arXiv:2603.08492v1 [cs.DM] 9 Mar 2026

由态射生成的词的 WELLDOC 性质

Svetlana Puzynina，Vladimir Schavelev 圣彼得堡国立大学，俄罗斯 s.puzynina@gmail.com, vovashavelev11@mail.ru

摘要

本文研究无限词的一种阿贝尔型性质，称为均匀分布的出现，简称 WELLDOC。若无限词 w 在一个d元字母表上具有 WELLDOC 性质，则对于 w的每个因子 u 、每个正整数 m以及每个向量 $v \in \mathbb{N}^d$，都存在 u 的一次出现，使得在该次出现之前的 w 前缀的 Parikh向量模m v 同余。字母表上有限词 v 的 Parikh向量，其第 i个分量等于 v中第 i个字母出现的次数。我们给出了由态射生成的词具有 WELLDOC 性质的判据。

1 引言

本文研究由态射生成的无限词中均匀分布的出现，简称 WELLDOC。这是关于词中因子分布规律性的无限词阿贝尔型性质。若无限词u 在字母表 A 上满足 WELLDOC 性质，则对于每个整数 m 以及 u的每个因子 w ，在 w 各次出现之前的 u 前缀的 Parikh 向量模 m所得集合，与 $\mathbb{Z}_m$ 相同（见定义 3）。WELLDOC 性质最初是在伪随机数生成器的背景下提出的 [2]。

线性同余生成器是一列模 m 的 $Z_{n+1} = aZ_n + c$，满足a， c， $m \in \mathbb{N}$。线性同余生成器存在一种称为格结构的缺陷：如果将生成器中所有 n 个连续数视为 $\mathbb{Z}^n$ 的子集，那么它们会被一族等距超平面覆盖，而这些超平面并未覆盖整个平面。Guimond等人[7] 证明，将两个线性同余生成器与编码某些准晶体类别的无限词结合时

或者等价地，与切投影集结合时，所得序列是非周期的，并且没有格结构。更一般地，给定一个字母表 Σ 上的无限词 $w = w_0 w_1 \cdots$ 以及线性同余生成器 $Z^{(i)}$、$i = 1$、.....、$|\Sigma|$，可以按如下方式将它们结合。考虑由 $f(i) = |\{j < i | w_j = w_i\}|$ 定义的函数 f；也就是说，函数 f 统计 w 中长度为 i 的前缀里等于 w_i 的字母个数。然后，根据词 w 由 $Z^{(i)}$ 构造的生成器定义为 $Z(w)_n = Z^{(w_n)}{}_{f(n)}$。

选择词 w，可以得到一个不存在格结构缺陷的序列。在 [2] 中，作者发现了一种关于均匀分布的出现的组合条件，该条件可确保相关伪随机生成器不存在格结构。此外，他们证明了 Sturmian 词和拟 Sturmian 词满足 WELLDOC 性质，并提出了一个开放问题：刻画生成满足 WELLDOC 性质的词的态射。本文回答了这一问题。使用态射生成的词构建伪随机生成器的优势在于，这类词可以非常快速地生成，因此不会拖慢生成过程。

本文的主要结果是给出了态射生成的词满足 WELLDOC 性质的判据。对于二元字母表，态射生成的递归词满足 WELLDOC 性质，当且仅当该态射对应矩阵的行列式等于 ± 1 （见定理 1）。对于态射生成的非二元词，还需要一个附加条件：当且仅当该态射对应矩阵的行列式等于 ± 1 ，且该词中回返至首字母的返回词的 Parikh 向量生成空间 $\mathbb{Z}^{|\Sigma|}$ 时，才满足 WELLDOC 性质（见定理 2）。我们证明了后一条件是可判定的。

本文的组织结构如下。在下一节中，我们将给出必要的组合定义和记号，并陈述我们的主要结果。在第 3 节中，我们将介绍代数方面的必要背景知识。在第 4 节中，我们证明定理 1 和定理 2 中的性质是 WELLDOC 性质的充分条件；在第 5 节中，我们证明它是必要条件。

2 定义和主要结果

一个字母表 Σ 是一个有限集合，其中的元素称为字母。有限 （分别指无限）词 是由 Σ中的元素构成的有限（分别指无限）序列 $w = w_0 w_1 \cdots$。我们用 Σ^* 表示有限词的集合。空词记作 ε。 w 的因子是由其中连续的字母组成的有限子序列。前缀 是一种特殊的因子，从位置 0 开始。对于有限词 $u = u_0 \cdots u_{n-1}$，其后缀 是一个在位置 $n - 1$结束的因子，而其真因子 既不是它的前缀，也不是它的后缀，也不是空词。对于有限词 $u = u_0 \cdots u_{n-1}$，其长度

记作 $|u| = n$，其中字母 a 的出现次数记作$|u|_a$。对于无限词 $w = w_0 w_1 \cdots$，我们用 $w[i, i+k)$表示其从位置 i开始、长度为k 的因子：$w[i, i+k) = w_i \cdots w_{i+k-1}$。

态射 ϕ 是从 Σ^* 到 Σ^* 的映射，满足对所有有限词 $u, v \in \Sigma^*$，$\phi(uv) = \phi(u)\phi(v)$。本文讨论的所有态射都是非擦除的，即任意非空词的像都非空。若存在某个非空有限词 s，使得 $\phi(a) = as$，则称态射 ϕ在字母 a 上可延长。对于每个使 ϕ可延长的字母 a，该态射生成一个以 a开头的无限词：$w = \lim_{n\to\infty} \phi^n(a)$，其中极限按前缀意义理解。这类词也称为态射 ϕ的不动点，因为 $w = \phi(w)$。它们也称为（纯）态射词和 D0L词。注意，以下等式成立：$w = as\phi(s)\phi^2(s)\cdots\phi^{(n)}(s)\cdots$。若对每个字母 x，都存在某个 k，使得词 $\phi^k(x)$包含字母表中的每个字母，则称态射 ϕ 是本原的，否则称其为非本原的。

在下文中，我们将字母表取为整数的初始段：$\Sigma = \{0, 1, \ldots, \sigma - 1\}$，其中某个整数为 σ；因此，$\sigma = |\Sigma|$。不失一般性，我们只考虑以 0 开头的态射的不动点，因此假设所考虑的态射都可延长于 0。

定义 1。对于有限词 u，其*Parikh* 向量 V_u 是向量 $V_u = (|u|_0, |u|_1, \ldots\ldots, |u|_{\sigma-1})$。

在下文中，我们将所有向量都横向书写。

定义 2。设 w 是一个无限词，u 是它的一个因子，且 $a_0, a_1, \ldots\ldots$ 是 u 的所有出现位置的集合，即 $u = w[a_i, a_i + |u|)$。形如 $w[0, a_i)$ 的词称为前置前缀 u。我们用 X_u 表示 w 中所有位于 u 之前的前缀的 Parikh 向量集合，即 $X_u = \{V_{w[0,a_i)} | i \in \mathbb{N}\}$。我们用 $X_{u,\ m}$ 表示模 m 下从 X_u 取值于 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$的向量集合。

