arXiv:2603.08473v1 [math.FA] 9 Mar 2026

广义函数的经典有限维不动点方法

KEVIN ISLA MI、GEORGE APAABOAH和PAOLO GIORD ANO

摘要。我们在广义光滑函数的框架中证明了Banach、牛顿-拉夫逊和布劳威尔不动点定理。广义光滑函数是Colombeau理论（因而也是经典分布理论）的一个最小扩展，它使得对非线性奇异问题进行建模成为可能，同时与普通光滑函数共享若干基本性质，例如对复合的封闭性以及微积分中若干非平凡的经典定理。所证明的结果使人们能够处理形如 $F(x) = 0$的方程，其中 F 是广义光滑函数，特别是索伯列夫-施瓦茨分布。我们考虑了这些定理的经典版本中未包含的带有奇点的示例。

1. 引言：用广义函数求解非线性方程

莱布尼茨观点的一种肤浅假设 自然不飞跃， [27], 会立即与我们当前的数学模型相冲突，因为这些模型经常考虑各种类型的不连续性。例如，我们可能关注固体的大变形或极快速的机械断裂（弹塑性），[38, 6, 8], 地球物理学中的破裂， [4, 10], 颗粒材料的微观力学模型， [7, 3], 两个相互穿透流体的动力学（多流体流动），[37, 28], 拉格朗日光学中的不连续性， [25], 波在特征分段光滑的介质中传播（例如，地震波在分层介质中传播， [22]），或者无限矩形势阱或势垒以无限频率变化的矩形势阱中薛定谔方程的解， [11, 39]。这些模型采用的一个通用数学框架是索伯列夫空间，因此也涉及弱导数和索伯列夫-施瓦茨分布。然而，在处理奇异模型时，非线性运算、广义函数及其导数的逐点取值，以及为构建理想化模型而采用无穷小量或无限大量等实用方法，都是必要工具；这些模型无法用上述数学理论形式化（一般性综述见，具体应用可参见前述引文）。显然，仅采用数值解并不能让我们获得

2000 数学主题分类。 46F-XX, 46F30, 26E30, 49M15, 47H10.关键词和短语。 广义函数的非线性分析，牛顿-拉夫逊过程，Banach与布劳威尔不动点定理，非阿基米德分析，Colombeau广义函数。本研究亦全部或部分由奥地利科学基金（FWF）10.55776/PAT9221023、P34113、10.55776/P33945、10.55776/P33538资助。为开放获取之目的，作者已对本投稿产生的任何作者接受稿版本应用知识共享署名 4.0 国际许可协议公共版权许可。

研究这些解及其性质的一般定理，从而获得更广泛、更深入的理解。

J.F. Colombeau理论使得在嵌入的索伯列夫-施瓦茨分布之间实现所有这些建模可能成为可能，同时避免施瓦茨不可能性定理所带来的困难。参见例如 [8, 32, 33, 18]，其中介绍了相关应用。特别地，广义光滑函数（GSF）是Colombeau理论（因而也是经典分布理论）的一个最小扩展，它使非线性奇异问题的建模成为可能，同时还具备普通光滑函数的许多基本性质，例如对复合的封闭性以及微积分中的若干非平凡经典定理，参见 [5, 12, 29, 24, 16]。可以将GSF描述为对柯西-狄拉克关于广义函数的原始构想在方法论上的恢复，参见[26, 19]。本质上，柯西和狄拉克（以及泊松、基尔霍夫、亥姆霍兹、开尔文和海维赛德）的思想是：将广义函数视为适当类型的光滑集合论映射，这些映射由依赖于适当无穷小或无限大参数的普通光滑映射获得。

本文在广义光滑函数的框架下研究巴拿赫、牛顿和布劳威尔不动点方法。这使我们能够求解形如$F(x) = 0$的方程，其中 F 是广义光滑函数，特别是索伯列夫-施瓦茨分布。即使我们仅考虑 x 为（非阿基米德，即 x 也可以是无穷小或无限大的数） n维点的情形，这项工作也是后续研究的前期准备；在后续研究中，我们将处理无限维方程。

本文内容自成一体，因为其中包含了我们将要给出的证明所需的全部命题，介绍了广义光滑函数理论所需的所有概念，而且只需具备初等的科隆博理论知识。

在第2节，我们介绍广义数及其拓扑，以及广义光滑函数和它们的一些解析性质。第3 节讨论有限维广义点空间中的巴拿赫不动点定理。第4 节继续讨论有限维情形下的牛顿法及相应的二次收敛。最后，我们在第5节通过一些示例结束本文，特别是探讨经典版本的这些方法无法处理的奇点示例。

2. 预备概念

2.1. 标量环。在本文中， I 表示区间 $(0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ ，并且我们始终用变量 ε 表示 I 中的元素。依赖于 ε的网 $x \in \mathbb{R}^I$ 记为 (x_ε)，而 $\mathbb{N}$ 表示包含零的自然数集合。

我们首先定义新的数的Colombeau标量环 $\widetilde{\mathbb{R}}$，其中 $\rho = (\rho_\varepsilon) = (\varepsilon)$。本节结果的所有证明见 [16]。

定义 1。设 $\rho = (\rho_\varepsilon) \in (0, 1]^I$ 为一个网，满足 $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \rho_\varepsilon = 0$，则
(i) $\mathcal{I}(\rho) := \{(\rho_\varepsilon^{-a}) \mid a \in \mathbb{R}_{>0}\}$ 称为由 ρ 生成的渐近尺度。网 ρ 称为尺度。(ii) 如果 $\mathcal{P}(\varepsilon)$ 是 $\varepsilon \in I$ 的一个性质，我们使用记号 $\forall^0\varepsilon:\ \mathcal{P}(\varepsilon)$ 表示$\exists\varepsilon_0 \in I\, \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]:\ \mathcal{P}(\varepsilon)$。我们将 $\forall^0\varepsilon$ 读作：“当 ε 足够小时”。(iii) 我们称网 $(x_\varepsilon) \in \mathbb{R}^I$ 是 ρ-中等的，并记作 $(x_\varepsilon) \in \mathbb{R}_\rho$，如果

$$\exists (J_\varepsilon) \in \mathcal{I}(\rho):\ x_\varepsilon = O(J_\varepsilon) \text{ as } \varepsilon \to 0^+$$

i.e., if $\exists N \in \mathbb{N}\forall^0\varepsilon:\ |x_\varepsilon| \leq \rho_\varepsilon^{-N}$.

设 (x_ε)、$(y_\varepsilon) \in \mathbb{R}^I$，那么我们称 $(x_\varepsilon) \sim_\rho (y_\varepsilon)$，如果

$$\forall (J_\varepsilon) \in \mathcal{I}(\rho):\ x_\varepsilon = y_\varepsilon + O(J_\varepsilon^{-1}) \text{ as } \varepsilon \to 0^+,$$

也就是说，如果 $\forall n \in \mathbb{N}\forall \varepsilon:\ |x_\varepsilon - y_\varepsilon| \leq \rho_\varepsilon^n$。这是关于逐点运算的中等网之环 $\mathbb{R}_\rho$ 上的一个同余关系，因此我们可以定义

$$^\rho\widetilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R}_\rho/\sim_\rho,$$

我们称之为广义数的 ***Robinson-Colombeau*** 环，[34, 8]。我们将 $^\rho\widetilde{\mathbb{R}}$ 等价类 $x \in {}^\rho\widetilde{\mathbb{R}}$ 记为 $x =: [x_\varepsilon] := [(x_\varepsilon)]_{\sim_\rho} \in {}^\rho\widetilde{\mathbb{R}}$。

在下文中，ρ 始终表示定义 1 中的无穷小网；例如，可以根据我们将要引入的广义函数所需解的（微分）方程类型来选取它，参见 [17]。关于 $^\rho\widetilde{\mathbb{R}}$ 的自然性，参见 [16, 20]。情形 $\rho_\varepsilon = \varepsilon$ 对应于 Colombeau 广义数的 $\mathbb{R}$ 环 [18]；关于 $^\rho\widetilde{\mathbb{R}}$ 的基本性质，参见例如 [16]。

我们可以在 $^\rho\widetilde{\mathbb{R}}$ 上定义一种序关系：如果存在 $(z_\varepsilon) \in \mathbb{R}^I$ 使得 $(z_\varepsilon) \sim_\rho 0$（我们称 (z_ε) 是 ρ-可忽略的），并且 $x_\varepsilon \leq y_\varepsilon + z_\varepsilon$ 对于 ε 足够小，则称 $[x_\varepsilon] \leq [y_\varepsilon]$。如果 $x \leq y$ 且 $x - y$ 可逆，我们称 $x < y$。从一种直观的 $^\rho\widetilde{\mathbb{R}}$ 观点来看待这些广义数，一个有效的方法是将 $[x_\varepsilon] \in {}^\rho\widetilde{\mathbb{R}}$ 视为时间 $\varepsilon \to 0^+$ 中的动态点；因此，经典实数被嵌入为静态点。此外，如果 $\exists \lim_{\varepsilon\to 0^+} x_\varepsilon =: x^\circ \in \mathbb{R}$，我们称 $x = [x_\varepsilon] \in {}^\rho\widetilde{\mathbb{R}}$ 为近标准。尽管该序 $\leq$ 并非全序，我们仍然可以定义有限个点的下确界函数 $\min([x_\varepsilon], [y_\varepsilon]) := [\min(x_\varepsilon, y_\varepsilon)]$，以及类似地定义上确界函数 $\max([x_\varepsilon], [y_\varepsilon]) := [\max(x_\varepsilon, y_\varepsilon)]$；绝对值 $|[x_\varepsilon]| := [|x_\varepsilon|] \in {}^\rho\widetilde{\mathbb{R}}$ 也同样可以定义。在下文中，我们还将使用惯用记号 $^\rho\widetilde{\mathbb{R}}^*$ 表示可逆广义数的集合。我们对区间的记号为：$[a, b] := \{x \in {}^\rho\widetilde{\mathbb{R}} \mid a \leq x \leq b\}$、$[a, b]_{\mathbb{R}} := [a, b] \cap \mathbb{R}$；对于线段 $[x, y] := \{x + r \cdot (y - x) \mid r \in [0, 1]\} \subseteq {}^\rho\widetilde{\mathbb{R}}^n$ 和 $[x, y]_{\mathbb{R}^n} = [x, y] \cap \mathbb{R}^n$，记号类似。开区间使用关系 $<$ 定义，即 $(a, b) := \{x \in {}^\rho\widetilde{\mathbb{R}} \mid a < x < b\}$。最后，我们令 $\mathrm{d}\rho := [\rho_\varepsilon] \in {}^\rho\widetilde{\mathbb{R}}$，它是一个正可逆无穷小，其倒数为 $\mathrm{d}\rho^{-1} = [\rho_\varepsilon^{-1}]$，并且必然是一个正无穷大数。

