,\tau),\\ a^3&=(e_1,\tau)(0,\sigma)=(e_1+\psi(\tau,\sigma),1)=(e_1+e_2,1),\end{aligned}$$

因此 $a^9=1$。类似地,

$$\begin{aligned} b^2&=(0,\tau)^2=(\psi(\tau,\tau),\sigma)=(2e_2,\sigma),\\ b^3&=(2e_2,\sigma)(0,\tau)=(2e_2+\psi(\sigma,\tau),1)=(2e_1+2e_2,1),\end{aligned}$$

因此 $b^9=1$。

对于逆元，我们使用 $(0,\ g)^{-1}=(-\psi(g^{-1},\ g)\ g^{-1})$ [**JT24**，定理 1 的证明。3]。因此

$$\begin{aligned} b^{-1}&=(-\psi(\sigma,\tau),\sigma)=(-2e_1,\sigma)=(e_1,\sigma),\\ a^{-1}&=(-\psi(\tau,\sigma),\tau)=(-e_2,\tau)=(2e_2,\tau).\end{aligned}$$

现在计算

$$\begin{aligned} bab^{-1} &= (0,\tau)(0,\sigma)(e_1,\sigma) \\ &= (\psi(\tau,\sigma),1)(e_1,\sigma) \\ &= (e_2,1)(e_1,\sigma) \\ &= (e_1+e_2,\sigma), \end{aligned}$$

而

$$a^4 = a^3a = (e_1+e_2,1)(0,\sigma) = (e_1+e_2,\sigma),$$

因此 $bab^{-1} = a^4$。同样,

$$\begin{aligned} aba^{-1} &= (0,\sigma)(0,\tau)(2e_2,\tau) \\ &= (\psi(\sigma,\tau),1)(2e_2,\tau) \\ &= (2e_1+2e_2,\tau) = b^4. \end{aligned}$$

所以 (3) 在 $\mathrm{Pol}_2(C_3)$ 中成立。

设 Γ 是由表示式 (3) 给出的群。由于 $\mathrm{Pol}_2(C_3)$ 由 $\phi(\sigma)$ 和 $\phi(\tau)$ 生成（根据 JT24 第 2 节中在生成元 $\phi(g)$ [上构造 $\mathrm{Pol}_2(G)$ 的方式，定理 1.2] 的证明），赋值 $a \mapsto \phi(\sigma)$、$b \mapsto \phi(\tau)$ 定义了一个满同态 $\Gamma \twoheadrightarrow \mathrm{Pol}_2(C_3)$。

还需给 $|\Gamma|$ 一个上界。由 $bab^{-1} = a^4$ 和 $a^9 = 1$ 可得

$$ba^3b^{-1} = (bab^{-1})^3 = (a^4)^3 = a^{12} = a^3,$$

因此，$\langle a^3\rangle$ 是 Γ 的中心，且其大小为 ≤ 3。在商群 $\Gamma/\langle a^3\rangle$ 中，关系式$bab^{-1} = a^4$ 变为 $bab^{-1} = a$，所以 a 和 b 在其中可交换；此外，$(\bar{a})^3 = (\bar{b})^3 = 1$，因为 $a^9 = b^9 = 1$。因此 $|\Gamma/\langle a^3\rangle| \leq 3^2 = 9$，所以 $|\Gamma| \leq 27$。

由于 Γ 满射到 $\mathrm{Pol}_2(C_3)$，且二者的阶均为 27，因此该映射是同构。□

Remark 1. 注意，尽管系数取 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$的海森堡群也是一个 27 阶非阿贝尔 3-群，但它与 $\mathrm{Pol}_2(C_3)$不同构，因为前者的指数为 3，而后者的指数为 9。按照标准记号，系数取 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 的海森堡群是特异群 3_+^{1+2}，而 $\mathrm{Pol}_2(C_3)$是特异群 3_-^{1+2}。它们是仅有的 27 阶非阿贝尔群。