在 [2] 中，作者为词 w发现了以下称为 WELLDOC 的条件 w，该条件保证序列 $Z(w)_n$不存在格结构缺陷：

定义 3。若无限词 w 满足以下条件，则称其具有*WELLDOC* 性质：对于每个整数m 以及 w 的每个因子 u，都有 $X_{u,m} = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\sigma$；也就是说，对于每个向量 $v = (v_0, \ldots, v_{\sigma-1})$，都存在一个前缀 p位于 u之前，使得对于每个 i，都有 $|p|_i \equiv_m v_i$；或者等价地，$V_p \equiv_m v$。

作为本文的主要结果，我们找到了由态射生成的词具有 WELLDOC 性质的判据。为表述这一判据，我们需要以下定义：

定义 **关于 4.** 态射 ϕ 的矩阵 是以下 $\sigma = |\Sigma|$ 阶矩阵 :

$$A_\phi = \begin{pmatrix} |\phi(0)|_0 & |\phi(1)|_0 & \dots & |\phi(\sigma-1)|_0 \\ |\phi(0)|_1 & |\phi(1)|_1 & \dots & |\phi(\sigma-1)|_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |\phi(0)|_{\sigma-1} & |\phi(1)|_{\sigma-1} & \dots & |\phi(\sigma-1)|_{\sigma-1} \end{pmatrix}$$

定理 1. 设 w 是由态射 ϕ生成的无限循环二元词。当且仅当$\det A_\phi = \pm 1$时， w 满足 *WELLDOC* 性质。

备注1. 本文不将词 0^∞ 和 1^∞ 视为二进制词。显然，这些词满足 WELLDOC 性质，尽管它们由态射 ϕ**(0)** $= 00$， ϕ**(1)** $= 11$定义，而其矩阵的行列式等于 4。

备注2. 根据定义，只有循环词才能满足 WELLDOC 性质。判断纯形态词是否复现并不难。具体来说，考虑态射的递增幂，直到每个字母像中的字母集合保持不变（我们只需考虑指数不超过 $|\Sigma|^2$）。如果 0 属于该幂下某个字母 a 的像，且 a 属于 0 的像，那么这个态射以 0 开头的不动点就是复现的；否则就不是。因此，我们将所有结果都表述为关于循环词的结果。

定理 1 将在接下来的两节中证明：定理 4 中关于行列式条件的充分性，以及定理9中的必要性。

在证明定理 1 之前，我们给出它应用于 Sturmian 词的一个例子。更确切地说，我们将部分地重新证明来自 [2] 的一个结果。

定义5. 一个无限词 w 被称为*Sturmian*，如果对每个 $n \in \mathbb{N}$，词 w恰好包含 $n+1$ 个长度为 n 的因子。

定义6. 一个态射 ϕ 被称为*Sturmian*，如果对每个 Sturmian 词 w， $\phi(w)$ 都是一个 Sturmian 词。

一些（但并非全部）Sturmian 词由态射生成，并且众所周知，这些态射是Sturmian态射（参见，例如， [12,第 2]章）。

在 [2], 中，作者证明 Sturmian 词满足 WELLDOC 性质；该结果对于由态射生成的 Sturmian 词的一个特例是定理 1 的推论：

命题 1. 由态射生成的 Sturmian 词满足 WELLDOC 性质。

证明. 我们将用到以下事实（例如，参见 [12, 第 2 章。3]）：每个 Sturmian态射都是以下形式的若干个态射的复合：

$$E: \begin{matrix} 0 \to 1 \\ 1 \to 0 \end{matrix} \qquad \psi_0: \begin{matrix} 0 \to 01 \\ 1 \to 1 \end{matrix} \qquad \widetilde{\psi}_0: \begin{matrix} 0 \to 10 \\ 1 \to 1 \end{matrix}$$

注意，这些态射的矩阵的行列式为 ± 1，因此它们任意复合的矩阵的行列式也为 ± 1。由定理 1 可知，WELLDOC 性质成立。

□

定理 1 可以推广到非二元字母表，但需附加一个条件：

定理 2. 设 w 是由态射 ϕ生成的无限词。那么， w 满足 ***WELLDOC*** 性质，当且仅当 行列式 $A_\phi = \pm 1$ ，且 w 中所有以首字母开头的返回词的 ***Parikh*** 向量生成 $\mathbb{Z}^{|\Sigma|}$ 这个加法群。

我们将在接下来的两节中证明定理 2：定理 3 证明行列式条件的充分性，定理 9 证明其必要性。

3 代数陈述

这里汇集本文中用到的所有代数事实。所有陈述大概只有最后一条例外，都是众所周知的，可见于代数教材，例如 [1, 11, 15]。为求完整，我们为所有陈述提供参考文献或证明。

命题 2. 域上的矩阵 A 可逆，当且仅当 $\det A \neq 0$。矩阵 A 在 $\mathbb{Z}$ 上可逆，当且仅当 $\det A = \pm 1$。这又等价于以下事实：对每个 m，元素按模 m 取值的矩阵 A 在 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 上可逆。

证明。 第一部分见 [11, 第 VII 章，定理5。1], 第二部分见 [15, 练习 2.109]。我们来证明第三部分。若 A 在 $\mathbb{Z}$ 上可逆，那么其逆矩阵模 m 就是 A 模 m 的逆矩阵，因此 A 模 m 可逆。若 $\det A \neq \pm 1$，则 $\det A$ 存在一个素因子 p，所以 $\det A = 0$ 模 p。因此，根据命题的第一条， A 不可逆。

□

以下命题是群的拉格朗日定理[15,定理 4.50 和推论 4.69]的标准推论。

命题 3. 设 G 是一个有限群，则对每个 $g \in G$，都存在 n 使得 $g^n = e$，且 $|G|$ 可被 n整除。

命题 4. 设 $A_1, \ldots, A_n$ 是域上的 n 维向量。当且仅当由这些向量构成的矩阵的行列式等于 0 时，它们线性相关。如果这些向量的项都是整数，那么当该矩阵的行列式为 ± 1时，它们构成 $\mathbb{Z}^n$ 的张成集。

证明。 第一部分见 [11, 第 7 章，定理 3。1]。现在证明第二部分。

根据命题 2，该矩阵可逆。现在我们将证明每个向量 $v \in \mathbb{Z}^n$ 都可以表示为向量 A_i的线性组合。注意到$A \cdot A^{-1} \cdot v = v$，并记 $(u_1, \ldots, u_n)$ 为 $= u = A^{-1}v$。那么一方面 $Au = v$，另一方面 $Au = \sum_{1 \le i \le n} u_i A_i$。由此得到 v 是向量 A_i的一个线性组合。

□

命题 5. 设 A 是一个在 $\mathbb{Z}$ 上的矩阵 $n \times n$，且 $\det A \neq \pm 1$。那么，对于某个整数 m，有 $A(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^n \neq (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^n$。换言之，存在一个向量 $v \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^n$，使得对每个 $u \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^n$，都有 $Au \neq v$。

