arXiv:2603.08482v1 [math.CA] 9 Mar 2026

ℓ^q中的非对称唯一性集

Adem Limani & Tomas Persson

2026年3月10日

摘要

我们展示了 ℓ^q中唯一性集的一种不对称现象。具体而言，我们构造了一些集合，它们不支撑具有 ℓ^q可和傅里叶系数的测度，但同时又支撑其正频率衰减速度快于多项式的测度。用傅里叶唯一性的语言来说，这凸显了单边与双边 ℓ^q唯一性问题之间显著的分歧。

1 引言

1.1 单边与双边傅里叶衰减

令 $\mathbb{T} \cong [0,1)$ 表示单位圆，并令 $M(\mathbb{T})$ 表示定义在 $\mathbb{T}$ 上的复有限博雷尔测度空间。本文旨在展示，在支撑集层面，单边傅里叶衰减与双边傅里叶衰减之间存在显著的不对称性。

对于 $1 < q < 2$，我们构造勒贝格测度任意接近 1 的紧集 $E \subset \mathbb{T}$，使其具有以下性质：

> E 支撑着一个非平凡测度 $\mu \in M(\mathbb{T})$，其单边傅里叶系数序列 $\{\widehat{\mu}(n)\}_{n>0}$ 属于 ℓ^q；然而，对于任意 $0 < p < 2$，E 都不支撑任何非平凡测度 $\mu \in M(\mathbb{T})$，使得其双边傅里叶系数序列 $\{\widehat{\mu}(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 属于 ℓ^p。

回顾一下，如果一个紧集 E 不支撑任何非平凡的 $\mu \in M(\mathbb{T})$，且其傅里叶系数属于 ℓ^q，那么它就称为 ℓ^q 的**唯一性集**：

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\mu}(n)|^q < \infty.$$

我们用 $M(E)$ 表示 $M(\mathbb{T})$ 中由支撑在紧集 $E \subset \mathbb{T}$上的测度构成的子集。在 $0 < q \leq 2$的情形下，任何傅里叶系数可求和于 ℓ^q的测度，相对于 $\mathbb{T}$上的单位归一化勒贝格测度 dm 都绝对连续，其密度函数属于 $L^2(\mathbb{T},\ dm)$。

我们的主要定理揭示了比上述结果强得多的不对称现象。

定理 1.1。 存在一个紧集 $E \subset \mathbb{T}$，其勒贝格测度可以任意接近1，使得：

(i) 每个支撑于 E 的非零复博雷尔测度 μ 都满足

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\mu}(n)|^q = \infty, \qquad 0 < q < 2.$$

(ii) 存在支撑于 E 的 $f \in L^\infty(\mathbb{T}, dm)$，使得对每个 $M > 0$，都存在 $C(M) > 0$，满足

$$|\widehat{f}(n)| \leq C(M) n^{-M}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

指数 $q = 2$ 是临界阈值，因为帕塞瓦尔恒等式保证，每个具有正勒贝格测度的集合的示性函数，其傅里叶系数都属于 ℓ^2。因此，该定理表明，在保持同一支撑集上显著的单边与双边不对称性的同时，可以从下方任意逼近 ℓ^2 阈值。第 5 节中给出了在 $L^q(\mathbb{R})$ 情形下的非周期类比。

ℓ^q 的唯一性集是在 D. Newman[18], 、Y. Katznelson [8], 以及 I. Hirschman–Y. Katznelson [3] 的经典著作中构造的。另请参见 [21] 中的 J. Rosenblatt 和 K. Shuman。然而，在这些构造中，Beurling–Carleson 熵（定义见定理 2.1）没有任何定量控制。

本工作的一个核心创新是设计了一种新构造，能够同时明确地控制傅里叶集中和 Beurling–Carleson 熵。

在定理 1.1 中，我们构造了支撑集，使其具有例外的单侧 傅里叶衰减，同时迫使双侧衰减保持在 ℓ^2 阈值。接下来的结果展示了互补现象：我们可以构造一些集合，使其支持任意接近 ℓ^1 的双侧衰减，却能排除任何 预先指定的一致单侧傅里叶衰减。

定理 1.2. 设 $\{\Omega(n)\}_n$ 为满足 $\Omega(n) \downarrow 0$的正实数。则存在一个紧集 $E \subset \mathbb{T}$，其勒贝格测度可任意接近1，使得：

(i) 存在一个非负函数 $f \in L^2(\mathbb{T})$，支撑于 E，其傅里叶系数满足

$$\{\widehat{f}(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \bigcap_{r>1} \ell^r.$$

(ii) 如果 $\mu \in M(E)$ 满足一致单侧估计

$$|\widehat{\mu}(n)| \le \Omega(n), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

则 $\mu \equiv 0$。

1.2 背景

单侧与双侧谱行为的研究在调和分析中有着悠久的历史渊源。A. Rajchman 的经典定理 [20] 断言，对于任意$\mu \in M(\mathbb{T})$,

$$\widehat{\mu}(n) \to 0 \text{ as } n \to +\infty \quad \Longrightarrow \quad \widehat{\mu}(n) \to 0 \text{ as } |n| \to \infty.$$

K. de Leeuw 和 Y. Katznelson [1] 以及 J.-P. Kahane 和 Y. Katznelson [5]得到了定量改进及相关的对称性原理。若想进一步了解所谓的 Rajchman测度和唯一性现象，请参阅 T. W. K¨orner [10] 和 R. Lyons [16]的综述。

更为精细的加权对称现象由 S. Khrushchev 和 W. Peller [19], 发现，他们证明了

$$\sum_{n>0} \frac{|\widehat{\mu}(n)|^2}{n+1} < \infty \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|\widehat{\mu}(n)|^2}{|n|+1} < \infty.$$

这一结果依赖于深刻的最佳逼近技术，这些技术能够根据测度的柯西变换重构测度，参见 [19, 定理 3.16]。然而，正如 G. Kozma 和 A. Olevskii 所指出的 [12], ，对于分数阶权重（$n+1$）$^{-s}$，当 $0 < s < 1$ 时，这一结果并不成立。

鉴于上述关于单侧到双侧谱衰减的对称性结果仅在少数特殊情形下成立，从傅里叶分析中唯一性集的角度来看，研究支撑集的性质更为便利。更具体地说，我们可以问：一个紧集 $E \subset \mathbb{T}$是否支撑具有某种单侧傅里叶衰减的测度（或分布），同时也是否支撑具有相同但现在为双侧傅里叶衰减的测度（分布）？正如我们从 G. Kozma 和 A. Olevskii 的工作中所看到的，尽管相应的对称性问题在分数阶狄利克雷–索博列夫空间 $\ell^{2,-\alpha}$的框架下失效：

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (1+|n|)^{-\alpha} |\widehat{\mu}(n)|^2 < \infty$$

对于 $\alpha \in (0,1)$，仍可证明，如果 E 支撑一个在 $\ell^{2,-\alpha}$中具有单侧正向傅里叶系数的测度，那么它也支撑一个具有相同性质的概率测度，且其傅里叶系数（单侧和双侧）均属于 $\ell^{2,-\alpha}$。另一方面，S. Khrushchev 证明，存在一个紧集 $E \subset \mathbb{T}$，它支撑一个 μ 具有 $\ell^{2,1}$中的单侧傅里叶系数的测度，但不支撑具有 $\ell^{2,1}$中的双侧傅里叶系数的非平凡测度。这些结果依赖于 $\ell^{2,1}$上的特定势理论框架；运用这些技术的进一步改进，N. G. Makarov [17] 对 $\ell^{2,\alpha}$ 及 $0 < \alpha < 1$证明了类似结果。类似地，Kozma 和 Olevskiĭ [11] 最近证明，存在一个支撑在勒贝格测度为零的集合上的非平凡分布 S，使得 $\sum_{n>0} |\widehat{S}(n)|^2 < \infty$，但根据帕塞瓦尔定理，显然 $\{\widehat{S}(n)\}_n \notin \ell^2$。在 ℓ^q的框架下，对于 $q > 2$，N. Lev 和 A. Olevskii[13] 构造了支撑分布的紧集，这些分布具有 ℓ^p-可和的傅里叶系数，但不存在具有此性质的测度；这一进展最终促使他们推翻了维纳猜想，即仅通过零集来描述循环元素。