与所有非阿基米德环一样，我们有如下结论

定义 2. 设 $x \in {}^\rho\widetilde{\mathbb{R}}$ 是一个广义数，则

(i) 若对所有 $r \in \mathbb{R}_{>0}$，都有 $|x| \leq r$，则 x 是无穷小。若 $x = [x_\varepsilon]$，这等价于 $\lim_{\varepsilon\to 0^+} x_\varepsilon = 0$。这个直观上显然的结果在非标准分析中无法实现，[9]，在合成微分几何中也无法实现，[23]。若 $x - y$ 是无穷小，我们记作 $x \approx y$；并用 $D_\infty := \left\{h \in {}^\rho\widetilde{\mathbb{R}} \mid h \approx 0\right\}$ 表示所有无穷小量的集合。**(ii)** 若对所有 $r \in \mathbb{R}_{>0}$，都有 $|x| \geq r$，则 x 是无限大。若 $x = [x_\varepsilon]$，这等价于 $\lim_{\varepsilon\to 0^+} |x_\varepsilon| = +\infty$。**(iii)** 若对某个 $r \in \mathbb{R}_{>0}$，有 $|x| \leq r$，则 x 是有限。

2.2. 上的拓扑 $^\rho\widetilde{\mathbb{R}}^n$。在 $^\rho\widetilde{\mathbb{R}}$-模 $^\rho\widetilde{\mathbb{R}}^n$ 上，我们可以考虑欧几里得范数的自然扩展，即 $||[x_\varepsilon]|| := [|x_\varepsilon|] \in {}^\rho\widetilde{\mathbb{R}}$，其中 $[x_\varepsilon] \in {}^\rho\widetilde{\mathbb{R}}^n$。尽管这个广义范数取值于 $^\rho\widetilde{\mathbb{R}}$，但它仍具有经典范数的共同性质，参见例如 [16]:

(i) $|x| =$ 最大值$(x, -x)$ (ii)
$|x| \geq 0$(iii) $|x| = 0 \implies x = 0$
(iv) $|y \cdot x| = |y| \cdot |x|$(v)
$|x + y| \leq |x| + |y|$(vi)
$||x| - |y|| \leq |x - y|$.

因此，自然要考虑在 ${}^{\rho}\mathbb{R}^n$，由该广义范数和一组半径所定义的球生成的拓扑。理解如下事实并非平凡：能使我们得到广义函数连续性的一组有意义半径是集合 ${}^{\rho}\mathbb{R}^{*}_{\geq 0} = {}^{\rho}\mathbb{R}_{>0}$，由正的且可逆的广义数组成。事实上，球的集合 $\left\{B_r(c) \mid r \in {}^{\rho}\widetilde{\mathbb{R}}_{>0},\quad c \in {}^{\rho}\widetilde{\mathbb{R}}^n\right\}$，其中 $B_r(c) := \left\{x \in {}^{\rho}\widetilde{\mathbb{R}}^n \mid |x - c| < r\right\}$，是 ${}^{\rho}\mathbb{R}^n$ 上一个拓扑的基，称为 尖拓扑，而尖拓扑中的任一开集都将被称为 尖锐开集，参见 [1, 36, 35, 31, 18, 13]及其中的参考文献。下述结果在处理正的且可逆的广义数时是有用的（参见 [18]）。

引理 3. 设 $x \in {}^{\rho}\mathbb{R}$。则以下条件等价：
(i) x 可逆且 $x \geq 0$，即 $x > 0$。*(ii)* 对于 x 的每个代表元$(x_\varepsilon) \in \mathbb{R}_\rho$，都有 $\forall^0\varepsilon$: $x_\varepsilon > 0$。*(iii)* 对于 x 的每个代表元 $(x_\varepsilon) \in \mathbb{R}_\rho$，都有 $\exists m \in \mathbb{N}\,\forall^0\varepsilon:\quad x_\varepsilon > \rho_\varepsilon^m$。*(iv)* 存在 x 的一个代表元$(x_\varepsilon) \in \mathbb{R}_\rho$，使得 $\exists m \in \mathbb{N}\,\forall^0\varepsilon:\quad x_\varepsilon > \rho_\varepsilon^m$.

环${}^{\rho}\mathbb{R}$ 在尖拓扑下是柯西完备且豪斯多夫的，[15, 16],并且由引理 3还可推出，尖拓扑由所有以下类型的无穷小球 $B_{\mathrm{d}\rho^q}(c) \subseteq {}^{\rho}\mathbb{R}^n$ 生成。因此，序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在 ${}^{\rho}\mathbb{R}^n$ 尖拓扑下收敛到其极限 l 当且仅当

$$\forall q \in {}^{\rho}\widetilde{\mathbb{R}}_{>0}\,\exists N \in \mathbb{N}\,\forall n \in \mathbb{N}_{>N}:\ |x_n - l| < \mathrm{d}\rho^q. \tag{2.1}$$

广义光滑函数及其微分演算。利用环 ${}^{\rho}\mathbb{R}$，可以方便地考虑无穷小标准差的高斯分布。若将此概率密度记为 $f(x, \sigma)$，并令 $\sigma = [\sigma_\varepsilon] \in {}^{\rho}\mathbb{R}_{>0}$，其中$\sigma \approx 0$，便可得到一个光滑函数网（$f(-, \sigma_\varepsilon))_{\varepsilon\in I}$。以下内容的基本思想正是如此

定义 4。设$X \subseteq {}^{\rho}\widetilde{\mathbb{R}}^n$和 $Y \subseteq {}^{\rho}\widetilde{\mathbb{R}}^d$是广义点的任意子集。那么，我们称

$$f : X \longrightarrow Y \text{ is a } \textit{generalized smooth function}$$

若 $f:\ X \longrightarrow Y$ 是一个集合论映射，且存在一个网 $f_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$，以如下意义定义 $f:\ f([x_\varepsilon]) = [f_\varepsilon(x_\varepsilon)] \in Y$，并且对定义域 X 中任意点的所有代表元 $[x_\varepsilon] = x \in X$ 及所有导数$\alpha \in \mathbb{N}^n$，均有$(\partial^\alpha f_\varepsilon(x_\varepsilon)) \in \mathbb{R}^d_\rho$。将 X 映射到 Y 的广义光滑函数空间（GSF）记为 ${}^{\rho}\mathcal{GC}^\infty(X, Y)$。

需要明确指出，该定义陈述了从 X 到 Y 的集合论映射所需的最小逻辑条件，该映射由光滑函数网定义，见 [20,第 5]节。特别是，下述定理 5 说明等式 $f([x_\varepsilon]) = [f_\varepsilon(x_\varepsilon)]$ 是定义良好的，即对于所有导数 $[x_\varepsilon] \in X \mapsto [\partial^\alpha f_\varepsilon(x_\varepsilon)] \in {}^{\rho}\widetilde{\mathbb{R}}^d,\quad \alpha \in \mathbb{N}^n$ 均与代表元的选取无关。

定理 5。 令 $X \subseteq {}^{\rho}\widetilde{\mathbb{R}}^n$ 和 $Y \subseteq {}^{\rho}\widetilde{\mathbb{R}}^d$ 为广义点的任意子集。设 $f_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$ 是一个光滑函数网，它定义了类型为 $X \longrightarrow Y$ 的广义光滑映射，则

(i) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n \, \forall (x_\varepsilon), (x'_\varepsilon) \in \mathbb{R}^n_\rho : \quad [x_\varepsilon] = [x'_\varepsilon] \in X \;\Rightarrow (\partial^\alpha f_\varepsilon(x_\varepsilon)) \sim_\rho (\partial^\alpha f_\varepsilon(x'_\varepsilon))$。*(ii)* 每个 $f \in {}^{\rho}\mathcal{GC}^\infty(X, Y)$ 关于在 X、 Y 上诱导的尖锐拓扑是连续的。*(iii)* $f : X \longrightarrow Y$ 是广义光滑函数，当且仅当存在网 $v_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon, \mathbb{R}^d)$，使得 $\langle \Omega_\varepsilon \rangle := \left\{ x \in {}^{\rho}\widetilde{\mathbb{R}}^n \mid \forall [x_\varepsilon] = x \, \forall^0 \varepsilon : \quad x_\varepsilon \in \Omega_\varepsilon \right\} \supseteq X$，$(\partial^\alpha v_\varepsilon(x_\varepsilon)) \in \mathbb{R}^d_\rho$ 对所有代表元 $[x_\varepsilon] = x \in X$ 以及所有 $\alpha \in \mathbb{N}^n$ 成立，并且 $f = [v_\varepsilon(-)]|_X$。