证明。 假设 $\det A = k$；令 p 为 k的一个素因子。考虑矩阵A，将其元素模 p 取值，并将其视为域 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$上的矩阵。新矩阵的行列式等于 0，因此，根据命题 4，该矩阵的向量线性相关。由于我们有 n 个维数为 n的向量，它们不能构成张成集，因此确实可以找到这样的向量 v。因此，我们可以选取 $m = p$（事实上，在命题中可以选 m为素数，不过这并非必需）。

□

我们将用到下面这个命题，它不像本节前面的陈述那样经典。给定一个由向量组成的集合 V 和一个整数 m，我们用 V/mV 表示这个向量集合模 m 的结果，即对每个向量的每个坐标取模 m。

命题 6。 设 V 是来自 $\mathbb{Z}^n$的一个向量集合。那么 V 生成 $\mathbb{Z}^n$ 作为一个加法群，当且仅当对于每个素数 p，V/pV 都生成 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$。

证明。如果 V生成 $\mathbb{Z}^n$，那么特别地，单位向量 $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$（其$i$坐标为 1，其他所有坐标均为 0）可以表示为来自 V的向量的线性组合。换言之，存在整数$a_{i,j}$ 使得$e_i = a_{i,0}v_0 + \ldots + a_{i,n-1}v_{k-1}$，其中 $v_0, \ldots, v_{k-1}$ 是来自 V的向量，且某个$k \in \mathbb{N}$。那么对于每个模 p，相同的线性组合$a_{i,0}v_0 + \ldots + a_{i,k-1}v_{k-1}$

给出模 p下相同的向量 e_i。因此，对于每个 p和每个 e_i，我们都可以将 e_i 表示为来自 V/pV的向量的线性组合，从而可以生成 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$。

现在假设，对于每个整数 p， V/pV 生成 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$。令 G 表示由 V生成的 $\mathbb{Z}^n$ 的子群。注意，由 V/pV生成的群等于 G/pG，因此 $G/pG = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$，且商群 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n/(G/pG)$ 同构于平凡群 0。

考虑商群 $H = \mathbb{Z}^n/G$。注意， H 是有限生成阿贝尔群，因此有限生成阿贝尔群的分类 [15, 定理9.28]蕴含 H 可以表示为以下形式：

$$H \cong \mathbb{Z}^k \oplus \mathbb{Z}/p_1^{\alpha_1}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p_l^{\alpha_l}\mathbb{Z} \tag{1}$$

对于某些 k， α_1、.....、 $\alpha_l \in \mathbb{N}$ 以及某些素数 p_1、.....、 p_l（p_i 不必两两不同）。现在我们将证明 $H \cong 0$，这尤其意味着$G = \mathbb{Z}^n$。反设：假设 $H \ncong 0$。

我们将用到以下断言：

断言。 设 $B \leq A, D \leq C$ 为阿贝尔群及其子群。则

$$(A \oplus C)/(B \oplus D) \cong A/B \oplus C/D.$$

该断言的证明方法是构造一个自然同构，将类 (a, c) $+B \oplus D$ 映射到类 $(a + B) \oplus (c + D)$ 的直和。

我们当前的目标是证明，对于某个素数 p，有 $H/pH \ncong 0$。根据 (1)，我们有 $pH \cong p\mathbb{Z}^k \oplus p(\mathbb{Z}/p_1^{\alpha_1}\mathbb{Z}) \oplus \cdots \oplus p(\mathbb{Z}/p_l^{\alpha_l}\mathbb{Z})$。现在，要描述 H/pH，只需借助上述同构描述 $\mathbb{Z}^k/p\mathbb{Z}^k$ 和 $(\mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z})/p(\mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z})$。利用此同构以及 $\mathbb{Z}^k = \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$ 这一事实，我们得到 $\mathbb{Z}^k/p\mathbb{Z}^k \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^k$。 pH 中形如 $p(\mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z})$ 的直和项可以改写如下：

$$p(\mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z}, \text{ if } p \neq p_i, \\ \mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i - 1}\mathbb{Z}, \text{ if } p = p_i. \end{cases}$$

那么，如果 $p_i \neq p$，$(\mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z})/p(\mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z}) \cong 0$；如果 $p_i = p$，则$(\mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z})/p(\mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$。

若 $k \neq 0$，则 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^k$ 是 H/pH 中的一个直和项，且它不同构于 0，因此 $H/pH \ncong 0$。若 $l \neq 0$，则我们选取 p 为数 p_i 中的一个，因此 H/pH 含有一个直和项 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \ncong 0$，从而 $H/pH \ncong 0$。若 $k = l = 0$，则 $H \cong 0$，而我们已假设这不成立。

为了导出矛盾，还需证明商群 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n/(G/pG)$ 与商群 H/pH 同构，因为我们已经证明前者同构于 0，而后者不同构于 0。

现在我们令 A 表示 $\mathbb{Z}^n$，B 表示 G，C 表示 $p\mathbb{Z}^n$，D 表示 pG。由于 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n \cong \mathbb{Z}^n/p\mathbb{Z}^n = A/C$ 与 $pH \cong p\mathbb{Z}^n/pG = C/D$，剩下只需验证 $(A/C)/(B/D) \cong (A/B)/(C/D)$，以及 $D = B \cap C$。为此，我们利用以下关于同构的定理 [1, 命题 2.1]:

对于群 G' 的任意子群 H' 与 K'，下列性质成立：

1. $H'K'/H' \cong K'/(K' \cap H')$,
2. 若 $H' \trianglelefteq K'$，则 $(G'/K')/(H'/K') \cong G'/H'$。

现在很容易证明我们的群是同构的：

$$(A/C)/(B/(B\cap C)) \cong (A/C)/(BC/C) \cong A/BC \cong (A/B)/(BC/B) \cong (A/B)/(C/(B\cap C)),$$

其中，第一个和第四个同构由性质 1 得出，第二个和第三个同构由性质 2 得出。

□

4 WELLDOC 性质条件的充分性

本节证明定理 1 中 WELLDOC 性质条件的充分性。更确切地说，我们证明二元情形下态射矩阵的行列式条件的充分性（定理 4），并将其推广到非二元情形（定理 3）。证明见第 4.1 小节；随后，我们在第 4.2 小节讨论一个例子，即态射拟 Sturmian 词；最后，我们在第 4.3 小节证明该条件的可判定性。

4.1 WELLDOC 性质条件充分性的证明

R请回想，我们将字母表固定为 $\Sigma = \{0, 1, \ldots, \sigma - 1\}$ 和 $|\Sigma| = \sigma$。

定义 7。无限词 w 满足 ***WELLDOC***（对于 *0*），当且仅当对于每个整数 m，集合 X_0 满足 $X_{0,\ m} = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\sigma$。

换句话说，我们只需对一个因子 0 检查 WELLDOC 性质。下面的引理表明，对于由态射生成且 $\det A_\phi = \pm 1$ 的词，该条件等价于 WELLDOC 性质。

引理 1. 设 w 是一个以0 开头、由态射 ϕ生成的无限词，态射的矩阵为 A_ϕ，且 $\det A_\phi = \pm 1$。那么，对于词 w，*WELLDOC* 性质等价于 *WELLDOC for*0 性质。