我们的主要贡献是研究在 ℓ^q 下针对 $q < 2$ 的相应问题。

1.3 唯一性集与傅里叶容量

除了单向和双向傅里叶衰减的支撑集缺乏对称性之外，我们还通过一种自然的傅里叶容量，对 ℓ^q-唯一性集进行结构性刻画。对于集合 $E \subset \mathbb{T}$，我们将 $M(E)$ 记为全变差有限且支撑于 E 的复博雷尔测度所构成的集合。令 $A_p(\mathbb{T})$ 表示傅里叶系数属于 ℓ^p 的分布空间，并配备范数

$$\|f\|_{A_p(\mathbb{T})} = \|\{\widehat{f}(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}\|_{\ell^p}.$$

对于 $1 < q < 2$ 和 $p = q/(q-1)$，定义 ℓ^p-容量的概念

$$\mathrm{Cap}_{\ell^p}(E) = \inf_{\substack{\phi=1 \text{ on } E \\ \phi\in C(\mathbb{T})}} \|\phi\|_{A_p(\mathbb{T})}.$$

定理 1.3。设 $1 < q < 2$ 和 $p = q/(q-1)$。紧集 $E \subset \mathbb{T}$ 不支撑任何满足 $\{\widehat{\mu}(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^q$ 的非平凡测度 μ，当且仅当 $\mathrm{Cap}_{\ell^p}(E) = 0$。此外，

$$\mathrm{Cap}_{\ell^p}(E) = \sup_{\substack{\nu\in M(E) \\ \|\nu\|_{A_q}\le 1}} |\nu(E)|. \tag{1}$$

尽管相关机制在先前的构造中已有隐含体现，但容量表述阐明了 ℓ^q中唯一性集的度量结构。结合定理 1.1 和定理 1.3，我们可以得到测度任意大的紧集

这些紧集的 Beurling–Carleson 熵有限，但对所有 $p > 2$，其 ℓ^p-容量均为零。从 Katznelson、Newman 等人的研究中，人们可能会认为，ℓ^q 的唯一性集必然具有无穷大的 Beurling–Carleson 熵。我们表明事实并非如此。

进一步的结果是三角多项式与解析多项式之间在同时逼近方面存在差异。

推论 1.4。对于任意 $p > 2$，存在勒贝格测度任意接近全集的紧集 $E \subset \mathbb{T}$，并满足以下性质：

(a) 对于任意 $f \in A_p(\mathbb{T})$ 以及 $\mathbb{T}$ 上的任意连续函数 g，存在具有以下性质的三角多项式 $\{T_N\}_N$：

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{T}_N(n) - \widehat{f}(n)|^p \to 0, \qquad \sup_E |T_N - g| \to 0.$$

(b) 当 $\{Q_N\}_N$ 为满足以下性质的解析多项式时：

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{Q}_N(n) - \widehat{f}(n)|^p \to 0, \qquad \sup_E |Q_N| \to 0,$$

对于某个 $f \in H^2$，则 f 恒等于零。

这里，H^p 表示经典 Hardy 空间，其中 $p \geq 1$。每个 Hardy 空间 H^p 都可以等距且同构地识别为 $\sim L^p(\mathbb{T},\ dm)$ 的闭子空间，该子空间由满足 $f(n) = 0$（对于 $n < 0$）的元素组成。

这里，(a) 是关于三角多项式的同时逼近现象，而 (b) 是关于解析函数的 Khinchin–Ostrowski 型刚性结论，参见 Havin 和 J¨oricke [2, 第 3 章第 §2] 节，以及其中综述的 Khrushchev 后续研究。Kahane–Katznelson [6],早已借助精巧的概率构造，研究了 ℓ^q 在 $1 < q < 2$ 范围内的相关同时逼近现象。基于这些技术，Kahane–Nestoridis [7]提出了相应的解析变体。A. Limani [14]最近宣布了一种涉及内函数的不同构造。

1.4 方法与组织

定理 1.1 背后的构造结合了三个主要要素。首先，我们引入显式的频率块，其算术分离迫使任何受支撑的测度都累积 ℓ^q-质量。其次，我们对补弧进行定量控制，从而保持有限的 Beurling–Carleson 熵，并能够运用 Khrushchev 类型的单侧衰减结果。第三，对偶

论证将 ℓ^q-唯一性与傅里叶容量为零联系起来，阐明了这一现象背后的度量结构。

第 2 节建立 Beurling–Carleson 熵框架，并回顾必要的单侧衰减结果。第 3 节从傅里叶容量刻画及其与同时逼近的联系入手；本节其余部分致力于构造例外集，并证明定理 1。1。

第 4 节介绍我们对非唯一集和一致型唯一集的构造；这些构造结合起来证明定理 1。2。

在第 5 节中，我们给出主要结果的非周期 $L^q(\mathbb{R})$类比。

2 熵与单侧傅里叶衰减

2.1 单侧多项式衰减与 Beurling–Carleson 熵

我们回顾支配光滑柯西变换测度存在性的熵条件。这一条件可追溯至 S. Khrushchev 的开创性工作，他确立了以下基本刻画。

定理 2.1 (Khrushchev, 1973 [9])。设 $E \subsetneq \mathbb{T}$ 为紧集。以下条件等价：

(a) 存在一个非平凡有限复博雷尔测度 μ，其支撑于 E，且其柯西变换

$$\mathcal{K}(\mu)(z) = \int_E \frac{d\mu(\zeta)}{1-\overline{\zeta}z}, \qquad |z| < 1,$$

可延拓为 $\mathbb{T}$上的一个 C^∞-函数。

(b) E 包含一个具有正勒贝格测度的紧子集 E_0，且该子集具有有限的 *Beurling–Carleson* 熵：

$$\mathcal{E}(E_0) := \sum_j |I_j| \log \frac{1}{|I_j|} < \infty,$$

其中 $\mathbb{T} \setminus E_0$的连通分支为 $\{I_j\}$。

这里 $|I|$ 表示弧 $I \subset \mathbb{T}$ 的长度。一个关键而简单的观察是，(a) 中柯西变换的 C^∞ 正则性等价于 μ 的正向傅里叶系数超多项式衰减，这可由公式

$$\mathcal{K}(\mu)(z) = \sum_{n \geq 0} \widehat{\mu}(n) z^n, \qquad |z| < 1.$$

该公式表明， $\mathcal{K}(\mu)$ 可延拓为 $\mathbb{T}$ 上的 C^∞ 函数，当且仅当 $\widehat{\mu}(n)$ 在 $n \to \infty$ 时比任何多项式都衰减得更快。换言之，子集的 Beurling–Carleson 熵决定了柯西积分具有光滑延拓至 $\mathbb{T}$ 的容量。

在 A. Limani 与 B. Malman 的近期工作 [15], 中证明了：若 E具有有限的 Beurling–Carleson 熵，则这样的测度 $\mu \in M(E)$实际上可以显式构造，并且还可以取 $d\mu = f\,dm$ ，其中 $f \in L^\infty(E)$为支撑在 E上的本质有界函数的集合。

我们以一个简单的充分条件结束本节，该条件保证一个集合具有有限的 Beurling–Carleson 熵，这对我们的目的很有用。

引理2.2. 设

$$E = \bigcap (\mathbb{T} \setminus U_j),$$

是 $\mathbb{T}$的一个紧子集，其中每个 $U_j = \bigcup_k^j I_k(j)$ 是开弧的有限并。若

$$\sum_{j,k} |I_k(j)| \log \frac{1}{|I_k(j)|} < \infty,$$

则 E 具有有限的 *Beurling–Carleson* 熵。

证明。 设 $\{J_\ell\}$ 表示 $\mathbb{T}\setminus E$的连通分支。由于$\mathbb{T}\setminus E = \bigcup_{j,\ k} I_k(j)$，每个 J_ℓ 是弧 $I_k(j)$ 的不交并。利用对数递增，我们得到

$$\sum_\ell |J_\ell| \log \frac{1}{|J_\ell|} = \sum_\ell \sum_{I_k(j)\subset J_\ell} |I_k(j)| \log \frac{1}{|J_\ell|} \le \sum_{j,k} |I_k(j)| \log \frac{1}{|I_k(j)|}$$