2. C_3上的三次映射分类

现在，我们将应用上一节的结果来对 C_3 上的三次映射进行分类，并证明定理 1。设 $\varphi\colon C_3 \to G$ 是映入任意群 G 的含幺三次映射。令 $a := \varphi(\sigma)$ 和 $b := \varphi(\tau)$。那么

$$\beta_\sigma(h) := \varphi(\sigma)^{-1}\varphi(\sigma h)\varphi(h)^{-1} \quad \text{and} \quad \beta_\tau(h) := \varphi(\tau)^{-1}\varphi(\tau h)\varphi(h)^{-1}$$

是从 C_3 到 G的含幺二次映射。我们用 a, b 显式计算这些映射如下:

$$\beta_\sigma(\sigma) = a^{-1}\varphi(\sigma^2)\varphi(\sigma)^{-1} = a^{-1}ba^{-1},$$
$$\beta_\sigma(\tau) = a^{-1}\varphi(\sigma\tau)\varphi(\tau)^{-1} = a^{-1}\varphi(1)\,b^{-1} = a^{-1}b^{-1},$$
$$\beta_\tau(\sigma) = b^{-1}\varphi(\tau\sigma)\varphi(\sigma)^{-1} = b^{-1}\varphi(1)\,a^{-1} = b^{-1}a^{-1},$$
$$\beta_\tau(\tau) = b^{-1}\varphi(\tau^2)\varphi(\tau)^{-1} = b^{-1}\varphi(\sigma)b^{-1} = b^{-1}ab^{-1}.$$

由此可知，数对 $(a^{-1}ba^{-1}, a^{-1}b^{-1})$ 和 $(b^{-1}a^{-1}, b^{-1}ab^{-1})$ 必须满足命题 1 中的关系。特别地，我们得到以下关系：

$$(a^{-1}ba^{-1})^9 = 1, \tag{4a}$$
$$(a^{-1}b^{-1})^9 = 1, \tag{4b}$$
$$(a^{-1}b^{-1})\,(a^{-1}ba^{-1})\,(a^{-1}b^{-1})^{-1} = (a^{-1}ba^{-1})^4, \tag{4c}$$
$$(a^{-1}ba^{-1})\,(a^{-1}b^{-1})\,(a^{-1}ba^{-1})^{-1} = (a^{-1}b^{-1})^4, \tag{4d}$$
$$(b^{-1}a^{-1})^9 = 1, \tag{4e}$$
$$(b^{-1}ab^{-1})^9 = 1, \tag{4f}$$
$$(b^{-1}ab^{-1})\,(b^{-1}a^{-1})\,(b^{-1}ab^{-1})^{-1} = (b^{-1}a^{-1})^4, \tag{4g}$$
$$(b^{-1}a^{-1})\,(b^{-1}ab^{-1})\,(b^{-1}a^{-1})^{-1} = (b^{-1}ab^{-1})^4. \tag{4h}$$

注意到，(4e) 可由 (4b) 通过与 a共轭得到。我们设

$$z := a^{-1}b^{-1}, \quad w := a^{-1}ba^{-1}, \quad v := a^{-1}(b^{-1}ab^{-1})a = zw^{-1}.$$

重写这些关系后，得到：

$$w^9 \overset{(4a)}{=} 1, \quad v^9 \overset{(4f)}{=} 1, \quad z^9 \overset{(4b)}{=} 1$$
$$zwz^{-1} \overset{(4c)}{=} w^4, \quad wzw^{-1} \overset{(4d)}{=} z^4,$$
$$vzv^{-1} \overset{(4g)}{=} z^4, \quad zvz^{-1} \overset{(4h)}{=} v^4,$$

其中，我们对最后两个关系应用了与 a^{-1} 共轭。现在注意到，$wzw^{-1} = z^4$ 和 $z^9 = w^9 = 1$ 推出 $w^{-1}zw = z^7$，因为 $w^{-1} = w^8$ 和$4^8 \equiv 7$ （模 9）。我们计算

$$z^4 = vzv^{-1} = zw^{-1}zwz^{-1} = zz^7z^{-1} = z^7$$

并得到 $z^3 = 1$。但这意味着 z 与 v，w 对易，因此$w^3 = v^3 = 1$。于是，元素 a，b 必然满足以下关系：

$$(ba)^3, (ab^{-1}a)^3, [ba, ab^{-1}a].$$

我们定义 $\Gamma := \langle a,\ b \mid (ba)^3, (ab^{-1}a)^3,\ [ba, ab^{-1}a]\rangle$. 我们的计算已表明，$\mathrm{Pol}_3(C_3)$ 是 Γ的一个商群，将 a 映射到 $\varphi(\sigma)$，并将 b 映射到 $\varphi(\tau)$。现在我们试图证明反过来也成立。