通过证明存在唯一的另一个广义光滑函数作为增量比，可以引入广义光滑函数的微分演算。

定理 6 (广义光滑函数的费马–雷耶斯定理)。 设 $U \subseteq {}^{\rho}\mathbb{R}^n$ 是一个尖锐开集，设 $v = [v_\varepsilon] \in {}^{\rho}\mathbb{R}^n$，并设 $f \in {}^{\rho}\mathcal{GC}^\infty(U, {}^{\rho}\mathbb{R})$ 是由光滑函数网 $f_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon, \mathbb{R})$ 生成的广义光滑映射。那么

(i) 存在 T 的一个尖邻域，以及一个广义光滑映射 $r \in {}^{\rho}\mathcal{GC}^\infty(T, {}^{\rho}\mathbb{R})$，称为 f 沿着 v 的广义增量比，使得

$$\forall (x, h) \in T : \; f(x + hv) = f(x) + h \cdot r(x, h).$$

(ii) 任意两个广义增量比在 $U \times \{0\}$ 的某个尖邻域上一致。*(iii)* 对每个 $x \in U$，都有 $r(x, 0) = \left[\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial v_\varepsilon}(x_\varepsilon) \right]$，因此我们可以定义 $\mathrm{d}f(x) \cdot v := \frac{\partial f}{\partial v}(x) := r(x, 0)$，从而 $\frac{\partial f}{\partial v} \in {}^{\rho}\mathcal{GC}^\infty(U, {}^{\rho}\widetilde{\mathbb{R}})$。

注意，该结果允许考虑关于任意广义向量 $v \in {}^{\rho}\mathbb{R}^n$ 的偏导数 f，其中该向量可以是例如无穷小或无限大的。利用这一结果，我们还可以将后续微分 $\mathrm{d}^j f(x)$ 定义为 $j-$ 多重线性映射，并令 $\mathrm{d}^j f(x) \cdot h^j := \mathrm{d}^j f(x)(h, \ldots^{j} \ldots, h)$。所有在环 ${}^{\rho}\widetilde{\mathbb{R}}$ 上的 $j-$ 多重线性映射 $\left({}^{\rho}\widetilde{\mathbb{R}}^n\right)^j \longrightarrow {}^{\rho}\widetilde{\mathbb{R}}^d$ 的集合记为 $L^j({}^{\rho}\widetilde{\mathbb{R}}^n, {}^{\rho}\widetilde{\mathbb{R}}^d)$。对于 $A = [A_\varepsilon(-)] \in L^j({}^{\rho}\widetilde{\mathbb{R}}^n, {}^{\rho}\widetilde{\mathbb{R}}^d)$，我们令 $|A| := [|A_\varepsilon|]$，即由多重线性映射 $A_\varepsilon \in L^j(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$ 的算子范数定义的广义数。

与分布和 Colombeau 广义函数的情形不同，考虑两个广义光滑函数的自由复合并不存在问题。这一性质带来了新的有趣可能性，例如，研究微分方程 $y' = f(y, t)$，其中 y 和 f 都是广义光滑函数。例如，研究 $y' = \delta(y)$ 并不存在问题。有关下述结论的证明，请参见 [16] 。

定理7。 带有尖拓扑迹拓扑的子集 $S \subseteq {}^{\rho}\mathbb{R}^s$，以广义光滑映射为箭头，构成拓扑空间范畴的一个子范畴。我们将此范畴称为 ${}^{\rho}\mathcal{GC}^\infty$，即广义光滑函数范畴。

例如，我们可以将狄拉克δ函数视为形如 $\delta : {}^{\rho}\mathbb{R} \longrightarrow {}^{\rho}\mathbb{R}$ 的映射，因此复合 e^δ 在 $\{x \in {}^{\rho}\widetilde{\mathbb{R}} \mid \exists z \in {}^{\rho}\widetilde{\mathbb{R}}_{>0}$ 中有定义： $\delta(x) \leq \log z\}$，其中当然不包含 $x = 0$，而只包含适当的非零无穷小量。另一方面， $\delta \circ \delta : {}^{\rho}\mathbb{R} \longrightarrow {}^{\rho}\mathbb{R}$。

微分演算的通常规则都成立，包括链式法则：$\partial_{(f\circ g)}\,\partial_v\,(x) = \mathrm{d}f(g(x))\cdot\frac{\partial g}{\partial v}(x)$，如果 $U \subseteq {}^{\rho}\widetilde{\mathbb{R}}^n$ 和 $V \subseteq {}^{\rho}\widetilde{\mathbb{R}}^d$ 是尖拓扑中的开子集，且 $g \in {}^{\rho}\mathcal{GC}^{\infty}(V,U)$、$f \in {}^{\rho}\mathcal{GC}^{\infty}(U,{}^{\rho}\mathbb{R})$。

我们还有泰勒公式的一个推广：

定理 8。设 $f \in {}^{\rho}\mathcal{GC}^{\infty}(U, {}^{\rho}\mathbb{R})$ 是在尖锐开集 $U \subseteq {}^{\rho}\widetilde{\mathbb{R}}^d$ 中定义的广义光滑函数。设 a、$b \in {}^{\rho}\widetilde{\mathbb{R}}^d$ 使得线段 $[a,b] \subseteq U$，并令 $h := b-a$。那么，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，我们有

(i) $\exists \xi \in [a,b]:\ f(a+h) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\mathrm{d}^j f(a)}{j!}\cdot h^j + \frac{\mathrm{d}^{n+1} f(\xi)}{(n+1)!}\cdot h^{n+1}$.

(ii) $f(a+h) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\mathrm{d}^j f(a)}{j!}\cdot h^j + \frac{1}{n!}\cdot\int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{d}^{n+1} f(a+th)\cdot h^{n+1}\,\mathrm{d}t$.

此外，存在某个 $R \in {}^{\rho}\mathbb{R}_{>0}$ 使得

$$\forall k \in B_R(0)\,\exists \xi \in [a,a+k]:\ f(a+k) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\mathrm{d}^j f(a)}{j!}\cdot k^j + \frac{\mathrm{d}^{n+1} f(\xi)}{(n+1)!}\cdot k^{n+1} \tag{2.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1} f(\xi)}{(n+1)!}\cdot k^{n+1} = \frac{1}{n!}\cdot\int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{d}^{n+1} f(a+tk)\cdot k^{n+1}\,\mathrm{d}t \approx 0. \tag{2.3}$$

公式（i）对应于带有拉格朗日余项的普通光滑函数泰勒公式的直接推广。另一方面，在（2.2）和（2.3）中，考虑了微分 $\mathrm{d}^{n+1} f$ 在某些点可能为无限大的情况，并将泰勒公式表述为具有无穷小余项的形式。

对于 Schwartz 分布的嵌入，可以完全按照 Colombeau理论中的方法进行，因此请参阅 [18, 16]。由 [18, 定理 37]可知，特殊 Colombeau代数 $\mathcal{G}^s(\Omega)$ 可以在特殊情形下（即 $\rho(\varepsilon) = \sim\ \sim\varepsilon$）与定义在紧支撑点 $\widetilde{\ }\ \widetilde{\ }\Omega_c$ 上的广义光滑函数代数 ${}^{\rho}\mathcal{GC}^{\infty}(\Omega_c, {}^{\rho}\mathbb{R})$ 相对应：$= \{x \in {}^{\rho}\mathbb{R} \mid x$ 是有限的 $\exists r \in \mathbb{R}_{>0}:\ d(z,\partial\Omega) \geq r\}$（$\Omega$ 的）。因此，相较于 Colombeau广义函数，广义光滑函数可以具有更一般的定义域，由此带来了对复合的封闭性。

3. n维空间中的巴拿赫不动点定理

为清晰起见，本文首先考虑迭代次数有限的有限维不动点定理有限 $f^n = f\circ\overset{n}{\ldots}\circ f, n \in \mathbb{N}$。之后，我们将在 [21]，中考虑迭代次数为超有限 $n = [n_\varepsilon] \in {}^{\rho}\mathbb{R}$, $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$，次数 $f^n(x) = [(f_\varepsilon\circ\overset{n_\varepsilon}{\ldots}\circ f_\varepsilon)(x_\varepsilon)]$ 的情形。

3.1. 在 d维空间中的巴拿赫不动点定理。我们关于牛顿-拉夫逊过程收敛性的坎托罗维奇定理的证明基于 [2,定理 1]。核心思路是使用巴拿赫不动点定理证明其收敛性。然而，该过程从一个点 $x_0 \in X$ 出发，只递归地定义一个序列，而不是在整个子集 X上定义压缩映射，另见 [2, 定理 1]。因此，我们需要以下

定义9。设 $X \subseteq {}^{\rho}\widetilde{\mathbb{R}}^d$ 是一个尖锐闭子集，且 $x_0 \in X$。那么，如果 g 是从以下点出发的轨道上的压缩映射 $x_0 \in X$，我们称之为：
(i) $g \in {}^{\rho}\mathcal{GC}^{\infty}(X, {}^{\rho}\widetilde{\mathbb{R}}^d)$; (ii) $g^n(x_0) \in X$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$; (iii)
$\exists \alpha \in {}^{\rho}\widetilde{\mathbb{R}}_{>0}\,\forall n \in \mathbb{N}:\ |g^{n+1}(x_0) - g^n(x_0)| \leq \alpha^n |g(x_0) - x_0|$;

(iv) $\forall n \in \mathbb{N}$: 极限$\lim_{\substack{n\to+\infty \\ n\in\mathbb{N}}} \alpha^n = 0$，其中极限是在尖拓扑中取的，见（2.1）。