证明. 显然，WELLDOC 蕴含 WELLDOC for 0；我们需要证明其逆命题。考虑 w 的任意因子 u；令 k 表示其首次出现结束的位置。取一个整数 n，使得 $|\phi^n(0)| > k$，那么 u 是 $\phi^n(0)$ 的一个因子。给定 m，我们现在对 n 使用归纳法，证明以下事实：对于每个因子 v，只要其首次出现包含在$\phi^n(0)$ 中，就满足 WELLDOC 性质。归纳基础为 $n = 0$，这恰好就是 WELLDOC for 0。

假设对于 $\phi^n(0)$ 的所有因子，WELLDOC 性质都成立，特别是对于 $\phi^n(0)$ 本身也成立；我们需要证明它对 $\phi^{n+1}(0)$ 的因子 u 成立，即 $\phi^{n+1}(0) = xuy$，其中某个 $x, y \in \Sigma^*$。令 $s = (s_0, \ldots, s_{\sigma-1})$ 为 $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\sigma$中的任意向量。为了证明它属于 $X_{u,m}$，我们需要找到一个位于 u 之前的前缀，使其 Parikh向量模 m等于 V。根据归纳假设，对于每个向量 $t = (t_0, \ldots, t_{\sigma-1}) \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\sigma$，都存在一个前缀 p 位于 $\phi^n(0)$ 之前，其 Parikh 向量为 $V_p \equiv_m t$。考虑词 $\phi(p)$：它是 w 的一个前缀，其 Parikh向量如下： $V_{\phi(p)} \equiv_m A_\phi t$。这个前缀位于因子 $\phi(\phi^n(0)) = \phi^{n+1}(0)$ 之前。

注意， $\phi(p\phi^n(0)) = \phi(p)\phi^{n+1}(0) = \phi(p)xuy$，因此 $\phi(p)x$ 是位于 u之前的一个前缀。其 Parikh向量为 $V_{\phi(p)x} \equiv_m A_\phi t + V_x$。按此方式，我们可以得到任意向量 s模m；为此应取 $t = A_\phi^{-1}(s - V_x)$。由命题 2，其逆矩阵是整数矩阵，因为对每个 m， A_ϕ 的行列式都等于 ± 1 。

□

为证明定理 1中条件的充分性，尚需证明$X_{0,m}$ 与$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\sigma$重合。我们首先证明集合 X_0的若干性质。

引理 2. 对于由态射生成且以0开头的递归无限词 w，集合$X_{0,m}$ 是$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\sigma$的子群。特别地，若有$(s_0, \ldots, s_{\sigma-1})$，$(t_0, \ldots, t_{\sigma-1}) \in X_{0,m}$，则$(s_0 + t_0, \ldots, s_{\sigma-1} + t_{\sigma-1}) \in X_{0,m}$。

证明。 为了证明 $X_{0,\ m}$ 是 $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\sigma$的子群，我们需要证明其对加法和取逆元的封闭性。注意，逆元的封闭性是加法封闭性的结果：元素 $v \in X_{0,\ m}$ 在$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\sigma$ 中为 $(m-1)v$，它可以表示为来自 $X_{0,\ m}$的元素之和：$(m-1)v = \underbrace{v + \ldots + v}_{m-1 \text{ 次}}$。

设 $p0$和 $q0$是 w的前缀。我们需要找到一个前缀 $r0$，使得 $V_r \equiv_m V_p + V_q$。取一个整数 k，使得 q 是 $\phi^k(0)$ 的因子。为此，我们将使用几个基本的代数事实。

考虑可逆 $\sigma \times \sigma$-矩阵模 m的群 $GL(\sigma, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$。它是有限的，因此我们可以应用命题 3；由此可知存在整数 n 使得 $A_\phi^n \equiv_m I_\sigma$。于是$V_{\phi^n(p)} \equiv_m V_p$，并且若 $p0$ 是一个前缀，则 $\phi^n(p)0$也是一个前缀，因为 $\phi(0)$以字母0开头。因此，$\phi^{nk}(p0) = \phi^{nk}(p)\phi^{nk}(0)$。这里 $\phi^{nk}(p)$具有与 V_p 模 m等价的Parikh向量，并且 $\phi^{nk}(0)$以 $q0$开头，因为 $nk > k$且 $q0$ 是 $\phi^k(0)$的一个前缀。因此，$\phi^{nk}(p)q0$ 是一个前缀，其向量与 $V_p + V_q$ 模 m等价。 □

对于下一个引理，我们将需要回返词的定义（参见，例如，[4]）。

定义 8。设 w 是一个无限词，u 是其因子，$a_1 \leq a_2 \leq \ldots$ 是 w 中 u 的所有出现位置组成的序列。那么因子 $w[a_i, a_{i+1})$ 被称为返回 u。

引理 3。对于由态射生成且以0开头的无限词 w，集合 X_0 由以下向量集作为加法群生成

$$\{V_x \mid x \text{ is a return to 0 in } w\}.$$

证明。事实上，$X_0 = \{V_p : p \text{ 是 } 0\}$ 之前的 w 的一个前缀，而这些前缀中的每一个都可以分解为返回 0 的返回词。因此，$V_p = V_{x_{i_1}} + \ldots + V_{x_{i_k}}$。 □

现在我们将证明，只需对素数模数证明 WELLDOC 即可。

引理 4。对于由态射生成且以0开头的无限词 w，条件$X_{0,\ m} = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\sigma$ 对于每个 m 都成立，当且仅当同一条件$X_{0,\ m} = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\sigma$ 仅对素数 m 成立。

证明。显然，如果该条件对每个整数 m都成立，那么它特别对素数 m成立。为证明其逆命题，只需证明：若 $X_{0,m} = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\sigma$ 且 $X_{0,p} = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\sigma$，则 $X_{0,mp} = (\mathbb{Z}/mp\mathbb{Z})^\sigma$，其中 m 是整数，且p是素数。

由于 $X_{0,p} = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\sigma$，存在 $v_i \in X_0$ 使得 v_i 模 p 仅在第i个坐标上为 1，而在所有其他坐标上均为 0，即等于 $(0,0,\ldots,1,\ldots,0)$。若将其对 mp取模，则对于某些整数 a_i，它等于 $(pa_0, pa_1, \ldots, 1 + pa_i, \ldots, pa_{\sigma-1})$。引理 2 表明 $X_{0,mp}$ 是一个子群，因此 $mv_i = \underbrace{v_i + \ldots + v_i}_{m \text{ 次}} \in X_{0,\ mp}$，w 因为它等于 (0，0，.....，$m$，.....，0)。同样，考虑向量 rs

模 m，我们得到所有形如 (0，0，……，p，……，0) 的向量。现在，我们可以从每个向量 (pa_0，pa_1，……，$1+pa_i$，……，$pa_{\sigma-1}$) 中减去所有 pa_i，从而得到模 mp 的所有向量 (0，0，……，1，……，0)。 □