LEMMA 1. 由 $\varphi(\sigma) = a$ 和 $\varphi(\tau) = b$ 给出的映射 $\varphi\colon C_3 \to \Gamma$ 是三次的。

PROOF. 我们必须验证$\Delta_k\varphi$ 对于 $k = \sigma$ 和 $k = \tau$是二次的。我们只验证第一种情形，第二种情形类似。我们必须验证 β_σ 是二次的，即命题 1 中的关系对偶（$a^{-1}ba^{-1}$，$a^{-1}b^{-1}$）成立。但这很容易由 Γ 中的关系得出，正如我们上文已经看到的那样。□

Proof of Theorem 1. 由 $\mathrm{Pol}_3(C_3)$ 的万有性质，映射$\varphi\colon\ C_3 \to \Gamma$ 通过一个同态 $\mathrm{Pol}_3(C_3) \to \Gamma$分解。该映射显然是满射，并且是先前讨论的反方向满射的一个截面。这意味着两个群同构，其中将 a 与 $\varphi(\sigma)$等同，并将 b 与 $\varphi(\tau)$等同。□

Corollary 1. $\mathrm{Pol}_3(C_3)$ 的阿贝尔化同构于 $C_9 \times C_3$。特别地，任何从 C_3 到阿贝尔群的三次映射，都由满足 $a^9 = b^9 = (ab)^3 = 1$ 的元素 $a = \varphi(\sigma)$ $b = \varphi(\tau)$ 唯一确定。

3. 两个具有算术像的$\mathrm{Pol}_3(C_3)$的具体表示

在全文中，我们通过定理 1 中的同构将 Γ与 $\mathrm{Pol}_3(C_3)$ 等同起来。我们还将 Γ° 定义为典范同态 $\mu\colon\ \Gamma \to C_3$ 的核，该同态由 $\mu(a) = \sigma$ 和 $\mu(b) = \tau$ 给出。

3.1. 特征零下的一个表示。取本原三次单位根 $\omega \in \mathbb{C}$，使得 $\omega^2+\omega+1 = 0$。设 r为 $r^3 = 1-\omega$ 的一个根，并令 $E := \mathbb{Q}(r)$。存在一个将 $\mathbb{Z}[\omega]/((1-\omega))$ 与 $\mathbb{F}_3$ 等同起来的典范识别。我们用 $\mathrm{PSL}_3(\mathbb{Z}[\omega], I)$ 表示与理想 I 相关的同余子群，并定义$K_n := \mathrm{PSL}_3(\mathbb{Z}[\omega], ((1-\omega)^n))$，其中 $n = 0,1,2$。注意， $K_0 = \mathrm{PSL}_3(\mathbb{Z}[\omega])$ 且 $K_0/K_1 = \mathrm{PSL}_3(\mathbb{F}_3)$ $K_2/K_1 = \mathfrak{sl}_3(\mathbb{F}_3)$。我们还用 $\mathrm{U}_+(\mathbb{F}_3) \subseteq \mathrm{PSL}_3(\mathbb{F}_3)$ 表示上三角幺幂矩阵构成的子群。

Theorem 2. 该赋值

$$\pi(a) = \begin{pmatrix} \omega r^2 & \frac{-2\omega-1}{3} r^2 & \frac{-\omega-2}{3} r^2 \\ -r^2 & -\omega r^2 & \frac{-2\omega-1}{3} r^2 \\ -(\omega+1) r^2 & r^2 & r^2 \end{pmatrix}, \qquad \pi(b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\omega+2}{3} r \\ r & 0 & (\omega+1) r \\ 0 & r & \omega r \end{pmatrix}.$$

延拓为 $\pi\colon\ \Gamma \to \mathrm{PSL}_3(E)$的一个表示。 π 的像与 $K_0 = \mathrm{PSL}_3(\mathbb{Z}[\omega])$可公度，因而为算术的。更精确地说，