此外，我们称 g 是 X 上的压缩映射，如果 $g\colon X \longrightarrow X$ 且 $|g(x)-g(y)| \leq \alpha|x-y|$ 对所有 $x, y \in X$ 均成立。在这两种情况下，这样的$\alpha \in {}^{\rho}\mathbb{R}$ 称为 g 的压缩常数。

我们立即注意到(iv) 是与巴拿赫空间中压缩映射的经典定义相比，一个颇为特殊的差异。这是一个更强的条件，因为它意味着

$$\forall q \in \mathbb{N}\, \exists N \in \mathbb{N}_{>0}\, \forall n \in \mathbb{N}_{\geq N}\colon\ \alpha < \mathrm{d}\rho^{\frac{q}{n}}. \tag{3.1}$$

因此， α 必然是一个无穷小数；例如，任意 $0 < \alpha \leq \mathrm{d}\rho^k$， $k \in \mathbb{N}_{>0}$都满足(iv)。因此，压缩映射是一种广义函数，它将点映射得彼此更近，并具有一个强无穷小压缩常数。根据带拉格朗日余项的一阶泰勒公式（中值定理），定理8。(i)，如果 $|g'(x)| \leq \alpha$ 对所有 $x \in X$ 均成立，且 α 满足（3.1），那么 α 是一个压缩常数~，对应于 g。为了克服这一局限，我们需要考虑进行超有限次$n = [n_\varepsilon] \in {}^{\rho}\mathbb{R}$，$n_\varepsilon \in \mathbb{N}$迭代。这将在下一篇工作中讨论 [21]。

得益于我们已经证明的关于广义光滑函数（GSF）的所有预备结果（从这一角度看，关于复合的封闭性尤为重要，定理7），证明巴拿赫不动点定理在形式上与经典证明相似。

引理 10. 在定义 *9*的假设下，有：
(i) X 上的压缩映射在从任意点$x_0 \in X$出发的轨道上仍是压缩映射；*(ii)* X 上的压缩映射至多有一个不动点。

证明。第一条性质只需用归纳法证明定义 9 的不等式 (iii)~即可得出。对于第二条结论，设 x、 $y \in X \in {}^{\rho}\mathbb{R}$ 是 g的不动点，因此 $g(x) = x$ 且 $g(y) = y$。由于 $\alpha < 1$，如式 (3.1) 所示，并根据定义 9 中的 (iii)，可得 $|g(x) - g(y)| = |x-y| \leq |x-y|$，即 $|x-y| = 0$，因此$x = y$。□

定理 11 （巴拿赫）。 设 $x_0 \in X \subseteq {}^{\rho}\widetilde{\mathbb{R}}^d$ 是一个尖锐闭子集。设 $g : X \longrightarrow {}^{\rho}\widetilde{\mathbb{R}}^d$ 是从 x_0 开始的轨道上的压缩映射。那么 $\{g^n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是尖拓扑中的柯西序列，其极限 $x^* \in X$ 是 g 的一个不动点。

证明。 利用定义 (iii) 中的压缩性质（9），对所有 n， $m \in \mathbb{N}$， $n < m$，我们有：

$$\begin{aligned}
|g^m(x_0) - g^n(x_0)| &\leq |g^m(x_0) - g^{m-1}(x_0)| + \cdots + |g^{n+1}(x_0) - g^n(x_0)| \\
&\leq \alpha^n \left(\sum_{j=0}^{m-n-1} \alpha^j \right) |g(x_0) - x_0| \\
&= \alpha^n \left(\frac{1-\alpha^{m-n}}{1-\alpha} \right) |g(x_0) - x_0| \\
&= \frac{\alpha^n - \alpha^m}{1-\alpha} |g(x_0) - x_0|
\end{aligned}$$

这意味着 $\{g^n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 中的柯西序列，这是因为定义 (ii)和 (iv)中的条件（9）。由于 X 在尖拓扑下完备，序列 $\{g^n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$有一个极限 $x^*\in X$。由 g 在尖拓扑下的连续性（定理 5.(ii)），我们得到结论：

$$g(x^*)=g\Big(\lim_{n\in\mathbb{N}}g^n(x_0)\Big)=\lim_{n\in\mathbb{N}}g^{n+1}(x_0)=x^*.$$

□

关于 Colombeau代数框架下的巴拿赫不动点定理，请参见 [41, 40]。

为了完成本节，我们将陈述并证明广义光滑函数的布劳威尔不动点定理。

定义 12。 设 $U\subseteq {}^{\rho}\widetilde{\mathbb{R}}^n$、$Y\subseteq {}^{\rho}\widetilde{\mathbb{R}}^d$ 和 $k=0,\ 1$。于是，如果存在一个网 $f_\varepsilon\in\mathcal{C}^k(U_\varepsilon,\ \mathbb{R}^d)$，使 f 在以下意义下成立，则称 $f\colon\ U\longrightarrow Y$ 是广义 $\mathcal{C}^k$-函数（$f\in {}^{\rho}\mathcal{GC}^k(U,\ Y)$）：

(i) $U\subseteq\langle U_\varepsilon\rangle$；(ii) 对所有 $x=[x_\varepsilon]\in U$，$f([x_\varepsilon])=[f_\varepsilon(x_\varepsilon)]\in Y$；(iii) 对所有 $x=[x_\varepsilon]\in U$ 以及满足 $|\alpha|\leq k$ 的多重指标 $\alpha\in\mathbb{N}^n$，$(\partial^\alpha f_\varepsilon(x_\varepsilon))$ 是 ρ-适度的；(iv) 对于所有满足 $|\alpha|=k$ 的多重指标 $\alpha\in\mathbb{N}^n$，映射 $[x_\varepsilon]\in U\mapsto[\partial^\alpha f_\varepsilon(x_\varepsilon)]\in Y$ 定义良好且尖连续。

实际上，这一定义适用于任意 $k\in\mathbb{N}\cup\{+\infty]$，取 $k=+\infty$时，性质（iv）可利用每个导数的缓增性（iii）加以证明，参见定义4、定理5，详细内容也可参见 [16, 定理 16] 和 [16, 定理 17] 。

不过请注意，绝对值函数 $|-|\colon {}^{\rho}\widetilde{\mathbb{R}}\longrightarrow {}^{\rho}\widetilde{\mathbb{R}}$不是 ${}^{\rho}\mathcal{GC}^1$-函数，因为尽管其右导数和左导数都存在，但它的导数在原点处并非尖连续；显然，它是一个 ${}^{\rho}\mathcal{GC}^0$-函数。另一方面，嵌入定理 [16, 定理 25]（或者我们希望考虑的任何其他采用光滑磨子的正则化过程）给出了一个广义光滑函数 $\mathrm{abs}(-)\in {}^{\rho}\mathcal{GC}^\infty({}^{\rho}\mathbb{R},\ {}^{\rho}\mathbb{R})$，作为 $x\in\mathbb{R}\mapsto|x|\in\mathbb{R}$的嵌入。然而，只有当 $|x|\geq r$ 对某个 $r\in\mathbb{R}_{>0}$成立时，正则化过程才会得到 $\mathrm{abs}(x)\approx|x|$ 和 $\mathrm{abs}(x)=|x|$。另一方面，很容易证明，如果 $f\in {}^{\rho}\mathcal{GC}^\infty(X,\ {}^{\rho}\widetilde{\mathbb{R}}^d)$，那么 $x\in X\mapsto|f(x)|\in {}^{\rho}\mathbb{R}$ 总是尖连续的。

定理 13（布劳威尔）。 每个广义连续映射 $f\in {}^{\rho}\mathcal{GC}^0([0,1]^d,[0,1]^d)$都有一个不动点。

证明。 令 $f_\varepsilon\in\mathcal{C}^0(U_\varepsilon,\mathbb{R}^d)$ 为 f 的连续代表元，使得 $\langle U_\varepsilon\rangle\supseteq[0,1]^d=[[0,1]^d_{\mathbb{R}}]\subseteq {}^{\rho}\widetilde{\mathbb{R}}^d$。按照经典方法用矛盾法进行证明（另见 [16,引理 11]），对于所有足够小的 ε，都有 $\Omega_\varepsilon\supseteq[0,1]^d_{\mathbb{R}}$。这意味着 f_ε 是连续的，可以限制到 $f_\varepsilon|_{[0,1]^d}\longrightarrow\mathbb{R}^d$，且仍然连续。现在可能会出现这种情况：$f^j_\varepsilon$ 的某个分量，对于 $j=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ d$，可能略大于 1 或略小于 0，偏差可忽略不计。为处理这种情况，我们可以通过令 $\bar{f}_\varepsilon$ 为 $\bar{f}^j_\varepsilon=\min(f^j_\varepsilon,\ 1)$ 来取新的代表元。
我们需要证明这个函数是连续的，而这与标准情形类似；在标准情形下，我们可以定义 minas

$$\bar{f}^j_\varepsilon=\min(f^j_\varepsilon,1)=-\max(-f^j_\varepsilon,-1)=-(\frac{1}{2}(-f^j_\varepsilon-1+|-f^j_\varepsilon+1|)).$$

最后一个表达式是连续函数的复合，因此 $\bar{f}_\varepsilon = \min(f_\varepsilon^j, 1)$ 也是连续的。采用类似的过程考虑 $\max(f_\varepsilon^j, 1)$。由此$^{-}$ $^{-}$可得，初始函数可以写成 $f(x) = [(f_\varepsilon^1(x_\varepsilon) \dots , f_\varepsilon^d(x_\varepsilon)],$，也就是说，我们可以更换代表元，使得 f_ε 保持小于 1 且大于 0。