现在我们可以给出由态射生成的递归词具有 WELLDOC 性质的一个充分条件（这实际上是定理 2 陈述的一部分）。

定理 3. 设 w 是由态射 ϕ 生成的递归无限词，且行列式 $A_\phi = \pm 1$。那么，w 满足 *WELLDOC* 性质，当且仅当该词 w 中以首字母 w_0 开始的返回词的 *Parikh* 向量生成 $\mathbb{Z}^\sigma$ 作为一个加法群。

注 3. 关于返回 0 的 Parikh 向量的条件可以通过算法检验（见引理 5 和命题 7）。

证明. 不失一般性，假设 $w_0 = 0$。注意，根据定义，只有递归词才满足 WELLDOC 性质；对于递归词，我们可以应用上述引理。引理 1 表明，WELLDOC 性质等价于对每个 p，$X_{0,\,p} = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\sigma$，而引理 4 表明，只需检验素数 p 对应的 WELLDOC 性质。引理 3 表明，将集合 X_0 视为以标准向量加法为运算的群时，它由返回 0 的 Parikh 向量生成。还需证明，Parikh 向量生成集合 $\mathbb{Z}^\sigma$，当且仅当对每个素数 p，它们生成 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\sigma$；这由命题 6 得出。

□

4.2 例子：episturmian 词

作为定理 3 应用的一个例子，我们将部分重新证明[2] 中的一个关于由态射生成的标准 episturmian 词子类的结果。无限词 w 的一个因子u 称为左特殊，如果它可以向左延伸为至少两个不同的字母；也就是说，存在字母 a，$b \in \Sigma$和 $a \neq b$，使得 au 和 bu也是 w的因子。

定义 9. 无限非周期词 w 称为拟 *Sturmian*，如果 w 的因子集满足以下性质：

1. 对每个因子 u，词 u^R 也是 w的因子，其中 u^R 表示将词u 按逆序书写所得的词。2. 对每个 $n \in \mathbb{N}$，恰好存在一个长度为 n的左特殊因子 u。

此外，如果所有左特殊因子都是 w的前缀，那么 w 就称为标准拟 *Sturmian*。

定义 10。如果对于每个拟 Sturmian 词 w， $\phi(w)$ 都是拟 Sturmian 词，则称态射 ϕ 为拟 *Sturmian*。

在 [2], 中，拟 Sturmian 词的 WELLDOC 性质已得到证明。现在，我们将利用定理 3，重新证明由态射生成的标准拟 Sturmian 词具有这一性质。事实上，由于 WELLDOC 性质仅取决于因子集，因此与由态射生成的标准拟 Sturmian 词具有相同因子集的拟 Sturmian 词也具有 WELLDOC 性质。

命题 1. 由态射生成的标准拟 *Sturmian* 词满足 *WELLDOC* 性质。

证明。 拟 Sturmian 态射有类似于 Sturmian 态射的显式描述（参见 [6]）。一个态射是拟 Sturmian 态射，当且仅当它是以下态射的复合（这里 a, b 和 x 是字母）：

$$\theta_{ab}: \begin{array}{ll} a \to b & \\ b \to a & \\ x \to x & \forall x \in \Sigma \backslash \{a, b\} \end{array} \qquad \psi_a: \begin{array}{ll} a \to a & \\ x \to ax & \forall x \in \Sigma \backslash \{a\} \end{array} \qquad \widetilde{\psi}_a: \begin{array}{ll} a \to a & \\ x \to xa & \forall x \in \Sigma \backslash \{a\} \end{array}$$

换言之， θ_{ab} 交换两个字母的位置；态射 ψ_a 和 ψ_a 将字母 a 添加到所有其他字母上。与 Sturmian 态射类似，这些态射对应矩阵的行列式等于 ± 1。因此，拟 Sturmian 态射对应矩阵的行列式也为 ± 1，于是可以应用定理 3。

对于给定的标准拟 Sturmian 词 w，考虑其首字母 w_0；不失一般性，我们可以假设 $w_0 = 0$。根据 [9], 中的定理 4.4，前缀 0 的回返词集合是集合 $\{\psi_0(a) \mid a \in \Sigma\}$。因此，我们需要检验$\{V_0\} \cup \{V_{0a} \mid a \in \Sigma \setminus \{0\}\}$ 是否作为加法群生成 $\mathbb{Z}^\sigma$。显然情况正是如此，因为 $\{V_0\} \cup \{V_{0a} - V_0 \mid a \in \Sigma \setminus \{0\}\}$ 是 $\mathbb{Z}^\sigma$ 的标准基。□

现在我们给出一个由态射生成的词的例子，使得该态射的矩阵的行列式为 ± 1; 然而，WELLDOC 性质并不成立，这表明定理 3 中关于返回词的条件在非二元情形下确实是必要的。

例子。 考虑以下态射 ϕ:

$$\phi: \begin{array}{l} 0 \to 02, \\ 1 \to 101, \\ 2 \to 102; \end{array} \qquad A_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

我们有 行列式 $A_\phi = 1$，但回到 0 的返回词是 01 和 021，因此 $X_0 = \langle (1,1,0), (1,1,1) \rangle$.

4.3 充分条件的可判定性

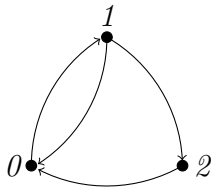
我们先给出本原态射情形下的证明，然后再讨论一般情形。

我们还需要一个定义。

定义 11. 设 w 是一个无限词。我们将 w 的图定义为一个有向图，其顶点集合对应于字母集合（即，它有 σ 个顶点）；当且仅当 ab 是 w 的一个因子时，才存在一条从字母 a 指向字母 b 的边。

备注。 这个图也是一个阶为 1 的 Rauzy 图。

例子。 词 $(0101201)^\infty$ 的图如下：



下面的引理给出了一个算法，用于计算本原态射中字母的回返。这意味着可以通过算法检验定理 3 中的充分条件。

引理 5。 设 w 是由本原的态射 ϕ 生成的无限词，并假设对于每个字母 a，其像 $\phi(a)$ 都包含字母表 Σ 中的所有字母。对于每个字母 a，将其像分解为如下形式：$\phi(a) = x_a 0 v_{a,0} 0 v_{a,1} 0 \cdots 0 v_{a,k_a-1} 0 y_a$，其中 $v_{a,i}$、x_a、$y_a \in (\Sigma \setminus 0)^*$。那么，$w$ 中对 0 的每个回返，要么具有 $0v_{a,i}$ 的形式，要么在 w 的图具有边 ab 时，对于某些字母 a、b，具有 $0y_a x_b$ 的形式。

证明。 考虑将 w 分解为块 $\phi(a)$，其中每个字母 a对应一个块。注意，w 的每个回返至多与两个块重叠，因为每个块都至少包含一个 0 的出现。每个回返要么位于一个块内部，要么与两个块重叠。第一种情况对应于 $0v_{a,i}$；第二种情况 $0y_a x_b$ 发生当且仅当 ab 是 w 的一个因子，这对应于 w 的图中的一条边 ab。 □

现在我们继续讨论不一定是本原态射的一般情形。下面的命题基本上说明，存在一种算法，可以检查由态射生成的词是否满足定理 3 中关于从 w_0 到 $\mathbb{Z}^\sigma$ 的回返词的 Parikh 向量的条件（即它们生成一个加法群）：

命题 7. 定理 3 中由态射生成的词的回返词 w_0 的 Parikh 向量条件是可判定的。

证明. 我们给出了一个明确的算法，并将其分为两部分 .