(1) $\pi(\Gamma) \cap K_0 = \pi(\Gamma^\circ)$ *has index* 3 *in* $\pi(\Gamma)$,
(2) $\pi(\Gamma) \cap K_0$ *has index* $2^4 \cdot 3 \cdot 13 = 624$ *in* K_0 *and moreover*
   (a) $K_2 \subseteq \pi(\Gamma)$
   (b) $(\pi(\Gamma) \cap K_1)/K_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & d & e \\ 0 & f & -d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d,e,f \in \mathbb{F}_3 \right\} \subseteq \mathfrak{sl}_3(\mathbb{F}_3)$,
   and
   (c) $(\pi(\Gamma) \cap K_0)/(\pi(\Gamma) \cap K_1) = \mathrm{U}_+(\mathbb{F}_3) \subseteq \mathrm{PSL}_3(\mathbb{F}_3)$.

Outline of the proof. 一旦给出这些矩阵，通过直接计算即可验证 Γ中的关系成立。可用Nielsen-Schreier算法计算 Γ° 的生成元，并可直接验证 $\pi(\Gamma^\circ) \subseteq K_0$ ，且商群 $\pi(\Gamma)/\pi(\Gamma^\circ)$同构于 C_3。这就证明了(1)。

其余结论可由直接计算和关于同余子群的标准事实推出。事实上，我们构造了生成元 a, b 的显式字词，从而得到元素属于 $3\mathbb{Z}[\omega]$ 和$\langle U_-(3\mathbb{Z}[\omega])\ U_+(3\mathbb{Z}[\omega]) \rangle = \mathrm{PSL}_3(\mathbb{Z}[\omega], 3\mathbb{Z}[\omega])$ 的标准幺幺矩阵。由于 $3\mathbb{Z}[\omega]$ 是欧几里得整环，这是一个标准事实，见 [**Bas64**]。这证明了 (2a)。(2b) 和 (2c) 中的结论可通过直接计算验证。

所有计算均由 Magma 记录文件 char0cert.m 认证，并记载于 char0cert.txt □

COROLLARY 2. 群 $\pi(\Gamma)$ 是 $\mathrm{PSL}_3(\mathbb{C})$中的一个算术格。

到幂零群的多项式映射尤为重要；参见 [**Lei02**]。，其中已获得若干结构性结果。在 [**JT24** 的注 4.2]中，作者指出，从 $\mathbb{Z}$ 出发的二次映射的像可以生成幂零类任意大的有限幂零群。以下推论表明，对于从 C_3出发的三次映射，情况也相同。

COROLLARY 3. 存在幂零类任意大的有限幂零群，它们有一个来自 C_3 的三次映射，其像生成整个群。

PROOF. 作为前一定理的推论，群 $\pi(\Gamma)$ 是 resid-ually 3-finite。由于有限 3-群是幂零群，而 $\pi(\Gamma)$ 本身并非幂零群，因此 $\pi(\Gamma)$ 的有限商群的幂零类没有上界。由于 $\pi(\Gamma)$ 是 Γ 的一个商群，对于 Γ，结论同样成立。然而，从 Γ 出发的同态对应于从 C_3出发的三次映射，因此存在幂零类任意大的有限幂零群，它们有一个来自 C_3 的三次映射，其像生成整个群。□

3.2. 特征 3下的一个表示。 除了第 3 节中的复表示外，还有一个在特征为 3 的全局函数域上 Γ的显式表示。这使得我们可以将 Γ° 视为 $\mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_3((u)))$ 中的一个格。

考虑函数域 $\mathbb{F}_3(t)$，令 $u := t^3$，并通过嵌入 $u \mapsto t^3$ 将 $\mathbb{F}_3(u)$ 视为 $\mathbb{F}_3(t)$ 的子域。

THEOREM 3. 将这一对应

$$\rho(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/t \\ 2/t & 0 & 0 \\ 2t^2 & 2t^2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \rho(b) = \begin{pmatrix} 0 & 2t & 0 \\ 0 & 0 & 2/t^2 \\ t & 0 & t \end{pmatrix}$$

扩张为一个表示 $\rho\colon\ \Gamma \to \mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_3(t))$。