因此，我们证明了可以找到新的代表元，使得

$$\forall^0 \varepsilon : \ \bar{f}_\varepsilon \in \mathcal{C}^0([0,1]^d_{\mathbb{R}}, [0,1]^d_{\mathbb{R}}).$$

因此，我们可以应用布劳威尔不动点定理的标准版本，找到一个不动点 $x_\varepsilon \in [0,1]^d_{\mathbb{R}}$:

$$\bar{f}_\varepsilon(x_\varepsilon) = x_\varepsilon.$$

令 $x := [x_\varepsilon] \in [0,1]^d$，证明即告完成。 □

与经典情形一样，通过平移，此结果可以推广到任意区间$\lrcorner[a,b]$, $a < b \in {}^\rho\mathbb{R}$。

4. d 维牛顿-拉夫森方法

在本节中，我们讨论广义光滑函数的牛顿法、将其化约为前述的巴拿赫不动点定理（由 [2], 表述），以及它的二次收敛。我们始终明确假设维数 $d \geq 1$。

定义 14。令 $U \subseteq {}^\rho\widetilde{\mathbb{R}}^d$和 $f \in \mathcal{GC}^\infty(U, {}^\rho\widetilde{\mathbb{R}}^d)$。若对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均有以下条件，则称 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$是 f 的牛顿（-拉夫森）过程:
(i) $x_n \in U$; (ii) $\mathrm{d}f(x_n)$ 可逆; (iii)
$x_{n+1} = x_n - [\mathrm{d}f(x_n)]^{-1} f(x_n)$。

根据定理6，我们仍可以说 x_{n+1} 是切线$^{\sim}$（若 $d = 1$）在 f（x_n）与 x轴的交点。不过请注意， $x_{n+1} = [x_{n+1,\varepsilon}] \in {}^\rho\mathbb{R}$，因此这条切线可以表示为在 ε处沿 f（x_n）$= [f_\varepsilon$（$x_{n\varepsilon}$）$]$, 移动的普通切线，它也可能取无限大或无穷小值。

为了根据巴拿赫压缩映射原理定理11推导牛顿法的正确性，我们定义 g 如下:

$$g(x) := x - [\mathrm{d}f(x)]^{-1} f(x) \tag{4.1}$$

对于所有满足 $\mathrm{d}f(x)$ 可逆的 $x \in U$。注意，当且仅当 x^* 是 g 的不动点时，它才是 f 的根。

关于微分的可逆性，我们有如下结论

$^{\sim}$ $^{\sim}$**引理 15**。设 U 是 ${}^\rho\mathbb{R}$ 中的尖锐开集， $f \in \mathcal{GC}^\infty(U, {}^\rho\mathbb{R})$，且 $u \in U$ 满足 $\mathrm{d}f(u)$ 可逆。那么存在 u 的一个邻域 V，使得对于所有 $v \in V$，$\mathrm{d}f(v)$ 都可逆。

证明。由于 $\mathrm{d}f(u)$ 可逆，根据 $|\mathrm{d}f(u)| = [|\mathrm{d}f_\varepsilon(u)|]$ 和引理 3，我们有 $|\mathrm{d}f(u)| > 0$。这意味着，由引理 3 再次可得，对于某个 $q \in \mathbb{N}$，有 $|\mathrm{d}f(u)| > \mathrm{d}\rho^q$。根据定理 6，$\mathrm{d}f$ 也是一个广义光滑函数；因此，由尖锐连续性定理 5.(ii) 可得，对于充分接近 u 的 v，有 $|\mathrm{d}f(v) - \mathrm{d}f(u)| < \mathrm{d}\rho^{2q}$，例如 $v \in B_{\mathrm{d}\rho^q}(u)$。利用第 2.2 节开头列出的范数的最后一个性质，我们得到

$$||\mathrm{d}f(v)| - |\mathrm{d}f(u)|| \leq |\mathrm{d}f(v) - \mathrm{d}f(u)| < \mathrm{d}\rho^{2q}.$$

这意味着，

$$\mathrm{d}\rho^{3q} \leq \mathrm{d}\rho^{q} - \mathrm{d}\rho^{2q} < |\mathrm{d}f(u)| - \mathrm{d}\rho^{2q} < |\mathrm{d}f(v)|$$

对所有 $v \in B_{\mathrm{d}\rho^{q}}(u)$，这就是引理 3的结论。 □

众所周知，一般而言，牛顿-拉夫森迭代并不收敛，除非函数 f 满足适当条件。例如，即使在光滑情形下，$f(x) := 27x^3 - 3x + 1$ 也只有一个负根 $x^* \simeq -0.44$，但从 $x_0 = 0$出发，我们有 $x_1 = 1/3$ 和 $x_{n+1} > x_n > 0$，例如 $x_2 = 1/6$、$x_3 = 1$、$x_4 \simeq 0.68$等。在这种情况下，初始点 $x_0 = 0$ 处的切线斜率为负，因此与 x轴的交点距离负根更远。另一方面，即使在这种情况下，如果初始点 x_0 “足够接近根 x^*”，该方法仍会收敛，例如对于 $x_0 < -\sqrt{3}/9$，其中$f'(x_0) > 0$。

基于这些原因，我们可以在文献中找到若干关于牛顿-拉夫森迭代收敛的充分条件，参见例如 [42, 43, 44, 45, 46]

下一个结果是在广义光滑函数的背景下受 [2,定理 1]启发而得出的。

定理 16 (牛顿-拉夫森，Ben-Israel)。 设 $x_0 \in {}^{\rho}\widetilde{\mathbb{R}}^{d}$, $r \in {}^{\rho}\widetilde{\mathbb{R}}_{>0}$ 和 $f \in {}^{\rho}\mathcal{GC}^{\infty}(B_r(x_0)$ ${}^{\rho}\widetilde{\mathbb{R}}^{d})$满足：对于所有 $u \in B_r(x_0)$，$\mathrm{d}f(u)$均可逆。设 $M, N, k \in {}^{\rho}\mathbb{R}_{>0}$ 满足：对于所有 $u, v \in B_r(x_0)$，有：

$$|\mathrm{d}f(v)(u-v) - f(u) + f(v)| \leq M|u-v| \tag{4.2}$$

$$|(\mathrm{d}f(v)^{-1} - \mathrm{d}f(u)^{-1})f(u)| \leq N|u-v| \tag{4.3}$$

and

$$M|\mathrm{d}f(x)^{-1}| + N \leq k \quad \forall x \in B_r(x_0) \tag{4.4}$$

$$\lim_{n\to+\infty} k^n = 0. \tag{4.5}$$

$$|\mathrm{d}f(x_0)^{-1}||f(x_0)| \leq (1-k)r. \tag{4.6}$$

那么，序列

$$x_{n+1} = x_n - (\mathrm{d}f(x_n))^{-1}f(x_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{4.7}$$

收敛到 $x^* \in B_r(x_0)$，它是 $f(x^*) = 0$ 的一个解。

证明。令 $g : \overline{B_r(x_0)} \longrightarrow {}^{\rho}\widetilde{\mathbb{R}}^{d}$ 由 (4.1) 定义，使得 (4.7) 变为 $x_{n+1} = g(x_n)$。我们用归纳法证明，对于所有 $n \geq 1$，$x_n \in B_r(x_0)$ 都成立，其中 $n = 1$ 的情形可直接由 (4.6) 和 (4.5) 得出。假设对于所有$1 \leq i \leq n$，$x_i \in B_r(x_0)$ 都成立，我们证明它对 $n+1$ 也成立：

$$\begin{aligned}
x_{i+1} - x_i &= x_i - x_{i-1} - \mathrm{d}f(x_i)^{-1}f(x_i) + \mathrm{d}f(x_{i-1})^{-1}f(x_{i-1}) \\
&= \mathrm{d}f(x_{i-1})^{-1}\mathrm{d}f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) - \mathrm{d}f(x_i)^{-1}f(x_i) + \mathrm{d}f(x_{i-1})^{-1}f(x_{i-1}) \\
&= \mathrm{d}f(x_{i-1})^{-1}\Big(\mathrm{d}f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) - f(x_i) + f(x_{i-1})\Big) \\
&\quad + \Big(\mathrm{d}f(x_{i-1})^{-1} - \mathrm{d}f(x_i)^{-1}\Big)f(x_i).
\end{aligned}$$

利用（4.2）和（4.3），再结合归纳假设 x_i， $x_{i-1} \in B_r(x_0)$，我们得到

$$\begin{aligned} |x_{i+1} - x_i| &\leq \left(M|\mathrm{d}f(x)^{-1}| + N\right)|x_i - x_{i-1}| \\ &\leq k|x_i - x_{i-1}|, \end{aligned} \tag{4.8}$$

其中我们还用到了（4.4）。这意味着

$$|x_{i+1} - x_0| \leq \sum_{j=1}^{i} k^j |x_i - x_0| = \frac{k(1-k^i)}{1-k}|x_1 - x_0|.$$

因此，由（4.6）我们得到 $|x_1 - x_0| = |\mathrm{d}f（x_0）^{-1}||f（x_0）| \leq （1-k）r$从而

$$|x_{i+1} - x_0| \leq kr(1-k^j) < r.$$

由于 $x_{n+1} = g（x_n）$，不等式（4.8）意味着 g 是从 $x_0 \in B_r（x_0）$ 出发的轨道上的压缩映射，结论由（4.5）和定理11得出。□

由泰勒定理8，我们有

$$|\mathrm{d}f(v)(u-v) - f(u) + f(v)| \leq \frac{1}{2}\left|\mathrm{d}f^2(\xi)\right||u-v|^2.$$