由此证明了该断言。 □

3 ℓ^q中的唯一性集

3.1 刻画 ℓ^q中的唯一性集

我们从定理1.3的证明开始，该定理给出了 ℓ^q的唯一性集的结构刻画。论证是自洽的，仅依赖于对偶和标准逼近论证。

对于 $1 \le q < \infty$，令 $A_q(\mathbb{T})$表示由 $\widehat{\mathbb{T}}$上的分布 S 构成的巴拿赫空间，其傅里叶系数满足 $\{S(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^q$，并配备范数

$$\|S\|_{A_q} := \|\{\widehat{S}(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}\|_{\ell^q}.$$

当 $1 \le q \le 2$ 时，空间 $A_q(\mathbb{T})$ 连续嵌入 $L^2(\mathbb{T}, dm)$。

对于 $1 < q < \infty$， $A_q(\mathbb{T})$ 与 $A_p(\mathbb{T})$ 之间的对偶（其中 $p = q/(q-1)$）在标准傅里叶配对中加以考虑。

$$\langle f, g \rangle := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\overline{\widehat{g}(n)}.$$

此外，只要 $fg \in L^1(\mathbb{T})$，这种配对也有一个方便的积分表示

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{T}} f\overline{g}\, dm.$$

以下命题将作为我们的基础。

命题 3.1. 设 $1 < q \leq 2$，并记 $p = q/(q-1)$。对于一个具有正勒贝格测度的紧集 $E \subset \mathbb{T}$，以下条件等价：

(a) E 不支撑任何满足 $\{\widehat{\mu}(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^q$ 的非平凡测度 μ。

(b) $C(\mathbb{T} \setminus E)$，即在 $\mathbb{T}$ 上于 E 处消失的连续函数集合，在 $A_p(\mathbb{T})$ 中稠密。

(c) 对每个 $f \in A_p(\mathbb{T})$ 和每个 $g \in C(E)$，都存在三角多项式 T_n，使得

$$\|T_n - f\|_{A_p} \to 0, \qquad \sup_E |T_n - g| \to 0.$$

(d) E 具有 ℓ^p-傅里叶容量零：

$$\mathrm{Cap}_{\ell^p}(E) := \inf_{\substack{\phi = 1 \text{ on } E \\ \phi \in C(\mathbb{T})}} \|\phi\|_{A_p} = 0.$$

证明。(a)⇒(b)。如果 $C(\mathbb{T} \setminus E)$ 在 $A_p(\mathbb{T})$ 中不稠密，哈恩–巴拿赫定理将推出存在一个非零的 $g \in A_q(\mathbb{T})$，使其消去 $C(\mathbb{T} \setminus E)$。因此 g 在 E之外为零，而 $d\mu = g\, dm$ 定义了一个支撑于 E 上的非平凡测度，且满足 $\widehat{\mu} \in \ell^q$，这与 (a) 中的结论矛盾。

(b)⇒(c)。考虑巴拿赫空间 $A_p(\mathbb{T}) \oplus C(E)$，其范数为 $\|(f,\ g)\| = \|f\|_{A_p} + \|g\|_\infty$。由于三角多项式 T 在每个分量中分别稠密，只需用对角线上的元素对 $(T,\ T)$ 逼近 $(1,\ 0)$。利用 $C(\mathbb{T} \setminus E)$ 在 $A_p(\mathbb{T})$ 中稠密这一假设，对于每个 $\varepsilon > 0$，我们都可以找到 $\phi_\varepsilon \in C(\mathbb{T} \setminus E)$，使得

$$\|\phi_\varepsilon - 1\|_{A_p} \leq \varepsilon.$$

通过取适当的 Fej´er 均值，可得到一个三角多项式 T_ε，满足

$$\|T_\varepsilon - 1\|_{A_p} \leq 2\varepsilon, \qquad \sup_E |T_\varepsilon| \leq \varepsilon.$$

这就证明了 (c)。

(c)⇒(d). 注意到

$$\mathrm{Cap}_{\ell^p}(E) = \inf_{\phi \in C(\mathbb{T}\setminus E)} \|1-\phi\|_{A_p},$$

因此，容量等于 $A_p(\mathbb{T})$ 中 1 到 $C(\mathbb{T}\setminus E)$ 的距离。

若 $\mathrm{Cap}_{\ell^p}(E) > 0$，则 $C(\mathbb{T}\setminus E)$ 在 $A_p(\mathbb{T})$ 中不稠密。根据 (a)⇒(b) 的证明，存在一个非平凡的泛函 $\mu \in A_q(\mathbb{T})$，其支撑在 E 上。现在，将元组 $(\mu, -\mu) \in A_q(\mathbb{T}) \oplus M(E)$ 视为 $A_q(\mathbb{T}) \oplus C(E)$ 上的泛函，它具有消去对角集的性质

$$\{(\zeta^n, \zeta^n) : n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$$

在通常的对偶配对 $(A_p(\mathbb{T}) \oplus C(E))' \cong A_q(\mathbb{T}) \oplus M(E)$ 下。这表明，三角多项式的对角元组 (T, T) 在 $A_p(\mathbb{T}) \oplus C(E)$ 中不可能稠密。

(d)⇒(a). 若 $\mathrm{Cap}_{\ell^p}(E) = 0$，则 $C(\mathbb{T}\setminus E)$ 在 $A_p(\mathbb{T})$ 中稠密。设 $\mu \in M(E) \cap A_q(\mathbb{T})$，并设 $\phi_j \in C(\mathbb{T}\setminus E)$，其中 $\phi_j \to 1$ 属于 $A_p(\mathbb{T})$。那么对每个整数 n,

$$\widehat{\mu}(n) = \lim_j \sum_k \widehat{\mu}(n-k)\overline{\widehat{\phi_j}(k)} = \lim_j \int_{\mathbb{T}} \overline{\phi_j(\zeta)}\zeta^{-n} d\mu(\zeta) = 0$$

因此 $\mu \equiv 0$。 □

我们指出，可以用以下陈述替换 (b) 中的陈述

$$(b') \quad L^2(\mathbb{T}\setminus E) \text{ is dense in } A_p(\mathbb{T}),$$

其中 $L^2(\mathbb{T}\setminus E)$ 表示 $L^2(\mathbb{T}, dm)$ 中在 E 上几乎处处为零的子集。命题 3.1 中的类似刻画对于 $q > 2$ 也成立，但需作适当修改，以考虑到 $A_q(\mathbb{T})$ 由该范围内的分布构成。

定理 1.3. 证明。第一部分由命题 3.1 得出。

接下来需要证明距离公式 (1)。令 X 表示 $A_p(\mathbb{T})$ 中 $C(\mathbb{T}\setminus E)$ 的闭包。那么

$$\mathrm{Cap}_{\ell^p}(E) = \inf_{\phi \in C(\mathbb{T}\setminus E)} \|1-\phi\|_{A_p} =: \|1\|_{A_p/X}.$$

其中， A_p/X 是商巴拿赫空间，赋予自然范数，即到 X 在 $A_p(\mathbb{T})$中的距离。根据对偶，我们有

$$(A_p/X)' \cong X^\perp = \{g \in A_q(\mathbb{T}) : \mathrm{supp}(g) \subseteq E\},$$

int应理解为巴拿赫空间的同构意义下。这给出了恒等式

$$\mathrm{Cap}_{\ell^p}(E) = \sup_{\substack{\|g\|_{A_q}\le 1\\ \mathrm{supp}(g)\subseteq E}} \left|\int_{\mathbb{T}} g\,dm\right| = \sup_{\substack{\|\nu_g\|_{A_q}\le 1\\ \mathrm{supp}(\nu_g)\subseteq E}} |\nu_g(E)|\,,$$