算法的第一部分用于判断：给定一个整数 m，模 m 的返回零词的 Parikh 向量是否生成群（$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$）$^{\sigma}$。具体步骤如下。对于每一对字母 a、$b \in \Sigma$，考虑向量集合 S^{i}_{a}、$_{b}$，其中包含 ϕ^{i}(0) 的所有以 a 开头、以 b结尾的因子模 m 的 Parikh 向量。假设某个向量 x 是 S^{k}_{a}、$_{b}$中的新向量，即 $x \in S^{k}_{a}$、$_{b}$ 且 $x \notin S^{i}_{a}$、$_{b}$，其中 $i < k$。由于x 以 a 开头并以 b结尾，因此对于某个词 u，有 $x = aub$。考虑 x 在 ϕ^{k}(0) 中的首次出现。将 ϕ^{k}(0)视为块 ϕ(y) 的拼接，其中$y \in \Sigma$，即 ϕ^{k}(0) $= \phi(\phi^{k-1}$(0))。在这种分解中，x 的这次出现是某个因子 $v = cwd$ 的态射像中的一个因子，其中涉及某些字母 c、$d \in \Sigma$，也就是说，ϕ(c) $= rar'$、ϕ(d) $= s'as$、ϕ(v) $= raubs = \phi$(c)ϕ(w)ϕ(d)。

注意到 $V_{w} \in S^{k-1}_{c\,d}$.，因为 ϕ(w) 是 ϕ^{k}(0) 的一个因子。因此，w 是 $S^{k-1}_{c\,d}$,中的一个新向量，否则 aub 对 $S^{k}_{a,b}$而言就不是新的。因此，如果对某个k，对于所有数对 $a, b \in \Sigma$，我们有 $S^{k}_{a,b} = S^{k+1}_{a\,b}$.，那么对于每个$l > k$以及所有数对 $a, b \in \Sigma$，也有 $S^{l}_{a,b} = S^{k}_{a,b}$。由于这些集合各自都只有有限个向量，因此对于某个 $k < \sigma^{2}m^{\sigma}$，上述情形必将出现。特别地，我们将找到一个极大的 $S^{k}_{0,0}$，它对应于所有返回 0 的返回词组成的集合。

现在我们描述算法的第二部分。它利用算法的第一部分，检查返回 0 的 Parikh 向量集合是否生成 $\mathbb{Z}^{\sigma}$作为一个群。取任意一个素数 m。如果利用该算法确定，模这个 m 时，集合 $S_{0,0}$ 不能作为加法群生成 ($\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$)$^{\sigma}$，那么根据命题 6，所有返回词组成的集合也不能生成 $\mathbb{Z}^{\sigma}$。否则，$S_{0,0}$ 存在一个基，由这些向量构成的矩阵根据命题 4 在$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 中的行列式非零。然而，这意味着由这些返回词的 Parikh 向量组成的矩阵（此时不再对 m取模）的行列式也非零。令该行列式等于 k。那么，对于任意与 k互素的素数 p，这个向量集合都能生成整个 ($\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$)$^{\sigma}$; 对于其余整除 k 的素数，则可以用同一算法进行检验。再根据命题 6，如果算法对其中任何一个素数检验失败，那么返回词集合就不能作为加法群生成 $\mathbb{Z}^{\sigma}$。否则，它可以生成 $\mathbb{Z}^{\sigma}$。

□

现在我们将证明，对于二元情形中的循环词，定理 3 关于返回词的条件对于满足 det $A = \pm 1$ 的态射总是成立，这就证明了定理 1 的一个方向。

定理 4. 设 w 是由态射 ϕ生成的无限循环二元词。如果$\det A_{\phi} = \pm 1$，那么 w 满足 *WELLDOC* 性质。

证明。 由定理 3 可知，接下来只需证明，对于每个 p，都有两个不同的返回 0，使它们的 Parikh向量生成 ($\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$)$^{\sigma}$。返回 0 是一种

二进制词，形式为 $01\cdots1$，因此我们可以取任意两个模p不同的向量。我们声称，至少存在两个这种形式的不同返回词。反设不然，则这样的向量模 p唯一；设其中包含 x 个 1 的出现位置。若 w 的因子中有 00，那么我们在 w 中至少有两个返回 0：0 和另一个以 01 开头的返回词（因为按照约定，二进制词同时包含 0 和 1）。若 w的因子中没有 00，那么我们声称 11 是一个因子。

假设 11 不是一个因子，那么我们有一个周期词 $010101\cdots$。现在我们将证明，生成这个词的态射的行列式不能是 ±1。词 $\phi(0)$ 必须是 $(01)^\infty$ 的前缀。如果它的形式为 $(01)^k$，其中 $k\in\mathbb{N}$，那么行列式可被 k 整除；对于 $k\neq1$，行列式不可能等于 ±1。如果 $\phi(0)=01$，那么对于某个 $l\in\mathbb{N}$，$\phi(1)=(01)^l$。在 $l\neq1$ 的情况下，行列式必须可被 l 整除；而在 $l=1$ 的情况下，行列式等于 0。在剩下的情况 $\phi(0)=(01)^k0$ 中，对于某个 k，我们有 $\phi(1)=1(01)^l, l\in\mathbb{N}_0$。在这种情况下 $A_\phi=\left(\begin{smallmatrix}k+1 & l\\ k & l+1\end{smallmatrix}\right)$，且 $\det A_\phi=(k+1)(l+1)-kl=k+l+1>1$，因为数值 k,l 中至少有一个不等于 0。

因此，我们证明了 w 包含因子 11。我们可以将 $\phi(0)$ 写成以下形式：

$$\phi(0)=0\underbrace{1\cdots1}_{x+pk_1}0\underbrace{1\cdots1}_{x+pk_2}\cdots0\underbrace{1\cdots1}_{x+pk_{l-1}}0\underbrace{1\cdots1}_{y+pk_l},\ \text{for some } y,k_1,\dots,k_l\in\mathbb{N}_0.$$

所有 1 块中回返词长度模 p 的余数都相同，最后一块可能例外（因为它不一定是 w中回返到 0 的词）。词 $\phi(1)$ 也可以改写为以下形式

$$\phi(1)=\underbrace{1\cdots1}_{z_1+pk'_1}0\underbrace{1\cdots1}_{x+pk'_2}\cdots0\underbrace{1\cdots1}_{x+pk'_{m-1}}0\underbrace{1\cdots1}_{z_2+pk'_m},\ \text{for some } z_1,z_2,k'_1,\dots,k'_m\in\mathbb{N}_0.$$