因此，假设（4.2）对于一个小常数必定成立， M 如果 $u-v$ 充分~接近0，即对于充分小的$r \in {}^{\rho}\mathbb{R}_{>0}$ 如果 u， $v \in B_r（x_0）$ 。

我们还要指出，GSF 的逆函数定理成立，参见 [14]:

定理 17. 设 $X \subseteq {}^{\rho}\widetilde{\mathbb{R}}^d$，令 $f \in {}^{\rho}\mathcal{GC}^{\infty}(X, {}^{\rho}\widetilde{\mathbb{R}}^d)$，并假设对于 X 的某个尖内部中的 x_0，$df(x_0)$ 在 $L({}^{\rho}\widetilde{\mathbb{R}}^d, {}^{\rho}\widetilde{\mathbb{R}}^d)$ 中可逆。则存在 x_0 的一个尖邻域 $U \subseteq X$，以及 $f(x_0)$ 的一个尖邻域 V，使得 $f\colon U \to V$ 可逆，且 $f^{-1} \in {}^{\rho}\mathcal{GC}^{\infty}(V, U)$。此外，由链式公式可得，对于所有 $v \in V$，$d(f^{-1})(v) = \left[df(f^{-1}(v))\right]^{-1}$。

将泰勒公式应用于 f^{-1}，我们很容易看出，$|(\mathrm{d}f(v)^{-1} - \mathrm{d}f(u)^{-1})f(u)| \leq H|f(u)||f(v) - f(u)|$。项 $|f(v) - f(u)|$ 的阶为 $|v-u|$，因此，当 $|f(u)|$ 足够小时，对于一个较小的常数 N，条件 (4.3) 成立。这就形式化地表达了直观想法：“初始迭代 x_0 必须足够接近根 $x^* \in B_r(x_0)$，从而使 $|f(u)|$ 足够小”。

4.1. 牛顿法的二次收敛。

~**定义 18.** 如果序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in {}^{\rho}\mathbb{R}$ 至少以$\sim q$阶收敛于 x^*，即 $\exists \alpha \in {}^{\rho}\mathbb{R}_{>0}\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}_{\geq N}$： $|x_{n+1} - x^*| \leq \alpha |x_n - x^*|^q$，则称该序列具有至少 $\sim q$ 阶的收敛性。如果 $q=2$，则称该序列至少二次收敛。

定理 19. 设 $U \subseteq {}^{\rho}\widetilde{\mathbb{R}}^d$和 $f \in {}^{\rho}\mathcal{GC}^{\infty}(U, {}^{\rho}\widetilde{\mathbb{R}}^d)$ 满足：在 $x^* \in U$处，微分 $\mathrm{d}f(x^*)$ 是可逆的。假设 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是关于 f的牛顿过程，并且当 $n \to \infty$时收敛于 x^*。那么，对于所有 $M > \frac{1}{2}\left|\mathrm{d}f(x^*)^{-1}\mathrm{d}f(x^*)\right|$，且当 $n\in\mathbb{N}$充分大时，有 $|x_{n+1} - x^*| \leq M|x_n - x^*|^2$，即 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$二次收敛于 x^*。

证明。 设 $x_n - x^* =: h_n$。根据泰勒定理 8，对于某个 $\mu_n \in [x_n, x^*]$我们有 e

$$f(x_n - h_n) = f(x_n) - h_n \cdot \mathrm{d}f(x_n) + \frac{h_n^2}{2}\mathrm{d}f(\mu_n).$$

现在，由于 $x_n - h_n = x^*$ 且牛顿过程 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 x^*，我们必然有 $f(x^*) = 0$。

$$f(x_n) - (x_n - x^*)\mathrm{d}f(x_n) + \frac{h_n^2}{2}\mathrm{d}f(\mu_n) = 0.$$

根据定义 14，$\mathrm{d}f(x_n)$ 可逆，因此

$$\mathrm{d}f(x_n)^{-1}f(x_n) - (x_n - x^*) + \frac{h_n^2}{2}\mathrm{d}f(x_n)^{-1}\mathrm{d}f(\mu_n) = 0$$

根据牛顿迭代过程的定义 14，我们有

$$x_{n+1} - x^* = \frac{h_n^2}{2}\mathrm{d}f(x_n)^{-1}\mathrm{d}f(\mu_n)$$

这意味着

$$|x_{n+1} - x^*| = \frac{1}{2}\left|\mathrm{d}f(x_n)^{-1}\mathrm{d}f(\mu_n)\right| |x_n - x^*|^2$$

根据尖锐连续性定理 5 和费马-雷耶斯定理 6，$\mathrm{d}f(x_n)$ 收敛到 $\mathrm{d}f(x^*)$，且 $\mu_n \in [x_n, x^*]$ 收敛到 x^*；对于充分大的 n，$M > \frac{1}{2}\left|\mathrm{d}f(x_n)^{-1}\mathrm{d}f(\mu_n)\right| \to \frac{1}{2}\left|\mathrm{d}f(x^*)^{-1}\mathrm{d}f(x^*)\right|$，这就证明了该结论。□

5. 示例

在诸如 ${}^{\rho}\mathbb{R}$这样的非阿基米德情形中，要证明某个给定示例满足定理 16 的假设，所需的计算很快就会变得非常复杂。因此，我们有时会使用 Wolfram Mathematica 14.3 版的代数符号算法，来求得所需的解。

一个简单的普通光滑情形，没有奇点，且无需借助计算机即可验证，如下所示：

例 20. 设 $f(u) := 1 - u^2$. 我们要证明定理 16 的假设 (4.2)-(4.6) 均成立。我们有 $\mathrm{d}f(u) = -2u$，因此 $(\mathrm{d}f(u))^{-1} = -\frac{1}{2u}$。我们必须找到合适的常数 M、$N \in {}^{\rho}\mathbb{R}_{>0}$，并据此找到相关常数$k \in {}^{\rho}\mathbb{R}_{>0}$，使这些性质对我们选取的初始点 x_0 和半径$r \in {}^{\rho}\mathbb{R}_{>0}$成立。由此得到以下计算：

假设 (4.2)：

$$\begin{aligned}|\mathrm{d}f(v)(u-v) - f(u) + f(v)| &= |-2v(u-v) - (1-u^2) + 1 - v^2| \\ &= |-2uv + 2v^2 + u^2 - v^2| \\ &= |u^2 - 2uv + v^2| = |(u-v)^2| \le M|u-v|.\end{aligned}$$

如果 $|u - v| \le M$，因此 $M := 2r$ 是满足假设 (4.2) 的合适选择。

假设 (4.3)：

$$\begin{aligned}|(\mathrm{d}f(v)^{-1} - \mathrm{d}f(u)^{-1})f(u)| &= \left|(-\frac{1}{2v} + \frac{1}{2u})(1-u^2)\right| = \left|\frac{-u+v}{2uv}\right| \left|1-u^2\right| \\ &= |u-v|\left|\frac{1}{2uv}\right| \left|1-u^2\right| \le N|u-v|.\end{aligned}$$

因此，我们必然有 $N \geq \frac{|1-u^2|}{|2uv|}$。已知 $u, v \geq x_0 + r \geq 0$，我们可以设 $N := 1 - \left(\frac{x_0+r}{2}\right)^2 (x_0 - r)$从而 (4.3) 也成立。

假设 (4.4)： 我们有 $M|\mathrm{d}f(x)^{-1}| + N = 2r_2 \frac{1}{(x_0-r)^2} + 1 - \left(\frac{x_0 \pm r}{2}\right)^2 (x_0 - r)_2 \leq k$, 因此我们可以取 k 等于不等式左边，以确保满足（(4.4)）。

假设 (4.5)： 现在，我们必须选择 $x_0 \approx 1$ 和 $r \approx 0$。设 $x_0 := 1 - \mathrm{d}\rho^2$和 $r := \mathrm{d}\rho$。为验证 $\lim_{n\to+\infty} k^n = 0$，我们必须证明存在$R \in \mathbb{R}_{>0}$ 使得 $k \leq \mathrm{d}\rho^R$. 将我们选取的值代入 k的形式中，得到

$$k = \frac{2\mathrm{d}\rho + 1 - ((1-\mathrm{d}\rho^2) + \mathrm{d}\rho)^2}{2((1-\mathrm{d}\rho^2) - \mathrm{d}\rho)^2} = \frac{\mathrm{d}\rho^2 + 2\mathrm{d}\rho^3 - \mathrm{d}\rho^4}{2(1 - \mathrm{d}\rho - \mathrm{d}\rho^2)^2} \leq \mathrm{d}\rho^R,$$

例如， $R := 1$ 时该式成立。

假设 (4.6)：

$$\begin{aligned}|\mathrm{d}f(x_0)^{-1}||f(x_0)| = \frac{|1-(1-\mathrm{d}\rho^2)^2|}{2|1-\mathrm{d}\rho^2|} &= \frac{1-(1-2\mathrm{d}\rho^2+\mathrm{d}\rho^4)}{2(1-\mathrm{d}\rho^2)} = \frac{2\mathrm{d}\rho^2 - \mathrm{d}\rho^4}{2(1-\mathrm{d}\rho^2)} \\ &\leq (1-k)\mathrm{d}\rho = \mathrm{d}\rho - \mathrm{d}\rho\frac{\mathrm{d}\rho^2 + 2\mathrm{d}\rho^3 - \mathrm{d}\rho^4}{2(1-\mathrm{d}\rho-\mathrm{d}\rho^2)^2}.\end{aligned}$$