其中 $d\nu_g = g dm$。由于所有 $\nu \in A_q \cap M(E)$ 都具有这种形式，证明完成。

□

最后，我们给出一个推论，以区分三角多项式与解析多项式的同时逼近。

推论 1.4 的证明. 我们利用定理 1.1 进行论证，该定理的证明独立于本节内容。由定理 1.1 和命题 3.1 中的刻画可知，存在测度任意大的紧集 E，使得对所有 $0 < q < 2$，命题 3.1 的条件 (c) 均成立。假设 $\{Q_j\}$ 是解析多项式，且满足

$$\sum_n |\widehat{Q}_j(n) - \widehat{f}(n)|^p \to 0, \qquad \sup_E |Q_j| \to 0,$$

其中 f 属于 Hardy 空间 H^2。根据 Khrushchev 定理（定理 2.1），存在一个非平凡的 $g \in L^\infty(E)$，其傅里叶系数具有单侧多项式衰减。对每个 $k \ge 0$,

$$0 = \lim_j \int_{\mathbb{T}} Q_j(\zeta)\zeta^k\overline{g(\zeta)}\,dm(\zeta) = \sum_{n\ge 0} \widehat{f}(n+k)\overline{\widehat{g}(n)} = \int_{\mathbb{T}} f(\zeta)\zeta^k\overline{g(\zeta)}\,dm(\zeta).$$

根据 F. 和 M. Riesz 定理，fg 属于 Hardy 空间 H^1。由于 g 非平凡且支撑于 E，这就迫使 f 在 g 的支撑上几乎处处为零，因此 $f \equiv 0$。

□

3.2 主要构造基块

这里我们将构造主要构造基块，它将作为我们构造的基础。对于任意整数 $l > 1$, 考虑定义在 $\mathbb{T}$ 上的函数族 ϕ_l：

$$\phi_l(\zeta) := \frac{l}{2\pi}\mathbb{1}_{I(l)} * \frac{l}{2\pi}\mathbb{1}_{I(l)} * \ldots * \frac{l}{2\pi}\mathbb{1}_{I(l)}(\zeta), \qquad \zeta \in \mathbb{T},$$

其中 $\mathbb{1}_{I(l)}$ 表示以 $\zeta = 1$ 为中心、长度为 $2\pi/l$的弧 $I(l)$的示性函数。注意，$\phi_l : \mathbb{T} \to [0,\infty)$ 是 C^{l-2}- 光滑的，并具有以下傅里叶衰减性质：

$$|\widehat{\phi}_l(n)| = \left|\frac{\sin(\pi n/l)}{\pi n/l}\right|^l \le \min\left(1, \left(\frac{l}{\pi}\right)^l |n|^{-l}\right), \qquad n \ne 0$$

$\widehat{}$且 $\phi_l(0) = 1$。固定 $0 < \delta < 1$，并考虑局部化函数

$$\phi_{\delta,l}(\zeta) := \begin{cases} (2\pi\delta)^{-1}\phi_l(\zeta^{1/\delta}) & \text{if } |\zeta - 1| \le 2\pi\delta, \\ 0 & \text{if } |\zeta - 1| > 2\pi\delta, \end{cases}$$

其支撑于长度为 δ 的弧上。给定一个整数 $N \ge 1$，我们定义 e

$$\phi_{N,\delta,l}(\zeta) := \phi_{\delta,k}(\zeta^N), \qquad \zeta \in \mathbb{T}, \tag{2}$$

我们将在构造中关键性地利用其以下性质：

$\widehat{}$(a) $\phi_{N,\ \delta,\ l}(0) = 1$，$\widehat{}$(

b) $\phi_{N,\ \delta,\ l}(n) = 0$ 当 $N \nmid n$ 且

$$|\widehat{\phi}_{N,\delta,l}(Nn)| = |\widehat{\phi}_{\delta,l}(n)| \le \min\left(1, \left(\frac{l}{\pi}\right)^l \delta^{-l}|n|^{-l}\right), \qquad n \ne 0,$$

(c) $\phi_{N,\ \delta,\ l}$ 支撑于 N 个弧上，每个弧的长度为 $2\pi\delta/N$。

令 $U_{N,\ \delta}$ 表示 $\phi_{N,\ \delta}$ 的支撑的内部，该内部是 N 个长度为 δ/N 的开弧的并。因此，它们的长度与 l 无关。我们将构造所需的紧子集 E，使其为

$$E := \bigcap_j \mathbb{T} \setminus U_{N_j,\delta_j} \tag{3}$$

对于适当选择的参数 $\{N_j\}_j$、$\{\delta_j\}_j$，以及与相关函数 $\phi_{N_j,\ \delta_j,\ l_j}$ 对应的 $\{l_j\}_j$，这些参数将在构造过程中确定。

3.3 具有熵控制的 ℓ^q 唯一性集

本节旨在证明定理 1。1，证明分为几个步骤。首先，我们从与构造相关的适当频率块中提取一致的 ℓ^q质量。接下来，我们将以谨慎的算术方式分离这些频率块，从而能够对所得集合的 Beurling–Carleson 熵给出良好估计。最后，实变量选取论证使我们能够在熵与 ℓ^q发散之间取得平衡。

3.3.1 定理 1。1 的证明

我们构造一个有限 Beurling–Carleson 熵的紧集 E，它不支撑任何傅里叶系数属于 ℓ^q 的非平凡测度，其中任意 $0 < q < 2$均成立。我们沿用 (3) 中的记号，并回顾一下，E 由参数 $\{\delta_j\}_j$、$\{N_j\}_j$确定，记

$$\phi_j := \phi_{N_j,\delta_j,l_j}.$$

其中 $\{l_j\}_j$ 是一个可供我们支配的附加参数。

步骤 1. 提取主要频率质量注意，为确保 $m(E) \geq 1-\delta$，只需施加这一简单条件

$$\sum_j \delta_j \leq \delta.$$

固定一个非平凡的 $\mu \in M(E)$，注意到经过标准调制和归一化后，我们可以假设

$$\widehat{\mu}(0) = \mu(E) = 1.$$

由于 $\phi_j = 0$ 在 $\mathrm{supp}(\mu)$ 上，对任意 $j \geq 1$，根据性质 (a)–(b)，我们有

$$0 = \int_{\mathbb{T}} \phi_j \, d\mu = 1 + \sum_{n \neq 0} \widehat{\phi_j}(-n)\widehat{\mu}(N_j n).$$

注意到

$$\begin{aligned}\sum_{0<|n|\leq l_j/\delta_j} |\widehat{\mu}(N_j n)| &\geq \Big| \sum_{0<|n|\leq l_j/\delta_j} \widehat{\phi_j}(-n)\widehat{\mu}(N_j n)\Big| \\ &\geq 1 - \sum_{|n|>l_j/\delta_j} |\widehat{\phi_j}(n)|\,|\widehat{\mu}(N_j n)| \geq 1 - \|\mu\| \sum_{|n|>l_j/\delta_j} \Big|\widehat{\phi_j}(n)\Big|,\end{aligned}$$

其中 $\|\mu\|$ 表示测度 μ在 $\mathbb{T}$ 上的全变差范数。利用 (c) 中 ϕ_j 的衰减，我们得到

$$\sum_{|n|>l_j/\delta_j} |\widehat{\phi_j}(n)| \leq \left(\frac{l_j}{\pi}\right)^{l_j} \delta_j^{-l_j} \sum_{|n|>l_j/\delta_j} |n|^{-l_j} \leq C\,\pi^{-l_j}\delta_j^{-1}. \tag{4}$$

现在我们选取 $l_j \asymp \log \frac{1}{\delta_j}$，以确保 $\pi^{-l_j}\delta_j^{-1} \to 0$。这意味着

$$\sum_{0<|n|\leq \frac{1}{\delta_j}\log\frac{1}{\delta_j}} |\widehat{\mu}(N_j n)| \gtrsim 1, \qquad j = 1, 2, 3, \ldots \tag{5}$$

有了这个估计，我们可以应用带有 $1 < q < 2$ 的 H¨older 不等式，从而得到

$$\sum_{0<|n|\leq \frac{1}{\delta_j}\log\frac{1}{\delta_j}} |\widehat{\mu}(N_j n)|^q \gtrsim \left(\frac{\delta_j}{\log\frac{1}{\delta_j}}\right)^{q-1}, \qquad j = 1, 2, 3, \ldots \tag{6}$$