(1) 我们有 $\rho(\Gamma^\circ) \le SL_3(\mathbb{F}_3[u])$。*(2) (a)* $\rho(\Gamma^\circ)$ 包含主同余子群 $SL_3(\mathbb{F}_3[u], (u^2))$。特别地，$\rho(\Gamma^\circ)$ 在 $SL_3(\mathbb{F}_3[u])$ 中具有有限指数。*(b)* 商群 $\big(\rho(\Gamma^\circ) \cap SL_3(\mathbb{F}_3[u]), (u)\big) \big/ \big(\rho(\Gamma^\circ) \cap SL_3(\mathbb{F}_3[[u]]), (u^2)\big)$ 同构于 $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{F}_3)$ 的一个 7 维子空间；*(c)* $\rho(\Gamma^\circ)/(\rho(\Gamma^\circ) \cap SL_3(\mathbb{F}_3[u], (u)))$ 同构于 $U_+(\mathbb{F}_3)$，即 $SL_3(\mathbb{F}_3)$ 中上三角幺幂矩阵构成的子群。

OUTLINE OF THE PROOF. 同样，只需计算即可验证 $\rho(a)$ $\rho(b)$ 满足 Γ 的关系子，从而定义一个表示 ρ。该计算还会得到指数为3的核 H 的 Schreier生成元，并将 w_1、……、w_4 在ρ 下的像与显式矩阵 h_1、……、$h_4 \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_3[u])$ 相匹配。

接下来，证书逐个根给出显式词，求值后得到初等矩阵 $E_{ij}(u^2)$ 和 $E_{ij}(u^3)$，对所有 $i \neq j$ 均成立。利用 $\mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_3[u])$ 中的 Steinberg交换子关系，这意味着 $\rho(\Gamma^\circ)$ 包含

所有满足 $f(u) \in (u^2)$ 的初等矩阵 $E_{ij}(f(u))$。由于 $\mathbb{F}_3[u]$ 是一个欧几里得整环 [**Bas64**], , 因此有

$$\mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_3[u],(u^2)) = E_3(\mathbb{F}_3[u],(u^2)),$$
$$\mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_3[u],(u^2)) \leq \rho(\Gamma^\circ).$$

最后，$\mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_3[u],(u^2))$ 在 $\mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_3[u])$ 中具有有限指数，因为 $\mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_3[u]/(u^2))$ 是有限的。所有计算均由 Magma 记录文件 char3cert.m 认证，并记录于 char3cert.txt。□

作为推论，我们得到 Γ°的第二个算术表示。

COROLLARY 4. 群 $\rho(\Gamma^\circ)$ 是 $\mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_3((u)))$ 中的一个算术格。

3.3. 最终讨论。 尽管 Γ有这些引人注目的呈示，我们仍无法确定这些表示的来源，也无法判断它们的存在是孤立现象，还是更大图景的一部分。我们似乎撞上了一座冰山，却完全不知道它有多大。此外，关于 Γ 的基本问题仍然悬而未决，例如我们不知道 Γ 是否剩余有限，甚至是否为线性的。与 $\mathrm{Pol}_2(G)$ 不同，我们缺乏对 $\mathrm{Pol}_3(C_3)$ 的任何概念性描述。

然而请注意，我们从 Margulis 关于局部域上代数群中的格的开创性著作中得到了以下特别的推论，参见 [**Mar91**]。

COROLLARY 5. 在映射 $\pi \times \rho\colon \Gamma^\circ \to \mathrm{PSL}_3(\mathbb{Z}[\omega]) \times \mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_3[u])$ 下，Γ° 的像包含一个有限指数子群。

PROOF. 考虑乘积映射的像：

$$\Delta := (\pi \times \rho)(\Gamma^\circ) \leq \pi(\Gamma^\circ) \times \rho(\Gamma^\circ).$$

根据定理 2，子群 $\pi(\Gamma^\circ)$ 在 $\mathrm{PSL}_3(\mathbb{Z}[\omega])$ 中具有有限指数。根据定理 3，子群 $\rho(\Gamma^\circ)$ 在 $\mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_3[u])$ 中具有有限指数。

令 p_i 为 $i \in \{1,2\}$ 的坐标投影。根据 $\pi(\Gamma^\circ)$ 和$\rho(\Gamma^\circ)$ 的定义，p_1 和 p_2 均为满射，因此 Δ 是一个次直积。