通过比较等式两边出现的无穷小量的阶，这个不等式成立。

下面给出前一个定理的非阿基米德版本。

例21. 设 $f(u) := Ha^2 - Hu^2$ 其中 $a, H \in {}^{\rho}\mathbb{R}_{>0}$, a 是一个无穷小数，但 $Ha^2 \in {}^{\rho}\mathbb{R}$ 是无限大的。首先，我们注意到 $\mathrm{d}f(u) = -2Hu$ 以及 $(\mathrm{d}f(u))^{-1} = -\frac{1}{2Hu}$。

假设 (4.2)：

$$\begin{aligned}|\mathrm{d}f(v)(u-v) - f(u) + f(v)| &= \left|(-2Hv)(u-v) - Ha^2 + Hu^2 + Ha^2 - Hv^2\right| \\ &= \left|-2Hvu + 2Hv^2 + Hu^2 - Hv^2\right| \\ &= \left|H(u-v)^2\right| \leq M|u-v|.\end{aligned}$$

这意味着 $|H||u-v| \leq M$，从而 $M := 2r|H|$ 是满足该不等式的一个充分选择。

假设 (4.3)：

$$\begin{aligned}|(\mathrm{d}f(v)^{-1} - \mathrm{d}f(u)^{-1})f(u)| &= \left|(\frac{-1}{2Hv} + \frac{1}{2Hu})(Ha^2 - Hu^2)\right| \\ &= \left|-\frac{Ha^2}{2Hv} + \frac{Hu^2}{2Hv} + \frac{Ha^2}{2Hu} - \frac{Hu^2}{2Hu}\right| \\ &= \left|\frac{u^2-a^2}{2v} + \frac{a^2-u^2}{2u}\right| \\ &= \left|\frac{u^3 - a^2u + a^2v - vu^2}{2uv}\right| \\ &= \left|\frac{(u-v)(u^2-a^2)}{2uv}\right| \leq N|u-v|.\end{aligned}$$

因此我们必然有 $\left|\frac{u^2-a^2}{2uv}\right| \leq N$，并且可以选择 $N := \frac{a^2-\left(\frac{x_0+r}{2}\right)^2)(x_0-r)_\circ}{2}$

假设 (4.4)**：** $M|\mathrm{d}f(x)^{-1}| + N = 2r|H|\left|\frac{1}{2Hu}\right| + N = \frac{2r}{2|u|} + \frac{a^2-\left(\frac{x_0+r}{2}\right)^2)(x_0-r)}{2} \leq \frac{2r+a^2-\left(\frac{x_0+r}{2}\right)^2)(x_0-r)}{2} = k$.

假设 (4.5)**：** 为了求得常数 k，我们可以选择 $x_0 := a + a^2\mathrm{d}\rho^{R+2}$ 以及 $r := a^2\mathrm{d}\rho^{R+1}$ 对于某个 $R \in \mathbb{R}_{>0}$. 这些选择引出了以下 k

$$k = \frac{\mathrm{d}\rho^{R+1}\left(2 - 2a - 2a\mathrm{d}\rho - a^2\mathrm{d}\rho^{R+1} - 2a^2\mathrm{d}\rho^{R+1} - a^2\mathrm{d}\rho^{R+3}\right)}{2(1 + a\mathrm{d}\rho^{R+2} - a\mathrm{d}\rho^{R+1})^2}.$$

现在，我们注意到，对于我们选择的 x_0 和 r，$k \leq \mathrm{d}\rho^R$ 成立；对于任意正的 R，这就证明了第四个不等式。

假设 (4.6)**：**

$$\begin{aligned}
|\mathrm{d}f(x_0)^{-1}||f(x_0)| &= \left|\frac{1}{2Hx_0}\right|\left|Ha^2 - Hx_0^2\right| = \frac{|a^2 - x_0^2|}{2|x_0|} \\
&= \left|\frac{a^2 - \left(a^2 + 2a^3\mathrm{d}\rho^{R+2} + a^4\mathrm{d}\rho^{2R+4}\right)}{2\left(a + a^2\mathrm{d}\rho^{R+2}\right)}\right| \\
&= \frac{2a^3\mathrm{d}\rho^{R+2} + a^4\mathrm{d}\rho^{2R+4}}{2\left(a + a^2\mathrm{d}\rho^{R+2}\right)} = \frac{a^2\mathrm{d}\rho^{R+2}\left(2 + a\mathrm{d}\rho^{R+2}\right)}{2\left(1 + a\mathrm{d}\rho^{R+2}\right)} \\
&\leq (1-k)a^2\mathrm{d}\rho^{R+1}.
\end{aligned}$$

我们有 $\frac{a^2\mathrm{d}\rho^{R+2}(2+a\mathrm{d}\rho^{R+2})}{2(1+a\mathrm{d}\rho^{R+2})} = \frac{\mathrm{d}\rho^{R+1}a^2\,\mathrm{d}\rho(2+a\mathrm{d}\rho^{R+2})}{2(1+a\mathrm{d}\rho^{R+1})}$，因此 $\frac{\mathrm{d}\rho(2+a\mathrm{d}\rho^{R+2})}{2(1+a\mathrm{d}\rho^{R+1})} \leq 1-k$ 该式成立，因为 $\mathrm{d}\rho$ 是一个无穷小数，从而也证明了最后一个不等式。

对于最后一个例子，我们考虑一个通过对斜坡函数 $\mathrm{ramp}(x) := \max(0, x)$ 进行正则化而定义的广义光滑函数。为了简化计算，我们考虑尺度 $\rho_\varepsilon = \varepsilon$ 以及借助 $\mu(x) := \max(0, 1 - x^2)^{34}$, $\mu_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon}\mu(\frac{x}{\varepsilon})$ 进行的磨光（这显然不是 Colombeau 磨子）。对于与本例相关的一些计算，我们使用了 Wolfram Mathematica 14.3 版。

例 22. 将上述斜坡函数与 μ_ε 卷积，得到 $f(x) := [(\text{斜坡} * \mu_\varepsilon)(x)] = \frac{3}{4}\mathrm{d}\rho(3\mathrm{d}\rho - x)(\mathrm{d}\rho + x^3)\,\mathrm{d}\rho^2 \in {}^\rho\widetilde{\mathbb{R}}$ 对所有 $x \in {}^\rho\widetilde{\mathbb{R}}$ 均成立，因此 $\mathrm{d}f(x) = [(\text{斜坡} * \mathrm{d}\mu_\varepsilon)(x)] \overset{12}{=} (2\mathrm{d}\rho - x)(\mathrm{d}\rho + x^2)\,\mathrm{d}\rho^3$，$\mathrm{d}f(x)^{-1} = \frac{4}{\mathrm{d}\rho^3(2\mathrm{d}\rho - x)(\mathrm{d}\rho + x)^2}$。利用这些表达式，我们得到定理 16 的假设如下：

假设 (4.2)**：** 不等式 $|\mathrm{d}f(v)(u-v) - f(u) + f(v)| \leq M|u-v|$ 推出

$$\begin{aligned}
M \geq \frac{1}{192\mathrm{d}\rho^3}\Big(&\left|16\mathrm{d}\rho u^3 + 16\mathrm{d}\rho u^2 v + 16\mathrm{d}\rho u v^2 + (16\mathrm{d}\rho - 3)v^3\right. \\
&\left. - 96\mathrm{d}\rho^3 u + (9\mathrm{d}\rho^2 - 96\mathrm{d}\rho^3)v - (128\mathrm{d}\rho^4 - 6\mathrm{d}\rho^3)\right|\Big).
\end{aligned}$$

现在，为了选择一个满足该不等式的 M，我们使用 u，并将其代入最后一个不等式，便可得出以下

$$M := \frac{|64\mathrm{d}\rho - 3|}{192\mathrm{d}\rho^3}\left|(x_0 + r + \mathrm{d}\rho)^2(x_0 + r - 2\mathrm{d}\rho)\right|$$

~ ~满足该断言。回想一下，在这个例子中，$\mathrm{d}\rho = [\varepsilon] \in {}^{\rho}\mathbb{R} = \mathbb{R}$ 是通常的广义数的Colombeau环。

假设 (4.3)：将同样的步骤应用于 $|(\mathrm{d}f(v)^{-1} - \mathrm{d}f(u)^{-1})f(u)| \leq N|u-v|$，我们得到

$$N := \frac{16\mathrm{d}\rho(3\mathrm{d}\rho - x_0 - r)(\mathrm{d}\rho - x_0 - r)(\mathrm{d}\rho + x_0 + r)^2}{(2\mathrm{d}\rho - x_0 + r)^2(\mathrm{d}\rho + x_0 - r)^2}.$$

假设 (4.4)：对于 k，计算得到

$$\begin{aligned} M|\mathrm{d}f(x)^{-1}| + N = {} & \frac{|62\mathrm{d}\rho - 3|}{3}\frac{|(x_0+r)+\mathrm{d}\rho)^2(x_0+r-2\mathrm{d}\rho)|}{|(2\mathrm{d}\rho - x_0 + r)(x_0 - r + \mathrm{d}\rho)^2|} \\ & \frac{16\mathrm{d}\rho(3\mathrm{d}\rho - x_0 - r)(\mathrm{d}\rho - x_0 - r)(\mathrm{d}\rho + x_0 + r)^2}{(2\mathrm{d}\rho - x_0 + r)^2(\mathrm{d}\rho + x_0 - r)^2} \\ = {} & \frac{(x_0 + r + \mathrm{d}\rho)^2}{3(2\mathrm{d}\rho - x_0 + r)^2(x_0 - r + \mathrm{d}\rho)^2}\,(|64\mathrm{d}\rho - 3|\,|(x_0 + r - 2\mathrm{d}\rho) \\ & (2\mathrm{d}\rho - x_0 + r)| + 48\mathrm{d}\rho|(3\mathrm{d}\rho - x_0 - r)(\mathrm{d}\rho - x_0 - r)|) =: k. \end{aligned}$$