步骤 2。具有大小控制的互不相交频率块 现在，我们设

$$M_j = \left\lceil \frac{1}{\delta_j} \log \frac{1}{\delta_j} \right\rceil, \qquad j = 1, 2, 3, \dots$$

并引入整数的频率块

$$\Lambda_j := \{N_j n : 0 < |n| \le M_j\}, \qquad j = 1, 2, 3, \dots$$

其大小为 $|\Lambda_j| = 2M_j$。如果允许整数 N_j 任意增大，就很容易使这些块 Λ_j 两两不相交。根据 (6)，这将得到下界

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\mu}(n)|^q \ge \sum_j \sum_{n\in\Lambda_j} |\widehat{\mu}(n)|^q \gtrsim \sum_j \left(\frac{\delta_j}{\log \frac{1}{\delta_j}} \right)^{q-1}.$$

然而，$\{N_j\}_j$ 的大小将在后面对底层集合 E的 Beurling–Carleson 熵进行估计时起决定性作用。因此，我们必须控制 $\{N_j\}_j$的大小，同时保持这些块$\{\Lambda_j\}_j$两两不相交。下面的组合引理使我们能够构造互不重叠的频率块 Λ_j，而无需使 N_j 的大小远超 $|\Lambda_j|$的量级。

引理 3.2。 存在整数 $\{N_j\}_j$ 使得

$$\Lambda_j \cap \Lambda_k = \varnothing \quad (j \ne k), \qquad N_j \lesssim |\Lambda_j| \sum_{k=1}^{j} |\Lambda_k|.$$

证明。 记 $|\Lambda_j| = 2M_j$，并归纳地构造 (N_j)。假设已选取 $N_1 < \ldots < N_k$，使得 Λ_1、……、Λ_k 两两不相交。定义集合

$$S_k := \bigcup_{j=1}^{k} \Lambda_j, \qquad \Lambda_{k+1}(N) := \{nN : 0 < |n| \le M_{k+1},\ n \in \mathbb{Z}\},$$

其中 $N \ge 1$ 是一个整数。注意，

$$\Lambda_{k+1}(N) \cap S_k \ne \varnothing. \tag{7}$$

当且仅当存在一个整数 $m \in S_k$ 和 $1 \le |n| \le M_{k+1}$ 使得

$$nN = m.$$

n有 $|\Lambda_{k+1}| = 2M_{k+1}$ 种可能的取值。对于每个这样的 n，至多有 $|S_k| = \sum_{j=1}^{k} |\Lambda_j|$ 个 N 的取值使得 $nN = m \in S_k$。因此，总数不超过

$$|\Lambda_{k+1}||S_k| = |\Lambda_{k+1}| \sum_{j=1}^{k} |\Lambda_j|$$

使 $\Lambda_{k+1}(N) \cap S_k \neq \varnothing$成立的 N的不同取值。根据抽屉原理，必定存在一个正整数

$$1 \leq N \leq 1 + |\Lambda_{k+1}| \sum_{j=1}^{k} |\Lambda_j|$$

它不满足上述性质。选取 N_{k+1} 为这样的最小整数，即可得到(7)，从而保持两两不相交。此外，由构造我们还有

$$N_{k+1} \leq 1 + |\Lambda_{k+1}| \sum_{j=1}^{k} |\Lambda_j| \asymp |\Lambda_{k+1}| \sum_{j=1}^{k} |\Lambda_j|,$$

由此给出所需的上界。该断言由归纳法得出。 □

我们指出，整数 N_k 实际上可以选得稍小一些。事实上，设 N_k 为超过 M_{k-1} 的第 k个素数。由于 $\{M_k\}_k$ 是非递减的，这保证素数 $\{N_k\}_k$ 互不相同。现设 $j < k$，并注意到 $\Lambda_j \cap \Lambda_k \neq \varnothing$ 当且仅当

$$nN_k = mN_j, \qquad 1 \leq |n| \leq M_k, \quad 1 \leq |m| \leq M_j.$$

但这样一来 $N_k \mid mN_j$，又由于 $N_k \neq N_j$ 是素数，从而得到 $N_k \mid m$，而这是不可能的，因为

$$|m| \leq M_j \leq M_{k-1} < N_k.$$

因此，只要 $j \neq k$，就有 $\Lambda_j \cap \Lambda_k = \varnothing$，并且由素数定理，这一选取满足

$$N_k \lesssim (M_{k-1} + k) \log(M_{k-1} + k).$$

不过，我们不会使用这一改进结果。

步骤 3. 熵控制 根据引理 3。2，我们可以选择

$$N_j \asymp M_j \sum_{k=1}^{j-1} M_k,$$

因此，应用引理2.2后，我们得到熵估计

$$\mathcal{E}(E) \lesssim \sum_j \delta_j \log \frac{N_j}{\delta_j} \asymp \sum_j \delta_j \log\Big(\sum_{k=1}^{j} \frac{1}{\delta_k} \log \frac{1}{\delta_k}\Big).$$

因此，为了同时确保 Beurling–Carleson 熵有限以及 $\{\widehat{\mu}(n)\}_n$ 的 ℓ^q-范数发散，只需构造递减的正数 $\{\delta_j\}$，使得

$$\sum_j \delta_j \log\Big(\sum_{k=1}^{j} \frac{1}{\delta_k} \log \frac{1}{\delta_k}\Big) < \infty, \qquad \sum_j \left(\frac{\delta_j}{\log \frac{1}{\delta_j}}\right)^{q-1} = \infty \quad \text{for every } 1 < q < 2, \tag{8}$$

例如，这可通过如下显式选取来实现

$$\delta_j = \frac{c}{j(\log j)^a}, \qquad j = 1, 2, 3, \ldots$$

其中取 $a > 2$，且 $c > 0$ 足够小，使得 $\sum_j \delta_j \le \delta$。证明至此完成。

4 ℓ^r 中的非唯一性集合

4.1 在 ℓ^r 中构造非唯一集

在本子小节中，我们修改先前引入的构造基块，以构造形如 (3) 的集合；当 $1 < r < 2$ 时，这些集合不能成为 ℓ^r 的唯一性集。我们在此的主要结果如下。

命题 4.1。固定 $1 < r < 2$ 并令 $0 < \delta < 1$。假设 $\{\delta_j\}_j$ 是满足以下条件的正数

$$\sum_j \delta_j \le \delta, \qquad \sum_j \delta_j^{r-1} < \infty.$$

那么存在整数 $\{N_j\}_j$，使得式 (3) 中的相应集合 E 满足$m(E) \ge 1 - \delta$，并支撑一个非负且非平凡的函数

$$f \in L^2(E) \cap A_r(\mathbb{T}).$$

从构造中可以清楚看出，只要序列 $\{N_j\}$ 增长得足够快，结论就成立。另请注意，这些紧集的内部为空。

Proof. 我们沿用前一子小节的记号。考虑函数

$$\psi_j(\zeta) := \mathbb{1}_{I(\delta_j)} * \phi_{\varepsilon_0\delta_j,l}(\zeta), \qquad \zeta \in \mathbb{T},$$

其中 $\varepsilon_0 > 0$ 的选取使得

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1+\varepsilon_0)\delta_j < 1,$$

从而保证 $m(E) > 0$。现在列出 ψ_j 的一些性质：

(a) $\psi_j \geq 0$ 和 $\psi_j \in C^{l-1}(\mathbb{T})$；(b) $\operatorname{supp}(\psi_j) \subseteq I((1+\varepsilon_0)\delta_j)$，且 $\psi_j \equiv 1$ 在 $I(\delta_j)$ 上；(c) $\widehat{\psi_j}(0) = \delta_j$，并且对于 $n \neq 0$,

$$|\widehat{\psi_j}(n)| = \frac{|\sin(\pi\delta_j n)|}{\pi|n|}\left|\frac{\sin(\pi\varepsilon_0\delta_j n/l)}{\pi\varepsilon_0\delta_j n/l}\right|^l \leq \delta_j \min\Big(1,\, C(l,\delta)\delta_j^{-l}|n|^{-l}\Big).$$