定义 $N_2 := \ker(p_1)$ 和 $N_1 := \ker(p_2)$。于是 $N_2 \lhd \rho(\Gamma^\circ)$ 且 $N_1 \lhd \pi(\Gamma^\circ)$。根据 Margulis 正规子群定理 [**Mar91**], , 每个 N_i 要么是有限的，要么具有有限指数。

我们断言，N_1 和 N_2 都不可能是有限的。假设 N_2 是有限的。那么，p_1 诱导出一个同构 $\Delta/N_2 \cong \pi(\Gamma^\circ)$。通过这一识别，投影 p_2 诱导出一个满射

$$f : \pi(\Gamma^\circ) \twoheadrightarrow \rho(\Gamma^\circ)/N_2.$$

其核是 $\pi(\Gamma^\circ)$ 的正规子群，因此根据 Margulis 的结果，它要么是有限的，要么具有有限指数。由于 $\rho(\Gamma^\circ)/N_2$ 是无限的，该核不可能具有有限指数，因此必定是有限的。

根据 Margulis 超刚性定理 [**Mar91**], , 映射 f 延拓为一个同态 $\mathrm{PSL}_3(\mathbb{C}) \to \mathrm{PSL}_3(\mathbb{F}_3((u)))$，这是荒谬的。将 N_1 替换为 N_2，我们可以进行类似的论证。

因此，N_1 和 N_2 在 $\pi(\Gamma^\circ)$ 和 $\rho(\Gamma^\circ)$ 中具有有限指数。由于 $(N_1 \times \{1\}) \leq \Delta$ 且 $(\{1\} \times N_2) \leq \Delta$，我们得到 $N_1 \times N_2 \leq \Delta$。由于 $N_1 \times N_2$ 在 $\pi(\Gamma^\circ) \times \rho(\Gamma^\circ)$ 中具有有限指数，因此 Δ 包含 $\mathrm{PSL}_3(\mathbb{Z}[\omega]) \times \mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_3[u])$ 的一个有限指数子群。□

REMARK 2. 两个表示 π和 ρ分别通过模 $1-\omega$和 u 约化，得到同态

$$\bar{\pi}, \bar{\rho} \colon \Gamma^{\circ} \to \mathrm{PSL}_3(\mathbb{F}_3).$$

$\bar{\pi}$ 和 $\bar{\rho}$ 的像同构于 $\mathrm{PSL}_3(\mathbb{F}_3)$ 的上三角幂幺子群，但这两个同态并不通过某个自同构相联系。我们对此感到惊讶，因为最初我们预期这两个表示之间存在某种相容性。

致谢

我们使用 GPT-5.2 改进了 Magma 中现有的 L3-U3-商算法实现，并编写了执行所需计算搜索的脚本；这对发现本文所述的无穷表示至关重要。这也揭示了先前版本代码中的一处错误，该错误导致算法的某些函数产生了不正确的输出。

参考文献

[Bas64] H. Bass, *K-theory and stable algebra*, 《IH´ES 数学出版物》´**22** （1964），5–60。[CAG14] 计算代数研究组， *Summary of New Features in Magma V2.21*，悉尼大学，2014；其中包含 S. Jambor 的 L3Quotients 软件包，实现了L_3–U_3-商算法。[Jam12] S. Jambor, *An L_3–U_3-quotient algorithm for finitely presented groups*，博士论文，亚琛工业大学，2012。[JT24] A. Jamneshan 和 A. Thom， *Quadratic maps between non-abelian groups*，已被 *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*接受发表；arXiv:2412.14908。[Lei98] A. Leibman，群中的多项式序列， *J. Algebra* **201** （1998），第 1 期，189–206。[Lei02] A. Leibman，群的多项式映射， *Israel J. Math.* **129** （2002），29–60。[Mar91] G. A. Margulis, *Discrete Subgroups of Semisimple Lie Groups*，施普林格，1991。

VADIM ALEKSEEV, FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK, TU DRESDEN, GERMANY*Email address*: vadim.alekseev@tu-dresden.de

ANDREAS THOM, FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK, TU DRESDEN, GERMANY*Email address*: andreas.thom@tu-dresden.de