由于词 w 包含因子 01，它也包含因子 $\phi(0)\phi(1)$，因此$0\,\underbrace{1\cdots1}_{y+pk_l}\underbrace{1\cdots1}_{z_1+pk'_1}0$ 也是 w的一个因子，因此 $y+z_1\equiv_p x$。

类似地，10 是 w的一个因子，因此 $\phi(1)\phi(0)$ 是一个因子；而 11 也是一个因子，因此 $\phi(1)\phi(1)$ 也是一个因子。因此，$z_2+0\equiv_p x$ 且 $z_2+z_1\equiv_p x$。

最后三个模 p 的等价关系意味着 $z_1\equiv_p 0$、$z_2\equiv_p x$ 和 $y\equiv_p x$。因此，$\phi(0)$ 和 $\phi(1)$ 的像中所有返回词的 Parikh 向量模 p相同。

我们有，词 $\phi(0)$ 是若干个 l 返回 0 的拼接，而 $\phi(1)$ 是若干个 m 返回 0 的拼接，因此对于某个 $s,t\in\mathbb{N}_0$，$|\phi(0)|_0=l$、$|\phi(0)|_1=lx+ps$、$|\phi(1)|_0=m$、$|\phi(1)|_1=mx+pt$。这与矩阵的行列式条件矛盾：$\det A_\phi=l(mx+pt)-m(lx+ps)=p(lt-ms)\neq\pm1$。

□

5 WELLDOC 性质条件的必要性

在本节中，我们证明定理 1 和定理 2 中关于 WELLDOC 性质的条件是必要的。为此，我们将使用 [3]中态射的可识别性性质。

5.1 可识别态射

设 w 是由态射 ϕ 生成的无限词；我们将考虑其分解为由字母 $a \in \Sigma$ 对应的块 $\phi(a)$。令 $f_w : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是如下定义的函数：

$$i \mapsto f_w(i) = \begin{cases} |\phi(w[0,i))|, & \text{if } i > 0, \\ 0, & \text{if } i = 0. \end{cases}$$

那么第 i 个块 $\phi(w_i)$ 是 $w[f_w(i)\ f_w(i+1))$。指标 $f_w(i)$ 称为切分点。

现在回顾一些关于由无限词产生的符号动力系统的基本记号，例如可在 [12, §1.5] 中找到。双无限词 是一个由来自 Σ 的字母组成、以 $\mathbb{Z}$ 为指标的序列；于是，Σ 上的双无限词集合记为 $\Sigma^{\mathbb{Z}}$。我们在后者上赋予可度量化乘积拓扑，其中 Σ 赋予离散拓扑。态射的应用以及分解为块的定义，与单向无限词的情形类似。

令 $T : \Sigma^{\mathbb{Z}} \to \Sigma^{\mathbb{Z}}$ 为左移映射：$(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto (x_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$。如果对于某个 $k \geq 1$，双无限词 $x \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$ 满足 $T^k(x) = x$，则称其为周期的，否则称为非周期。子移位 (X, T) 是一个无限词集合 X，它是移位不变的（即，$T(X) = X$）且为闭集。我们称子移位 (X, T) 由 x 生成，如果 X 是所有双无限词组成的集合，且这些双无限词的因子也是词 x 的因子。

词 x 的语言 是其所有因子组成的集合 $\mathcal{L}_x$。对于语言 $\mathcal{L}$，我们用 $(X_{\mathcal{L}},\ T)$ 表示由所有因子均属于 $\mathcal{L}$ 的双无限词组成的子移位。最后，对于态射 ϕ，语言 $\mathcal{L}_\phi$ 是由如下词的因子构成的语言：这些词具有 $\phi^n(a)$ 的形式，其中 $a \in \Sigma$ 和 $n \in \mathbb{N}$。我们将用 X_ϕ 代替$X_{\mathcal{L}_\phi}$。

定义 12. 设 ϕ 为一个态射，$y \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$ 为一个双无限词。若 k 为整数且 x 为双无限词，则称二元组 (k, x) 为 y 的一个 ϕ-表示，如果 $y = T^k(\phi(x))$。若 $0 \leq k < |\phi(x_0)|$，则称 (k, x) 为 y 的一个 中心 ϕ-表示。对于双无限词的集合 $X \subset \Sigma^{\mathbb{Z}}$，若 $x \in X$，则称 ϕ-表示 (k, x) 来自 X。

定义13. 若每个 $y \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$ 在 X 中至多有一个中心 ϕ-表示，则称态射 ϕ 可识别于 $X \subset \Sigma^{\mathbb{Z}}$ 。若每个非周期词 $y \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$ 在 X 中至多有一个中心 ϕ- 表示，则称态射 ϕ 可识别于 X 就非周期点而言 。

定义14. 设 ϕ 是一个态射， w 是一个双无限词，且 $v = \phi(w)$。若存在 l ，使得对于每个 $m = f_w(i)$ 和 $m' \in \mathbb{Z}$，等式 $v[m-l, m+l] = v[m'-l, m'+l]$ 蕴含：对于某个 j，$m' = f_w(j)$，则称态射 ϕ是*Moss* 意义下可识别的 *´e*（关于 w ）。

我们将使用文献 [3]中的定理5.3和2.5。

定理5 （文献 [3]中的定理5.3）. 设 ϕ 是一个态射。那么，对于非周期点，它在X_ϕ 中是可识别的。

定理6 （文献 [3]中的定理2.5）. 设 ϕ 是一个态射， x 是一个双无限词，（X、T）是由 x生成的子移位。若 ϕ在 X中可识别，则 ϕ 在 x上对于Moss 意义下 *´e*可识别。

5.2 WELLDOC 性质条件必要性的证明

本小节证明我们的 WELLDOC 判据中的条件是必要的。

定义15。 设 w 是由态射生成的无限词。若词 w 的因子 u 满足：存在一个指标 k ，使得 w 中 u 的每次出现的位置 m 所对应的指标 $m+k$ 都是切割点，则称 u 为切割 因子。

我们的目标是根据以下定理找到一个切割因子:

定理7。 设 w 是由态射 ϕ 生成的无限词，且$\det A_\phi \neq \pm 1$。若 w 包含切割因子 u，则 w 不满足 *WELLDOC* 性质。

证明。 考虑 u之前的前缀集合；令 p为其中之一。那么 pu也是 w的一个前缀。根据切割因子的定义，索引 $|p|+k$ 是一个切割点，其中 k 是与该切割因子相关联的常数。因此，对于某个词 $s \in \Sigma^*$， $pu[0,k) = \phi(s)$。这意味着 V_p 可以表示为 $A_\phi V_s - V_{u[0,k)\circ}$ 由于 $\det A_\phi \neq \pm 1$，对于命题 5 给出的某个 m ，我们无法用这种方式表示 $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\sigma$ 中的所有向量。这与 WELLDOC 性质矛盾。 □

为应用定理5和定理6，我们利用这样一个事实：每个循环右无限词都可以延拓为一个具有相同因子集的双无限词。尽管这一事实可能是众所周知的，为求完整起见，我们仍给出其证明。