特别地,

$$\|\psi_j\|_{A_r} \leq C(l,\delta)\,\delta_j^{1-1/r}, \qquad j = 1,2,3,\ldots. \tag{9}$$

定义

$$h_n(\zeta) := \prod_{j=1}^{n}\big(1-\psi_j(\zeta^{N_j})\big), \qquad \zeta \in \mathbb{T}. \tag{10}$$

下面的引理揭示了其核心机制。

引理 4.2. 如果

$$\sup_{n\geq 1}\|h_n\|_{A_r} < \infty,$$

则存在一个非负函数 $h \in L^2(E)$ 使得 $h \in A_r(\mathbb{T})$。

证明. 由于 $1 \leq r \leq 2$, $A_r(\mathbb{T})$ 的有界子集是弱紧的。因此我们可以在 $A_r(\mathbb{T})$ 中提取一个弱收敛子列 $h_{n_k} \to h$。注意 h 也是非负的，因为每个 h_n 都是非负的。此外，由 (b) 可得

$$\operatorname{supp}(1-\psi_j(\zeta^{N_j})) \subseteq \mathbb{T}\setminus U_{N_j,\delta_j},$$

从而对每个 n 都有支集$(h_n) \subseteq E$，因此支集$(h) \subseteq E$。 □

为确保 $\|h_n\|_{A_r}$ 一致有界，我们反复使用以下几乎正交估计。

引理 4.3 (Hirschman–Katznelson，引理 2.a)。 设 $\psi, \phi \in A_1(\mathbb{T})$ 为实值且 $r \geq 1$。若 $N > 0$ 和 $\gamma > 0$ 满足

$$\sum_{|n| \geq N} |\widehat{\phi}(n)| \leq \gamma \, \|\phi\|_{A_r},$$

then

$$\|\psi_N \cdot \phi\|_{A_r} \leq e^{\gamma} \, \|\psi\|_{A_r} \, \|\phi\|_{A_r},$$

其中 $\psi_N(\zeta) := \psi(\zeta^N)$。

假设

$$\sum_j \delta_j \leq \delta, \qquad \sum_j \delta_j^{r-1} < \infty. \tag{11}$$

由 (9) 以及 $1 - \psi_j(0) = 1 - \delta_j$ 可知，存在$c = c(l, \delta) > 0$ 使得

$$\|1 - \psi_j\|_{A_r} \leq \exp(c \, \delta_j^{r-1}).$$

我们将通过归纳法构造 $\{N_j\}$。任意选取 $N_1 \geq 1$，并令

$$h_1 = 1 - \psi_1(\zeta^{N_1}).$$

选定 $N_1 < \ldots < N_k$后，选取充分大的 $N_{k+1} > N_k$，使得

$$\sum_{|n| \geq N_{k+1}} |\widehat{h}_k(n)| \leq \delta_k \, \|h_k\|_{A_r}.$$

应用引理 4.3，其中 $\phi = h_k$ 和 $\psi = 1 - \psi_{k+1}$，得到

$$\|h_{k+1}\|_{A_r} \leq e^{\delta_k} \|1 - \psi_{k+1}\|_{A_r} \|h_k\|_{A_r}.$$

对该估计反复迭代可得

$$\|h_{k+1}\|_{A_r} \leq \exp\left(\sum_{j=1}^{k} \delta_j\right) \exp\left(c \sum_{j=1}^{k+1} \delta_j^{r-1}\right).$$

由 (11) 可知，右侧关于 k 一致有界，因此

$$\sup_{n \geq 1} \|h_n\|_{A_r} < \infty,$$

结论由引理 4.2 得出。 □

我们用下面这个简单的注记结束本子小节。设 $g(t)$ 是 $[0,1]$ 上的连续递增函数，且具有以下性质：

$$\frac{g(t)}{t^{r-1}} \downarrow 0, \qquad t \downarrow 0,$$

对所有 $1 < r < 2$ 均成立。例如，可以取 $g(t) = \exp(-\log^2(t))$。现在，若选择参数 $\{\delta_j\}_j$ 使得

$$\sum_j \delta_j \le \delta, \qquad \sum_j g(\delta_j) < \infty,$$

那么证明实际上给出了一个非负函数 $f \in L^2(E)$，满足

$$\{\widehat{f}(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \bigcap_{r>1} \ell^r.$$

4.2 唯一性集与非唯一性

现在，我们通过一种简洁的方式重新证明 I. Hirschman 和 Y. Katznelson 在 [3] 中提出的以下尖锐主要结果，以展示前述构造的威力。

推论 4.4 (Hirschman–Katznelson, [3])。设 $1 < q < r < 2$。那么存在紧集 $E \subset \mathbb{T}$，使得 $m(E)$ 可任意接近 1，且：

(a) E 支撑一个正测度 $\mu \in A_r(\mathbb{T})$。

(b) E 不支撑任何非平凡测度 $\mu \in A_q(\mathbb{T})$。

推论 4.4 的证明。 固定 $1 < q < r < 2$。对于任意固定的 $0 < \delta < 1$，通过微积分中的简单计算即可选取正数 $\{\delta_j\}_j$，使其满足以下性质：

$$\sum_j \delta_j \le \delta, \qquad \sum_j \delta_j^{r-1} < \infty, \qquad \sum_j \left(\frac{\delta_j}{\log \frac{1}{\delta_j}} \right)^{q-1} = \infty. \tag{12}$$

例如，我们可以选取 $\delta_j = c j^{-\frac{1}{q-1}} (\log(1+j))^{\frac{q}{q-1}-\varepsilon}$，其中 $c, \varepsilon > 0$。当 c 充分小时，我们有 $\sum_j \delta_j \le \delta$。

现在我们选取足够大的整数 $\{N_j\}_j$，使得命题 4.1 适用；此外，还要使这些频率块

$$\Lambda_j := \left\{ nN_j : 0 < |n| \le \left\lceil \frac{1}{\delta_j} \log \frac{1}{\delta_j} \right\rceil \right\}, \qquad j \ge 1,$$

两两不相交。根据命题 4.1，相关集合 E 支撑一个正函数 $f \in L^2(E) \cap A_r(\mathbb{T})$，因此在 $A_r(\mathbb{T})$ 中存在一个正测度。另一方面，根据定理 1.1 的步骤 2，对于任意 $\mu \in M(E)$（不失一般性地将其归一化，使 $\mu(E) = 1$），都有

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\mu}(n)|^q \geq \sum_j \sum_{n\in\Lambda_j} |\widehat{\mu}(n)|^q \gtrsim \sum_j \left(\frac{\delta_j}{\log \frac{1}{\delta_j}}\right)^{q-1} = \infty.$$

因此， E 在 $A_q(\mathbb{T})$ 中不支撑任何非平凡测度。 □

事实上，只需稍作修改这一构造，就能得到略强一些的结论。

对于固定的 $r \in (1,2)$，可以安排使得

$$(a') \qquad E \text{ supports a positive measure } \mu \in \bigcap_{s>r} A_s(\mathbb{T}),$$

而对于固定的 $q \in (1,2)$，可以确保

$$(b') \qquad E \text{ supports no non-trivial measure } \mu \in \bigcup_{s<q} A_s(\mathbb{T}).$$

通过对 (12) 中 $\{\delta_j\}_j$ 的选取稍作调整即可得到这些结果，此处省略细节。不过，这些加强形式此前已由 J. Rosenblatt 和 K. Shuman 在 [21], 的工作中得到，其证明方法与本文不同。

4.3 通过逼近方案构造唯一性集

我们对定理 1.1 的证明构造出了 ℓ^q 的唯一性集，而无需调用显式的逼近方案。然而，根据定理 1.3，只要 E 是 ℓ^q 的唯一性集，这样的方案就必然存在；也就是说，应当能够找到满足以下条件的函数

$$\phi_j \in C(\mathbb{T} \setminus E), \qquad \|\phi_j - 1\|_{A_p} \to 0.$$

在 D. Newman 构造的第 N 阶段， [18], 唯一性集表现为长度为 $1/N$ 的 $k \gg \sqrt{N}$ 区间的补集，它们构成高度为 N/k 的三角函数的基底；要实现适当的傅里叶衰减，则取决于加法数论中的一个精妙结果。Y. Katznelson [8], 转而引入了一种基于近似正交性的平均过程，之后又与 I. Hirschman [3] 一同对其进行了改进。我们概述这一方法的一个变体。它能得到形式如 (3) 的唯一性集，但无法对参数 $\{N_j\}_j$ 进行最优控制；正如上文所述，这些参数决定了我们集合的熵行为。