假设 (4.5)：对于本例，初始点和半径的一个合适选择为 $x_0 := -\mathrm{d}\rho + \mathrm{d}\rho^2$ 以及 $r = \mathrm{d}\rho + \sqrt{\mathrm{d}\rho}$. 我们再次使用 Mathematica 确认 $k \leq \mathrm{d}\rho^R$ 对于这些选择成立，事实上，一个合适的 R 应为 $R = 10^{-8}$。

假设 (4.6)：还使用 $|\mathrm{d}f(x_0)^{-1}||f(x_0)| \leq (1-k)r$ 进行了测试，Mathematica 的检验结果表明，初始点和半径的选择也满足此不等式。

作为本例的进一步验证，使用 Mathematica 对所有不等式（4.2）-（4.6）也进行了测试，结果表明当 ε 足够小时均成立，且此前选取的常数 $M = [M_\varepsilon]$、$N = [N_\varepsilon]$、$k = [k_\varepsilon]$、$x_0 = [x_{0\varepsilon}]$ 和 $r = [r_\varepsilon]$。

6. 结论

本文只是系列论文中的一篇 [30, 5, 12, 21, 24, 14, 15, 13, 16, 29]，旨在说明广义光滑函数尽管包含普通 Schwartz 分布，却与普通光滑函数一样具有若干重要性质。正如 [5, 12, 24, 29] 中所证明的，这使得我们能够为存在奇点的现实应用建立严谨模型。这些模型中的计算忠实地对应于应用研究人员经常进行的非正式、直观的形式运算。本文给出的最后几个示例展示了利用计算机辅助符号计算来帮助进行这些广义函数的数值计算的可能性。

参考文献

[1] Aragona, J., Juriaans, S. O., Colombeau 广义数拓扑环的若干结构性质，《通信代数》29 (2001)，第5期，2201–2230。[2] Ben-Israel, A., 求解方程组的牛顿-拉夫森方法。《数学分析与应用杂志》15，第2期 (1996)：243-252。[3] Borghi, R., Bonelli, S., 迈向颗粒介质中非稳态接触应力的本构定律，《连续介质力学与热力学》，19 (6) (2007)，第329-345页。

[4] Brazda, K., de Hoop, M.V., Hörmann, G., 低正则性条件下地球弹性-引力形变的变分表述，剑桥大学出版社，2017，第1-81页。参见 arXiv:1702.04741。[5]Bryzgalov, A., Islami K., Giordano, P., 数学物理中的无穷小与无穷大数，《非线性动力学》(2024) 112:20573–20609, https://doi.org/10.1007/s11071-024-10223-8[6] Champion, R., Champion, W.L., 螺旋弹簧对线性力学行为的偏离，《数学与计算机建模》53，915-926，2011。[7] Christoffersen, J., Mehrabadi, M.M., Nemat-Nasser, S., 颗粒材料行为的微观力学描述，《应用力学杂志》，48 (1981)，第339-344页。[8] Colombeau, J.F., 分布的乘法；数学、数值工程与理论物理中的工具，数学讲义，1532，施普林格出版社，柏林，1992。[9] Cutland, N., Kessler, C., Kopp, E., Ross, D., 论柯西的无穷小概念。《英国科学哲学杂志》，39(3):375–378，1988。[10] de Hoop, M.V., Kumar, K., Ye, R., 自引力行星中产生地震波的动态破裂分析：迭代耦合格式与适定性，《应用数学季刊》，2019。[11] Galindo, A., Pascual, P., 量子力学 I，施普林格出版社，柏林海德堡，1990。[12] Gastão, S.F., Giordano, P., Bryzgalov, A., Lazo, M.J., 广义函数的变分法与最优控制。非线性分析，第216卷，2022。[13] Giordano, P., Kunzinger, M., Vernaeve, H., 强内集与广义光滑函数。《数学分析与应用杂志》，第422卷，第1期，2015，第56–71页。[14] Giordano, P., Kunzinger, M., 广义光滑函数的反函数定理。ISAAC特刊邀稿——献给 Stevan Pilipovic教授65岁生日。编者：M. Oberguggenberger、J. Toft、J. Vindas与P. Wahlberg, 施普林格丛书《算子理论：进展与应用》，Birkhäuser巴塞尔，2016。[15] Giordano, P., Kunzinger, M., 广义函数紧集的一个便利概念。《爱丁堡数学学会会刊》，第61卷，第1期，2018年2月，第57-92页。[16] Giordano, P., Kunzinger, M., Vernaeve, H., 广义函数的格罗滕迪克拓扑斯 I：基本理论。数学论文集,

592 2024 74 10 4064 230920 7 3

[17]

( )，页 SDOI: . /dm - - Giordano P., Luperi Baglini L., 渐近规范：科隆博型代数的推广。《数学通讯》第289卷，第2-3期，第247–274页，2016。[18] Grosser, M., Kunzinger, M., Oberguggenberger, M., Steinbauer, R., 广义函数几何理论，Kluwer，多德雷赫特，2001。[19] Katz, M.G., Tall, D., 柯西-狄拉克δ函数。《科学基础》，2012。参见 http://dx.doi.org/

10 1007 10699 012 9289 4 . /s - - - Kebiche, D.E., Giordano, P., 广义函数空间

[20]

的泛性质。《数学分析与应用杂志》，第551卷，2025，129687 2, 1, 15 期 部分 十一月。[21] Kebiche, D.E., Giordano, P., 广义函数空间中的超有限巴拿赫不动点定理。工作论文，2024。[22] Kennett, B., 分层介质中的地震波传播，澳大利亚国立大学E出版社，2009。[23] Lavendhomme, R., 合成微分几何的基本概念，Kluwer学术出版社，多德雷赫特，1996。[24] Lecke A., Luperi Baglini L., Giordano P., 广义函数变分法的经典理论。《非线性分析进展》，第8卷，第1期，2017。[25] Lakshminarayanan, V., Ghatak, A.K., Thyagarajan, K., 拉格朗日光学，施普林格荷兰，2011。[26] Laugwitz, D., 无穷和的确定值：1820年前后无穷小分析基础的若干方面，《精确科学史档案》39 (3): 195-245，1989。[27] 莱布尼茨, G.W.,《人类理解新论》，IV，16。麦克米伦公司，1896。[28] Lu, J., Tryggvason, G., 经历拓扑变化的竖直通道中的多流体流动：空隙率的影响，《物理评论·流体》4, 084301，2019。

[29] Mukhammadiev, A., Tiwari, D., Giordano, P., 适用于所有广义函数的傅里叶变换。即将发表于《数学论文集》，

2023 2111 15408 。

[30]

参见 https://arxiv.org/abs/ 。Nugraheni, S., Giordano, P., 作为广义全纯函数的狄拉克δ函数。《非线性分析》，第262卷，2026年1月，113921。[31] Oberguggenberger, M., Vernaeve, H., 科隆博理论中的内集与内函数，《数学分析与应用杂志》341（2008）649–659。[32] Oberguggenberger, M., 分布的乘法及其在偏微分方程中的应用。Pitman数学研究笔记丛书，259。Longman，哈洛，1992。[33] Pilipović, S., 科隆博广义函数与伪微分演算，《数学讲义》，东京大学理学部，1994。[34] Robinson, A., 某些非阿基米德域上的函数论，《美国数学月刊》80（6）（1973）87–109；第二部分：数学基础论文。[35] Scarpalézos, D., 关于科隆博构造之函子性的若干注记；拓扑与微局部方面及其应用，《积分变换与特殊函数》1998，第6卷，第1–4期，295–307。[36] Scarpalézos, D., 科隆博广义函数：拓扑结构；微局部性质。一种简化观点，I。《自然科学院通报·数学》第25期（2000），89–114。[37] Stewart, H.B., Wendroff, B., 两相流：模型与方法。《计算物理杂志》56，1984，363–409页。[38] Ugural, A.C., Fenster, S.K., 高等材料力学与弹性力学，Prentice Hall物理与化学工程科学国际丛书，Prentice Hall；第5版，2011。[39] Vàzquez de Aldana, J.R., Kylstra, N.J., Roso, L., Knight, P.L., Patel, A., Worthington, R.A., 原子与强高频激光脉冲的相互作用：磁场分量对原子稳定化的影响，《物理评论A》64，013411，2001。[40]Juriaans, S.O., Oliveira, J., 超序列的不动点定理与广义微分几何基础I：简化代数，（2022），10.13140/RG.2.2.32732.05761。[41] Marti, J., 广义函数代数中的不动点及其应用，（2015）（研究论文）[42] Kantorovich, L. V., 关于函数方程的牛顿法，《苏联科学院报告》59（1948），1237–1240。[43] Kantorovich, L. V., Akilov, G. P., 赋范空间中的泛函分析，Pergamon出版社，牛津，1964[44] Ostrowski, A. M., 方程与方程组的求解，学术出版社，纽约，1960。[45] Dennis, J. E., Schnabel, R. B., 无约束优化与非线性方程的数值方法，1983 Prentice-Hall，恩格尔伍德悬崖，[46] Ortega, J. M.,

Rheinboldt, W. C., 多变量非线性方程的迭代求解，学术出版社，纽约，1970

数学系，维也纳大学，奥地利电子邮箱地址: kevin.islami@univie.ac.at

Siren 和格勒诺布尔-阿尔卑斯大学，法国电子邮箱地址:
george.apaaboah@gmail.com

数学系，维也纳大学，奥地利电子邮箱地址:
paolo.giordano@univie.ac.at