引理6. 设 w 是一个右无限递归词。则存在一个双无限词 w'，使得对每个 $i \geq 0$ 有 $w'_i = w_i$，且 w' 的因子集与 w的因子集重合。

证明. 为证明起见，我们如下构造词 w 向左的延拓树。从空树开始，在第 k 步我们构造一棵高度为 k的树：其根是 w 的长度为 k的前缀，其各分支的顶点用字母标记，使得每条分支对应于 w 的某个长度为 $2k$ 、后缀为 $w[0,k$的因子）。第 k步的树由如下延拓第 $k-1$步的树得到。对树的每条分支（对应于长度为 $k-1$ 的词 u，使得 $uw[0,k-1$）是 w的因子），我们为其叶节点添加用每个字母 $a \in \Sigma$ 标记的子节点，使得$auw[0,k$）是 w的因子。事实上，对每个 k，该树包含 w 的所有长度为 $2k$ 、后缀为 $w[0,k$的因子）。

现在我们证明该树是无限的。由于 w 是复现的，它的每个前缀在其中出现无穷多次。在第 k 步，我们构造 w的长度为 k 的前缀的所有可能的长度为 k 的向左延拓。由于这个长度为 k 的前缀在 w中出现无穷多次，它在 w中具有无限长的向左延拓。因此，在每一步至少有一个分支被延续。

根据K¨onig引理，每个顶点度数有界的无限树都包含一条无限路径。我们已证明我们的树是无限的，且每个顶点的子节点数以字母表的大小为界。因此，我们的树包含一条无限路径，对应于一个向左的无限延拓。词 w' 可以选为具有这一向左无限延拓的词 w；由构造可知，其因子集与 w 的因子集重合。

□

定理8. 设 w 是由态射 ϕ生成的右无限复现非周期词。则存在 k，使得每个长度大于 k 的因子 u 都是切割因子。

证明。 设 w' 是一个与 w 具有相同因子集、并以 w 为后缀的双无限词（显式构造见引理6）。由定理5，态射ϕ 在 X_ϕ 上对非周期点是可识别的。由 X_ϕ的定义，由 w'生成的子移位(X,T)包含于(X_ϕ,T)。因此，由定理6， ϕ在Moss´e意义下对 w' 是可识别的。设 l 如Moss´e意义下对 w'的可识别性定义中所述。

设 z 是长度大于 $2l + ||\phi||$的任意因子，其中 $||\phi||$ 是 ϕ中字母的像的最大长度，即 $||\phi|| = \max_{a\in\Sigma}(|\phi(a)|)$。考虑该因子在词 w中的一次出现，将该出现的位置记为 i，使得$z = w[i, i + |z|)$。它在指标区间 $[i + l, i + l + ||\phi||)$中有一个切割点，设在某个指标 $i + l + n$处，其中 $n < ||\phi||$。现取 z 在w中的任意另一次出现；将其位置记为 j，使得 $z = w[j, j + |z|)$。由于 $\phi(w')$在正位置上具有相同的字母，我们有

$$\phi(w')[(i + l + n) - l, (i + l + n) + l] = z[k, 2l + n] = \phi(w')[(j + l + n) - l, (j + l + n) + l]$$

由于 ϕ 按照 Moss´e 的意义是可识别的，点 $m + l + n$ 也是一个切割点。这正是切割因子的定义。因此，我们已经证明了关于 $k = 2l + ||\phi||$的定理。

□

现在，我们证明在字母表 Σ 上生成的、具有 $|\Sigma| \geq 2$的态射所生成的词满足 WELLDOC 性质的必要条件。

定理9. 设 w 是字母表 Σ 上的一个无限词，具有 $|\Sigma| \geq 2$，且由态射 ϕ 生成，其中 $\det A_\phi \neq \pm 1$。那么该词不满足 *WELLDOC* 性质。

证明。 如果 w 是纯周期的，那么当周期长度大于 1 时，其最小周期不满足 WELLDOC 性质。如果其长度等于 1，那么$w = 0^\infty$是一个单字母词，而我们假设字母表大小至少为 2。

如果 w 是非复现的，即存在一个因子 u 只出现有限次，那么集合 X_u 是有限的，因此 WELLDOC 性质不成立，例如，对任何 $m > |X_u|$ 都如此。

否则，如果 w 是非周期且复现的，那么根据定理8， w 有一个切割因子，因此由定理7可知，WELLDOC 性质不成立。 □

致谢

本研究得到俄罗斯科学基金会项目 25-21-00535 的资助。作者感谢 Wolfgang Steiner 建议查阅论文 [3]。

参考文献

[1] Michael F. Atiyah, Ian G. Macdonald, 《交换代数导论》，Addison-Wesley 出版公司，1969年。[2] L´ubom´ıra Balkov´a, Michelangelo Bucci, Alessandro De Luca, Ji˘r´ı Hladk´y, Svet- lana Puzynina, 《基于无限词的非周期伪随机数生成器》，理论计算机科学第647卷（2016年），第85–100页。[3] Val´erie Berth´e, Wolfgang Steiner, J¨org Thuswaldner, Reem Yassawi, 《态射序列的可识别性》。遍历理论与动力系统。第39卷，第11期（2019年），第2896–2931页。[4] Fabien Durand, 《形态序列一致递归的可判定性》，国际计算机科学基础杂志第24卷第01期（2013年），第123–146页。[5] Gabriele Fici, Svetlana Puzynina：《词上的阿贝尔组合学：综述》。计算机科学评论第47卷：100532（2023年）[6] Amy Glen, Jacques Justin, 《拟 Sturmian 词：综述》，*RAIRO*——理论信息学与应用，第43卷第3期（2009年），第403–442页。[7] Louis-Sebastien Guimond, Jan Patera, Ji˘r´i Patera, 《使用切投影序列组合随机数生成器》，捷克斯洛伐克物理学杂志第51卷（2001年），第305–311页。[8] Louis-S´ebastien Guimond, Jan Patera, Ji˘r´ı Patera, 《非周期伪随机数生成器的统计性质与实现》，应用数值数学第46卷第3–4期（2003年），第295–318页。[9] Jacques Justin, Laurent Vuillon, 《Sturmian 词与拟 Sturmian 词中的回返词》，*RAIRO*——理论信息学与应用，第34卷第5期（2000年），第343–356页。[10] Petr Kurka。《拓扑动力学与符号动力学》，Cours Sp´ecialis´es[《专业课程》丛书第11卷。法国数学会，巴黎，2003年。[11] Serge Lang, 《线性代数导论》，第二版，Springer，1986年。[12] M. Lothaire。《词上的代数组合学》。剑桥大学出版社，2002年。

[13] Brigitte Moss´e. 单词的幂与替换不动点的可识别性。理论计算机科学，第99卷，第2期（1992年），第327–334页。[14] Brigitte Moss´e. 替换的可识别性与自动序列的复杂度。法国数学会´会´数学´学报，第124卷，第2期（1996年），第329–346页。[15] 欧内斯特·温伯格，《代数课程》，《数学研究生教材》第56卷，美国数学会，2003年。