对于 $\delta > 0$ 和 $N \geq 1$，定义

$$\psi_{\delta,N}(\zeta) = \delta^{-1}\mathbb{1}_{I(\delta)}(\zeta^N), \qquad \zeta \in \mathbb{T}.$$

那么 $\psi_{\delta,\ N} = \mathbb{1}_{U_{\delta,\ N}}$ 和

$$\widehat{\psi_{\delta,N}}(0) = 1, \qquad \widehat{\psi_{\delta,N}}(n) = 0 \text{ if } N \nmid n,$$

而对于 $n \neq 0$,

$$|\widehat{\psi_{\delta,N}}(Nn)| \lesssim \min\bigl(1, (\delta|n|)^{-1}\bigr).$$

固定 $0 < \varepsilon < 1$，并令 $M > 1$ 为稍后确定的整数。设 $\delta = \varepsilon/M$，对于整数 $N_1 < \ldots < N_M$，定义

$$E(\delta, M) := \bigcap_{j=1}^{M} (\mathbb{T} \setminus U_{\delta,N_j}), \qquad f_M := \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} \psi_{\delta,N_j}.$$

那么我们有

$$m(E(\delta, M)) \geq 1 - M\delta = 1 - \varepsilon, \qquad f_M = 0 \text{ on } E(\delta, M), \qquad \widehat{f_M}(0) = 1.$$

下面的引理概括了这一构造的本质。

引理 4.5。设 $p > 2$ 和 $0 < \varepsilon < 1$。那么存在整数 $M \geq 1$ 和 $N_1 < \ldots < N_M$，使得

$$m(E(\varepsilon/M, M)) \geq 1 - \varepsilon$$

and

$$\|f_M - 1\|_{A_p} \leq \varepsilon.$$

证明。由于 $f_M(0) = 1$，只需控制非零傅里叶系数。为此，我们可以通过归纳法选取 $N_1 < \ldots < N_M$，使得函数 ψ_{δ,N_j} 的频率支撑几乎互不相交（参见 [8]）。如同 Katznelson [8]，我们还得到

$$\|f_M - 1\|_{A_p} \leq 2M^{1/p-1}\delta^{-1}\|\mathbb{1}_{I(\delta)}\|_{A_p}.$$

利用范数估计 $\|\mathbb{1}_{I(\delta)}\|_{A_p} \lesssim \delta^{1-1/p}$，我们得到

$$\|f_M - 1\|_{A_p} \leq CM^{1/p-1/q}\varepsilon^{1/q-1},$$

其中 $1/p + 1/q = 1$。取足够大的 $M = M(\varepsilon,\ p)$ 即可得到所需结论。 □

现在我们转而构造 $\bigcap_{q>1}\ell^q$ 的唯一性集。设 $\{\varepsilon_j\}_j$ 为满足 $\sum_j \varepsilon_j \le \varepsilon_0$ 的正数。应用引理 4.5 并取 $\varepsilon=\varepsilon_j$，可得到集合 $E(\delta_j,\ M_j)$，使得

$$m(E(\delta_j, M_j)) \ge 1-\varepsilon_j, \qquad \|f_{M_j}-1\|_{A_{p_j}} \le \varepsilon_j.$$

Then

$$E=\bigcap_{j=1}^{\infty} E(\delta_j, M_j)$$

满足 $m(E)\ \ge 1-\varepsilon_0$，根据命题 3.1，它是 ℓ^q 的唯一性集。若要为 $\bigcap_{q>1}\ell^q$ 构造唯一性集，只需选取 $p_j\downarrow 2$并相应调整参数 M_j。细节从略。

4.4 均匀型单侧唯一性集

本节主要用于证明定理 1。2。陈述中 (ii) 的第二部分要求我们证明存在具有单侧傅里叶系数一致界的唯一性性质测度集合。以下结果将作为证明的基础。

命题 4.6。 设 $\{\Omega(n)\}_n$ 为正实数，且$\Omega(n)\ \downarrow 0$。那么对于任意 $\{\delta_j\}_j$ 正实数，满足

$$\sum_j \delta_j < 1,$$

存在正整数 $\{N_j\}_j$，使得 (3) 中的相应集合满足以下单侧唯一性性质：只要 $\mu\in M(E)$ 满足

$$|\widehat{\mu}(n)| \le \Omega(n), \qquad n=1,2,3,\dots,$$

于是 $\mu\equiv 0$。

在证明中，我们将看到，只要 $\{N_j\}_j$ 增长得足够快，命题 4.6 的结论实际上就成立。在着手证明之前，我们将推导出第二个主要结果，作为其推论。

定理 1.2 的证明。 固定一个数 $0<\delta<1$，并令 $\{\delta_j\}_j$ 为正数，使得

$$\sum_j \delta_j \le \delta, \qquad \sum_j \delta^{r-1} < \infty, \qquad \text{for all } 1<r<2.$$

现在，由于当我们选择使 $\{N_j\}_j$ 快速增长时，命题 4.1 和命题 4.6 的结论仍然成立，因此我们可以找到正整数 $\{N_j\}_j$，使得

两个命题同时成立。然后，相关集合 $E := \cap_j \mathbb{T} \setminus U_{N_j,\delta_j}$ 的勒贝格测度为 $m(E) \geq 1-\delta$，并支撑一个非负函数 $f \in L^2(E)$，满足

$$\{\widehat{f}(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \bigcap_{r>1} \ell^r,$$

但不存在具有一致单侧控制的非平凡 $\mu \in M(E)$

$$|\widehat{\mu}(n)| \leq \Omega(n), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad \square$$

现在我们可以证明我们构造测度唯一性集并使其满足单侧一致傅里叶界的主要结果。类似的构造曾出现在 [14], ，但最终也深受 [9] 和 [8] 中早期研究的启发。

命题 4.6 的证明。步骤 *1*：同时逼近：
取满足 $\delta := \sum_j \delta_j < 1$ 的正实数 $\{\delta_j\}_j$。令 $\{\varepsilon_j\}_j$ 为满足 $\varepsilon_j \to 0$ 的正实数，并考虑定义在 $\mathbb{T}$ 上、具有以下性质的光滑实值函数 χ_j

$$\int_{\mathbb{T}} \chi_j dm = 0, \qquad \chi_j \equiv \log \varepsilon_j \text{ off the set } I(\delta_j).$$

考虑外函数

$$F_j(z) := 1 - \exp\left(\int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \psi_j(\zeta) dm(\zeta)\right), \qquad |z| < 1.$$

由此可知， F_j 在单位圆盘 $\{|z| < 1\}$内解析；利用单位圆盘中泊松核的标准性质，我们很容易验证

(a) $F_j(0) = 0$,

(b) $|F_j(\zeta) - 1| \leq \varepsilon_j$ for $\zeta \notin I(\delta_j)$.

令 $\{N_j\}_j$ 为稍后指定的正整数，并考虑函数

$$f_j(z) := F_j(z^{N_j}), \qquad |z| < 1.$$

由此可得

$$|f_j(\zeta) - 1| \leq \varepsilon_j, \qquad \zeta \in \{\zeta^{N_j} \notin I(\delta_j)\} = \mathbb{T} \setminus U_{N_j,\delta_j}.$$

此外，由于 $f_j(0) = 0$，利用 Ω 的单调性可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{f_j}(n)|\Omega(n) = \sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{F_j}(n)|\Omega(N_j n) \leq \Omega(N_j)\|F_j\|_{A_1}.$$

由于 $\Omega(n) \to 0$，且范数 $\|F_j\|_{A_1}$ 仅取决于 ε_j, δ_j，我们可以选择整数 $\{N_j\}_j$，使得

$$\Omega(N_j)\|F_j\|_{A_1} \le \varepsilon_j, \qquad j = 1, 2, 3, \dots$$

步骤 *2*：唯一性性质：
然后考虑与上述参数选择相对应的集合

$$E := \bigcap_j \mathbb{T} \setminus U_{N_j,\delta_j},$$

与上述参数 $\{\delta_j\}_j$，$\{N_j\}_j$ 的选择相关联。注意到，上述构造得到了解析函数 $\{f_j\}_j$，它们属于 $\{|z| < 1\}$，并且可光滑延拓至 $\mathbb{T}$，同时在 E 上满足同时逼近现象：

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{f_j}(n)|\Omega(n) \to 0, \qquad \sup_{\zeta\in E}|f_j(\zeta) - 1| \to 0. \tag{13}$$

固定 $\mu \in M(E)$，使得 $\sup_n \Omega(|n|)^{-1}|\widehat{\mu}(n)| < \infty$。利用 (13) 以及 $\{f_j\}_j$ 的解析性，我们得到对于任意整数 $N \ge 0$，

$$\begin{aligned}|\widehat{\mu}(N)| = \lim_j \left|\int_E \overline{f_j(\zeta)\zeta^N} d\mu(\zeta)\right| &= \lim_j \left|\sum_{n=0}^{\infty} \overline{\widehat{f_j}(n+N)}\widehat{\mu}(n)\right| \\ &\le \limsup_j \sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{f_j}(n)|\Omega(n) \sup_{n\ge 0} \frac{|\widehat{\mu}(n)|}{\Omega(n)} = 0.\end{aligned}$$

根据 F. 和 M. Riesz 定理，$d\mu = h dm$，其中 h 属于 Hardy 空间 H^1。由于 $\operatorname{supp}(\mu) \subseteq E$，我们看到 h 在一个具有正勒贝格测度的集合上为零。由于 H^1 的元素不能在具有正测度的集合上为零，除非 $h \equiv 0$，我们得出 $\mu \equiv 0$。 □

5 傅里叶变换的非对称唯一性现象

5.1 实数轴上的傅里叶变换

事实证明，在 $L^q(\mathbb{R})$-空间的背景下，我们的结果可直接推广到 $\mathbb{R}$ 上的傅里叶变换。我们仅陈述定理 1.1 和定理 1.2 的非周期对应结果。

定理 5.1。 存在具有正勒贝格测度的紧集 $E \subset \mathbb{R}$，满足以下性质：

(i) 若 $\mu \in M(E)$ 非平凡，则

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{\mu}(\xi)|^q \, d\xi = \infty, \qquad 0 < q < 2.$$

(ii) 存在 $\nu \in M(E)$，使得对每个 $A > 0$，存在 $C(A) > 0$，满足

$$|\widehat{\nu}(\xi)| \le C(A)\, \xi^{-A}, \qquad \xi > 0.$$

定理 5.2. 设 $\Omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ 为非递减，且 $\Omega(t/2) \asymp \Omega(t)$ 以及 $\Omega(t) \downarrow 0$。则存在具有正勒贝格测度的紧集 $E \subset \mathbb{R}$，使得：

(i) 存在正测度 $\mu \in M(E)$，满足

$$\widehat{\mu} \in \bigcap_{r>1} L^r(\mathbb{R}).$$

(ii) 若 $\nu \in M(E)$ 满足

$$|\widehat{\nu}(\xi)| \le \Omega(\xi), \qquad \xi > 0,$$

则 $\nu \equiv 0$。

这两个定理都可由其周期对应结果直接推出：将定理 1.1 和定理 1.2 中构造的集合视为 $[0,1] \subset \mathbb{R}$ 的紧子集，并应用 J.-P. Kahane [4, 引理 1，第 252] 页中的以下简单观察即可。

引理 5.3 (J.-P. Kahane)。 设 Φ 是 $[0,\infty)$ 上的连续递减函数，满足 $\Phi(t/2) \asymp \Phi(t)$。若 μ 是 $\mathbb{R}$ 上的紧支有限博雷尔测度，且

$$|\widehat{\mu}(2\pi n)| \le \Phi(2\pi n), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

则存在 $C(\Phi) > 0$，使得

$$|\widehat{\mu}(\xi)| \le C(\Phi)\Phi(\xi), \qquad \xi > 0.$$

若假设负频率具有单侧衰减，则对 $\xi < 0$ 也有类似的结论。

将此引理应用于周期情形下构造的测度，可把 $\mathbb{Z}$ 上的离散傅里叶衰减转化为 $\mathbb{R}$ 上的一致衰减，从而得到定理 5.1 和定理 5.2。

参考文献

[1] K. de Leeuw and Y. Katznelson，傅里叶–斯蒂尔切斯变换的两面与近幂等测度，《以色列数学杂志》，*8 (1970)*，第 *213–229* 页。
[2] V. P. Havin and B. Jöricke，调和分析中的不确定性原理，《数学科学百科全书》第 *72* 卷，*Springer*，柏林，*1995*。
[3] I. I. Hirschman and Y. Katznelson，关于 *lp* 的唯一性集与重数集， α，《以色列数学杂志》，*3 (1965)*，第 *221–231* 页。[4] J.-P. Kahane，一些函数随机级数，第 *5* 卷，剑桥大学出版社，*1985*。
[5] J.-P. Kahane and Y. Katznelson，关于绝对收敛泰勒级数在圆盘闭子集上的限制代数，*Journal d'Analyse Mathématique*，*23 (1970)*，第 *185–197* 页。[6] J.-P. Kahane and Y. Katznelson，关于解析函数的径向行为，《巴黎科学院报告》*Série AB*，*272 (1971)*，第 *A718–A719* 页。
[7] J.-P. Kahane and V. Nestoridis，*Menchoff* 意义下的通用泰勒级数与三角级数，*Journal de mathématiques pures et appliquées*，*79 (2000)*，第 *855–862* 页。[8] Y. Katznelson，某些三角级数类的唯一性集，《美国数学学会通报》，*70 (1964)*，第 *722–723* 页。[9] S. V. Khrushchev，同时逼近问题与柯西型积分奇点消去问题，《斯捷克洛夫数学研究所学报》，*130 (1978)*，第 *124–195* 页。[10] T. W. Körner，唯一性集，*Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*，*2 (1992)*，第 *51–63* 页。
[11] G. Kozma and A. Olevskiĭ，反解析部分较小的零级数，《数学报告》，*336 (2003)*，第 *475–478* 页。[12] ,奇异分布、支集维数与傅里叶变换的对称性，*Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*，*63 (2013)*，第 *1205–1226* 页。
[13] N. Lev and A. Olevskiĭ，维纳的“平移闭包”问题与皮亚特茨基–沙皮罗唯一性现象，《数学年刊》，*(2011)*，第 *519–541* 页。

[14] A. Limani,归一化柯西变换的傅里叶系数,《数学分析杂志》，(2025)，第 1–26 页。[15] A. Limani and B. Malman, 若干光滑柯西变换族的构造,《加拿大数学杂志》，76 (2024)，第 319–344 页。[16] R. Lyons, *Rajchman*测度七十年,载于《傅里叶分析与应用杂志》特刊，CRC出版社，1995，第 363–377 页。[17] N. G. Makarov,关于共形映射理论中的一类例外集,《苏联数学文集》，68 (1991)，第 19 页。[18] D. Newman, *lp* 中平移的闭包,《美国数学杂志》，86 (1964)，第 651–667 页。
[19] V. V. Peller and S. V. Khrushchev,汉克尔算子、最佳逼近与平稳高斯过程,《俄罗斯数学评论》，37 (1982)，第 61–144 页。[20] A. Rajchman, 一类几乎处处收敛到零的三角级数,《数学年刊》，101 (1929)，第 686–700 页。[21] J. M. Rosenblatt and K. L. Shuman, 循环函数（定义于 $L^p(\mathbb{R})$） $1 \leq p < \infty$,《傅里叶分析与应用杂志》，9 (2003)，第 289–300 页。

Adem Limani,Lund University,
Centre for Mathematical Sciences,Box 118,
221 00 Lund, Swedenadem.limani@math.lu.se

Tomas Persson,Lund University,
Centre for Mathematical Sciences,Box 118,
221 00 Lund, Swedentomasp@gmx.com